Indice Articoli Anno 1904

N°	Autore/i	Titolo	Pagine	Anno
1	FRATTINI G.	APPLICAZIONE DI UN CONCETTO NUOVO ALL'ANALISI INDETERMINATA (1/2)	1-15	1904
2	CIPOLLA M.	SU DI UNA CLASSE DI POLINOMI	24-33	1904
3	CARLINI L.	NUOVE CONSIDERAZIONI SOPRA LE PERMUTAZIONI	33-38	1904
4	TENCA L.	SUL PRIMO TEOREMA DI ROSANES	38-42	1904
5	CORRENTI V.	SOPRA LA FUNZIONE ALGEBRICA INTERA AD UNA VARIABILE CHE AMMETTE ZERI SEMPLICI E REALI	42-47	1904
6	BOZAL Y OBOJERO A.	SULLO IACOBIANO DI UN SISTEMA DI FORME	47-49	1904
7	OCCHIPINTI R.	SU ALCUNI DETERMINANTI CIRCOLANTI ORLATI	48-51	1904
8	FRATTINI G.	APPLICAZIONE DI UN CONCETTO NUOVO ALL'ANALISI INDETERMINATA (2/2)	57-73	1904
9	PADOA A.	UN NUOVO SISTEMA DI DEFINIZIONI PER LA GEOMETRIA EUCLIDEA	74-80	1904
10	CARDOSA-LAYNES G.	SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE CURVE PIANE	81-89	1904
11	BARISIEN E. N.	IPERBOLE D'APOLLONIO GENERALIZZATA	89-92	1904
12	CATTANEO P.	SOPRA UNA SPECIALE TRASFORMAZIONE QUADRATICA DEL PIANO	92-93	1904
13	LUGARO E.	INTORNO ALLE SINGOLARITA' DI UNA FUNZIONE DIPENDENTI DA QUELLE DI PIU' FUNZIONI DATE	105-123	1904
14	PIRONDINI G.	SULLE EVOLVENTI SUCCESSIVE DI UN CERCHIO	123-132	1904
15	SIBIRANI F.	ALCUNE APPLICAZIONI DI CALCOLO DELLE DIFFERENZE	132-135	1904
16	LAZZARINI M.	IL "LATINO SINE FLEXIONE" DEL PROF. PEANO	136-137	1904
17	TENCA L.	ESPRESSIONI SIMBOLICHE DEI COEFFICIENTI CHE COMPAIONO NELLO SVILUPPO DELLE FORME TERNARIE DI ORDINE QUALUNQUE CON POTENZE DI FORME TERNARIE LINEARI	138-142	1904
18	OCCHIPINTI R.	SU ALCUNI DETERMINANTI	142-143	1904
19	LORIA G.	OSSERVAZIONI SOPRA UN PROBLEMA DI GEOMETRIA DESCRITTIVA	143-144	1904
20	ANDREINI A.L.	INTORNO AD ALCUNI POLIEDRI SPECIALI AUTOCORRELATIVI	153-162	1904
21	CASTELLANO P.	BARICENTRO DI UN SISTEMA PIANO DI PUNTI CON MASSE IMMAGINARIE	163-185	1904
22	TRAVERSO N.	SU ALCUNE NOTEVOLI SUCCESSIONI DI NUMERI CIASCUNO DEI QUALI E' FUNZIONE LINEARE DI DUE PRECEDENTI	185-195	1904
23	PICCIOLI E.	CONTRIBUTO ALLA "GEOMETRIA RECENTE DEL TETRAEDRO"	201-207	1904
24	LEVI B.	SULL'UGUAGLIANZA DIRETTA ED INVERSA DELLE FIGURE	207-214	1904
25	GRILLI R.	SOPRA UNO DEI PRINCIPII INTORNO ALL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI	214-220	1904
26	MELFI MOLE' V.	SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE (1/3)	221-231	1904
27	BENEDETTI P.	DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA GENERALE SULLE LINEE	231-233	1904
28	LAZZERI G.	A PROPOSITO DELL'INCHIESTA FATTA DALL'ASSOCIAZIONE MATHESIS SULLA FUSIONE DELLA GEOMETRIA PIANA COLLA SOLIDA	233-240	1904
29	DE LONGCHAMPS G.	NOTA RELATIVA A QUELLA DEL DOTT. GIULIO CARDOSO LAYNES "SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE CURVE PIANE"	241-242	1904
30	FONTEBASSO P.A.	UN TEOREMA SUI LIMITI	242-243	1904
31	PESCI G.	SULLE OPERAZIONI FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI E, IN PARTICOLARE, SUL CALCOLO DELLE PARTI PROPORZIONALI NELL'USO DELLE ORDINARIE TAVOLE LOGARITMO-TRIGONOMETRICHE (1/3)	248-268	1904
32	MELFI MOLE' V.	SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE (2/3)	268-274	1904
33	GOMES TEIXEIRA F.	NOTA SULL'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI FAGNANO AGLI ARCHI DELLA LUMACA DI PASCAL	275-277	1904
34	DE LONGCHAMPS G.	NOTA SULLA TRASFORMAZIONE QUADRATICA DEL PIANO, DEL SIG. PAOLO CATTANEO	277-278	1904

APPLICAZIONE DI UN CONCETTO NUOVO

all'analisi indeterminata aritmetica e algebrica di 2° grado

con una nota sull'equazione di Pell

Il concetto al quale si allude nel titolo del presente lavoro è il medesimo che informa la mia nota: *di un gruppo continuo di trasformazioni decomponibili finitamente* (*) e l'altra: *la radice quadrata di un intero e un certo gruppo di trasformazioni*; (**) esso del resto verrà ripreso e ampiamente dichiarato in questo scritto, il cui fine è di mettere in luce quanto asserisco nella seconda delle citate mie note: che cioè quel concetto ha notabili applicazioni nella teorica delle forme quadratiche.

Il problema principale dell'analisi indeterminata di 2° grado (rappresentazione di un numero mediante una forma quadratica di due variabili intere) fu da lungo tempo risoluto, e con differenti metodi.(***) Peraltro tali metodi cessano di essere applicabili quando alla condizione di *numero intero* si sostituisce quella di *polinomio intero* rispetto a una lettera. Tanto è vero che, mentre l'equazione Pelliana

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

è sempre risolubile quando D è un numero intero e positivo, altrettanto non può dirsi quando D è un polinomio. E ammessa anche per

---

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, febb. 1903.

(**) *Periodico di matematica*, vol. XVIII, fasc. V, 1903.

(***) Una breve ed elementare risoluzione del problema si legge nel vol. XI di questo periodico, dove stabilisco i limiti da assegnare alle variabili contenute nelle formole che convertono una forma quadratica in sè stessa, se si vuole che le dette formole diano *tutte* le soluzioni del problema. La soluzione generale si fa così dipendere da un numero *finito* di soluzioni particolari.

dato la risolubilità dell' equazione di Pell, a chi volesse trattare il problema algebrico, rimarrebbe pur sempre da supplire al difetto di alcuni concetti che, ovvj nel campo dei numeri, perdono o mutano significato, se riferiti a polinomj. Gli è perciò che un modo di trattazione comune ai due casi, aritmetico e algebrico, non fu ch'io sappia escogitato finora; d'onde avviene che, mentre lo studio del caso aritmetico ben poco lascia più a desiderare, del caso algebrico quasi nulla si conosce. Ma se alle relazioni intuitive di grandezza fra numeri interi altre se ne sostituiscano operative o algoritmiche, e come tali significative nel più vasto campo de' polinomj; se per esempio alla comune idea di maggioranza o minoranza sottentri il concetto di maggiore o minor numero di operazioni occorrenti per ottenere questo o quell'effetto, ben potrà seguirne il desiderabile parallelismo tra i due casi, e per il modo di trattazione e per le conseguenze.

A questo disegno risponde appunto il concetto d' **indice** o numero massimo di fattori ne' quali è decomponibile un binomio irrazionale, dato sotto certe condizioni.

Considerando l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

alla risoluzione della quale si riduce sostanzialmente il problema su menzionato, ne ho distinto le soluzioni a seconda dei loro indici, che sono quelli dei relativi binomj irrazionali. Ho inoltre premesso che le soluzioni d'indice dato, o non superiore a un limite dato, si possono riguardare come note, in quanto la loro ricerca dipende da operazioni certe e in numero finito. Ammessa quindi la possibilità dell'equazione di Pell, ho potuto dimostrare che *tutte le soluzioni dell' equazione dipendono da quelle il cui indice non supera la metà dell'indice di una soluzione qualunque dell' equazione Pelliana*, e stabilire al tempo stesso la formola di tale dipendenza. Il problema è così risoluto; perchè le soluzioni particolari d' indice non superiore alla detta metà si possono sempre trovare, come fu premesso.

La distinzione tra soluzioni *ellittiche* e *iperboliche*, le prime d'indice nullo e le seconde d'indice differente da zero, mi diede altresì occasione a segnalare il teorema: *tutte soluzioni dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = N$ *si possono esprimere mediante le soluzioni ellittiche di un sistema di equazioni della stessa sua forma:* **il numero di tali equazioni è inoltre fisso e indipendente da** N.

Sorvolando sul resto, come si conviene in un cenno sommario circa il contenuto del lavoro, aggiungerò che esso è diviso in due capitoli, il primo de' quali è dedicato al caso aritmetico e il secondo al caso algebrico. Al lettore non isfuggirà la quasi perfetta identità tra i modi di trattazione dell'un caso e dell'altro.

CAPITOLO PRIMO

(Caso aritmetico)

---

1. Siano: D un numero intero e positivo; ω la parte intera della sua radice quadrata; r il resto dell'estrazione di tale radice.

Un binomio della forma $E + F\sqrt{D}$, dove E ed F indicano due numeri *razionali* e positivi, si dirà *iperbolico*, se la parte intera del quoziente $E : F$ non sarà minore di ω nè maggiore di $\omega + 1$. Quando ciò non accade, il binomio si dirà *ellittico*. La ragione di queste denominazioni sta in ciò, che quando di un binomio ellittico si conosce il *determinante*

$$E^2 - DF^2 = N,$$

si possono assegnare senz'altro due limitazioni pei valori della E e della F; mentre nessuna limitazione per la E e per la F può seguire dalla semplice conoscenza del determinante di un binomio iperbolico. Infatti, se N è positivo, si ha sempre: $E > \omega F$; talchè il carattere ellittico di un binomio a determinante positivo sarà definito dall'unica disuguaglianza: $E > (\omega + 1) F$, da cui, e dall'equazione $E^2 - DF^2 = N$:

$$F < \sqrt{\frac{N}{2\omega + 1 - r}}, \quad E < (\omega + 1 \sqrt{\frac{N}{2\omega + 1 - r}}.$$

Se invece N è negativo, $E < (\omega + 1)\, F$; e il carattere ellittico si tradurrà nell'unica disuguaglianza: $E < \omega F$, dalla quale:

$$F < \sqrt{\frac{-N}{r}}; \quad E < \omega \sqrt{\frac{-N}{r}}.$$

Deduzioni di egual natura non sarebbero possibili per binomj iperbolici di noto determinante.

Un binomio iperbolico od ellittico non muta specie se si moltiplica per un fattore razionale qualsiasi, perchè tale moltiplicazione non altera il rapporto $E : F$.

Due binomj con eguale *rapporto caratteristico* $E : F$ si stimeranno equivalenti. Posto $E : F = \mu$, a tutti i binomj il cui rapporto caratteristico è μ corrisponde un'*unica* sostituzione

$$\left(z, \frac{\mu z + D}{z + \mu}\right)$$

sulla variabile z. Il rapporto caratteristico μ è il *parametro*, al variar del quale si passa da una sostituzione a un'altra, e nel medesimo tempo da uno ad altro sistema di binomj equivalenti.

Un binomio $E + F\sqrt{D}$ ne ammette infiniti equivalenti $e + f\sqrt{D}$, ne' quali e ed f sono numeri interi.

I binomj iperbolici formano un gruppo, vale a dire: il prodotto di due binomj iperbolici è un binomio iperbolico. Lo stesso è a dirsi delle corrispondenti sostituzioni, il gruppo delle quali è inoltre isomorfo al gruppo dei binomj. Per la dimostrazione si vedano le già citate mie note, dove è altresì dimostrato il teorema: *la decomposizione di un binomio iperbolico in fattori* (binomj iperbolici) *ha sempre un termine;* e di più si stabilisce la regola per conoscere il massimo numero di fattori iperbolici in cui un dato binomio è decomponibile. Le possibili applicazioni dell'uno e dell'altra si vuole qui appresso brevemente indicare.

2. Il ricordato teorema della decomponibilità finita rende intanto ammissibile la **definizione: Indice** *di un binomio iperbolico è il massimo numero di fattori iperbolici ne' quali esso è decomponibile. Ai binomj ellittici si attribuirà* (per convenzione) *l'indice zero.*

La regola per determinare l'indice di un binomio, stabilita nella mia nota ai Lincei, è la seguente:

Se $r \geq \omega$, *l'indice del binomio* $E + F\sqrt{D}$ *è il minimo valore che bisogna dare all'esponente* k *affinchè il prodotto*

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k$$

non abbia carattere iperbolico. Se invece $r \leq \omega$, *esso è il minimo valore che bisogna dare a* k *affinchè non sia iperbolico il prodotto*

$$(E + F\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^k.$$

Infatti queste regole, ivi dimostrate pei binomj iperbolici, non cessano evidentemente di sussistere pei binomj ellittici o d'indice zero.

Se dunque $E + F\sqrt{D}$ è un binomio iperbolico d'indice k, l'una o l'altra delle espressioni

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k-1}$$
$$(E + F\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{k-1},$$

ridotta a forma di binomio irrazionale, apparterrà al gruppo dei binomj iperbolici; ma uscirà dal gruppo stesso, tostochè l'esponente $k - 1$ si muterà in k. Dico ora che all'uscita diverrà ellittica; che cioè, se

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k = E_0 + F_0\sqrt{D}$$

(mi limito al caso $r > \omega$; analoga dimostrazione varrebbe per gli altri), quest'ultimo sarà un binomio ellittico.

Basterà provare che tanto E_0 quanto F_0 sono numeri positivi. E poichè nell'ultima eguaglianza il primo membro è positivo, basterà dimostrare che è positivo il rapporto $E_0 : F_0$. Or bene: se si pone

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k-1} = E' + F'\sqrt{D}$$

(e con $E' + F'\sqrt{D}$ sarà da intendere un binomio iperbolico) si avrà:

$$(E' + F'\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega) = E_0 + F_0\sqrt{D};$$

d'onde:

$$\frac{E_0}{F_0} = \frac{DF' - \omega E'}{E' - \omega F'}.$$

Il denominatore di quest'ultima frazione è positivo, perchè il binomio $E' + F'\sqrt{D}$ è iperbolico; positivo è pure il suo numeratore, per essere

$$\frac{E'}{F'} \leq \omega + 1 < \frac{D}{\omega};$$

dunque il binomio $E_0 + F_0\sqrt{D}$ è ellittico, come dovevasi dimostrare.

Portando l'esponente di $\sqrt{D} - \omega$ o quello di $\omega + 1 - \sqrt{D}$ oltre il valore k, dopochè l'espressione

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k$$

o l'altra

$$(E + F\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^k$$

avranno prodotto il binomio ellittico $E_0 + F_0\sqrt{D}$, non si potrà mai più rientrare nel gruppo iperbolico; infatti, supponendo per esempio che il prodotto

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k+k'}$$

producesse il binomio iperbolico $E'' + F''\sqrt{D}$, dovrebbe aversi:

$$(E_0 + F_0\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k'} = E'' + F''\sqrt{D};$$

d'onde:

$$E_0 + F_0\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^{k'}(E'' + F''\sqrt{D}).$$

Ciò è impossibile perchè, essendo iperbolico il fattore

$$\frac{\sqrt{D} + \omega}{r},$$

il secondo membro è composto di fattori iperbolici, epperò iperbolico.

COROLLARIO. - *Qualunque sia il binomio* $E + F\sqrt{D}$, *si ha sempre, indicando con* $E_0 + F_0\sqrt{D}$ *un binomio ellittico:*

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{\text{ind.}(E+F\sqrt{D})} = E_0 + F_0\sqrt{D}, \quad (\text{se } r \geq \omega);$$
$$(E + F\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{\text{ind.}(E+F\sqrt{D})} = E_0 + F_0\sqrt{D}, \quad (\text{se } r \leq \omega).$$

3. Sia da risolvere l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

in numeri interi e positivi. Una soluzione (x, y) si dirà ellittica o iperbolica secondochè il corrispondente binomio $x + y\sqrt{D}$ sarà ellittico od iperbolico. Indice di una soluzione si dirà quello del corrispondente binomio: $x+y\sqrt{D}$.

Le soluzioni ellittiche dell'equazione possono considerarsi come note. Perchè le limitazioni della x e della y di una soluzione ellittica permettono di determinare queste incognite mediante un numero *finito* di tentativi.

Problema. - *Trovare tutte le soluzioni d'indice dato.*

Sia δ quest'indice, e si consideri la formola

$$(x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^\delta = x_0+y_0\sqrt{D}, \quad (\text{se } r \geq \omega);$$

oppure la formola

$$(x+y\sqrt{D})(\omega+1-\sqrt{D})^\delta = x_0+y_0\sqrt{D}, \quad (\text{se } r \leq \omega).$$

In entrambe $x_0+y_0\sqrt{D}$ indica un binomio ellittico; epperò (x_0, y_0) è da considerare come nota, quale soluzione ellittica dell'una o dell'altra delle equazioni

$$x^2-Dy^2 = N(-r)^\delta$$
$$x^2-Dy^2 = N(2\omega+1-r)^\delta.$$

Il problema è dunque risoluto, e i valori di x e di y si otterranno mediante l'una o l'altra delle uguaglianze:

$$x+y\sqrt{D} = (x_0+y_0\sqrt{D})\left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^\delta$$
$$x+y\sqrt{D} = (x_0+y_0\sqrt{D})\left(\frac{\omega+1+\sqrt{D}}{2\omega+1-r}\right)^\delta,$$

nei secondi membri delle quali tutto è noto.

Osservazione. - Non a tutte le (x_0, y_0), soluzioni dell'equazione

$$x^2-Dx^2 = N(-r)^\delta$$

o dell'altra

$$x^2-Dy^2 = N(2\omega+1-r)^\delta,$$

corrisponde una soluzione del problema; potendo darsi che la x e la y ricavate da taluna delle (x_0, y_0) non vengano intere. E però certo che il metodo indicato dà tutte le soluzioni d'indice δ, quando ve ne sono.

4. Risoluto così il problema di trovare tutte le soluzioni d'indice dato (e conseguentemente anche quelle d'indice non superiore a un limite dato), passo a stabilire per l'equazione

$$x^2-Dy^2 = N$$

una nuova e generale formola di risoluzione, che, avendo fondamento nel concetto d'indice, si potrà in appresso estendere al caso in cui D ed N sono polinomj.

Sia (x, y) una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

e sia (α, β) una soluzione qualsiasi dell'equazione Pelliana

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Se (x, y) è ellittica o d'indice zero, essa soddisferà evidentemente la condizione

$$\text{ind.}\,(x + y\sqrt{D}) < \frac{\text{ind.}\,(\alpha + \beta\sqrt{D})}{2}. \; (*)$$

Vediamo che cosa avverrà se (x, y) è iperbolica. In questo caso si consideri il prodotto

$$(x + y\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D})^z = u + v\sqrt{D}.$$

Mostrerò anzitutto che, dando a z i progressivi valori: $1, 2, \ldots$, si capiterà in un primo valore m al quale corrisponderà un rapporto $u : v$ negativo e con la parte intera eguale a $(-\omega)$. Infatti, sommando e sottraendo la precedente eguaglianza e la sua coniugata

$$(x - y\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^z = u - v\sqrt{D},$$

ricavando poscia il valore di $u : v$, viene:

$$u : v = \sqrt{D}\,\frac{\dfrac{x + y\sqrt{D}}{x - y\sqrt{D}}\left(\dfrac{\alpha - \beta\sqrt{D}}{\alpha + \beta\sqrt{D}}\right)^z + 1}{\dfrac{x + y\sqrt{D}}{x - y\sqrt{D}}\left(\dfrac{\alpha - \beta\sqrt{D}}{\alpha + \beta\sqrt{D}}\right)^z - 1}.$$

Col tendere di z all'infinito, questo secondo membro ha per limite

$$(-\sqrt{D}),$$

perchè il quoziente

$$\alpha - \beta\sqrt{D} : \alpha + \beta\sqrt{D}$$

è minore di 1; si avrà dunque:

$$\lim_{z=\infty} . \frac{u}{v} = -\sqrt{D}.$$

Vi sarà perciò un primo valore di z pel quale la parte intera di $u : v$ sarà eguale alla parte intera di $(-\sqrt{D})$, cioè a $(-\omega)$. Se m è quel valore di z, si ponga:

$$\text{(A)} \qquad (x + y\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D})^{m-1} = p + q\sqrt{D}.$$

(*) Si noti che, se (α, β) non è la soluzione evidente $(1, 0)$ dell'equazione Pelliana, il suo indice sarà differente da zero. Chè altrimenti: $\alpha > (\omega + 1)\beta$, o conseguentemente: $(2\omega + 1 - r)\beta^2 < 1$, il che è impossibile.

La parte intera di $p:q$ non sarà $(-\omega)$; sarà bensì $(-\omega)$ la parte intera del rapporto $u:v$ nel binomio

$$u+v\sqrt{D}=(p+q\sqrt{D})(\alpha-\beta\sqrt{D}).$$

Premesso ciò, se il binomio *positivo* $p+q\sqrt{D}$ non è iperbolico, indicando, con $\bar{p}$, $\bar{q}$, i moduli o valori assoluti di p e di q, il binomio

$$\bar{p}+\bar{q}\sqrt{D}$$

sarà ellittico. Infatti il suo rapporto caratteristico, non potendo differire da $p:q$ se non pel segno, non avrà certamente la parte intera eguale ad ω; chè altrimenti la parte intera di $p:q$ sarebbe $(-\omega)$ oppure ω. Ma delle due conseguenze la prima è inammissibile pel già detto; e la seconda perchè si è supposto che $p+q\sqrt{D}$ non sia iperbolico: si avrà dunque, se $p+q\sqrt{D}$ non è iperbolico:

$$\pm(x+y\sqrt{D})=(\alpha+\beta\sqrt{D})^{m-1}(\bar{p}\pm\bar{q}\sqrt{D}),$$

con $\bar{p}+\bar{q}\sqrt{D}$ ellittico, e conseguentemente:

$$\text{ind.}\,(\bar{p}+\bar{q}\sqrt{D})<\frac{\text{ind.}\,(\alpha+\beta\sqrt{D})}{2}.$$

Che se $p+q\sqrt{D}$ è iperbolico, si ponga:

$$(p+q\sqrt{D})(\alpha-\beta\sqrt{D})=u+v\sqrt{D}=p_1-q_1\sqrt{D}.$$

La parte intera di $p_1:q_1$ sarà ω, perchè quella di $u:v$ era $(-\omega)$; i binomj

$$p+q\sqrt{D},\qquad \pm(p_1+q_1\sqrt{D})$$

saranno perciò iperbolici, e di più:

$$\alpha+\beta\sqrt{D}=\rho\,(p+q\sqrt{D})\,(p_1+q_1\sqrt{D}),$$

dove ρ indica un certo fattore razionale. L'indice del binomio $\alpha+\beta\sqrt{D}$ (massimo numero possibile di fattori iperbolici del binomio stesso) non può essere minore della somma degl'indici dei due fattori irrazionali che compariscono nel 2° membro della precedente eguaglianza; d'onde le relazioni:

$$\text{ind.}\,(\alpha+\beta\sqrt{D})\geq 2\,\text{ind.}\,(p+q\sqrt{D});$$
$$\text{ind.}\,(\alpha+\beta\sqrt{D})\geq 2\,\text{ind.}\pm(p_1+q_1\sqrt{D});$$

valevole la prima, se

$$\text{ind.}\,(p+q\sqrt{D})\leq\text{ind.}\pm(p_1+q_1\sqrt{D});$$

e la seconda, se

$$\text{ind.}\pm(p_1+q_1\sqrt{D})\leq\text{ind.}\,(p+q\sqrt{D}).$$

Nella prima ipotesi, la (A) produce:

$$(x+y\sqrt{D})=(\alpha+\beta\sqrt{D})^{m-1}(p+q\sqrt{D}).$$

Nella seconda ipotesi, ponendo in luogo di $p+q\sqrt{D}$ l'equivalente prodotto

$$(\alpha+\beta\sqrt{D})(p_1-q_1\sqrt{D}),$$

viene:

$$x+y\sqrt{D}=(\alpha+\beta\sqrt{D})^m(p_1-q_1\sqrt{D})$$

o anche:

$$\pm(x+y\sqrt{D})=(\alpha+\beta\sqrt{D})^m(\overline{p_1}-\overline{q_1}\sqrt{D}).$$

Riepilogando le deduzioni relative ai differenti casi, si può dunque enunciare il teorema: *Se (α, β) è una soluzione qualunque dell'equazione di Pell, tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2-Dy^2=N$$

sono date dalla formola

$$\text{(B)} \qquad x+y\sqrt{D}=(\alpha+\beta\sqrt{D})^k(x'\pm y'\sqrt{D}), \text{ (*)}$$

il secondo membro della quale va esteso solamente a quelle soluzioni particolari (x', y') *il cui* **indice** *non supera la metà dell'indice della soluzione dell'equazione Pelliana.*

E poichè le soluzioni d'indice non superiore a un limite dato si sanno trovare, l'equazione $x^2-Dy^2=N$ è risoluta.

5. Si noti il teorema: *Tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2-Dy^2=N$$

sono esprimibili mediante una soluzione qualunque dell'equazione Pelliana e mediante le soluzioni **ellittiche** *di un sistema finito di equazioni note,* **il numero delle quali è fisso e indipendente da N.**

Dicasi infatti η la parte intera del quoziente

$$\frac{\text{ind.}(\alpha+\beta\sqrt{D})}{2}.$$

Si rammenti inoltre che una soluzione (x', y'), se d'indice i, è data dalla formola

$$x'+y'\sqrt{D}=\left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^i(x_0+y_0\sqrt{D})$$

o dall'altra

$$x'+y'\sqrt{D}=\left(\frac{\omega+1-\sqrt{D}}{2\omega+1-r}\right)^i(x_0+y_0\sqrt{D}),$$

dove per (x_0, y_0) è da intendere una soluzione ellittica dell'equazione

$$x^2-Dy^2=N(-r)^i$$

o dell'altra

$$x^2-Dy^2=N(2\omega+1-r)^i.$$

(*) Si è soppresso il doppio segno al 1° membro, perchè inutile.

Sostituendo nella (B) e rammentando che η è il limite superiore per l'indice delle (x', y') che ivi compariscono, si ottiene:

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^k \left(\frac{\pm\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

per il caso: $r \geq \omega$, e

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^k \left(\frac{\omega + 1 \mp \sqrt{D}}{2\omega + 1 - r}\right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

per il caso: $r \leq \omega$. E l'una o l'altra di queste formole, da estendersi a tutti i valori: $0, 1, 2, \ldots \eta$ della i, e per ciascun valore di i a tutti i possibili valori: $0, 1, 2, \ldots$ di k, darà tutte le soluzioni dell'equazione proposta, quali soluzioni si vedono così espresse per mezzo della soluzione Pelliana (α, β) e delle soluzioni *ellittiche* dell'equazioni del sistema

$$\begin{aligned}
x^2 - Dy^2 &= N \\
x^2 - Dy^2 &= -Nr \\
x^2 - Dy^2 &= Nr^2 \\
&\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots \\
x^2 - Dy^2 &= (-1)^\eta Nr^\eta,
\end{aligned}$$

oppure dell'altro:

$$\begin{aligned}
x^2 - Dy^2 &= N \\
x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r) \\
x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r)^2 \\
&\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots \\
x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r)^\eta.
\end{aligned}$$

In ambedue il numero delle equazioni è $\eta + 1$, epperò indipendente da N.

A ciascuno dei precedenti due sistemi darò il nome di *sistema risolvente*, in quanto dalle sue soluzioni ellittiche, epperò note, dipende la risoluzione dell'equazione proposta.

6. Esempio. - Per risolvere l'equazione

$$x^2 - 46y^2 = N$$

$(\omega = 6,\ r = 10;\ r > \omega)$, si cercherà anzitutto l'indice di una soluzione dell'equazione $x^2 - 46y^2 = 1$, per esempio l'indice della soluzione minima (24335, 3588), e ciò si farà mediante l'algoritmo:

$$\begin{aligned}
(24335 + 3588\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 19038 + 2807\sqrt{46} \\
(19038 + 2807\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 14894 + 2196\sqrt{46}\ (*) \\
(7447 + 1048\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 5826 + 859\sqrt{46} \\
(5826 + 859\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 4558 + 263\sqrt{46} \\
(2279 + 336\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 1782 + 263\sqrt{46} \\
(1782 + 263\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 1406 + 204\sqrt{46} \\
(703 + 102\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 474 + 91\sqrt{46}.
\end{aligned}$$

(*) Si è semplificato per 2 il rapporto 14894 : 2196, come è lecito evidentemente.

Quest'ultimo binomio è ellittico: perciò 7 è l'indice cercato, e inoltre: $\eta=3$. Il sistema risolvente è dunque composto delle 4 equazioni:

$$x^2-46y^2=N$$
$$x^2-46y^2=-10N$$
$$x^2-46y^2=100N$$
$$x^2-46y^2=-1000N.$$

Le soluzioni ellittiche di ciascuna sono poi limitate dalla condizione $x>7y$ o dall'altra: $x<6y$, secondo che il 2° membro è positivo o negativo. Talchè, se N è positivo, i limiti per la y delle soluzioni ellittiche delle 4 consecutive equazioni saranno ordinatamente:

$$\sqrt{\frac{N}{3}} \quad \sqrt{N} \quad 10\sqrt{\frac{N}{3}} \quad 10\sqrt{N},$$

e saranno invece

$$\sqrt{\frac{-N}{10}} \quad \sqrt{\frac{-10N}{3}} \quad \sqrt{-10N} \quad 10\sqrt{\frac{-10N}{3}},$$

se N è negativo.

7. Il maggiore o minor numero di calcoli occorrenti per trovare le soluzioni ellittiche delle $\eta+1$ equazioni del sistema risolvente non avrebbe grande importanza per lo scopo del presente capitolo, che è di preparare la via alla trattazione del caso algebrico: solo importa che il numero di que' calcoli sia finito, com'è difatti. Non sarà tuttavia qui inutile una breve digressione che valga a mettere in chiaro il valore pratico dell'esposta risoluzione.

Quando l'indice della soluzione Pelliana è grande, tale è altresì il numero delle equazioni del sistema risolvente. E allora i limiti delle y_0, crescendo notabilmente di valore ad ogni passaggio da un'equazione alla susseguente del sistema stesso, potrebbero divenire tanto grandi, da rendere non consigliabili i numerosi tentativi che occorrerebbero per la ricerca delle y_0. Voglio ora mostrare come si possono assegnare alla y_0 delle nuove limitazioni superiori a contrasto con le prime, che cioè impiccoliscono all'ingrandire di quelle, e come ciò semplifichi la ricerca di talune soluzioni ellittiche del sistema risolvente, che sono le sole veramente indispensabili per la risoluzione dell'equazione proposta.

Dissi già che, posta la condizione

$$\text{ind.}\ (x'+y'\sqrt{D}) \leq \eta,$$

tutte le soluzioni (x, y) dell'equazione $x^2-Dy^2=N$ sono contenute nella formola

$$x+y\sqrt{D}=(\alpha+\beta\sqrt{D})^k(x'\pm y'\sqrt{D}).$$

Ma dal mio opuscolo "dell'analisi indeterminata di 2° grado" (*) si apprende che la formola stessa darebbe tutte le soluzioni, e cia-

(*) *Periodico di matematica*, anno VI, fasc. VI; anno VII, fasc. I e seg.

scuna una volta sola, anche quando (x', y') fosse invece soggetta alla condizione:

$$x' + y'\sqrt{D} \leq \sqrt{N(\alpha + \beta\sqrt{D})}.$$

Gli è che la prima condizione è conseguenza di questa (v. la nota a pag. 14); talchè nessuna soluzione si potrà perdere qualora per le (x', y') si ritengano ad un tempo ambedue le condizioni:

$$\text{ind.}\,(x' + y'\sqrt{D}) \leq \eta,$$
$$x' + y'\sqrt{D} \leq \sqrt{N(\alpha + \beta\sqrt{D})}.$$

Stabilendo di ciò fare, e supponendo dapprima $r > \omega$, si ripigli la formola

$$(x' + y'\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^i = x_0 + y_0\sqrt{D},$$

nella quale $i \leq \eta$ è l'indice del binomio $x' + y'\sqrt{D}$ e (x_0, y_0) soluzione ellittica dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^i.$$

Se il secondo membro di questa è positivo, il carattere ellittico del binomio $x_0+y_0\sqrt{D}$ sarà espresso dalla disuguaglianza: $x_0 > (\omega+1)y_0$; da cui:

$$x_0 + y_0\sqrt{D} > y_0(\omega + 1 + \sqrt{D}).$$

Conseguentemente:

$$(x' + y'\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^i > y_0(\omega + 1 + \sqrt{D}),$$

che, combinata con

$$\sqrt{N(\alpha + \beta\sqrt{D})} \geq x' + y'\sqrt{D},$$

produce:

$$y_0 < \frac{\sqrt{N(\alpha + \beta\sqrt{D})}}{\omega + 1 + \sqrt{D}}(\sqrt{D} - \omega)^i <$$
$$< \sqrt{N}\frac{\sqrt{2\alpha}\,(\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}}.$$

D'altra parte:

$$y_0 < \sqrt{N}\sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}},$$

e ciò a cagione del carattere ellittico di y_0; dunque y_0 dev'essere minore di ambedue le limitazioni:

$$\sqrt{N}\sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}} \quad ; \quad \sqrt{N}\frac{\sqrt{2\alpha}\,(\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}}.$$

Alla stessa conclusione si giunge quando il secondo membro dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^i$$

è negativo; ed ecco in qual modo: Poichè

$$(x' + y'\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^i = x_0 + y_0\sqrt{D},$$

e inoltre i è l'indice del binomio $x' + y'\sqrt{D}$, è evidente che $x_0 + y_0\sqrt{D}$ dovrà considerarsi come prodotto di un binomio iperbolico $X + Y\sqrt{D}$ a determinante positivo pel fattore $\sqrt{D} - \omega$; che cioè:

$$x_0 + y_0\sqrt{D} = (X + Y\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega),$$

e insieme:

$$\frac{X}{Y} = \frac{Dy_0 + \omega x_0}{x_0 + \omega y_0} \leq \omega + 1;$$

dalla quale:

$$x_0 \geq (r - \omega)\, y_0$$

e conseguentemente:

$$x_0 + y_0\sqrt{D} \geq (r - \omega + \sqrt{D})\, y_0 .$$

Perciò, seguitando come sopra:

$$y_0 < \sqrt{N}\, \frac{\sqrt{2\alpha}\,(\sqrt{D} - \omega)^i}{r - \omega + \sqrt{D}} = \sqrt{N}\, \frac{\sqrt{2\alpha}\,(\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}} .$$

Il carattere ellittico di y_0, espresso dalla disuguaglianza: $x_0 < \omega y_0$, darà inoltre:

$$y_0 < \sqrt{N}\, \sqrt{r^{i-1}} < \sqrt{N} \sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}} .$$

Osservando le due limitazioni superiori ottenute per y_0, che sono:

$$\sqrt{N} \sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}} \quad \text{e} \quad \sqrt{N}\, \frac{\sqrt{2\alpha}\,(\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}},$$

si vede che l'accrescimento di i (corrispondente al passaggio da una equazione del sistema risolvente ad altra più inoltrata) produce in esse effetti contrarj, in quanto fa crescere la prima limitazione e nel medesimo tempo diminuire la seconda. Ne avviene che per valori di i non molto grandi la limitazione ascendente (che ne' calcoli è la più incomoda) prevarrà sulla discendente, e divenuta per tal modo inutile, si potrà abbandonare. Rimarrà l'altra, che però diviene sempre meno elevata ed incomoda a mano a mano che i calcoli progrediscono.

Riflessioni consimili si adattano al caso: $r \leq \omega$. Partendo dalla formola

$$(x' + y'\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^i = x_0 + y_0\sqrt{D},$$

e ragionando come pel caso: $r < \omega$, si otterrebbero per y_0 le limitazioni:

$$\sqrt{N} \sqrt{\frac{(2\omega + 1 - r)^i}{r}}; \qquad \sqrt{N}\, \frac{\sqrt{2\alpha}\,(\omega + 1 - \sqrt{D})^{i-1}}{\sqrt{D} + \omega},$$

come il lettore può facilmente ritrovare.

NOTA

Per dimostrare che la condizione

$$\text{ind.}\ (x' + y'\sqrt{D}) \leq \eta$$

è conseguenza dell'altra

$$x' + y'\sqrt{D} \leq \sqrt{\overline{N}(\alpha + \beta\sqrt{D})},$$

si può far ricorso al seguente principio di facile verificazione: di due binomj $x + y\sqrt{D}$ con egual determinante *positivo,* maggiore è quello che ha minor rapporto caratteristico; di due binomj con egual determinante *negativo,* maggiore è quello che ha maggior rapporto caratteristico; e reciprocamente.

Sia pertanto $r \geq \omega$, e supponendo

$$x' + y'\sqrt{D} \leq \sqrt{\overline{N}(\alpha + \beta\sqrt{D})},$$

si dica i l'indice del binomio $x' + y'\sqrt{D}$. Considerando le due espressioni

$$(x' + y'\sqrt{D})^2\ (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1};\quad \overline{N}\, r^{i-1}\,(\omega + \sqrt{D}),$$

si noti anzitutto che esse sono entrambe iperboliche. Per la seconda ciò è evidente; in quanto alla prima, basta osservare che, essendo i l'indice del binomio $x' + y'\sqrt{D}$, quello del suo quadrato sarà almeno $2i$.

Dette espressioni hanno inoltre lo stesso determinante negativo

$$-\,N^2\, r^{2i-1};$$

dunque, poichè il rapporto caratteristico della 1ª è ω o maggiore di ω, mentre quello della 2ª è appunto ω, la 1ª espressione avrà maggior rapporto caratteristico e sarà quindi maggiore della 2ª, ossia:

$$(x' + y'\sqrt{D})^2\ (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1} \geq \overline{N}\, r^{i-1}\,(\omega + \sqrt{D}).$$

Ma per l'ipotesi:

$$\overline{N}(\alpha + \beta\sqrt{D}) \geq (x' + y'\sqrt{D})^2;$$

dunque:

$$(\alpha + \beta\sqrt{D})\ (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1} \geq r^{i-1}\,(\omega + \sqrt{D}).$$

Qui i membri hanno lo stesso determinante negativo: $-r^{2i-1}$; perciò il maggiore dei due avrà maggior rapporto caratteristico. Ma il rapporto caratteristico del 2° membro è ω; dunque il rapporto caratteristico del 1° sarà maggiore di ω. Ciò prova che l'espressione

$$(\alpha + \beta\sqrt{D})\ (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1}$$

è iperbolica: si avrà dunque, rammentando la regola per la ricerca dell'indice, citata al n. 2:

$$\text{ind.}\ (\alpha + \beta\sqrt{D}) > 2i - 1,$$

ovvero:

$$\text{ind.}\ (\alpha + \beta\sqrt{D}) \geq 2i;$$

d'onde:
$$i = \text{ind.}\,(x' + y'\sqrt{D}) \leq \frac{\text{ind}\,(\alpha + \beta\sqrt{D})}{2}.$$

Analogo ragionamento per $r \leq \omega$. Basterà prender le mosse dalle due espressioni:
$$(x' + y'\sqrt{D})^2\,(\omega + 1 - \sqrt{D})^{2i-1};\ \overline{N}\,(2\omega + 1 - r)^{i-1}\,(\omega + 1 + \sqrt{D}).$$

(Continua) G. FRATTINI.

SUL QUADRANGOLO SFERICO INSCRITTIBILE

(Esercizi di Trigonometria sferica)

1. Sia ABCD un quadrangolo sferico convesso inscrittibile in un circolo minore di una sfera (*), e si indichino, rispettivamente,

con a, b, c, d le misure circolari degli archi di circolo massimo AB, BC, CD, DA (**).

con (ab), (bc), (cd), (da) le misure degli angoli formati da questi archi,

con e, f le misure degli archi di circolo massimo BD, AC.

Si consideri inoltre il quadrilatero piano formato dalle corde degli archi precedenti, e, presa per unità il raggio della sfera, si indichino, rispettivamente,

con a_1, b_1, c_1, d_1 le misure delle corde AB, BC, CD, DA,

con $(a_1b_1), (b_1c_1), (c_1d_1), (d_1a_1)$ le misure degli angoli formati da queste corde,

con e_1, f_1 le misure delle corde BD e AC.

E si convenga anche, per brevità, che, quando il numero d'ordine di una formula è chiuso fra parentesi quadre, si debbano sottintendere anche le altre tre formule che si deducono da quella indicata con sostituzioni circolari fra a, b, c, d, fra $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$

2. Si osservi subito che si ha

$$[1]\quad a_1 = 2\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\,,\qquad (2)\quad e_1 = 2\text{sen}\,\tfrac{1}{2}e\,,\qquad (3)\quad f_1 = 2\text{sen}\,\tfrac{1}{2}f\,,$$

$$\cos(a_1b_1) = \text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}b + \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos(ab), \tag{4}$$

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos(a_1b_1)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}}, \tag{5}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b) + \cos(a_1b_1)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}}. \tag{6}$$

Infatti: le [1], (2), (3) sono evidenti; per dimostrare le [4] si potrebbe ricorrere a semplici considerazioni geometriche, ma basta anche osservare che

$$\cos(a_1b_1) = \frac{a_1^2 + b_1^2 - f_1^2}{2\,a_1b_1} = \frac{\text{sen}^2\frac{1}{2}a + \text{sen}^2\frac{1}{2}b - \text{sen}^2\frac{1}{2}f}{2\text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b},$$

che

$$\cos(ab) = \frac{\cos f - \cos a\cos b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b} = \frac{\text{sen}^2\frac{1}{2}a + \text{sen}^2\frac{1}{2}b - \text{sen}^2\frac{1}{2}f - 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}a\,\text{sen}^2\frac{1}{2}b}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

e sostituire; le [5] e le [6] poi si deducono immediatamente dalle [4].

(*) Si prega il lettore di fare la figura.

(**) Fra gli archi di circolo massimo che hanno per estremi due punti dati, come fra gli angoli formati da due archi di circolo massimo aventi un estremo comune, s'intenderà sempre di considerare quello che è minore di π.

3. Ciò posto, siccome nel quadrangolo piano ABCD si ha

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2}{2(a_1 b_1 + c_1 d_1)},$$

e quindi, per le [1],

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} d}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d)},$$

da cui

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{\cos \frac{1}{2}(c+d) \cos \frac{1}{2}(c-d) - \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d)},$$

dalle [5] e dalle [6] si avrà facilmente

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{[\cos \frac{1}{2}(a-b) + \cos \frac{1}{2}(c-d)][\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2}(c+d)]}{4(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{[\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}(c+d)][\cos \frac{1}{2}(c-d) - \cos \frac{1}{2}(a+b)]}{4(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}.$$

E di qui, ponendo

(7) $a + b + c + d = 2s$, da cui [8] $-a + b + c + d = 2(s-a)$,

e osservando che

$$\cos \tfrac{1}{2}(s-a-b) = \cos \tfrac{1}{2}(s-c-d), \qquad [9]$$

si avrà

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(s-a-c) \cos \frac{1}{2}(s-a-d) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-b)}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}, \qquad [10]$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2}(s-a-b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-d)}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}, \qquad [11]$$

e quindi anche

$$\tan \tfrac{1}{2}(ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(s-a-c) \cos \frac{1}{2}(s-a-d) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-b)}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2}(s-a-b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-d)}}. \qquad [12]$$

4. Dalle [9] e dalle [10], ponendo

$$n = 4\sqrt{\cos \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2}(s-a-b) \cos \tfrac{1}{2}(s-a-c) \cos \tfrac{1}{2}(s-a-d) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(s-a) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(s-b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(s-c) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(s-d)}, \qquad (13)$$

si ricava facilmente

$$\operatorname{sen}(ab) = \frac{n}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}, \qquad [14]$$

da cui

$$\operatorname{sen}(ab) = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} d + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c} = \operatorname{sen}(bc) \frac{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} a + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d}, \qquad [15]$$

ed anche

$$\operatorname{sen}(ab) \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b = \operatorname{sen}(cd) \cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} d. \qquad [16]$$

5. Se si suppone $d = 0$, ognuna delle formule precedenti deve ridursi ad una formula relativa a un triangolo sferico qualunque, e si può facilmente vedere quali siano queste formule colle seguenti considerazioni.

Quando il punto D coincide col punto A, il quadrangolo sferico ABCD si riduce al triangolo sferico ABC; per cui, indicando con $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma', s'$ le misure dei lati BC, CA, AB, degli angoli rispettivamente opposti e del semiperimetro, basterà, nelle formule precedenti, in luogo di

$$a,\quad b,\quad c,\quad d\quad (ab),\quad (bc),\quad s,$$

porre rispettivamente

$$c',\quad a',\quad b'\quad 0\quad \beta',\quad \gamma',\quad s';$$

resta quindi a vedersi soltanto che cosa si debba sostituire a (cd) e a (da). Per ciò si immagini il circolo massimo tangente in A al circolo minore nel quale è inscritto il quadrangolo, e si indichi con AT_B un arco di questo circolo massimo che sia nella semisfera (determinata dal lato AC) nella quale si trova il vertice B, e con AT_C un arco dello stesso circolo che sia nell'altra semisfera; è chiaro intanto che gli angoli (cd) e (da) tenderanno, rispettivamente, agli angoli CAT_B e BAT_C. Ciò posto, se si indica con P il centro dell'accennato circolo circoscritto, si ha

$$CAT_B = CAP + \frac{\pi}{2}, \qquad BAT_C = BAP + \frac{\pi}{2},$$

ma da un noto teorema di *Geom. Elem.* (*) si ha pure

$$2CAP = \alpha' + \gamma' - \beta', \qquad 2BAP = \alpha' + \beta' - \gamma',$$

quindi sarà

$$CAT_B = \frac{\alpha' + \gamma' - \beta'}{2} + \frac{\pi}{2}, \qquad BAT_C = \frac{\alpha' + \beta' - \gamma'}{2} + \frac{\pi}{2}:$$

per cui, se si indica con ε' l'eccesso sferico del triangolo ABC, basterà, nella ipotesi considerata, in luogo di

$$(cd), \qquad (da),$$

porre rispettivamente

$$\pi - \left(\beta' - \frac{\varepsilon'}{2}\right), \qquad \pi - \left(\gamma' - \frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Facendo ora tutte queste sostituzioni, delle quattro formule rappresentate dalla [10], le prime due si riducono alle note formule che dànno $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta'$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma'$ in funzione di a', b', c' e di $s'-a'$, $s'-b'$, $s'-c'$, e la terza e la quarta si riducono a

$$\cos\left(\frac{\beta'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s' \cos\frac{1}{2}(s'-a') \operatorname{sen}\frac{1}{2}(s'-b') \operatorname{sen}\frac{1}{2}(s'-c')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' \cos\frac{1}{2}b' \operatorname{sen}\frac{1}{2}c'}}$$

$$\cos\left(\frac{\gamma'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}s' \cos\frac{1}{2}(s'-a') \cos\frac{1}{2}(s'-b') \operatorname{sen}\frac{1}{2}(s'-c')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' \operatorname{sen}\frac{1}{2}b' \cos\frac{1}{2}c'}}$$

formule pure note (**). Risultati analoghi si deducono dalle [11] e dalle [12].

Se poi si indica con n' il seno del triedro corrispondente al triangolo ABC, che si sa essere dato dalla eguaglianza

$$n' = \sqrt{\operatorname{sen}s' \operatorname{sen}(s'-a') \operatorname{sen}(s'-b') \operatorname{sen}(s'-c')},$$

si vede che n si riduce precisamente ad n'; e quindi delle quattro formule rappresentate dalla [14] le prime due si riducono a formule note, e la terza e la quarta si riducono a

$$\operatorname{sen}\left(\beta' - \frac{\varepsilon'}{2}\right) = \frac{n'}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' \cos\frac{1}{2}b' \operatorname{sen}\frac{1}{2}c'}, \qquad \operatorname{sen}\left(\gamma' - \frac{\varepsilon'}{2}\right) = \frac{n'}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' \operatorname{sen}\frac{1}{2}b' \cos\frac{1}{2}c'}$$

formule pure note e che si possono facilmente ricavare dalla formula del CAGNOLI(***), che dà l'eccesso sferico in funzione di tre lati. E a formule note, o facili a dimostrarsi, si riducono tutte quelle che sono rappresentate dalla [15] e dalla [16]; in particolare: la prima del gruppo rappresentato dalla [15] si riduce alla nota proporzionalità fra i seni dei lati e i seni degli angoli opposti.

(*) V. BALTZER, *Die Elemente der Mathematik*. Leipzig, 1874. Vol. II, pag. 175.
(**) V. SERRET, *Traité de Trigonométrie*. Paris, 1888, pag. 160.
(***) V. CAGNOLI, *Trigonometria piana e sferica*. Bologna 1804, pag. 306.

Osservazione I. — Si noti che delle formule [10], [11] e [12] (a differenza di quanto avviene nel caso particolare del triangolo), le [12] soltanto sono logaritmiche.

Osservazione II. — Da quanto si è dimostrato in principio del § risulta che l'angolo formato dall'arco tangente AT_B coll'arco AC è uguale al supplemento dell'angolo ABC, diminuito, quest'ultimo, della metà dell'eccesso sferico ε' del triangolo ABC; nel caso del triangolo piano questo eccesso ε' è zero, e si ha uno dei teoremi fondamentali della *Geom. Elem.*

Osservazione III. — Risulta pure (come poteva prevedersi) che per $d=0$, si ha

$$(cd)+(da)=\pi+\alpha'.$$

6. Si indichi con ε l'eccesso sferico del quadrangolo, ossia si ponga

$$(ab)+(bc)+(cd)+(da)-2\pi=\varepsilon\,, \tag{17}$$

siccome dalla *Geom. Elem.* si sa che (*)

$$(ab)+(cd)=(bc)+(da)\,, \tag{18}$$

sarà

$$(ab)+(cd)=(bc)+(da)=\pi+\tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \tag{19}$$

da cui

$$\frac{\varepsilon}{4}=\tfrac{1}{2}[(ab)+(cd)]-\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Ora, per mezzo della [10] e della [11] si ha facilmente

$$\cos\tfrac{1}{2}[(ab)+(cd)]=\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a-b)-\cos\frac{1}{2}(s-a-c)\cos\frac{1}{2}(s-a-d)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b+\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,,$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}[(ab)+(cd)]=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-b)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-d)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b+\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a-b)\cos\frac{1}{2}(s-a-c)\cos\frac{1}{2}(s-a-d)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,,$$

quindi, essendo

$$\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}(s-a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(s-a-c)\cos\tfrac{1}{2}(s-a-d)=-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d,$$
$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-b)+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-c)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-d)=+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d,$$

si avrà

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,, \tag{21}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a-b)\cos\frac{1}{2}(s-a-c)\cos\frac{1}{2}(s-a-d)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,, \tag{22}$$

da cui anche

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a-b)\cos\frac{1}{2}(s-a-c)\cos\frac{1}{2}(s-a-d)}}\,. \tag{23}$$

Dalla (21) e dalla (22), ricordando la (13), si ha pure la formula notevole

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{n}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}\,. \tag{24}$$

(*) V. Lazzeri e Bassani, *Elementi di Geometria*. Livorno 1891, pag. 219.

Osservazione I. — Se si suppone $d=0$, la (21) e la (22) si riducono a formule note (*); la (23) e la (24) diventano rispettivamente, la formula del Lhuilier (*) e la formula del Cagnoli, già citata.

Osservazione II. — Nel caso del triangolo, quando si vogliono calcolare tutti e tre gli angoli dati i tre lati, esiste un metodo, basato sulla formula del Lhuilier, il quale cogli stessi quattro logaritmi dà il modo di calcolare tutti e quattro gli angoli

$$\frac{\varepsilon'}{4}, \quad \frac{\alpha'}{2}-\frac{\varepsilon'}{4}, \quad \frac{\beta'}{2}-\frac{\varepsilon'}{4}, \quad \frac{\gamma'}{2}-\frac{\varepsilon'}{4},$$

e questo procedimento è molto opportuno, perchè si presta alla verificazione

$$\frac{\varepsilon'}{4}+\left(\frac{\alpha'}{2}-\frac{\varepsilon'}{4}\right)+\left(\frac{\beta'}{2}-\frac{\varepsilon'}{4}\right)+\left(\frac{\gamma'}{2}-\frac{\varepsilon'}{4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

analoga a quella che, nella stessa ipotesi si ha per un triangolo piano. Nel caso del quadrilatero si ha già una formula di verificazione nella (18), ma si può osservare che un vantaggio analogo a quello ora accennato offrono le quattro formule rappresentate dalla [12] assieme alla (23), perchè queste cinque formule permettono di calcolare tutte e cinque gli angoli

$$\frac{(ab)}{2}, \quad \frac{(bc)}{2}, \quad \frac{(cd)}{2}, \quad \frac{(da)}{2}, \quad \frac{\varepsilon}{4}$$

cogli stessi otto logaritmi, e questi cinque angoli, in forza della (18) e della (20), devono verificare la relazione

$$\frac{(ab)}{2}+\frac{(bc)}{2}+\frac{(cd)}{2}+\frac{(da)}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\pi.$$

Osservazione III. — Se il quadrangolo, oltre essere inscrittibile, è anche circoscrittibile, essendo allora (**)

$$a+c=b+d,$$

dalla (23) si ricava

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{1}{2}b\tan\tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}d}. \tag{25}$$

7. Si indichi con R la misura del raggio del circolo circoscritto al quadrilatero: se si considera il triangolo ABC, si ha, com'è noto (***),

$$\operatorname{ctn} R=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}f}\operatorname{sen}(ab):$$

è pure noto che nel quadrilatero piano ABCD si ha

$$f_1^2=\frac{(a_1 d_1+b_1 c_1)(a_1 c_1+b_1 d_1)}{a_1 b_1+c_1 d_1},$$

quindi, per le [17], per la (3) e per la prima della [14] si avrà facilmente

$$\tan R=\frac{2}{n}\sqrt{(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d)(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d)(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c)}. \tag{26}$$

Osservazione. — Ed anche questa formula, quando si supponga $d=0$, si riduce ad una formula nota (****).

(*) V. Serret, l. c. pagg. 159 e 160.
(**) V. Lazzeri e Bassani, l. c. pag. 220.
(***) V. Serret, l. c. pag. 162.
(****) V. Baltzer, l. c. pag. 323.

8. Dalle [10] e dalle [11], ricavando, col procedimento seguito nel § 6, i valori di

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} [(ab) \mp (bc)] \quad \text{e di} \quad \cos \tfrac{1}{2} [(ab) \pm (bc)]$$

e osservando che

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-a-d)+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-c)\cos\tfrac{1}{2}(s-a-b)=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(c-a)+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d,$$
$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-a-d)-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-c)\cos\tfrac{1}{2}(s-a-b)=\cos\tfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(c-a),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-d)-\cos\tfrac{1}{2}(s-a-c)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-b)=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(c+a)-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}d,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-d)+\cos\tfrac{1}{2}(s-a-c)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(s-b)=\cos\tfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(c+a),$$

si ricava

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[(ab)+(bc)]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[(ad)+(dc)]}=\frac{\cos\frac{1}{2}d\,[\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(c-a)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}d]}{\cos\frac{1}{2}b\,[\operatorname{sen}\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}(c-a)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}b]}, \qquad [27]$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}[(ab)+(bc)]}{\cos\frac{1}{2}[(ad)+(dc)]}=\frac{\cos\frac{1}{2}d\,[\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(c+a)-\operatorname{sen}\frac{1}{2}d]}{\cos\frac{1}{2}b\,[\operatorname{sen}\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}(c+a)-\operatorname{sen}\frac{1}{2}b]}, \qquad [28]$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[(ab)-(bc)]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[(ad)+(dc)]}=\frac{\cos\frac{1}{2}d\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}(c-a)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}, \qquad [29]$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}[(ab)-(bc)]}{\cos\frac{1}{2}[(ad)+(dc)]}=\frac{\cos\frac{1}{2}d\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c+a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d\cos\frac{1}{2}(c+a)+\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}, \qquad [30]$$

Supponendo $d=0$, queste formule si riducono alle formule di Delambre; come quelle che si ricavano dividendo membro a membro e ordinatamente le [27] per le [28] e le [29] per le [30], si riducono a quelle di Nepero. Esse possono servire ad estendere al quadrangolo sferico inscrittibile molte delle relazioni che si hanno fra gli elementi di un triangolo sferico qualunque, e quindi anche a risolvere, per il quadrangolo, alcuni problemi analoghi a quelli che si risolvono per il triangolo. Così, p. es., dati due lati b, d la somma $(ad)+(dc)$ dei due angoli adiacenti ad uno di essi e la differenza $(c-a)$ fra gli altri due lati, la prima delle [27] e la prima delle [29] servono a calcolare gli angoli (ab) e (bc); come nel caso di un triangolo, dato un lato a' l'angolo opposto α' e la differenza $b'-c'$ degli altri due lati, le formule di Delambre a cui si riducono le due precedenti, servono a calcolare gli angoli β' e γ'.

Osservazione. — Delle quattro formule rappresentate dalla [27], come delle quattro rappresentate dalla [28], le ultime due coincidono colle prime due.

9. Si indichi con O il punto d'intersezione dei due archi BD e AC, si ponga

$$OB=e', \quad OD=e'', \quad OA=f', \quad OC=f''$$

e si rappresentino, al solito, con (af), (ae), ... le misure degli angoli formati dagli archi le cui misure si sono indicate con a e con f, con a e con e, ...

Applicando le formule di Delambre ai due triangoli BOC ed AOD, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[(bf)-(eb)]}{\cos\frac{1}{2}(ef)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e'-f'')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}[(bf)-(eb)]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(ef)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e'+f'')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[(df)-(ed)]}{\cos\frac{1}{2}(ef)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e''-f')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}[(df)-(ed)]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(ef)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e''+f')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d};$$

ma per il teorema di *Geom. Elem.* ricordato al § 5 si ha

$$(ab)-(bf)+(fa)=(ae)-(ed)+(da),$$

da cui, facilmente,

$$(eb)-(bf)=(df)-(ed),$$

quindi sarà

$$(31)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(f''-e')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e''-f')}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\,, \qquad (32)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(f''+e')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e''+f')}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\,;$$

ed in modo analogo si otterrebbe

$$(33)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(f'-e')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e''-f'')}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,, \qquad (34)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(f'+e')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(e''+f'')}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,.$$

10. Dalle quattro formule precedenti si possono dedurre molte altre formule notevoli: se ne daranno qui tre esempî.

I. Dalla (31) e dalla (32) si ha

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(f''-e')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(e''+f')=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(e''-f')\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(f''+e')\,,$$

da cui, con facili trasformazioni,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(e'+e'')}{\cos\frac{1}{2}(f'+f'')}=\frac{\cos\frac{1}{2}(e'-e'')}{\cos\frac{1}{2}(f'-f'')}\,; \tag{35}$$

e allo stesso risultato si giungerebbe se si partisse dalla (33) e dalla (34). Da questa si deduce

$$\tan\tfrac{1}{2}e'\tan\tfrac{1}{2}e''=\tan\tfrac{1}{2}f'\tan\tfrac{1}{2}f''\,, \tag{36}$$

relazione conosciuta (*) e della quale si può dare facilmente una dimostrazione diretta. E da quest'ultima si ricava anche l'altra

$$\frac{\operatorname{sen}e'\operatorname{sen}e''}{\cos^2\frac{1}{2}e}=\frac{\operatorname{sen}f'\operatorname{sen}f''}{\cos^2\frac{1}{2}f}\,, \tag{37}$$

che sarà utile in seguito.

II. Dalle stesse (31) e (32) moltiplicando membro a membro, e dalle (33) e (34) operando nello stesso modo, si ha rispettivamente

$$(38)\quad \frac{\cos e'-\cos f''}{\cos f'-\cos e''}=\frac{1-\cos b}{1-\cos d}\,, \qquad (39)\quad \frac{\cos e'-\cos f'}{\cos f''-\cos e''}=\frac{1-\cos a}{1-\cos c}\,,$$

relazioni notevoli fra i quattro segmenti e', e'', f', f'' e due lati opposti del quadrangolo.

III. Dalla (31) e dalla (32) si ha pure

$$(40)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}f''\cos\frac{1}{2}e'}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}e''\cos\frac{1}{2}f'}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\,, \qquad (41)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}e'\cos\frac{1}{2}f''}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}f'\cos\frac{1}{2}e''}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\,,$$

$$(42)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}f'\cos\frac{1}{2}e'}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}e''\cos\frac{1}{2}f''}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,, \qquad (43)\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}e'\cos\frac{1}{2}f'}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}f''\cos\frac{1}{2}e''}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,,$$

da cui dividendo, membro a membro, la (42) per la (40), o la (43) per la (41), e moltiplicando invece la (41) per la (42) o la (40) per la (43), si ha rispettivamente

$$(44)\quad \frac{\operatorname{sen}f'}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}=\frac{\operatorname{sen}f''}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,, \qquad (45)\quad \frac{\operatorname{sen}e'}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}=\frac{\operatorname{sen}e''}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}d}\,.$$

Osservazione I. — Supposto che AC passi per il centro del circolo circoscritto, e che BD sia perpendicolare ad AC, nel triangolo ADC l'arco OD è l'arco perpen-

(*) V. Cagnoli, l. c. pag. 344.

dicolare al lato AC abbassato dal vertice opposto, e la relazione (36) si riduce all'altra

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} DO = \tan \tfrac{1}{2} AO \tan \tfrac{1}{2} OC.$$

Di qui un teorema che ne ha per corrispondente, nel piano, uno notissimo, giacchè un triangolo sferico, i cui tre vertici distano ugualmente dal punto di mezzo di uno dei lati (come il precedente triangolo ADC) ha per corrispondente, nel piano, un triangolo rettangolo. Altrettanto si dica di tutte le relazioni esistenti fra gli elementi del triangolo sferico considerato: così, p. es., se $A'B'C'$ è il triangolo e se il punto da cui equidistano i tre vertici è sul lato a', si ha

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a' = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} b' + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c', \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} a' = \operatorname{ctn}\beta' \operatorname{ctn}\gamma'.$$

alle quali, nel piano, corrispondono l'espressione analitica nel teorema di Pitagora e la relazione fondamentale fra i due angoli acuti di un triangolo rettangolo.

Osservazione II. — Il rapporto considerato nella (44) non è uguale al rapporto considerato nella (45), e questo risulta immediatamente dalla (37).

11. Di ognuna delle relazioni precedenti fra gli elementi di un quadrangolo sferico inscrittibile (*) si può trovare la relazione corrispondente fra i corrispondenti elementi di un quadrangolo piano pure inscrittibile, osservando principalmente che essendo allora $\varepsilon = 0$, la (19) si riduce a

$$(ab) + (cd) = (bc) + (da) = \pi,$$

come già si sapeva dalla *Geom. Elem.*

Notissime sono quelle che corrispondono alle [10], alle [11] e alle [12], e, siccome n (§ 4) si riduce alla misura dell'area del quadrilatero, notissima è pure quella che corrisponde alla (26). Fra le corrispondenti a tutte le altre si possono notare le seguenti:

I. quelle che corrispondono alle [15] e che sono

$$\frac{ad + bc}{\operatorname{sen}(ab)} = \frac{ba + cd}{\operatorname{sen}(bc)}\,; \qquad [15]'$$

II. quelle che corrispondono alle [29] e alle [30] e che sono

$$[29]' \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) - (bc)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) + (bc)]} = \frac{c - a}{b + d}\,, \qquad [30]' \quad \frac{\cos \frac{1}{2} [(ab) - (bc)]}{\cos \frac{1}{2} [(ab) + (bc)]} = \frac{c + a}{b - d}\,;$$

III. quella che corrisponde alla (36) e alla (37) e che è

$$e' e'' = f' f'' \qquad (36)'$$

espressione analitica di un noto teorema di *Geom. Elem.*;

IV. quelle che corrispondono alla (44) e alla (45) e che, per la [36]', si possono riunire nella seguente

$$\frac{e'}{ab} = \frac{e''}{cd} = \frac{f'}{ad} = \frac{f''}{bc}\,,$$

espressione analitica di un teorema dovuto a Carnot. (**)

(*) Le formule [10], [11], (21) e (22) non sono nuove, ma le crediamo poco note. Sono proposte come esercizi (con alcuni gravi errori di stampa non facili a rilevarsi) nelle *Leçons sur la théorie des fonctions circulaires....* del Le Cointe, (Paris, 1858, pagg. 378 e 379), ma non abbiamo potuto risalire alle fonti, dal Le Cointe stesso citate, per conoscere gli autori di queste formule e il procedimento da essi tenuto nel dimostrarle.

(**) V. Carnot, *Géométrie de position*. Paris, an. XI, 1803, pag. 271.

Osservazione. — Le relazioni che, nel quadrangolo piano, hanno per corrispondenti quelle che danno il prodotto e il rapporto fra le misure delle diagonali (espressioni di due notissimi teoremi di Tolomeo) non si sono riportate perchè si possono scrivere immediatamente.

12. Con metodo analogo si potrebbero trovare molte altre di quelle proprietà del quadrangolo sferico inscrittibile, le cui corrispondenti nel piano son note: si porrà termine a questi esercizî con un ultimo esempio.

Da un punto qualunque M del circolo circoscritto si conducano gli archi di circolo massimo perpendicolari ai quattro lati AB, BC, CD, DA del quadrilatero e si indichino con h_a, h_b, h_c, h_d, rispettivamente, le misure di questi archi, intendendo che se A_1, B_1, C_1, D_1 sono i punti diametralmente opposti ai vertici ABCD, questi quattro archi siano quelli i cui piedi sono, rispettivamente, nelle semicirconferenze ABA_1, BCB_1, CDC_1, DAD_1. Dal triangolo sferico AMB, per una nota formula, ricordata anche al § 7, si ha

$$\operatorname{ctn} R = \operatorname{sen} MAB \frac{\cos\frac{1}{2} MA \cos\frac{1}{2} AB}{\operatorname{sen}\frac{1}{2} MB}$$

(dove per MA, MB si intendono gli archi di circolo massimo, minori di π, che hanno per estremi M ed A, M e B), e siccome

$$\operatorname{sen} h_a = \operatorname{sen} MA \operatorname{sen} MAB,$$

si avrà anche

$$\operatorname{sen} h_a = 2 \operatorname{ctn} R \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2} MA \operatorname{sen}\frac{1}{2} MB}{\cos\frac{1}{2} a}. \qquad [46]$$

Da questa formula e dalle tre sottintese si ricava facilmente

$$\frac{\operatorname{sen} h_a \operatorname{sen} h_c}{\operatorname{sen} h_b \operatorname{sen} h_d} = \frac{\cos\frac{1}{2} b \cos\frac{1}{2} d}{\cos\frac{1}{2} a \cos\frac{1}{2} c} \qquad (47)$$

e questa ha per corrispondente nel piano l'espressione analitica del teorema: *il prodotto delle distanze di un punto qualunque di una circonferenza da due lati opposti di un quadrangolo inscritto è uguale il prodotto delle distanze di questo stesso punto dagli altri due lati.* (*)

Osservazione. — Fra i casi particolari che si possono considerare v'è quello in cui B coincida con C e A con D: i circoli massimi cui appartengono gli archi AD e BC diventano allora i circoli massimi tangenti in A e in B al circolo circoscritto e la (47) diventa

$$\frac{\operatorname{sen}^2 h_a}{\operatorname{sen} h_b \operatorname{sen} h_d} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2} a};$$

la cui corrispondente nel piano è l'espressione analitica del teorema: *la distanza di un punto qualunque di una circonferenza a una corda è media proporzionale fra le distanze dello stesso punto dalle tangenti condotte alle estremità della corda.*

(*) Desboves, *Questions de Géométrie élémentaire* (Paris, 1875, pag. 170).

Livorno, marzo 1903.

G. Pesci

SU DI UNA CLASSE DI POLINOMI

I polinomi, di cui noi vogliamo qui studiare le proprietà principali, soddisfano alla formola di ricorrenza

$$f'_i = i(i-1)f_{i-1} - if'_{i-1} \qquad (i>1). \tag{1}$$

Posto

$$f_i(x) = \sum_{h=0}^{i} (-1)^h a_{i,h} x^{i-h}$$

essi riescono completamente determinati quando si fissano i valori dei termini

$$a_{1,1}, \quad a_{2,2}, \ldots, a_{i,i}, \ldots\ldots \tag{2}$$

e il coefficiente $a_{1,0}$ di $f_1(x) = a_{1,0}x - a_{1,1}$.

Per valori speciali delle $a_{i,i}$, si ottengono i polinomi, che incontrammo ne *La determinazione assintotica dell'*n$^{\text{esimo}}$ *numero primo.* (*) Senza assegnare valori particolari alle (2), noi daremo l'espressione generale di questi polinomi, e ne trarremo alcune notevoli proprietà; poi, esponendo alcuni algoritmi coi quali si ottengono polinomi, soddisfacenti alla (1), mostreremo la genesi di quelli incontrati nella citata questione e daremo l'equazione differenziale cui soddisfa formalmente la loro funzione generatrice. Noteremo infine una proprietà dei polinomi generali (1), che riesce utilissima nello sviluppo assintotico dell'n^{esimo} numero primo di una progressione aritmetica.

1. Noi supporremo $a_{1,0}=1$ e non faremo alcuna ipotesi sulle costanti (2). Ciò posto, dalla (1) facilmente si trae la seguente relazione di ricorrenza tra i coefficienti del polinomio $f_i(x)$ e quelli del polinomio precedente:

$$a_{i,h} = \frac{i(i-1)}{i-h} a_{i-1,h} + i a_{i-1,h-1} \qquad (i>1, \quad i \neq h). \tag{3}$$

2. Per ricavare da questa l'espressione generale del coefficiente $a_{i,h}$, poniamo

$$a_{i,h} = \frac{i!\,(i-1)!}{(i-h)!} \alpha_{i,h}. \tag{4}$$

La (3) si semplifica nella

$$\alpha_{i,h} = \alpha_{i-1,h} + \frac{1}{i-1} \alpha_{i-1,h-1}, \tag{5}$$

da cui subito si trae

$$\alpha_{i,h} = \frac{1}{h} \alpha_{h,h-1} + \frac{1}{h+1} \alpha_{h+1,h-1} + \ldots + \frac{1}{i-1} \alpha_{i-1,h-1} + \alpha_{h,h}.$$

(*) Rendiconto della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1902.

Si ottiene così

$$\alpha_{i,0}=1,\qquad \alpha_{i,1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{i-1}+\alpha_{1,1},$$

$$\alpha_{i,2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\frac{1}{i-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i-1}\right)+$$
$$+\alpha_{1,1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i-1}\right)+\alpha_{2,2}$$

e in generale, indicando con $H^{(h-s)}_{s+1,i-1}$ la somma degli inversi dei prodotti ad $h-s$ ad $h-s$ dei numeri $s+1,\ s+2,\ldots,i-1$

$$\alpha_{i,h}=H^{(h)}_{1,i-1}+\alpha_{1,1}\,H^{(h-1)}_{2,i-1}+\alpha_{2,2}\,H^{(h-2)}_{3,i-1}+\ldots+\alpha_{h-1,h-1}\,H^{(1)}_{h,i-1}+\alpha_{h,h}\,. \quad (6)$$

D'altra parte

$$\frac{(i-1)!}{s!}\,H^{(h-s)}_{s+1,i-1}$$

è un numero intero ed uguaglia la somma dei prodotti ad $i-1-h$ ad $i-1-h$ dei numeri $s+1,\ s+2,\ldots,i-1$. Posto dunque per brevità

$$\frac{(i-1)!}{s!}\,H^{(h-s)}_{s+1,i-1}=[s+1,\ i-1]^{i-1-h}$$

la (6), in virtù della (4) fornisce

$$a_{i,h}=$$
$$\frac{i!}{(i-h)!}\left\{[1,i-1]^{i-1-h}+\frac{a_{1,1}}{0!}[2,i-1]^{i-1-h}+\ldots+\frac{a_{h,h}}{(h-1)!}[h+1,i-1]^{i-1-h}\right\}. \quad (7)$$

Se $a_{1,1}\,a_{2,2}\ldots a_{h,h}\ldots$ sono interi, da questa subito rilevasi che per $i>h>0$, $a_{i,h}$ è divisibile $\binom{i}{h}h=i\binom{i-1}{h-1}=\binom{i}{h-1}(i-h+1)$.

Facendo uso delle note proprietà

$$\sum_{h=s}^{i-1}[s+1,i-1]^{i-1-h}=\frac{i!}{(s+1)!}\,,\qquad \sum_{h=s}^{i-1}(-1)^h\,[s+1,i-1]^{i-1-h}=(-1)^s\frac{(i-2)!}{(s-1)!}$$

si ricavano dalla (7) le relazioni

$$\sum_{h=0}^{i-1}(i-h)!\,a_{i,h}=i!\,i!\left(\frac{1}{1!}+\frac{a_{1,1}}{0!\,2!}+\frac{a_{2,2}}{1!\,3!}+\ldots+\frac{a_{i-1,i-1}}{(i-2)!\,i!}\right) \quad (8)$$

$$\sum_{h=0}^{i-1}(-1)^h\,(i-h)!\,a_{i,h}=(-1)^i i!\,(i-2)!\left(\frac{a_{1,1}}{0!\,0!}-\frac{a_{2,2}}{1!\,1!}+\ldots+\frac{a_{i-1,i-1}}{(i-2)!\,(i-2)!}\right). \quad (8')$$

3. Dalla (7) possiamo ricavare una prima espressione del polinomio $f_i(x)$. Invero, moltiplichiamola per $(-1)^h\,x^{i-h}$ e sommiamo da $h=0$ ad $h=i$, si ottiene

$$f_i(x)=\varphi_{i,0}(x)-\frac{a_{1,1}}{0!}\,\varphi_{i,1}(x)+\frac{a_{2,2}}{1!}\,\varphi_{i,2}(x)-\ldots$$
$$+(-1)^{i-1}\frac{a_{i-1,i-1}}{(i-2)!}\,\varphi_{i,i-1}(x)+(-1)^i\frac{a_{i,i}}{(i-1)!}\,\varphi_{i,i}(x) \quad (9)$$

avendo posto, per $h<1$,

$$\varphi_{i,h}=\frac{i!}{(i-h)!}[h+1,i-1]^{i-1-h}x^{i-h}-\frac{i!}{(i-h-1)!}[h+1,i-1]^{i-2-h}x^{i-1-h}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{i-h-1}\frac{i!}{1!}x$$

e per $h=i$

$$\varphi_{i,i}=(i-1)!.$$

4. Particolare importanza ha la funzione

$$\varphi_{i,0}(x)=[1,i-1]^{i-1}x^i-i[1,i-1]^{i-2}x^{i-1}+i(i-1)[1,i-1]^{i-3}x^{i-2}-\ldots\pm i(i-1)\ldots3.2x \quad (10)$$

corrispondente ai valori tutti nulli delle $a_{i,i}$, poichè mostreremo che $\varphi_{i,h}$ si può esprimere mediante $\varphi_{i,0}$ e le sue derivate. Infatti dalla relazione evidente

$$[h+1,i-1]^r=\frac{1}{h}[h,i-1]^{r+1}-\frac{1}{h}[h+1,i-1]^{r+1}$$

si trae

$$\varphi_{i,h}=\frac{1}{h}\varphi'_{i,h}+\frac{1}{h}\varphi'_{i,h-1} \qquad (11)$$

da cui subito

$$\varphi_{i,h}=\frac{1}{h}\varphi'_{i,h-1}+\frac{1}{h^2}\varphi''_{i,h-1}+\frac{1}{h^3}\varphi'''_{i,h-1}+\ldots+\frac{1}{h^{i-h+1}}\varphi^{i-h+1}_{i,h-1} \qquad (12)$$

Potremo dunque porre

$$\varphi_{i,h}=\lambda_h^{(h)}\varphi_{i,0}^{(h)}+\lambda_h^{(h+1)}\varphi_{i,1}^{(h+1)}+\ldots+\lambda_h^{(i)}\varphi_{i,0}^{(i)}. \qquad (13)$$

Per il calcolo delle λ basterà osservare che esse, in virtù della (11) soddisfano alla formula di ricorrenza

$$\lambda_h^{(s)}=\frac{1}{h}\left(\lambda_h^{(s-1)}+\lambda_{h-1}^{(s-1)}\right). \qquad (14)$$

Si ottiene così

$$\lambda_h^{(h)}=\frac{1}{h!},\quad \lambda_h^{(h+1)}=\frac{1}{h!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{h}\right),$$

$$\lambda_h^{(h+2)}=$$
$$=\frac{1}{h!}\left[\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{h}\right)+\frac{1}{h-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{h-1}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+1\right] \quad (15)$$

In generale si ha con facili considerazioni

$$\lambda_h^{(s)}=\frac{1}{h!}\left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{h}\right)^{s-h},$$

dove il secondo fattore sta a indicare la funzione simmetrica completa $(s-h)^{\text{esima}}$ dei numeri $1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{h}$.

(*) CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 399 c) d).

5. Dopo ciò è facile rinvenire come la funzione $f_i(x)$ più generale si esprima quale combinazione lineare della funzione fondamentale $\varphi_{i,0}$ o delle sue derivate. Basterà porre

$$l_s = \frac{a_{s,s}}{(s-1)!}\lambda_s^{(s)} - \frac{a_{s-1,s-1}}{(s-2)!}\lambda_{s-1}^{(s)} + \ldots + (-s)^{s-1}\frac{a_{1,1}}{0!}\lambda_1^{(s)}, \tag{16}$$

e si avrà

$$f_i = \varphi_{i,0} - l_1\varphi'_{i,0} + l_2\varphi''_{i,0} - \ldots + (-1)^i l_i\varphi_{i,0}^{(i)}, \tag{17}$$

ovvero simbolicamente, posto $l_s = \dfrac{L_s}{s!}$,

$$f_i(x) = \varphi_{i,0}(x - L). \qquad (L_0 = 1) \tag{17bis}$$

6. La forma (17), sotto la quale può mettersi il polinomio f_i, ha importanza nello studio delle sue radici. Dimostriamo innanzi tutto la seguente proprietà della funzione fondamentale $\varphi_{i,0}$.

Le radici di $\varphi_{i,0}$ sono tutte reali, distinte e positive.

Questo teorema risulta immediatamente da un fecondo teorema algebrico, che è utile richiamare nei suoi dettagli:

Se la funzione algebrica di grado i *ha tutte le radici reali, e* k *è un numero reale, anche* $f(x) + kf'(x)$ *ha tutte le radici reali. Inoltre, se* r *sono le radici distinte di* $f(x)$, $f(x) + kf'(x)$ *ammette oltre le* $i - r$ *radici comuni a* $f(x)$ e $f'(x)$, *altre* r *radici distinte: una superiore o inferiore a tutte le radici di* $f(x) = 0$, *secondo che* k *è negativo o positivo, e ciascuna delle rimanenti* $r-1$ *compresa tra due radici consecutive di* $f(x)$. (*)

Questo teorema subito si generalizza, osservando che se $f(x)$ ha tutte le radici reali e k_1 e k_2 sono due numeri reali anche

$$f + k_1f' + k_2(f' + k_1f'') = f + (k_1 + k_2)f' + k_1k_2f''$$

ha tutte le radici reali, e le radici r-uple $(r > 1)$ di essa sono le radici $(r+2)$-uple di $f(x)$. Per conseguenza:

Se $f(x)$ *ha tutte le radici reali, anche* $a_0f + a_1f' + \ldots + a_pf^{(p)}$ *ha tutte le radici reali, purchè altrettanto si possa dire di* $a_0z^p + a_1z^{p-1} + \ldots a_p$. *Inoltre le radici* r*-uple* $(r > 1)$ *di* $a_0f + a_1f' + \ldots + a_pf^{(p)}$ *sono le* $(r+p)$*-uple di* f.

In particolare $a_0f + a_1f' + a_2f'' + \ldots + a_{i-1}f^{(i-1)}$ ha tutte le radici reali e *distinte*.

Ciò posto, se si fa $f(x) = x^i$, la (10) potrà scriversi:

$$\varphi_{i,0} = [1, i-1]^{i-1} f - [1, i-1]^{i-2} f' + \ldots \pm f^{(i-1)}, \tag{10bis}$$

e poichè

$$[1, i-1]^{i-1} x^{i-1} - [1, i-1]^{i-2} x^{i-2} + \ldots \pm 1 = (x-1)(2x-1)\ldots(\overline{i-1}\,x-1)$$

ha tutte le radici reali, si può conchiudere che $\varphi_{i,0}$ ha tutte le radici reali e distinte. Soppressa la radice $x = 0$, il polinomio che si ottiene di grado $i-1$ ha $i-1$ variazioni e però altrettante radici positive.

Poichè inoltre

$$\varphi_{i,0}(x) = i(i-1)\int_0^x \varphi_{i-1,0}(x)\,dx - i\,\varphi_{i-1,0}(x)$$

e $\int\limits_0^x \varphi_{i-1}(x)\,dx$ ha, tranne la radice doppia $x=0$, le radici reali distinte, come risulta integrando la $(10)^{\text{bis}}$, si può concludere che $\varphi_{i,0}(x)$ oltre alla radice $x=0$, ammette $i-1$ radici, di cui una superiore a tutte le radici di $\int\limits_0^x \varphi_{i,1}(x)\,dx$, e ciascuna delle altre compresa tra due radici consecutive di $\int\limits_0^x \varphi_{i,0}(x)\,dx$.

In generale poi, avuto riguardo alla (17), si può affermare *che* $f_i(x)$ *ha tutte le radici reali, se altrettanto si può dire per*

$$l_0 x^i - l_1 x^{i-1} + l_2 x^{i-2} - \ldots \pm l_i\,.$$

7. La funzione fondamentale $\varphi_{i,0}$ si può mettere sotto una forma notevole. Facciamo $x=\log z$, e calcoliamo la derivata i^{esima} rispetto a z di $(\log z)^{i+1}$. Facendo uso di note formule (*) si ha

$$\frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i(\log z)^{i+1}}{dz^i} = (\log z)^i \frac{i!}{1!}\mathop{\mathrm{S}}_{i}^{1}\frac{1}{r} - i(\log z)^{i+1}\frac{i!}{2!}\mathop{\mathrm{S}}_{i}^{2}\frac{1}{r} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{i-1} i(i-1)\ldots 2\,(\log z)\frac{i!}{i!}\mathop{\mathrm{S}}_{i}^{i}\frac{1}{r}\,.$$

D'altra parte (**)

$$\frac{i!}{h!}\mathop{\mathrm{S}}_{i}^{h}\frac{1}{r} = [1,\, i-1]^{i-h}\,;$$

e però la precedente può scriversi

$$\frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i(\log z)^{i+1}}{dz^i} = [1, i-1]^{i-1}(\log z)^i - i[1, i-1]^{i-1}(\log z)^{i-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{i-1} i(i-1)\ldots 3\,.\,3\log z\,.$$

E finalmente, per la (10)

$$\varphi_{i,1}(\log z) = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i}{dz^i}(\log z)^{i+1}\,, \tag{18}$$

una formula, che richiama quella di Rodriques (o di Ivory) della teoria dei polinomi di Legendre.

8. Questa formula gode della seguente proprietà elegante:

Per derivare s *volte* $\varphi_{i,1}(\log z)$ *rispetto a* $\log z$, *basta derivare* s *volte* $(\log z)^{i+1}$ *rispetto a* $\log z$ *sotto il segno* $\dfrac{d^i}{dz^i}$.

Se poniamo cioè $y=x^{i+1}$, si ha

$$\varphi_{i,0}^{(s)} = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i y^{(s)}}{dz^i}\,. \tag{19}$$

Questa relazione è vera per $s=0$, ammettiamola vera per $s-1$, e dimostriamo che è vera per s. Da

$$\varphi_{i,0}^{(s-1)} = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i y^{(s-1)}}{dz^i}\,,$$

(*) Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 496.

(**) Cesàro, *Dérivées des fonctions de fonctions*; " Nouvelles Annales de Math. ", 3e s., t. IV (1885).

derivando rispetto a $x=\log z$, si ottiene

$$\varphi_{i,0}^{(s)}=i,\varphi_{i,0}^{(s-1)}+\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}z^{i+1}\frac{d^{i+1}}{dz^{i+1}}[(i+1)i(i-1)\ldots(i+3-s)(\log z)^{i+2-s}].$$

Cambiando i in $i-1$, e moltiplicando per i, si ha

$$i(i-1)\varphi_{i-1,0}^{(s-1)}-i\varphi_{i-1,0}^{(s)}=\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}z^{i}\frac{d^{i}}{dz^{i}}[(i+1)i(i-1)\ldots(i+2-s)(\log z)^{i+1-s}],$$

ossia

$$i(i-1)\varphi_{i-1,0}^{(s-1)}-i\varphi_{i-1,0}^{(s)}=\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}z^{i}\frac{d^{i}y^{(s)}}{dz^{i}}.$$

Ma d'altra parte $\varphi_{i,0}^{(s-1)}$ soddisfa alla formula di ricorrenza (1), dunque il primo membro è nient'altro che $\varphi_{i,0}^{(s)}$, e però la (19) è vera qualunque sia s.

9. Dopo ciò possiamo mettere sotto altra forma il polinomio $f_i(x)$. Basterà moltiplicare la (19) per $(-1)^s l_s$, e sommare rispetto a s da 0 a i, si ottiene

$$f_i(\log z)=\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}z^{i}\frac{d^{i}}{dz^{i}}(y-l_1y'+l_2y''-\ldots+(-1)^il_iy^{(i)}). \qquad (20)$$

o, se si vuole, simbolicamente

$$f_i(\log z)=\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}z^{i}\frac{d^{i}}{dz^{i}}(\log z-\mathrm{L})^{i+1} \qquad (20)^{\text{bis}}$$

e per derivare rispetto a $\log z$ *il primo membro basta derivare rispetto a* $\log z$ *il polinomio che sta sotto il segno* $\frac{d^i}{dz^i}$.

10. Come applicazione della formula (18), proponiamoci il calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^1 z^n\varphi_{i,0}(\log z)\,dz \qquad (n>-1).$$

Nella nota formula

$$\int u^{(m)}v\,dx=u^{(m-1)}v-u^{(m-2)}v'+\ldots+(-1)^{m-1}uv^{(m-1)}+(-1)^m\int uv^{(m)}dx$$

si faccia

$$u=(\log z)^{i+1},\qquad v=z^{i+n},\qquad m=i$$

e si integri fra 0 e 1.

La parte integrata è nulla per $z=1$, e tende a zero a destra di zero, quindi si ha (*)

$$\int_0^1 z^nz^i\frac{d^i}{dz^i}(\log z)^{i+1}=(-1)^i(i+n)(i+n-1)\ldots(n+1)\int_0^1 z^n(\log z)^{i+1}dz=$$

$$=(-1)^i(i+n)(i+n-1)\ldots(n+1)\frac{(-1)^{i+1}(i+1)!}{(n+1)^{i+2}}. \qquad (21)$$

(*) Cesàro, *Calcolo inf.*, p. 468, g).

Moltiplicando per $\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}$, con riguardo alla (19), si ha

$$\int_0^1 z^n \varphi_{i,0} (\log z)\, dz = \frac{i!\,(i+1)!}{n!\,(n+1)}. \tag{22}$$

In particolare si ha per $n=0$

$$\int_0^1 \varphi_{i,0} (\log z)\, dz = (-1)^i\, i!\, i!. \tag{23}$$

11. Esponiamo ora alcuni procedimenti coi quali si ottengono polinomi soddisfacenti alla formula di ricorrenza (1).

Sviluppiamo l'espressione

$$\log\left(1+\frac{z-a_0}{z}+\frac{f_1(x)}{1!\,z^2}-\frac{f_2(x)}{2!\,z^3}+\ldots+(-1)^{i-1}\frac{f_i(x)}{i!\,z^{i+1}}\right), \tag{24}$$

applicando la formula

$$\log(1+X) = \frac{X}{1}-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\ldots+(-1)^i\frac{X^{i+1}}{i+1}+R,$$

e poi raggruppiamo i termini aventi nei denominatori le stesse potenze di z sino alla potenza z^{i+1}. Avremo

$$\log\left(1+\frac{z-a_0}{z}+\frac{f_1(x)}{1!\,z^2}-\ldots+(-1)^i\frac{f_i(x)}{i!\,z^{i+1}}\right)=$$
$$=\frac{g_1(x)}{1!\,z}-\frac{g_2(x)}{2!\,z^2}+\ldots+(-1)^i\frac{g_i(x)}{i!\,z^i}+\Phi. \tag{25}$$

Se le funzioni f_k soddisfano alla (1), può dimostrarsi senza pena che anche i polinomi g_k godranno della stessa proprietà. Le costanti $b_{i,i}$ corrispondenti a questi polinomi si possono ottenere *isobaricamente* con la formula

$$b_{i,i} = i!\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\,\overset{i-k}{\underset{k}{S}}\,\frac{a_r}{r!}, \tag{26}$$

ovvero per *ricorrenza* con la formula simbolica

$$b_{i+1,i+1} = i a_i + (a+\beta)^i \tag{27}$$

essendo $\beta_r = r b_{r,r}$ per $r>0$, e $\beta_0 = 1$.

12. Derivando rispetto a z la funzione

$$e^x(\log z - a_0) + e^x\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\frac{f_k(\log z)}{k!\,z^k},$$

si ottiene

$$e^x(\log z - a_0) + e^x\frac{f_1+1}{z} + e^x\sum_{k=2}^{i}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{f_k k - f'_{k-1} + k(k-1)f_{k-1}}{z^k},$$

posto

$$G_1 = f_1+1, \qquad G_k = f_k - kf'_{k-1} + k(k-1)f_{k-1} \qquad (\text{per } k>1)$$

si ha per la (1)

$$G_k = f_k + f'_k \tag{28}$$

e quindi anche i polinomi G_k verificano la (1).

Le costanti $b'_{i,i}$, che loro corrispondono, si ottengono dalle $a_{i,i}$ con la formula

$$b'_{i,i} = a_{i,i} - a_{i,i-1} \tag{29}$$

che si deduce dalla (28).

13. In generale i polinomi g_k e G_k dei §§ 11, 12 non sono identici; perchè ciò avvenga, bisogna assegnare alle $a_{i,i}$ valori tali che si abbia $a_{i,i} = b'_{i,i}$. Si ottiene allora

$$a_{1,1} = 2, \qquad a_{2,2} = 11, \qquad a_{3,3} = 131, \qquad a_{4,4} = 2666, \ldots$$

e i polinomi $f_1, f_2, \ldots f_i, \ldots$ corrispondenti sono quelli che capitano nella determinazione assintotica dell'n^{esimo} numero primo.

Consideriamo la *generatrice* di questi numeri a_i.

$$e^{ax} = a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \ldots \tag{30}$$

Per la (25) si ha la eguaglianza simbolica

$$-\log(1 - xe^{ax}) = e^{bx}. \tag{31}$$

D'altra parte per la (29) e la (7)

$$b_i = a_i - a_{i,i-1} = a_i - i!\left(a_0 + \frac{a_1}{0!} + \frac{a_2}{1!} + \ldots + \frac{a_{i-1}}{(i-2)!}\right);$$

e però

$$e^{bx} = a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \ldots - a_0(1 + x + x^2 + \ldots) - \frac{a_1}{1!}(x^2 + x^3 + \ldots) - \frac{a_2}{1!}(x^3 + \ldots) + \ldots,$$

ossia

$$e^{bx} = e^{ax} - a_0 - \frac{a_0 x}{1-x} - \frac{a_1 x^2}{1-x} - \frac{a_2}{1!}\frac{x^3}{1-x} - \ldots = e^{ax} - a_0 - \frac{x}{1-x}\left(1 + x\frac{de^{ax}}{dx}\right).$$

Paragonando questa con la (31), e posto $e^{ax} = y$, si ottiene

$$\log(1 - xy) = a_0 - y + \frac{x}{1-x}(1 - xy'). \tag{32}$$

Per $a_0 = 1$, i valori $y'_0, y''_0, y'''_0, \ldots$, che da questa successivamente si ottengono per $x=0$, altro non sono che le costanti $a_{1,1} = 2$, $a_{2,2} = 11$, $a_{3,3} = 131, \ldots$ notate dianzi.

Per $a_0 = 1 - \log\log n$, la $y_0^{(i)}$ ricavata dalla (32) è identica al polinomio $(-1)^i f_i(\log\log n)$ della questione citata. Per convincersi di questo basterà cambiare in (30) a_0 in $1 - \log\log n$, a_k in

$$(-1)^k f_k(\log\log n),\ b_k \text{ in } (-1)^k g_k(\log\log n)$$

e ripetere il ragionamento, che condurrà alla medesima (32).

14. Terminiamo con una proprietà notevole goduta dai polinomi $f_1, f_2 \ldots f_i$, qualunque essi siano, purchè soddisfacenti alla (1).

Nell'espressione

$$\Psi(z) = \log z + \frac{f_1(\log z)}{1!\,z} - \frac{f_2(\log z)}{2!\,z^2} + \ldots + (-1)^{i-1}\frac{f_i(\log z)}{i!\,z^i}$$

si cambi z in $z+\mu$, e si sviluppi secondo le potenze di $\frac{1}{z}$; si ha

$$\Psi(z+\mu) = \log z + \frac{F_1(\log z, \mu)}{1!\,z} - \frac{F_2(\log z, \mu)}{2!\,z^2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{i-1}\frac{F_i(\log z, \mu)}{1!\,z^i} + t_{i-1}. \qquad (33)$$

Dimostriamo che i polinomi F_i verificano la formula di ricorrenza (1), e poi che si ha

$$F_i(\log z, \mu) = f_i(\log z + \mu).$$

È chiaro che $F_i(\log z, \mu)$ si ottiene come somma dei coefficienti di $\frac{(-1)^{i-1}}{i!\,z^i}$ che provengono dallo sviluppo di

$$\log(z+\mu) = \log z + \log\left(1+\frac{\mu}{z}\right) = \log z + \frac{\mu}{z} - \frac{\mu^2}{2z^2} + \frac{\mu^3}{3z^3} - \ldots$$

e da quello di

$$f_k(\log(z+\mu)) = f_k(\log z) + \left(\frac{\mu}{z} - \frac{\mu^2}{2z^2} + \ldots\right) f'_k(\log z) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu}{z} - \frac{\mu^2}{2z^2} + \ldots\right)^2 f''(\log z) + \ldots$$

moltiplicato per

$$\frac{1}{(z+\mu)^k} = \frac{1}{z^k}\left(1 - \frac{\mu}{z} + \frac{\mu^2}{z^2} - \ldots\right)^k$$

per tutti i valori di k da 1 a i. È dunque

$$F_i(\log z, \mu) = (i-1)!\,\mu^i + \sum_{k=1}^{i}\sum_{s=0}^{k} C^{(i)}_{k,s} f_k^{(s)} \qquad (34)$$

essendo $C^{(i)}_{k,s}$ una costante.

Derivando la (33) rispetto a $\log(z+\mu)$, con facili trasformazioni, si ha

$$\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\frac{f'_k[\log(z+\mu)]}{k!\,(z+\mu)^k} = \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{i}(-1)^{k-1}\frac{\overline{F}_k(\log z, \mu)}{k!\,z^k} + \tau_{i-1},$$

avendo posto

$$\overline{F}_k = k(k-1)F_{k-1} - kF'_{k-1}. \qquad (k>1) \qquad (35)$$

Ragionando su $\overline{F}_i$ come sulla F_i e si giungerà alla seguente eguaglianza

$$\overline{F}_i = \sum_{k=1}^{i}\sum_{s=0}^{k} C^{(i)}_{k,s} f_k^{(s+1)},$$

e per la (34)

$$\overline{F}_i = F_i.$$

Quindi in virtù di (35)

$$F'_i = i(i-1)F_{i-1} - iF'_{i-1}.$$

Ponendo poi

$$F_i = \sum_{h=0}^{i} (-1)^h [a_{i,h}^{(0)} - a_{i,h}^{(1)}\mu + a_{i,h}^{(2)}\mu^2 - \ldots + (-1)^h a_{i,h}^{(h)}\mu^h](\log z)^{i-h}$$

facilmente si dimostra la relazione

$$a_{i,h}^{(s)} = \frac{i(i-1)}{i-h}\, a_{i-1,h}^{(s)} + i\, a_{i-1,h-1}^{(s)} \qquad (i > 1,\ i \neq h)$$

da cui si deduce l'altra

$$a_{i,h}^{(s)} = \binom{i-h+s}{s}\, a_{i,h-s},$$

in virtù della quale si può scrivere, ponendo $x = \log z$,

$$F_i = f_i(x) + \frac{\mu}{1!}f'_i(x) + \frac{\mu^2}{2!}f''_i(x) + \ldots + \frac{\mu^i}{i!}f_i^{(i)}(x) = f_i(x+\mu).$$

Nella memoria citata, alla quale rimandiamo per maggiori dettagli, abbiamo utilizzato questa proprietà.

Notiamo intanto che, dopo quanto si è dimostrato, la proprietà cui ivi si giunge:

Lo sviluppo assintotico di $\frac{1}{\varphi(M)}\,p_{M,n}$ *sino agli infiniti dell'ordine* $\frac{n}{(\log n)^r}$, *si ottiene da quello di* p_n *cambiando* $\log\log n$ *in* $\log\log n^{\varphi(M)}$,

si è resa indipendente dalla proposizione enunciata ivi al n. 15. (*)

MICHELE CIPOLLA.

NUOVE CONSIDERAZIONI SOPRA LE PERMUTAZIONI

1. Con n elementi distinti $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ si possono formare $n!$ permutazioni diverse. Indichiamo con $A_{n,r}$ il numero di quelle che presentano il medesimo numero r d'inversioni rispetto alla permutazione principale. Fissato n, è determinato anche il massimo valore che può assumere r, giacché il massimo numero d'inversioni che può presentare una permu-

(*) Prendo qui l'occasione di far notare che i risultati da me ottenuti nella citata memoria riguardo allo sviluppo assintotico di $p_{M,n}$ suppongono tacitamente che il logaritmo integrale di n diviso per $\varphi(M)$ esprima la totalità dei numeri primi non superiori ad n d'una progressione di ragione M, fino agl'infiniti dell'ordine $\frac{n}{(\log n)^r}$, comunque sia grande, purchè finito, l'intero r. Questa proprietà è stata soltanto ora rigorosamente dimostrata dal sig. E. Landau, il quale ha avuto la compiacenza di farmene comunicazione. (Sitz. der K. Akademie der W. in Wien, 1903.)

tazione di n elementi distinti è, come è noto, uguale a $\frac{n(n-1)}{2}$. Fra le $n!$ permutazioni considerate, solo *una* (la diretta o principale) presenta zero inversioni, e solo *una* (l'inversa) ne presenta $\frac{n(n-1)}{2}$, talchè possiamo scrivere

$$A_{n,0}=1 \quad , \quad A_{n,\frac{n(n-1)}{2}}=1.$$

Agli n elementi dati associamo un nuovo elemento, a_{n+1}, distinto dai precedenti, e formiamo con questi $n+1$ elementi tutte le $(n+1)!$ permutazioni. Il numero di quelle permutazioni, che in questo nuovo sistema presentano r inversioni sarà indica con $A_{n+1,r}$. Per esprimere il valore di $A_{n+1,r}$ mediante i numeri $A_{n,r}$ relativi al vecchio sistema, osserviamo che le permutazioni, le quali nel nuovo sistema presentano r inversioni, si possono ottenere da quelle permutazioni del vecchio sistema che presentano non più di r inversioni, assegnando all'elemento a_{n+1} un posto conveniente senza alterare l'ordine degli altri elementi.

Infatti se una permutazione del vecchio sistema presenta $s \leq r$ inversioni, ponendo l'elemento a_{n+1} alla sinistra dell'$(r-s)^{mo}$ elemento (contando da destra) della data permutazione, otterremo una permutazione degli $n+1$ elementi, nella quale si troveranno le s inversioni che possedeva la permutazione considerata più le $r-s$ inversioni che l'elemento aggiunto fa cogli $r-s$ elementi che lo seguono; questa permutazione presenta quindi r inversioni. (*)

Da quanto precede si deduce che una permutazione, la quale nel vecchio sistema presenta $s \leq r$ inversioni, fornirà una permutazione con r inversioni del nuovo sistema, purchè sia $r-s \leq n$, ossia $s \geq r-n$.

Sicchè tutte le permutazioni che nel vecchio sistema presentano s inversioni, forniranno altrettante permutazioni del nuovo sistema con r inversioni, se s è compreso nell'intervallo $(r-n, r)$ non esclusi gli estremi, e quindi si ricava

$$(1) \qquad A_{n+1,r}=\sum_0^n{}_s A_{n,r-s}=\sum_0^n{}_s A_{n,r-n+s},$$

per qualunque valore di r, purchè si convenga di porre $A_{n,h}=0$, quando il secondo indice resulta negativo, oppure maggiore di $\frac{n(n-1)}{2}$.

Avremo dunque in particolare:

$$\begin{aligned}
A_{n+1,0} &= 1,\\
A_{n+1,1} &= 1+A_{n,1},\\
A_{n+1,2} &= 1+A_{n,1}+A_{n,2}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
A_{n+1,n} &= 1+A_{n,1}+A_{n,2}+\dots+A_{n,n},\\
A_{n+1,n+1} &= \phantom{1+{}} A_{n,1}+A_{n,2}+\dots+A_{n,n}+A_{n,n+1}, \text{ ecc.}
\end{aligned}$$

2. Chiameremo *n^{mo} sistema di permutazioni* l'insieme delle $n!$ permutazioni che si ottengono con n elementi distinti, e *coefficienti fattoriali* i numeri $1, A_{n,1}, A_{n,2}, \dots$

La (1) permette di determinare i coefficienti fattoriali dell'$(n+1)^{mo}$ sistema di permutazioni, mediante quelli dell'n^{mo} sistema. Applicando la

(*) Se è $r=s$, l'elemento a_{n+1} va situato al primo posto a destra della permutazione considerata.

detta formula ai successivi sistemi di permutazioni, ed osservando che il 1° sistema contiene una sola permutazione, possiamo formare il seguente *quadro dei coefficienti fattoriali*.

1°.	1															
2°.	1	1														
3°.	1	2	2	1												
4°.	1	3	5	6	5	3	1									
5°.	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1					
6°.	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Il quadro può esser prolungato quanto si vuole, mediante la regola seguente:

Immaginando scritti degli zeri alla sinistra ed alla destra di ciascuna orizzontale, si ottiene un termine dell'n^{ma} *orizzontale addizionando* n *termini successivi dell'orizzontale precedente, contando questi* n *termini da quello che occupa il medesimo posto e procedendo verso sinistra.*

Sono evidenti le seguenti proprietà:

1°. *La somma dei coefficienti fattoriali dell'*n^{mo} *sistema di permutazioni è uguale a* $n!$

2°. *I termini d'una stessa verticale del quadro esprimono i numeri delle permutazioni che nei vari sistemi presentano il medesimo numero d'inversioni.*

3°. *In ogni orizzontale del quadro i termini ugualmente distanti dagli estremi sono uguali.*

4°. *Il numero dei termini dell'*n^{ma} *orizzontale è* $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$.

3. Al concetto di coefficiente fattoriale ora stabilito possiamo sostituirne un altro di carattere puramente algebrico.

Infatti, applicando la (1), otteniamo successivamente

$$A_{n+1,r}=\sum_{s_n=0}^{n} A_{n,r-s_n},$$

$$A_{n,r-s_n}=\sum_{s_{n-1}=0}^{n-1} A_{n-1,r-(s_n+s_{n-1})},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{2,r-(s_n+s_{n-1}+\ldots+s_2)}=\sum_{s_1=0}^{1} A_{1,r-(s_n+s_{n-1}+\ldots+s_1)};$$

e quindi

$$A_{n+1,r}=\sum_{s_n=0}^{n}\sum_{s_{n-1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{1} A_{1,r-(s_n+s_{n-1}+\ldots+s_1)}.$$

Osservando che $A_{1,h}$ è nullo per tutti i valori non nulli di h, mentre è uguale ad 1 per $h=0$, possiamo concludere che $A_{n+1,r}$ esprime il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=r$$

colla condizione che sia $s_h \leq h$.

Siamo così pervenuti al seguente teorema:

Dati n *elementi distinti, il numero delle permutazioni di essi che presentano* r *inversioni, rispetto alla permutazione principale, è uguale al numero delle soluzioni intere e positive del sistema misto*

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=r, \qquad x_h \leq h.$$

Mediante il calcolo diretto, e nell'ipotesi che sia $n \geqq r$, troviamo successivamente:

$$A_{n,0} = 1,$$
$$A_{n,1} = n - 1,$$
$$A_{n,2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2},$$
$$A_{n,3} = \frac{n(n^2-7)}{6},$$
$$A_{n,4} = \frac{n(n+1)(n^2+n-14)}{24},$$
$$A_{n,5} = \frac{(n-1)(n+6)(n^3-9n-20)}{120},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ma la ricerca va rapidamente complicandosi per i valori superiori di r.

4. Ai medesimi resultati possiamo arrivare anche nel modo seguente. Dalla (1) otteniamo

$$A_{n+1,r} - A_{n,r} = \sum_0^{n-1} {}_s A_{n,r-n+s},$$

ossia

(2) $$\Delta A_{n,r} = \sum_0^{n-1} {}_s A_{n,r-n+s},$$

indicando con $\Delta A_{n,r}$ la differenza (prima) di $A_{n,r}$ presa rispetto ad n. Supposte quindi note le $A_{n,h}$ relative ai valori di h inferiori ad r, la (2) dimostra che $A_{n,r}$ è l'integrale indefinito alle differenze della somma

$$1 + A_{n,1} + \ldots + A_{n,r-1}.$$

Il valore della costante che entra in tale integrale si determinerà assegnando ad n un valore particolare ($\geqq r$), corrispondentemente al quale si conosca il valore di $A_{n,r}$.

Facendo $r=1$, la (2) diventa

$$\Delta A_{n,1} = A_{n,0} = 1;$$

quindi, ponendo $A_{n,1} = c_{1,0} + c_{1,1} n$, avremo

$$\Delta A_{n,0} = c_{1,1} = 1.$$

Si avrà dunque

$$A_{n,1} = c_{1,0} + n;$$

ma per $n=2$, abbiamo $A_{2,1} = 1$, quindi sarà $c_{1,0} + 2 = 1$, ossia

$$c_{1,0} = -1.$$

Resulta pertanto

$$A_{n,1} = n - 1.$$

Analogamente, avendosi

$$\Delta A_{n,2} = A_{n,0} + A_{n,1} = 1 + n - 1 = n,$$

e ponendo

$$A_{n,2} = c_{2,0} + c_{2,1} n + c_{2,2} n^2,$$

abbiamo

$$\Delta A_{n,2} = (c_{2,1} + c_{2,2}) + 2c_{2,2} n = n;$$

sarà quindi

$$2c_{2,2} = 1 \quad , \quad c_{2,1} + c_{2,2} = 0,$$

ossia

$$c_{2,2}=\frac{1}{2}, \qquad c_{2,1}=-\frac{1}{2}.$$

Otteniamo perciò

$$A_{n,2}=c_{2,0}-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2.$$

Osservando poi che $A_{3,2}=A_{3,1}=2$, ricaviamo

$$c_{2,0}=-1,$$

e quindi resulta

$$A_{n,2}=-1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{(n-2)(n+1)}{2}.$$

Ecc. ecc.

5. Chiameremo *polinomio fattoriale* il polinomio di grado $\varepsilon_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

(3) $$F_n(x)=x^{\varepsilon_n}+A_{n,1}x^{\varepsilon_n-1}+A_{n,2}x^{\varepsilon_n-2}+\ldots+A_{\varepsilon_n-1}x+1,$$

i cui coefficienti sono i successivi coefficienti fattoriali dell'n^{mo} sistema di permutazioni.

Osserviamo che, essendo

$$F_2(x)=x+1 \quad , \quad F_3(x)=x^3+2x^2+2x+1,$$

possiamo scrivere

$$F_3(x)=(x^2+x+1)F_2(x).$$

Ammettiamo che sia

(4) $$F_n(x)=(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)F_{n-1}(x),$$

e consideriamo il prodotto

$$(x^n+x^{n-1}+\ldots+1)F_n(x).$$

Se sviluppiamo questo prodotto, dopo aver sostituito ad $F_n(x)$ la sua espressione data dalla (3), otteniamo il polinomio

$$x^{\varepsilon_n+n}+M_1x^{\varepsilon_n+n-1}+\ldots+M_rx^{\varepsilon_n+n-r}+\ldots+1,$$

in cui è

$$M_r=A_{n,r}+A_{n,r-1}+\ldots+A_{n,r-n}=\sum_0^n{}_sA_{n,r-s},$$

ossia, per la (1),

$$M_r=A_{n+1,r};$$

inoltre abbiamo

$$\varepsilon_n+n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{(n+1)n}{2}=\varepsilon_{n+1},$$

quindi quel prodotto è uguale al polinomio fattoriale $F_{n+1}(x)$ e la (4) è perciò vera in generale.

Attribuendo nella (4) ad n successivamente i valori $3, 4, \ldots, n$, e moltiplicando membro a membro le uguaglianze resultanti, dopo semplicissime riduzioni e ricordando che $F_2(x)=x+1$, otteniamo

$$F_n(x)=(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+1)\ldots(x+1),$$

la quale dimostra che: *Le radici del polinomio fattoriale* $F_n(x)$ *sono uguali alle radici, diverse dall'unità, delle equazioni binomie*

$$x^n-1=0,\ x^{n-1}-1=0, \ldots, x^2-1=0.$$

Indichiamo con θ una radice ν^{ma} ($\nu \leq n$) primitiva dell'unità.

Poichè θ è radice del polinomio $F_n(x)$, abbiamo

$$\theta^{\varepsilon_n} + A_{n,1}\theta^{\varepsilon_n-1} + \ldots + A_{n,\varepsilon_n-1}\theta + 1 = 0,$$

od anche, essendo $A_{n,r} = A_{n,\varepsilon_n-r}$,

$$1 + A_{n,1}\theta + A_{n,2}\theta^2 + \ldots + A_{n,\varepsilon_n-1}\theta^{\varepsilon_n-1} + \theta^{\varepsilon_n} = 0;$$

ricordando poi che, se $h \equiv k \pmod{\nu}$, è $\theta^h = \theta^k$, dalla precedente otteniamo

(5) $$N_0 + N_1\theta + N_2\theta^2 + \ldots + N_{\nu-1}\theta^{\nu-1} = 0,$$

dove abbiamo posto

$$N_r = A_{n,r} + A_{n,r+\nu} + A_{n,r+2\nu} + \ldots.$$

L'equazione (5) è soddisfatta da tutte le radici ν^{me} primitive di 1, ed è facile convincersi che anche tutte le altre radici ν^{me} di 1, diverse dall'unità, la soddisfanno ugualmente; quindi essa ammette tutte le radici dell'equazione

$$x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Da ciò deduciamo che i coefficienti $N_0, N_1, \ldots, N_{\nu-1}$ della (5) sono uguali, e siccome la loro somma è uguale a $n!$, ciascuno di essi è uguale a $\frac{n!}{\nu}$.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

La somma dei coefficienti fattoriali dell'n^{mo} *sistema di permutazioni, i cui secondi indici sono congrui rispetto ad un modulo* ν, *non superiore ad* n, *è costante ed uguale a* $\frac{n!}{\nu}$.

Se conveniamo di porre in una *classe* tutte quelle permutazioni i numeri delle inversioni delle quali appartengono ad una stessa classe di numeri congrui rispetto al modulo ν, le $n!$ permutazioni di n elementi distinti possono dunque venir distribuite in ν classi, contenenti ciascuna $\frac{n!}{\nu}$ permutazioni.

Quindi due permutazioni, appartenenti ad una stessa classe, rispetto al modulo ν, si possono dedurre l'una dall'altra mediante una sostituzione che introduce o toglie un numero d'inversioni multiplo di ν.

Dott. Luigi Carlini.

SUL PRIMO TEOREMA DI ROSANES

Il primo teorema di Rosanes (Giornale di Crelle, Vol. 75) si suole dimostrare col calcolo simbolico come lo dimostrò la prima volta l'A. Esso si può però dimostrare in modo semplice anche per via diretta, come noi vogliamo ora mostrare.

Detto teorema si può enunciare così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè date due forme dello stesso ordine n *a fattori lineari distinti, ciascuna di esse sia esprimibile colle ennesime potenze dei fattori lineari dell'altra, è che si annulli l'invariante bilineare delle due forme.* (*)

Sieno le due forme

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$

$$\varphi = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + b_n x_2^n = p_x^{(1)} p_x^{(2)} p_x^{(3)} \ldots p_x^{(n)},$$

dove in generale

$$p_x^{(r)} = p_1^{(r)} x_1 + p_2^{(r)} x_2 .$$

Supponiamo che sia

$$f = A_1 p_x^{(1)n} + A_2 p_x^{(2)n} + \ldots + A_n p_x^{(n)n}$$

dove $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono costanti. Dovrà essere

$$[1] \qquad \begin{cases} a_0 = \sum_{r=1}^{r=n} A_r p_1^{(r)n} \\ a_1 = \sum_{r=1}^{r=n} A_r p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n = \sum_{r=1}^{r=n} A_r p_1^{(r)n} . \end{cases}$$

Consideriamo l'invariante bilineare

$$I = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_{n-i} + \ldots + a_n b_0 ;$$

per le [1] si avrà

$$I = b_n \sum_{r=1}^{r=n} A_r p_1^{(r)n} - \binom{n}{1} b_{n-1} \sum_{r=1}^{r=n} A_r p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} + \ldots + (-1)^n b_0 \sum_{r=1}^{r=n} A_r p_2^{(r)n} ;$$

e raccogliendo opportunamente

$$I = \sum_{r=1}^{r=n} A_r \left[b_n p_1^{(r)n} - \binom{n}{1} b_{n-1} p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} + \ldots + (-1)^n b_0 p_2^{(r)n} \right]$$

ma, essendo $p_x^{(1)}, p_x^{(2)} \ldots p_x^{(n)}$ i fattori lineari di φ, si avrà

$$b_n p_1^{(r)n} - \binom{n}{1} b_{n-1} p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} + \ldots + (-1)^n b_0 p_2^{(r)n} = 0,$$

dove $r = 1, 2, 3, \ldots n$, onde

$$I = 0$$

e così resta dimostrata la prima parte del teorema.

Veniamo alla seconda parte. Supponiamo che sieno date le due forme

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$

$$\varphi = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + b_n x_2^n = p_x^{(1)} p_x^{(2)} \ldots p_x^{(n)},$$

e sia

$$I = 0;$$

dico che la f si può esprimere linearmente colle ennesime potenze dei fattori lineari di φ.

(*) Tale invariante si chiama l'*armonizzante* delle due forme; quando esso è eguale a zero, le due forme si dicono *coniugate* od *apolari* od *armoniche*.

Cominciamo, per dimostrare ciò, col togliere l'omogeneità ponendo

$$\frac{x_1}{x_2} = x \qquad \frac{p_2^{(r)}}{p_1^{(r)}} = p^{(r)}$$

si avrà

$$\varphi = P\,(x + p^{(1)})\,(x + p^{(2)}) \ldots (x + p^{(n)}),$$

essendo

$$P = p_1^{(1)}\, p_1^{(2)} \ldots p_1^{(n)} x_2^{\,n};$$

ed avremo pure

$$f = x_2^{\,n}\,(a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n).$$

Poniamo

$$f_1 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Affinchè sia

[2] $$f_1 = m_1 (x + p^{(1)})^n + m_2 (x + p^{(2)})^n + \ldots + m_n (x + p^{(n)})^n,$$

dove le m_r sono costanti, occorre che sia

[3] $$\begin{cases} a_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \\ a_1 = m_1 p^{(1)} + m_2 p^{(2)} + \ldots + m_n p_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_i = m_1 p^{(1)^i} + m_2 p^{(2)^i} + \ldots + m_n p_n^{(i)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = m_1 p^{(1)^n} + m_2 p^{(2)^n} + \ldots + m_n p_n^{(n)}, \end{cases}$$

e perchè queste sussistano in sistema il determinante dei coefficienti e dei termini noti deve esser zero cioè:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & \ldots & p^{(n)} & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^i} & p^{(2)^i} & \ldots & p^{(n)^i} & a_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^n} & p^{(2)^n} & \ldots & p^{(n)^n} & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

Ma questo determinante contiene, come dimostreremo tosto, per fattore I, e quindi è nullo, cioè le (3) sussistono in sistema e si possono determinare tali valori per le m che la (2) sia soddisfatta, e quindi sia

$$f = x^n_2\,(m_1 (x + p^{(1)})^n + \ldots + m_n (x + p^{(n)})^n),$$

da cui si ricava

$$f = A_1\, p_1^{(1)^n} + A_2\, p_1^{(2)^n} + \ldots + A_n\, p_1^{(n)^n},$$

dove si è posto

$$A_r = \frac{m_r}{p_1^{(r)^n}} \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

cioè resta dimostrato il teorema.

Rimane solo da verificare che D contiene come fattore I. Consideriamo perciò il coefficiente di a_i in D cioè $D_{i+1,\,n+1}$:

$$D_{i+1,\,n+1} = (-1)^{n+i+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & \ldots & p^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^{i-1}} & p^{(2)^{i-1}} & \ldots & p^{(n)^{i-1}} \\ p^{(1)^{i+1}} & p^{(2)^{i+1}} & \ldots & p^{(n)^{i+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^n} & p^{(2)^n} & \ldots & p^{(n)^n} \end{vmatrix}.$$

Essendo

$$\begin{cases} b_0 (-p^{(1)})^n + \binom{n}{1} b^1 (-p^{(1)})^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \\ b_0 (-p^{(2)})^n + \binom{n}{1} b_1 (-p^{(2)})^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 (-p^{(n)})^n + \binom{n}{1} b_1 (-p^{(n)})^{n-1} + \ldots + b_n = 0 ; \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} p^{(1)^n} = \frac{b_1}{b_0} \binom{n}{1} p^{(1)^{n-1}} + (-1) \binom{n}{1} \frac{b_2}{b_0} p^{(1)^{n-2}} + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-1}}{b_0} p^{(1)^i} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{b_0} \\ p^{(2)^n} = \frac{b_1}{b_0} \binom{n}{1} p^{(2)^{n-1}} + (-1) \binom{n}{2} \frac{b_2}{b_0} p^{(2)^{n-2}} + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-1}}{b_0} p^{(2)^i} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{b_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{(n)^n} = \frac{b_1}{b_0} \binom{n}{1} p^{(n)^{n-1}} + (-1) \binom{n}{2} \frac{b_2}{b_0} p^{(n)^{n-2}} + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b^{n-1}}{b_0} p^{(n)^i} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{b_0} ; \end{cases}$$

si ha

$$D^{i+1,\,n+1} = (-1)^{n+i} (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-i}}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & & p^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^{i-1}} & p^{(2)^{i-1}} & \ldots & p^{(n)^{i-1}} \\ p^{(1)^{i+1}} & p^{(2)^{i+1}} & \ldots & p^{(n)^{i+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^{n-1}} & p^{(2)^{n-1}} & \ldots & p^{(n)^{n-1}} \\ p^{(1)^i} & p^{(2)^i} & \ldots & p^{(n)^i} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{b_{n-i}}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & & p^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^{n-1}} & p^{(2)^{n-1}} & \ldots & p^{(n)^{n-1}} \end{vmatrix} ;$$

e quindi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & \ldots & p^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(1)^{n-1}} & p^{(2)^{n-1}} & \ldots & p^{(n)^{n-1}} \end{vmatrix} \frac{1}{b_0} \left\{ (-1)^n a_0 b_n + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \right\}.$$

Ma la quantità fra parentesi non è altro che I, quindi $D = 0$, e la dimostrazione resta così completata.

Nel sistema (3) una delle equazioni è conseguenza delle altre, cioè il sistema di valori delle m che soddisfa ad n di esse, soddisfa anche alla rimanente. Per avere quindi tali valori basterà considerare le prime n equazioni del sistema (3) risolverle rispetto alle $m_1, m_2, \ldots m_n$.

Dalla (1) facendo $x=1$ si ha:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i=\sum_{i=1}^{n}(1+p^{(i)})^n m;$$

cioè quando le due forme sono coniugate fra le m sussiste la relazione (4). E reciprocamente se le forme date sono a fattori distinti e le m ricavate dalle prime n equazioni del sistema (3) soddisfano alla (4), tali forme sono coniugate. La condizione di apolarità di due forme a fattori distinti è quindi data anche dalla (4).

L. TENCA.

SOPRA LA FUNZIONE ALGEBRICA INTERA

ad una variabile che ammette zeri semplici e reali

Nella magistrale opera: *Istituzione d'analisi algebrica* del prof. CAPELLI è proposta la dimostrazione del seguente teorema:

Il discriminante d'una equazione algebrica $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, *si può esprimere mediante il prodotto* $f'(\alpha)f'(\beta)\ldots f'(\gamma)$ *ovvero* $f(\alpha_1)f(\beta_1)\ldots(\gamma_1)$ *essendo* $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$ *le radici di* $f(x)=0$, *ed* $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\gamma_1$ *quelle della derivata* $f'(x)=0$.

Nel trovare la dimostrazione di questo teorema, nel caso in cui le radici sono reali, ho avuto occasione di osservare alcune proprietà della funzione $f(x)$ e della sua derivata allorchè essa ammette zeri semplici e reali.

Pertanto m'importa rilevare che facendo attenzione al teorema in discorso e al teorema di Rolle, si possono determinare a priori i segni che assume la $f(x)$ negli zeri estremi della $f(x)$ e viceversa. Premetto la dimostrazione del teorema proposto dal prof. Capelli.

1. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ le radici reali e distinte dell'equazione:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

che possiamo anche scrivere

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)=0. \qquad (1)$$

Derivando il primo membro della (1) si ha:

$$f'(x)=a_0(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+x_0(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (2)$$

ed attribuendo ad x successivamente i valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_1)=a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)\\ f'(x_2)=a_0(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f'(x_n)=a_0(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})\end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Moltiplico membro a membro le (3) ed osservo che i fattori binomî dei secondi membri di queste eguaglianze sono in numero di $n(n-1)$, ed essendo a due a due eguali e di segno contrario si ha:

$$f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0{}^n(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\ldots(x_{n-1})^2=\Delta\ldots \quad (4)$$

il secondo membro di quest'eguaglianza è il quadrato del determinante di Cauchy, si può scrivere quindi:

$$f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0{}^n\begin{vmatrix} x_1{}^{n-1}\,x_1{}^{n-2}\ldots x_1\;1\\ x_2{}^{n-1}\,x_2{}^{n-2}\ldots x_2\;1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n{}^{n-1}\,x_n{}^{n-2}\ldots x_n\;1\end{vmatrix}^2=\Delta \quad (4')$$

quindi la (4) e la (4') esprimono che il prodotto $f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n)$ rappresenta il discriminante dell'equazione $f(x)$.

Dimostrata così la prima parte del teorema, per dimostrare la seconda parte, indico con $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}$ le $n-1$ radici della $f'(x)=0$, si ha:

$$f'(x)=na_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n-1})=0$$

e pongo quindi $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, ricavo:

$$\left.\begin{aligned} f'(x_1)&=na_0(x_1-\xi_1)(x_1-\xi_2)\ldots(x_1-\xi_{n-1})\\ f'(x_2)&=na_0(x_2-\xi_1)(x_2-\xi_2)\ldots(x_2-\xi_{n-1})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f'(x_n)&=na_0(x_n-\xi_1)(x_n-\xi_2)\ldots(x_n-\xi_{n-1})\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Moltiplico membro a membro queste eguaglianze ed indico con Π il prodotto di tutti i fattori binomî dei secondi membri, cioè:

$$f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n)=(na_0)^n\,\Pi\,(x_r-\xi_s) \quad (6)$$
$$\begin{pmatrix} r=1,2,\ldots\ldots,n\\ s=1,2,\ldots,n-1\end{pmatrix}.$$

Pongo nella (1) successivamente $x=\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ ed ottengo

$$\left.\begin{aligned} f(\xi_1)\quad&=a_0(\xi_1-x_1)(\xi_1-x_2)\ldots\ldots\ldots(\xi_1-x_n)\\ f(\xi_2)\quad&=a_0(\xi_2-x_1)(\xi_2-x_2)\ldots\ldots\ldots(\xi_2-x_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(\xi_{n-1})&=a_0(\xi_{n-1}-x_1)(\xi_{n-1}-x_2)\ldots(\xi_{n-1}-x_n)\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

e moltiplicando membro a membro ottengo

$$f(\xi_1)f(\xi_2)\ldots f(\xi_{n-1})=(-1)^{n(n-1)}a_0{}^{n-1}\,\Pi\,(x_r-\xi_s). \quad (8)$$

Dalla (6) e (8) ricavo

$$f(\xi_1)f(\xi_2)\ldots f(\xi_{n-1})=\frac{1}{n^n a_0}f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n) \quad (9)$$

dunque il prodotto

$$f(\xi_1)f(\xi_2)\ldots f(\xi_{n-1})$$

rappresenta anch'esso il discriminante dell'equazione data.

2. Una prima conseguenza del teorema dimostrato si trae facilmente sviluppando in serie di Taylor le espressioni

$$f[x_1+(x_2-x_1)],\quad f[x_2+(x_3-x_1)],\ldots, f[x_{n-1}+(x_n-x_{n-1})],\quad f[x_n+(x_1-x_n)]$$

cioè

$$f[x_1+(x_2-x_1)]=f(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)+\frac{(x_2-x_1)^2}{2!}f''(x_1)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x_2-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_1)+\frac{(x_2-x_1)^n}{n!}f^{(n)}(x_1)$$

$$f[x_2+(x_3-x_2)]=f(x_2)+(x_3-x_2)f'(x_2)+\frac{(x_3-x_2)^2}{2!}f''(x_2)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x_3-x_2)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_2)+\frac{(x_3-x_2)^n}{n!}f^{(n)}(x_n)$$

. . . .

$$f[x_n+(x_1-x_n)]=f(x_n)+(x_1-x_n)f'(x_n)+\frac{(x_1-x_n)^2}{2!}f''(x_n)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x_1-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_n)+\frac{(x_1-x_n)^n}{n!}f^{(n)}(x_n);$$

dalle quali si deducono le seguenti

$$-f'(x_1)=\frac{x_2-x_1}{2!}f''(x_1)+\ldots+\frac{(x_2-x_1)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_1)+\frac{(x_2-x_1)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x_1)$$

$$-f'(x_2)=\frac{x_3-x_2}{2!}f''(x_2)+\ldots+\frac{(x_3-x_2)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_2)+\frac{(x_3-x_2)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x_2)$$

. . . .

$$-f'(x_n)=\frac{x_1-x_n}{2!}f''(x_n)+\ldots+\frac{(x_1-x_n)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_n)+\frac{(x_1-x_n)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x_n).$$

Moltiplicando membro a membro quest'eguaglianze, si ha

$$f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n)=$$
$$=(-1)^n\left[\frac{x_1-x_n}{2!}f''(x_n)+\ldots+\frac{(x_1-x_n)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_n)+\frac{(x_1-x_n)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x_n)\right]\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{i=n-1}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{2!}f''(x_i)+\ldots+\frac{(x_{i+1}-x_i)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_i)+\frac{(x_{i+1}-x_i)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x_i)\right]$$

questa relazione indica che: “Il discriminante della $f(x)$ si può anche esprimere mediante i valori che le derivate $2^a, 3^a, \ldots, n^a$ prendono negli zeri della $f(x)$ moltiplicati rispettivamente per potenze della forma $(x_r-x_s)^i$ per $i=1, 2 \ldots n-1$.

3. Dalla (4) si deduce:

a) Che il prodotto $f'(x_1), f'(x_2) \ldots f'(x_n)$, essendo una funzione pari, non si altera allorchè ad $x_1, x_2, \ldots x_n$ si sostituiscono le radici della trasformata in $-x$.

b) I valori della derivata di $f(x)$ negli zeri della funzione non possono essere tutti numeri primi tra loro due a due.

c) La $f'(x)$ acquista negli zeri della funzione un numero pari di valori negativi se il grado n della funzione è della forma 4K ovvero 4K + 1, ne acquista un numero impari se è della forma 4K − 1 o 4K − 2.

4. La (4), che esprime il descriminante della $f(x)$ mediante il prodotto

$$f'(x_1)\,f'(x_2)\ldots f'(x_n)$$

offre il mezzo di poter determinare il segno che assume $f'(x)$ negli zeri estremi x_1, x_n della funzione $f(x)$.

Disposte a tal uopo le radici della $f(x)$ in ordine crescente, che supponiamo sia $x_1, x_2, \ldots, x^{n-1}, x_n$, esisteranno, pel teorema di Rolle, tra esse $n-1$ radici reali e distinte che ammette la $f'(x)$ eguagliata a zero, che come abbiamo supposto sono

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1},$$

che supponiamo anche disposte in ordine crescente, e giacchè tra due radici consecutive della $f(x)=0$ se ne troverà una sola della $f'(x)=0$ avremo

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n,$$

quindi la $f'(x)$ dovrà cambiar di segno allorchè, x, variando, passa dal valore x_i a quello x_{i+1}, quindi la successione

$$f'(x_1), f'(x_2), \ldots, f'(x_n) \tag{A}$$

presenterà $n-1$ variazioni di segno.

Distingueremo quattro casi:

a) Se il grado n di $f(x)$ è della forma $4k$ il discriminante è positivo, vi saranno nella successione (A) un numero pari di valori negativi, la $f'(x)$ negli zeri estremi x_1, x_n assume valori di segno opposto dovendo la (A) presentare $4k-2$ variazioni di segno, sarà

$$\frac{f'(x_1)}{f'(x_{4k})} < 0.$$

Per precisare il segno di $f(x_1)$ e di $f(x_{4k})$ basterà osservare la prima e l'n^{ma} delle (4) o delle (5), osservando per es. le (5) si trova che la prima contiene $4k-1$ fattori negativi, mentre i fattori della n^{ma} sono tutti positivi, sarà quindi

$$f'(x_1) < 0, \qquad f'(x_{4k}) > 0.$$

La curva rappresentata da $y=f'(x)$ dopo avere incontrato l'asse delle x in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{4k-1}$ giace tutta da parte opposta all'asse delle x.

b) Se $n=4k+1$, il discriminante sarà positivo, il primo membro delle (4) ammetterà un numero pari di valori negativi, e dovendo la successione (A) avere $4k$ variazioni di segno la derivata $f'(x)$ in x_1 ed x_{4k+1} assume due valori positivi

$$f'(x_1) > 0, \qquad f'(x_{4k+1}) > 0.$$

La curva rappresentata dall'equazione $y=f'(x)$ dopo d'avere incontrato l'asse delle x in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{4k}$ giace tutta da una banda dell'asse delle x e nel semipiano in cui trovansi le y positive.

c) Se $n=4k-1$, il discriminante sarà negativo, il primo membro della (4) ammetterà un numero impari di valori negativi, e dovendo la successione (A) avere $4k-2$ variazioni di segno sarà

$$f'(x_1) > 0, \qquad f'(x_{4k-1}) > 0.$$

La curva $y=f'(x)$ dopo d'avere incontrato l'asse delle x in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{4k-2}$, giace tutta nel semipiano in cui trovansi le y positive.

d) Se $n=4k-2$, il discriminante sarà negativo, il primo membro della (4) ammetterà un numero impari di fattori negativi, e dovendo avere la successione (A) $4k-3$ variazioni di segno, saranno $f'(x_1)$ ed $f'(x_{4k-2})$ di segno opposto, cioè:

$$\frac{f'(x_1)}{f'(x_{4k-2})} < 0.$$

Per precisare il segno basterà osservare la 1ª e l'n^{ma} delle (3) o delle (5) e si troverà:

$$f'(1) < 0, \qquad f'(x_{4k-2}) > 0.$$

La curva rappresentata da $y = f'(x)$ giace da parte opposta dell'asse delle x dopo averlo incontrato in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{4k-3}$.

5. Per studiare i valori della $f(x)$ negli zeri estremi della sua derivata $f'(x)$, basterà ricordare la (9) che esprime il discriminante mediante il prodotto.

$$f(\xi_1)\,f(\xi_2)\ldots f(\xi_{n-1}).$$

Osserveremo che essendo comprese tra le radici $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$ della $f'(x) = 0$, $n-2$ radici $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ della $f'(x) = 0$, la $f(x)$ dovrà cambiar di segno allorchè x varia da ξ_i a ξ_{i+1}, cioè la $f(\xi_i)$ sarà di segno opposto a $f(\xi_{i-1})$, onde la successione

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_{n-1}) \tag{B}$$

presenterà $n-2$ variazioni di segno.

Distingueremo anche qui 4 casi

a) $n = 4k$: Il discriminante sarà positivo, il prodotto $f(\xi_1)\,f(\xi_2)\ldots f(\xi_{n-1})$ avrà un numero pari di fattori negativi, e dovendo la successione (B) avere $4k-2$ variazioni di segno sarà

$$f(\xi_1) < 0, \qquad f(\xi_{4k-1}) < 0.$$

La curva, $y = f(x)$ dopo avere incontrato l'asse delle x in $x_1, x_2, \ldots, x_{4k}$, giace nel semipiano ove si trovano le y positive.

b) $n = 4k+1$: Il discriminante sarà positivo, il prodotto

$$f(\xi_1)\,f(\xi_2)\ldots f(\xi_{4k})$$

avrà un numero pari di fattori negativi, la successione (B) dovendo presentare $(4k-1)$ variazioni di segno, prenderà negli estremi valori di segno opposto, cioè

$$\frac{f(\xi_{4k})}{f(\xi_1)} < 0.$$

Per precisare il segno bisognerà ricordare la 1ª e l'$(n-1)^{ma}$ dello (7) e si troverà

$$f(\xi_1) > 0, \qquad f(\xi_{4k}) < 0.$$

La curva $y = f(x)$ incontrerà l'asse delle x nei punti x_1, x_2, x_{4k+1} e si estenderà nelle due parti di piano opposte rispetto all'asse delle x.

c) $n = 4k-1$. Il discriminante sarà negativo, il prodotto

$$f(\xi_1)\,f(\xi_2)\ldots f(\xi_{4k-2})$$

avrà un numero impari di fattori negativi, la successione (B) avrà $4k-3$ variazioni di segno, sarà perciò $\dfrac{f(\xi_1)}{f(\xi_{4k-2})} < 0$, osservando la 1ª e l'$(n-1)^{ma}$ delle (7) si troverà

$$f(\xi_1) > 0, \qquad f(\xi_{4k-2}) < 0.$$

La curva $y = f(x)$ dopo avere incontrato l'asse delle x nei punti $x_1, x_2 \ldots, x_{4k-1}$ si estenderà nelle due parti di piano opposte rispetto all'asse delle x.

d) $n = 4k-2$. Il discriminante sarà negativo il prodotto

$$f(\xi_1)\,f(\xi_2)\ldots f(\xi_{4k-3})$$

avrà un numero impari di fattori negativi, la successione (B) dovendo presentare $4(k-1)$ variazioni di segno, la $f(x)$ negli estremi prenderà segno negativo

$$f(\xi_1) < 0, \qquad f(\xi_{4k-3}) < 0.$$

La curva $y = f(x)$ dopo incontrato l'asse delle x nei punti

$$x_1, x_2 \ldots x_{4k-2}$$

si estende nei due semipiani determinati dall'asse delle x.

Da quanto abbiamo detto si deduce che basta conoscere la forma di n per decidere dei segni che prende la $f(x)$ negli zeri estremi della sua derivata e viceversa.

Riassumiamo i risultati nel seguente prospetto

n	Δ	$f'(x)$	$f(x)$
$4k$	$\Delta > 0$	$f'(x_1) < 0, \quad f'(x_{4k}) > 0$	$f(\xi_1) < 0, \quad f(\xi_{4k-1}) < 0$
$4k+1$	$\Delta > 0$	$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_{4k+1}) > 0$	$f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_{4k}) < 0$
$4k-1$	$\Delta < 0$	$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_{4k-1}) > 0$	$f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_{4k-2}) < 0$
$4k-2$	$\Delta < 0$	$f'(x_1) < 0, \quad f'(x_{4k-2}) > 0$	$f(\xi_1) < 0, \quad f(\xi_{4k-3}) < 0$

onde possiamo dire

1°. La $f(x)$ nello zero estremo a destra di $f'(x)$ prende valore negativo, ed $f'(x)$ nello zero estremo a destra di $f(x)$ assume segno positivo.

2°. Se la funzione $f(x)$ è di grado pari, negli zeri estremi della $f'(x)$ prende valori negativi, mentre se è di grado impari prende valori di segno opposto.

3°. La $f'(x)$ prende negli zeri estremi della $f(x)$ due valori di segno opposto se $f(x)$ e di grado pari, mentre assume valori positivi se è di grado impari.

VINCENZO CORRENTI.

SULL'IACOBIANO DI UN SISTEMA DI FORME

In questa breve nota diamo una dimostrazione semplice e metodica del seguente teorema.

L'Iacobiano di un sistema di m *forme algebriche*

$$f_1, f_2, f_3 \ldots f_m \tag{1}$$

dipendenti da m *variabili* $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ *è eguale al prodotto*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_m},$$

essendo F_2 *l'espressione in cui si converte* f_2 *rimpiazzando la* x_1 *col suo valore in funzione di* f_1 *e di* $x_2, x_3 \ldots x_m$, F_3 *l'espressione che si ottiene mettendo in* f_3 *al posto di* x_1 *il valore testè ottenuto e al posto di* x_2 *il suo valore in funzione di* f_1, f_2 *e di* $x_3 \ldots x_m$ *e così di seguito fino ad* F_m.

Infatti l'Iacobiano del sistema (1) è

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}.$$

In seguito alle sostituzioni indicate, le forme $f_2, f_3, \ldots f_m$ si cambieranno rispettivamente in $F_2, F_3, \ldots F_m$ e le eguaglianze

$$f_2 = F_2,\ f_3 = F_3, \ldots\ldots f_{m-1} = F_{m-1},\ f_m = F_m$$

daranno, in virtù della regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f_2}{\partial x_m} = \frac{\partial F_2}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} = \frac{\partial F_m}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_m}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial f_{m-1}} \cdot \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1}, \ldots \\ \quad \ldots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} = \frac{\partial F_m}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \frac{\partial F_m}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial f_{m-1}} \cdot \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{array}\right\} (2)$$

Se nel determinante che dà il valore di J sostituiamo gli elementi dell'ultima linea coi valori dedotti dalle (2), e sottragghiamo dalla detta linea quelle che la precedono moltiplicate rispettivamente per

$$\frac{\partial F_m}{\partial f_1},\ \frac{\partial F_m}{\partial f_2}, \ldots \frac{\partial F_m}{\partial f_{m-1}},$$

avremo

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} \\ 0 & 0 \ldots\ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}.$$

Questo nuovo determinante ha nulli tutti gli elementi dell'ultima linea, che precedono quello sulla diagonale principale.

Se in questo determinante rimpiazziamo gli elementi della penultima linea coi loro valori dedotti dalle (2), e sottragghiamo da questa linea quelle che la precedono moltiplicate rispettivamente per

$$\frac{\partial F_{m-1}}{\partial f_1},\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial f_2}, \ldots \frac{\partial F_{m-1}}{\partial f_{m-2}},$$

si annullano pure gli elementi che precedono quello sulla diagonale principale, essendo il valore di questo elemento $\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{m-1}}$.

Ripetendo questa operazione, giungeremo a esprimere J per mezzo di un determinante che avrà nulli gli elementi collocati alla sinistra della diagonale principale, essendo gli elementi di questa

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F_m}{\partial x_m},$$

e, quindi, si avrà

$$J = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \qquad \text{c. v. d.}$$

A. Bozal y Obejero.

SU ALCUNI DETERMINANTI CIRCOLANTI ORLATI

Consideriamo il circolante di elementi $a_1 a_2 \ldots a_n$, quello di elementi $b_1 b_2 \ldots b_n$; un altro di elementi $\underbrace{c\ o \ldots o}_{1\ 2\ \ldots\ n}$ ed un ultimo di elementi $\underbrace{d\ o \ldots o}_{1\ 2\ \ldots\ n}$; orliamo il primo circolante con gli altri formando il determinante

$$D = \begin{vmatrix} c & o \ldots o & d & o \ldots o \\ o & o \ldots c & o & o \ldots d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & c \ldots o & o & d \ldots o \\ b_1 & b_2 \ldots b_n & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_2 & b_3 \ldots b_1 & a_2 & a_3 \ldots a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_1 \ldots b_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-1} \end{vmatrix},$$

il quale, a meno del fattore $(-1)^{\binom{n-1}{2}}$, equivale a

$$D_1 = \begin{vmatrix} c & o \ldots o & d & o \ldots o \\ o & c \ldots o & o & d \ldots o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o \ldots c & o & o \ldots d \\ b_1 & b_2 \ldots b_n & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_2 & b_3 \ldots b_1 & a_2 & a_3 \ldots a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_1 \ldots b_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Se dalle colonne $(n+1)^{\text{esima}}$, $(n+2)^{\text{esima}} \ldots 2n^{\text{esima}}$ di D_1 si sottraggono rispettivamente le colonne 1^a, $2^a \ldots n^{\text{esima}}$ moltiplicate per $\frac{d}{c}$, si ha:

$$D_1 = \begin{vmatrix} c & o & o \ldots o & o & o & \ldots o \\ o & c & o \ldots o & o & o & \ldots o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o \ldots c & o & o & \ldots o \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots b_n & a_1 - b_1\frac{d}{c} & a_2 - b_2\frac{d}{c} & \ldots a_n - b_n\frac{d}{c} \\ b_2 & b_3 & b_4 \ldots b_1 & a_2 - b_2\frac{d}{c} & a_3 - b_3\frac{d}{c} & \ldots a_1 - b_1\frac{d}{c} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_1 & b_2 \ldots b_{n-1} & a_n - b_n\frac{d}{c} & a_1 - b_1\frac{d}{c} & \ldots a_{n-1} - b_{n-1}\frac{d}{c} \end{vmatrix};$$

ossia:

$$D_1 = c^n \left| \begin{matrix} a_1 - b_1 \frac{d}{c}, & a_2 - b_2 \frac{d}{c} \ldots a_n - b_n \frac{d}{c} \\ a_2 - b_2 \frac{d}{c}, & a_3 - b_3 \frac{d}{c} \ldots a_1 - b_1 \frac{d}{c} \\ \cdots & \cdots \\ a_n - b_n \frac{d}{c}, & a_1 - b_1 \frac{d}{c} \ldots a_{n-1} - b_{n-1} \frac{d}{c} \end{matrix} \right| ;$$

e quindi:

$$(-1)^{\binom{n-1}{2}} D = \left| \begin{matrix} a_1c - b_1d & a_2c - b_2d \ldots\ldots & a_nc - b_nd \\ a_2c - b_2d & a_3c - b_3d \ldots\ldots & a_1c - b_1d \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nc - b_nd & a_1c - b_1d \ldots\ldots & a_{n-1}c - b_{n-1}d \end{matrix} \right|$$

Dunque: *Un determinante formato orlando un circolante di elementi* $a_1 \ldots a_n$ *con un circolante di elementi* $b_1, b_2, \ldots b_n$, *uno di elementi* $d, o, \ldots o$ *ed uno di elementi* $c, o, \ldots o$, *in modo che quest'ultimo formi l'incrociamento ai due precedenti, equivale a meno del fattore* $(-1)^{\binom{n-1}{2}}$, *al circolante di elementi* $a_1c-b_1d, a_2c-b_2d \ldots a_nc-b_nd$.

APPLICAZIONI.

a) Facciamo $d = x$ e, per semplicità, $c = 1$; consideriamo allora l'equazione

$$f(x) = \left| \begin{matrix} 1 & o \ldots o & x & o \ldots o \\ o & o \ldots 1 & o & o \ldots x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & 1 \ldots o & o & x \ldots o \\ b_1 & b_2 \ldots b_n & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_2 & b_3 \ldots b_1 & a_2 & a_3 \ldots a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_1 \ldots b_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-1} \end{matrix} \right| = 0.$$

In virtù del teorema precedente e di una notissima proprietà dei circolanti, il primo membro equivale, a meno del segno, a

$$\prod_{i=1}^{n} \left\{ (a_1 - b_1x) + \alpha_i (a_2 - b_2x) + \ldots + \alpha_i^{n-1} (a_n - b_nx) \right\}$$

dove α_i è una delle radici di $x^n - 1 = 0$. L'equazione $f(x) = 0$ è dunque riducibile nel campo di razionalità di a_i, b_i, α_i, ed ha per radici

$$x_i = \frac{a_1 + a_2 \alpha_i + \ldots + a_n \alpha_i^{n-1}}{b_1 + b_2 \alpha_i + \ldots + b_n \alpha_i^{n-1}} \; (i = 1, 2 \ldots n).$$

b) Facciamo ora inoltre $b_1 = x$, $b_2 = b_3 = \ldots b_n = 0$; in questo caso, senza alterazione di segno, possiamo scrivere il determinante orlato così:

$$\varphi(x) = \left| \begin{matrix} 1 & o \ldots o & x & o \ldots\ldots o \\ o & o \ldots 1 & o & x \ldots\ldots o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & 1 \ldots o & o & o \ldots\ldots x \\ x & o \ldots o & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ o & x \ldots o & a_2 & a_3 \ldots a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o \ldots x & a_n & a_1 \ldots a_{n-1} \end{matrix} \right| .$$

E l'equazione $\varphi(x) = 0$ ha per radici

$$x_i = \pm \sqrt{a_1 + a_2 \alpha_i + \ldots + a_n \alpha_i^{n-1}} \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

c) Ritornando al caso *a)* supponiamo $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 1$, ma $(1\ 2 \ldots n) \neq 0$. Allora il circolante di elementi $1 - b_1 x, \ldots 1 - b_n x$ si riduce, sviluppato, semplicemente a $(-1)^n x^n (1\ 2 \ldots n) + (-1)^{n-1} x^{n-1} \Sigma (1\ 2 \ldots i' \ldots n)$; la equazione $f(x) = 0$ ha dunque, in questo caso, $n - 1$ radici nulle, e l'altra è data da

$$x = \frac{\sum_i (1\ 2 \ldots i' \ldots n)}{(1\ 2 \ldots n)}.$$

d) Restando ancora nelle ipotesi del caso *a)* supponiamo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, ma $\Sigma (1'\ 2' \ldots i \ldots n') \neq 0$.

In questo caso il circolante di elementi $a_1 - x_1 \ldots a_n - x$ si riduce, sviluppato, semplicemente ad $(1'\ 2' \ldots n') - x (1'\ 2' \ldots i \ldots n')$; la equazione $f(x) = 0$ ha dunque, in questo caso, $n - 1$ radici infinite e l'altra è data da

$$x = \frac{(1'\ 2' \ldots n')}{\Sigma (1'\ 2' \ldots i \ldots n')}.$$

e) Finalmente particolarizziamo il caso *b)* supponendo $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, allora la somma $a_1 + a_2 \alpha_i + \ldots a_n \alpha_i^{n-1}$ è nulla sempre, eccetto il caso $\alpha_i = 1$; l'equazione $\varphi(x) = 0$ ha dunque in questo caso $2(n - 1)$ radici nulle e le altre due son date da $x \pm \sqrt{n}$.

R. Occhipinti.

QUISTIONI PROPOSTE

642. Sia c^2 un cerchio fisso e c'^2 un altro che rotoli sopra quello. Da un punto fisso A di c^2 si conducano le tangenti AM e AN a c'^2; il luogo dei punti di contatto M ed N è una *sestica tricircolare*. Si studino i punti singolari di tale curva.

L'inviluppo della retta MN è una *ellisse*. Quale relazione deve legare i raggi dei due circoli affinchè l'ellisse degeneri?

643. Sia c^2 un cerchio fisso di centro C e c'^2 uno di raggio variabile e di centro C', e sia P un punto d'intersezione dei due cerchi; il luogo delle ulteriori intersezioni tanto dei raggi CP con c'^2, quanto delle tangenti in P a c^2 con c'^2, sono *conchiglie di Pascal*, simmetriche l'una dell'altra. In particolare se la distanza dei centri CC' è metà del raggio di c^2 si hanno due *cardioidi*.

644. Si considerino tutte le coniche simili γ^2, aventi un fuoco F sopra un dato cerchio c^2 di centro C e di raggio r e aventi per direttrice corrispondente una data retta d; si dimostri che:

a) L'inviluppo di tali coniche è, in generale, una coppia di coniche simili alle γ^2. (*)

b) Il luogo dei centri delle γ^2 (quando queste sono coniche centrali) è, in generale, un'ellisse.

c) Il luogo dei vertici delle γ^2 è composto di due coniche, di cui una è sempre una ellisse, e l'altra è ellisse se le γ^2 son dotate di

(*) V. il n. 42 dei miei *Esercizi di Geometria Analitica*, pubblicati nel v. XVI di questo periodico. (G. C-L.)

centro, e si scinde invece in una coppia di rette parallele o coincidenti se le γ^2 sono parabole.

d) Il luogo dei secondi fuochi delle γ^2 (nel caso in cui queste sieno coniche centrali) è una ellisse.

e) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le tangenti in F a c^2 è, in generale, una conica simile alle γ^2. Trovare la condizione che deve essere soddisfatta, affinchè tale conica degeneri, e dimostrare che nel caso in cui le γ^2 sono parabole, tale condizione esprime che d passa per C.

f) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 coi raggi CF coincide con l'inviluppo delle γ^2 (vedi *a*).

g) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le parallele condotte da F a d è composto di due ellissi; queste sono concentriche in C quando d passa per C.

Si esaminino in tutta questa questione i seguenti casi particolari:

1. Se le γ^2 sono parabole.
2. Se d è tangente a C^2.
3. Se d passa per C.
4. Se, indicando con k la distanza di C da d e con e l'eccentricità delle γ^2, è $e = \frac{r}{k}$.

G. Cardoso-Laynes.

645. Sopra una retta (o una curva qualunque di genere zero) si hanno due gruppi armonici di punti $A_1 B_1 C_1 D_1$ e $A_2 B_2 C_2 D_2$ ($A_1 C_1$ separati da $B_1 D_1$, $A_2 C_2$ da $B_2 D_2$); la involuzione definita dalle due coppie di punti coniugati $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, che denotiamo con $(A_1 C_1; A_2 C_2)$, e la involuzione $(B_1 D_1; B_2 D_2)$ hanno una coppia comune, che indicheremo con $A_3 C_3$; le due involuzioni $(A_1 C_1; B_2 D_2)$ e $(A_2 C_2, B_1 D_1)$ hanno una coppia comune che indichiamo con $B_3 D_3$: dimostrare che il gruppo $A_3 B_3 C_3 D_3$ è armonico.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

Carrara. — *I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. Studio storico-critico.* — Problema secondo. *La duplicatura del cubo* (Estratto dalla " Rivista di Fisica mat. e Scienze nat. ").

Nel n. 3 anno XVIII di questo Periodico abbiamo reso conto della prima parte di questa interessante pubblicazione relativa al primo problema, cioè la *quadratura* del circolo.

In questa seconda parte, l'egregio A. dopo avere brevemente e lucidamente mostrata l'impossibilità di risolvere il celebre problema di Delo, adoperando solamente la riga ed il compasso, fa la storia del problema medesimo, cominciando dalle varie leggende sull'origine di esso, ed osservando giustamente che anche senza ricorrere ad origini favolose, molti ritengono che tale problema non fosse che un passo naturale conseguente a quello della duplicazione del quadrato.

Nei primi cinque capitoli, dopo avere accennato che Ippocrate ridusse il problema della duplicazione del cubo all'altro della ricerca di due medie geometriche, l'A. espone le varie risoluzioni proposte da Archita, Platone, Menecmo, Eratostene, Apollonio, Erone, Nicomede, Diocle, ed altri antichi geometri coll'aiuto di curve diverse dal circolo, o di strumenti meccanici, secondo le memorie lasciate principalmente da Pappo nelle sue preziose *Collezioni*; e fa pure cenno dei pochi matematici, successivi a Paffo e anteriori a Cartesio, che si occuparono della quistione.

Il capitolo VI è destinato a trattare dell'influenza decisiva che sullo studio del problema ebbe la scoperta della geometria analitica.

Il cap. VII contiene la storia del problema da Cartesio ad oggi ed il cap. VIII tratta di alcune soluzioni approssimate, che possono avere qualche utilità dal punto di vista pratico, e che per la massima parte sono state trovate da ricercatori indotti, e che credevano con esse di avere risoluto *esattamente* il problema.

L'opera è scritta con la chiarezza e precisione, consuete all'egregio A. e costituisce una lettura piacevole ed utile. K.

LUIGI CREMONA

Il 10 del corrente mese di giugno si spense in Roma di male cardiaco il **Prof. Sen. Luigi Cremona.**

La sua morte è lutto della patria, che perde in lui una delle sue glorie più fulgide e più pure, un carattere integro e diritto, una mente superiore, che con eguale abilità si adattava allo studio delle più ardue ed astratte quistioni matematiche, come a quello delle quistioni politiche e sociali; è lutto della scienza matematica universale, nella quale ha lasciato tracce imperiture, nella quale insieme al Betti, al Brioschi, al Beltrami, che lo hanno di poco preceduto nella tomba ha occupato durante la seconda metà dello scorso secolo una delle posizioni più eminenti, onorando il nome d'Italia; è lutto delle scuole tutte italiane, delle quali nei suoi alti e molteplici uffici curava tanto bene gl'interessi.

Luigi Cremona nacque il 7 decembre 1830 a Pavia, ed ivi compiè con somma lode gli studi liceali ed universitari, avendo a compagni Benedetto e Giovanni Cairoli. Nel 1848, lasciata la scuola, si arruolò fra i volontari, e per 18 mesi prese parte alle guerre dell'indipendenza sul Piave, a Treviso e poi a Venezia fino alla capitolazione avvenuta nell'agosto 1849.

Tornato a Pavia, continuò gli studi sotto la guida dell'illustre Brioschi, e conseguì la laurea e il diploma di abilitazione all'insegnamento nelle scuole secondarie.

Fu per alcuni mesi *tirocinante* e libero conferenziere nel liceo di Pavia; poi professore del Ginnasio di Cremona, e finalmente all'Università di Bologna per disposizione del Brioschi. Da Bologna passò al Politecnico di Milano, e finalmente nel 1873 fu chiamato a Roma dal ministro Scialoia per riordinare la scuola degl'ingegneri e la facoltà di matematiche.

Da quasi 30 anni egli insegnava matematiche superiori in quella Università e dirigeva la scuola degl'ingegneri, alla quale aveva data una vita novella e rigogliosa, circondato dalla stima ed ammirazione dei colleghi, dalla venerazione degli studenti; e la facoltà matematica stava decretando solenni onoranze al restauratore e riordinatore benemerito dei severi studi dell'ingegneria in Italia, quando la morte lo rapiva.

Non ci proponiamo qui di analizzare l'opera magistrale del Cremona, ma non possiamo tacere come sia stato grandissimo merito di lui l'aver messo in onore in Italia gli studi di geometria pura, che prima erano stati assolutamente trascurati, e di essere stato il fondatore di una scuola geometrica Italiana, che vanta ormai numerosi e valentissimi cultori. Colle sue ricerche egli ha largamente mietuto in un campo quasi vergine ed ha dischiusa la via in un terreno poco esplorato ad altri valenti ricercatori.

Fra le sue più importanti opere scientifiche non si può tacere dei lavori che si connettono al tentativo di costruire una teoria proiettiva delle linee e superficie algebriche, fra le quali notevolissima la *memoria sulle superficie del terz'ordine* che ebbe il premio Steiner; e quelle relative alle *trasformazioni birazionali*, che da lui furono dette *cremoniane*, e che sono state la prima origine di tante ricerche importantissime, ed hanno contribuito a gettare nuova luce sulla teoria delle curve e superficie.

È pure interessante ricordare come egli dedicò molta parte della sua attività alla didattica, quasi volendo dimostrare che gli studi più elevati non potevano fargli dimenticare il primo e modesto suo insegnamento nel Ginnasio e Liceo; e la caratteristica del suo insegnamento fu sempre la cura minuziosa e delicata per i principî fondamentali della sua scienza.

Prova della sua attività in questo campo sono: 1° la traduzione degli ottimi *Elementi di matematica* di R. Baltzer pubblicata dal 1866 al 1868; 2° gli *Elementi di geometria proiettiva* ad uso degli Istituti tecnici del regno d'Italia pubblicati nel 1873, quando egli era professore di geometria superiore al R. Istituto tecnico superiore di Milano; 3° gli *Elementi di calcolo grafico* ad uso degli Istituti tecnici, pubblicati nel 1874. La prima di queste opere destinata alle scuole secondarie del regno d'Italia, non è giunta, almeno crediamo, alla 2ª edizione, ma ha infuso una vita nuova all'insegnamento elementare, e ad essa hanno attinto quanti si son dedicati a migliorare l'insegnamento secondario, che era caduto assai in basso.

Le altre due, che pure non sono giunte alla 2ª edizione, e che si riferiscono a materie che hanno fatto per pochissimo tempo parte dell'insegnamento tecnico, hanno largamente contribuito ad introdurre l'insegnamento importantissimo della geometria proiettiva nel 1° biennio dell'Università, e quello così utile della statica grafica nel 1° anno di applicazione per gl'ingegneri.

Nel campo della statica grafica ricordiamo l'interessantissimo opuscolo *Le figure reciproche nella statica grafica* (Milano, Bernardoni, 1872), di cui il Migotti fece una traduzione tedesca a Vienna, nel quale si dà il metodo semplice e pratico oggi in uso per calcolare graficamente colla massima rapidità gli sforzi a cui sono sottoposte le varie parti di una travatura.

Il Cremona ebbe tutti gli onori che si dovevano ai suoi altissimi meriti. Fece parte di quasi tutte le società ed Accademie scientifiche italiane e straniere, e fra queste citiamo la Società reale di Londra poichè ben raramente questa società conferisce un tale onore a stranieri. Dal 16 marzo 1879 faceva parte del Senato, e ne fu a lungo anche Vice-Presidente; fu anche ministro della pubblica istruzione, ma disgraziatamente solo per pochi giorni, dal 1 al 29 giugno 1898. La lunga pratica della scuola fatta nell'insegnamento, nel consiglio superiore dell'istruzione, nella direzione della scuola degl'ingegneri, indicavano il Cremona come uno degli uomini politici più adatti a reggere l'alto ufficio di Ministro, la pubblica opinione prevedeva che avrebbe saputo fare molto bene alla scuola, all'istruzione e all'educazione del popolo, correggendo tante cose; e forse per queste ragioni fu ministro solo per pochi giorni.

Ecco un elenco delle principali pubblicazioni disseminate nei periodici scientifici e negli atti di alcune Accademie.

Annali di scienze matematiche-fisiche pubblicati a Roma da B. Tortolini:

1. Sulle tangenti sfero-conjugate. 6° vol. 1855.
2. Intorno ad un teorema di Abel. 7° vol. 1856.
3. Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. 2ª serie, 1° e 2° vol. 1858-59.
4. Intorno alla superficie della seconda classe inscritta in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. 2° vol. 1859.
5. Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart'ordine (e terza classe) id. id.
6. Sopra un problema generale di geometria. 3° vol. 1860.
7. Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè come caso particolare il teorema di Dupin sulle tangenti conjugate. Id. id.
8. Sulle coniche e sulle superficie di second'ordine congiunte. Id. id.
9. Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. 4° vol. 1861.
10. Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane. 6° vol. 1864.

Annali di matematiche diretti da Brioschi e Cremona (2ª Serie):

11. Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche. 1 vol. 1867-68.

Nouvelles Annales de Mathématiques par MM. Terquem et Gerono:

12. Sur les coniques sphériques. 19me vol. 1860.
13. Propriété de la cubique gauche. Id. id.
14. Mémoire de Géométrie pure sur les cubiques gauches. 2me série, 1 vol. 1862.
15. Démonstration géometrique de deux théorèmes relatif à la surface d'égale pente circonscrite à une conique. 4me vol. 1865.

Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze, lettere ed arti di Milano:

16. Sulle superficie gobbe del terz'ordine. 3° vol. 1860.

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

17. Introduzione ad una teoria geometrica dalle curve piane. 12° vol. 1861. (*)
18. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. 2ª serie, 2° vol. 1862.
19. Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba. 3° vol. 1863.
20. Preliminari ad una teoria geometrica dalle superficie. 6° vol. 1866. (**)
21. Sulle trasformazioni delle figure piane. 2ª serie, 5° vol. 1866.
22. Sulle superficie gobbe di quarto grado. 8° vol. 1868.
23. Sugli integrali a differenziale algebrica. 10° vol. 1870.
24. Sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado. 3ª serie, 1° vol. 1871.
25. Sulla trasformazione razionale di 2° grado nello spazio, la cui inversa è di 4° grado. Id. id. id.
26. Rappresentazione piana di alcune figure algebriche dotate di curve cuspidali. 2 vol. 1872.

Rendiconto delle Sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

27. Intorno alla trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell'altra una sola retta. 1861-62.
28. Sur les transformations géométriques des figures planes. 1873.

Journal für die reine und angewandte Mathematik:

29. Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe. 58° vol. 1861.

(*) Il Curtze ne fece nel 1865 una edizione tedesca a Greisswald, che fu più tardi ristampata dal Calvary a Berlino e tradotta in lingua boema a Praga nel 1873 dal Weyr.

(**) Il Curtze ne fece una traduzione tedesca (Berlino, Calvary, 1870) aggiungendovi la *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* inserita nel vol. 68 del " Giornale di Crelle ".

30. Note sur les cubiques gauches. 60° vol. 1862.
31. Sur les surface gauches du 3[me] degré. Id. id.
32. Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée. 63° vol. 1864.
33. Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents. Id. id.
34. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Id. Id.
35. Mémoire de géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre. 68° vol. 1868.

Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris:

36. Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe. 52° vol. 1861.
37. Sur les surfaces développables du cinquième ordre. 54° vol. 1862.
38. Sur les nombres de coniques qui satisfont à des conditions doubles. 59° vol. 1864.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato a Napoli dai sigg. Battaglini, Janni e Trudi:

39. Sulla teoria delle coniche. 1° vol. 1863.
40. Un teorema sulle cubiche gobbe. Id. id.
41. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Id. id.
42. Area d'un segmento di sezione conica. Id. id.
43. Sulla projezione iperboloidica di una cubica gobba. 2° vol. 1864.
44. Sulla teoria delle coniche. Id. id.
45. Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine. Id. id.
46. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. 3° vol. 1865.
47. Commemorazione di Eugenio Beltrami. 37° vol. 1900.

Reports of the British Association for the Advancement of Science:

48. On the geometrical trasformation of plane curves. 34° vol. 1884.

The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics:

49. On the fourteen-points conic. 3° vol.
50. On normal to conics, a new treatment of the subject. Id. id.

Matematische Annalen pubblicati a Leipzig dai sigg. A. Clebsch e E. Neumann.

51. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. 4° vol. 1871.
52. Observations géométriques à propos de la note de M. Brioschi: Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4° ordre avec un point double. Id. id.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e lettere:

53. Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano. 4° vol. 1867.
54. Un teorema intorno alle forme quadratiche non omogenee fra due variabili. Id. id.
55. Sopra ad una certa famiglia di superfici gobbe.
56. Sopra ad una certa curva di quart'ordine.
57. Sull'opera del prof. Casorati: *Teoria delle funzioni delle variabili complesse.* 2ª serie 1° vol. 1868.
58. Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. 2° vol. 1869.
59. Intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere in collaborazione col sig. Casorati. Id. id.
60. Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine. 3° vol. 1870.
61. Sulla superficie di quart'ordine, dotata di una conica dobbia. 4° vol., 1871.
62. Sulle trasformazioni razionali nello spazio. Id. id. (*)

Collectanea Matematica in memoriam Dominici Chelini. Hoepli, 1881:

63. Sopra una certa superficie del 4° ordine.

(*) Quest'ultima memoria fu riprodotta da Weyr nel "Ziva" di Praga e dal Dewulf nel "Bulletin de Sciences mathématiques et astronomiques", diretto da Darboux a Parigi.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 29 agosto 1903.

APPLICAZIONE DI UN CONCETTO NUOVO

all' analisi indeterminata aritmetica e algebrica di 2° grado con una nota sull'equazione di Pell.

(Contin. e fine, v. fasc. prec.)

CAPITOLO SECONDO

(Caso algebrico)

---

1. Sia D un polinomio intero rispetto ad una lettera a. Il polinomio sia inoltre di grado pari (questa condizione è necessaria se, come in appresso supporremo, l'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, per x ed y interi rispetto ad a, dev'essere possibile). Si ponga, come sempre è lecito:

$$D = \omega^2 + r,$$

dove ω ed r indicano polinomj ordinati per le potenze discendenti di a, e di cui il primo supera il secondo in grado. Supponendo che il segno di ω sia stato fissato una volta per sempre, si dirà che ω è la parte intera ed r il resto della radice quadrata di D.

Un binomio della forma $E + F\sqrt{D}$, dove E ed F indicano due funzioni *razionali* di a, si dirà *iperbolico*, se la parte intera del quoziente $E : F$ sarà eguale ad ω, parte intera di $\sqrt{D}$. Ciò non avvenendo, il binomio si dirà *ellittico*. La ragione di queste denominazioni si chiarirà in appresso.

Un binomio iperbolico o ellittico non muta specie se si moltiplica per un fattore qualsiasi razionale in a, perchè tale moltiplicazione non altera il rapporto $E : F$.

Due binomj con eguale *rapporto caratteristico* $E : F$ si stimeranno equivalenti. Posto $E : F = \mu$, a tutti i binomj il cui rapporto caratteristico è μ, corrisponde un'*unica* sostituzione

$$\left(z, \frac{\mu z + D}{z + \mu}\right)$$

sulla variabile z.

Un binomio $E + F\sqrt{D}$ ne ammette infiniti equivalenti $e + f\sqrt{D}$, nei quali e ed f sono interi rispetto ad a.

I binomj iperbolici formano un gruppo, cioè: il prodotto di due binomj iperbolici è iperbolico. Siano infatti $E + F\sqrt{D}$, $E' + F'\sqrt{D}$ due binomj iperbolici. Se ne faccia il prodotto, dopo averli scritti sotto la forma:

$$\varepsilon(e + f\sqrt{D}) \;,\; \varepsilon'(e' + f'\sqrt{D}),$$

(ε, ε' razionali; e, f, e', f' interi rispetto ad a). Si ottiene:

$$\varepsilon\varepsilon'\left[e e' + \mathrm{D} f f' + (e f' + e' f)\sqrt{\mathrm{D}}\right],$$

dove

$$\frac{e e' + \mathrm{D} f f'}{e f' + e' f}$$

è il rapporto caratteristico. Posto:

$$e = f\omega + \lambda \quad ; \quad e' = f'\omega + \lambda',$$

(e per λ e λ' saranno da intendere due polinomj interi di grado ordinatamente inferiore ai gradi di f e di f'), il precedente rapporto si potrà scrivere:

$$\omega + \frac{r f f' + \lambda\lambda'}{2\omega f f' + f\lambda' + f'\lambda}.$$

La parte intera di questa espressione è ω, essendo facile ravvisare che il numeratore della frazione è di grado minore del grado del denominatore; il prodotto in esame è dunque iperbolico.

Tra le sostituzioni

$$\left(z, \frac{\mu z + \mathrm{D}}{z + \mu}\right)$$

le iperboliche, quelle cioè che corrispondono a binomj iperbolici, formano un gruppo Γ', isomorfo al gruppo dei binomj stessi. Difatti il prodotto

$$\left(z, \frac{\mu z + \mathrm{D}}{z + \mu}\right)\left(z, \frac{\mu' z + \mathrm{D}}{z + \mu'}\right) = \left(z, \frac{\frac{\mu\mu' + \mathrm{D}}{\mu + \mu'} z + \mathrm{D}}{z + \frac{\mu\mu' + \mathrm{D}}{\mu + \mu'}}\right)$$

ha per suo parametro

$$\frac{\mu\mu' + \mathrm{D}}{\mu + \mu'},$$

che è appunto il rapporto caratteristico del prodotto

$$(\mathrm{E} + \mathrm{F}\sqrt{\mathrm{D}})(\mathrm{E}' + \mathrm{F}'\sqrt{\mathrm{D}}).$$

2. Teorema. - *Detto π_n il prodotto di* n *sostituzioni del gruppo* Γ', *e detti* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *i primi* n *quozienti incompleti dell'ordinario sviluppo di* $\sqrt{\mathrm{D}}$ *in frazione continua,* (*) *sussiste un'identità della forma:*

(C) $$\pi_n = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\mathrm{P}z + \mathrm{Q}}{\mathrm{R}z + \mathrm{S}}\right),$$

(*) Per ordinario sviluppo di $\sqrt{\mathrm{D}}$ in frazione continua intendasi quello (convergente o no) che si ottiene valutando ω come parte intera della radice e applicando il noto algoritmo per lo sviluppo della radice di un numero intero e positivo. Esempio:

$$\sqrt{(a^2+1)^2 + a} = (a^2+1) + \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{\sqrt{(a^2+1)^2 + a} + (a^2+1)}{a} = 2a + \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{\sqrt{(a^2+1)^2 + a} + (a^2-1)}{4a+1} = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{z}; \text{ ecc.}$$

nella quale P, Q, R, S *indicano polinomj interi in* a, *di cui il primo ha grado non minore del grado del terzo.*

Dimostrerò il teorema per induzione, e a tal fine proverò che, se esso vale per π_n, prodotto di n sostituzioni del gruppo Γ', vale anche per π_{n+1}. Verificato poi che per $n=1$ il teorema sussiste, esso rimarrà dimostrato per n qualunque.

Supposta pertanto vera la (C), vi si operi sulla z una sostituzione iperbolica qualunque

$$\frac{\mu z + \mathrm{D}}{z+\mu},$$

ridotta alla forma

$$\frac{pz + \mathrm{D}q}{qz+p}$$

(p e q interi rispetto ad a). Il primo membro si muterà in π_{n+1}, e si avrà quindi:

$$\pi_{n+1} = \left(a_1, a_2, \ldots\, a_n, \frac{z\,(p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}) + p\mathrm{Q} + \mathrm{D}q\mathrm{P}}{z\,(p\mathrm{R}+q\mathrm{S}) + p\mathrm{S} + \mathrm{D}q\mathrm{R}}\right). \tag{D}$$

Per trasformare questo 2º membro, si ponga nella (C): $z=\sqrt{\mathrm{D}}$; verrà:

$$\sqrt{\mathrm{D}} = \left(a_1, a_2, \ldots\, a_n, \frac{\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{D}}+\mathrm{Q}}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}+\mathrm{S}}\right),$$

d'onde si vede che

$$\frac{\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{D}}+\mathrm{Q}}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}+\mathrm{S}}$$

è il quoziente completo $(n+1)^{\text{mo}}$ dell'ordinario sviluppo di $\sqrt{\mathrm{D}}$ in frazione continua. Ma è noto che il detto quoziente è pure della forma

$$\frac{\gamma+\sqrt{\mathrm{D}}}{\theta},$$

dove γ e θ sono interi; perciò:

$$\frac{\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{D}}+\mathrm{Q}}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{D}}+\mathrm{S}} = \frac{\gamma+\sqrt{\mathrm{D}}}{\theta},$$

eguaglianza che si risolve nelle due:

$$\mathrm{P}\theta - \mathrm{R}\gamma = \mathrm{S}:$$
$$\mathrm{Q}\theta - \mathrm{S}\gamma = \mathrm{RD}.$$

Dalle quali facilmente:

$$\frac{p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}}{p\mathrm{R}+q\mathrm{S}} = \frac{\gamma}{\theta} + \frac{p\mathrm{S}+\mathrm{D}q\mathrm{R}}{\theta(p\mathrm{R}+q\mathrm{S})} = \frac{\gamma+\omega}{\theta} + \frac{p\mathrm{S}+\mathrm{D}q\mathrm{R} - \omega\,(p\mathrm{R}+q\mathrm{S})}{\theta\,(p\mathrm{R}+q\mathrm{S})} =$$
$$= \frac{\gamma+\omega}{\theta} + \frac{(p-q\omega)\,(\mathrm{S}-\mathrm{R}\omega) + rq\mathrm{R}}{\theta\,(p\mathrm{R}+q\mathrm{S})}.$$

Il quoziente incompleto a_{n+1} è la parte intera di $\frac{\gamma+\omega}{\theta}$. Si avrà perciò:

$$\frac{\gamma+\omega}{\theta} = a_{n+1} + \frac{\sigma}{\theta},$$

dove per σ si dovrà intendere un polinomio di grado inferiore al grado di θ (salvo il caso che θ sia indipendente da a, epperò $\sigma=0$). Sostituendo:

$$\frac{pP+qQ}{pR+qS}=a_{n+1}+\frac{(p-q\omega)(S-R\omega)+\sigma(pR+qS)+rqR}{\theta(pR+qS)}.$$

Dimostrerò ora che nell'ultima frazione il grado del numeratore è minore del grado del denominatore; così sarà provato che la parte intera del quoziente

$$\frac{pP+qQ}{pR+qS}$$

è a_{n+1}.

Nella detta frazione, fermo lasciando il denominatore, invece di $p-q\omega$, si scriva q, che ha maggior grado, perchè la parte intera di $p:q$ è ω. Se dopo il mutamento non si faranno riduzioni, il massimo esponente di a nel numeratore potrà crescere, ma non diminuire. Eseguendo, la frazione diverrà:

$$\frac{qS(1+\sigma)+R(p\sigma+qr-q\omega)}{\theta(pR+qS)}.$$

Nel nuovo numeratore, invece del binomio $qr-q\omega$, si scriva p, che è di ugual grado. La frazione diverrà ancora, senza riduzione alcuna:

$$\frac{(pR+qS)(1+\sigma)}{\theta(pR+qS)}.$$

E poichè in questa il grado del numeratore è evidentemente minore del grado del denominatore (salvo sempre il caso che θ sia indipendente da a), si conclude che lo stesso accadeva nella frazione originaria.

Dimostrato in tal modo che la parte intera di

$$\frac{pP+qQ}{pR+qS}$$

è a_{n+1}, si torni alla (D). Il quoziente dei due termini in z nella frazione che vi comparisce è a_{n+1}; si avrà perciò con la divisione:

$$\frac{z(pP+qQ)+pQ+DqP}{z(pR+qS)+pS+DqR}=\left(a_{n+1},\frac{P'z+Q'}{R'z+S'}\right),$$

dove il grado di R' è minore del grado di P', come grado del resto rispetto al divisore. Sostituendo, si otterrà per π_{n+1} l'identità da dimostrare.

Rimane a provare che per $n=1$ l'identità è vera. Ma ciò è evidente. Considerando infatti una sostituzione iperbolica qualunque:

$$\frac{p_1z+Dq_1}{q_1z+p_1},$$

mediante la solita divisione dei termini in z se ne trae:

$$\frac{p_1 z + Dq_1}{q_1 z + p_1} = \left(\omega, \frac{q_1 z + p_1}{q' z + p'}\right) = \left(a_1, \frac{q_1 z + p_1}{q' z + p'}\right),$$

nella quale ultima il grado di q' (resto) è minore del grado di q_1 (divisore).

Osservazione. - Se θ è indipendente da a, l'esposta dimostrazione non esclude che tra a_{n+1} e la parte intera di

$$\frac{pP + qQ}{pR + qS}$$

possa esservi differenza; ma prova al tempo stesso che tale differenza, quando esistesse, sarebbe un numero indipendente da a. E allora nell'eguaglianza

$$\frac{z(pP + qQ) + pQ + DqP}{z(pR + qS) + pS + DqR} = \left(a_{n+1}, \frac{P'z + Q'}{R'z + S'}\right)$$

P' ed R' sarebbero di egual grado, secondo nell'enunciazione del teorema fu preveduto.

3. Corollario I. - *Il parametro o rapporto caratteristico del prodotto di* n *sostituzioni del gruppo* Γ' *e il radicale* $\sqrt{D}$, *sviluppati in frazione continua, hanno comuni i primi* n *quozienti incompleti (salvo negli estremi la possibile differenza di una costante additiva).*

Se infatti nella (C) si pone $z = \infty$, dopo avere eseguito le moltiplicazioni operative indicate nel 1° membro, questo si riduce al rapporto caratteristico del prodotto π_n, mentre il 2° membro diviene:

$$\left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{P}{R}\right).$$

Pertanto, se il grado di P è maggiore del grado di R, l'enunciata proposizione è evidente. Se poi il grado di P è uguale al grado di R, il quoziente incompleto n^{mo} relativo al rapporto caratteristico si otterrà dividendo il 1° termine di R pel 1° termine di P e aggiungendo ad a_n la costante che ne viene. E allora lo sviluppo di $\sqrt{D}$ e quello del rapporto caratteristico avranno comuni i primi $n-1$ quozienti incompleti, ed eguali altresì i susseguenti, salvo una costante additiva.

Corollario II. - *Il rapporto caratteristico del prodotto di* n *binomj iperbolici e il radicale* $\sqrt{D}$, *sviluppati in frazione continua, hanno comuni i primi* n *quozienti (salvo negli estremi la possibile differenza di una costante additiva).*

È una conseguenza del corollario precedente e dell'isomorfismo tra il gruppo Γ' e quello dei binomj iperbolici.

Esempi. - Sia: $D = (a^2 + 1)^2 + a$, epperò

$$\sqrt{D} = \left(a^2 + 1\ ,\ 2a\ ,\ \frac{a}{2} - \frac{1}{8}\ , \ldots\right).$$

Il rapporto caratteristico relativo al prodotto dei binomj iperbolici

$$a^2+1+\sqrt{D}$$
$$a^4+a-1+(a^2-1)\sqrt{D}$$
$$a^3+a-1+a\sqrt{D}$$

è

$$\frac{4a^8+8a^7+3a^6+2a^4-9a^3+a^2-4a+2}{4a^7+4a^5+a^4-4a^3+a^2-5a+2},$$

e il suo sviluppo in frazione continua comincia appunto con i quozienti incompleti: a^2+1, $2a$, $\frac{a}{2}-\frac{1}{8}$, come è facile verificare.

Sia invece:

$$D=(a^2+1)^2-2; \sqrt{D}=(a^2+1, -a^2-1, \ldots).$$

Il rapporto caratteristico del prodotto

$$[a^4+a-1+(a^2-1)\sqrt{D}]\,[a^3+a-1+a\sqrt{D}],$$

è

$$\frac{2a^7+2a^5-4a^3+a^2-a+1}{2a^5-2a+1}.$$

Sviluppandolo in frazione continua si trova che il primo quoziente incompleto è a^2+1, come quello di $\sqrt{D}$; ma che il secondo è $-a^2-\frac{1}{2}$ e differisce dal secondo quoziente incompleto di $\sqrt{D}$ della costante $\frac{1}{2}$.

Corollario III. - *Comunque una sostituzione iperbolica o un binomio iperbolico si decompongano in fattori (sostituzioni o binomj iperbolici), il numero dei fattori sarà limitato.*

Perchè, se la decomposizione si potesse prolungare all'infinito, il rapporto caratteristico della sostituzione o del binomio avrebbe comuni con $\sqrt{D}$ infiniti quozienti incompleti. Ma ciò è impossibile, perchè il rapporto caratteristico è razionale, epperò si sviluppa in frazione continua limitata; mentre per contrario lo sviluppo di $\sqrt{D}$ è infinito.

4. Definizione. - *Si dirà* **indice** *di un binomio iperbolico il massimo numero di fattori iperbolici ne' quali esso è decomponibile. Ai binomj ellittici si attribuirà, per convenzione, l'indice zero.*

Per determinare l'indice del binomio $E+F\sqrt{D}$, se ne svilupperà il rapporto caratteristico $E:F$ in frazione continua. Il numero ν dei primi quozienti incompleti che lo sviluppo avrà comuni con $\sqrt{D}$ darà un limite superiore dell'indice. Sarà poi facile verificare nei singoli casi particolari se quel limite può essere raggiunto o no. Se per esempio si trovasse che il prodotto

$$(E+F\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^{\nu-1}$$

è iperbolico, l'indice del binomio sarebbe ν per l'appunto. Infatti dall'eguaglianza

$$(E+F\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^{\nu-1}=H+K\sqrt{D}$$

si trae:

$$E + F\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^{\nu-1}(H + K\sqrt{D}).$$

Se dunque $H + K\sqrt{D}$ è iperbolico, $E + F\sqrt{D}$ si decompone effettivamente in ν fattori iperbolici, perchè

$$\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}$$

è certamente tale. Così, se

$$D = (a^2+1)^2 + a \;;\; \omega = a^2+1;$$
$$E = 2a^7 + 4a^5 + 2a^4 + a^3 + a^2 - a - 1;$$
$$F = 2a^5 + 2a^3 + a^2 - a,$$

si trova dapprima 2, come limite superiore dell'indice. (*) E poichè

$$(E + F\sqrt{D})\,(\sqrt{D} - \omega) = (a^6 + a^4 + a^3 + 1) + (a^4 - 1)\sqrt{D},$$

dove il 2° membro è iperbolico, si conclude che il cercato indice è per l'appunto 2.

5. Sia l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

(D ed N interi in a), da risolvere in polinomj interi. Si supponga che in D e in N i coefficienti siano reali; che il coefficiente del primo termine di D sia positivo; inoltre si disponga del segno di ω per modo da averne positivo il coefficiente del primo termine. Finalmente, poichè i segni x e di y non hanno importanza nella questione, essi s'intenderanno regolati in maniera che i primi termini di x e di y abbiano egual segno, talchè niuna elisione sarà possibile in $x + \omega y$ fra i termini di massimo grado. Si dirà inoltre che una soluzione (x, y) è d'indice 0, 1, 2..., quando il corrispondente binomio $x + y\sqrt{D}$ è d'indice 0, 1, 2.... Le soluzioni d'indice zero si diranno ellittiche; iperboliche le altre.

A un binomio $x + y\sqrt{D}$ a segni di x e di y non regolati, corrisponde sempre una soluzione: ma, regolati i segni, tale soluzione potrà essere (x, y), oppure $(x, -y)$ o $(-x, y)$. In questo secondo caso, ove cioè occorresse mutar segno ad una delle incognite, ad un binomio iperbolico corrisponderebbe per esempio una soluzione ellittica; bisogna perciò ben distinguere tra *binomio* $x + y\sqrt{D}$ e la *soluzione* che se ne deriva.

Per *grado* di una soluzione s'intenderà il grado del relativo valore di y; esso determina evidentemente un limite superiore pel grado della x. *Le soluzioni di cui si conosce il grado o un suo limite superiore si sanno trovare.* Basterà per trovarle mettere la y e la x (delle quali

(*) Il rapporto E : F e il radicale $\sqrt{D}$ hanno infatti comuni i primi due quozienti incompleti. Fatta astrazione da una costante additiva, essi avrebbero comune anche il terzo: ma nel caso presente l'indice del binomio non può essere 3, com'è facile vedere.

si conosce il grado o un suo limite superiore) sotto forma di polinomj a coefficienti indeterminati. La ricerca di questi dipenderà poi dalla risoluzione di un sistema di equazioni numeriche. *Lo stesso accade per le soluzioni d'indice non superiore a un limite dato,* come passo a dimostrare, premettendo a tal fine il teorema:

Affinchè una soluzione (x, y) *sia ellittica, è necessaria e sufficiente la condizione:*

$$\textit{grado } \omega y^2 \leq \textit{grado } \mathrm{N}.$$

Pongasi infatti:

$$x - \omega y = y_1.$$

Se (x, y) è iperbolica, il grado di y_1 è minore del grado di y, e ciò per definizione: se dunque (x, y) è ellittica, si avrà:

$$\text{grado } y_1 \geq \text{grado } y.$$

Si consideri in tal caso l'eguaglianza

$$(x + \omega y)\, y_1 = \mathrm{N} + r y^2.$$

Riguardando il modo come sono regolati i segni di x e di y, è chiaro che il primo membro non soffre elisioni fra i termini di massimo grado; chè altrimenti simili elisioni sarebbero possibili in $x + \omega y$, il che fu escluso. Ciò premesso, poichè il grado del termine $\omega y y_1$ supera quello di ry^2 (e i due membri debbono avere egual grado) se ne inferisce che il grado di N deve prevalere su quello di ry^2, epperò:

$$\text{grado } (x + \omega y)\, y_1 = \text{grado } \mathrm{N}.$$

Ma

$$\text{grado } (x + \omega y)\, y_1 \geq \text{ grado } \omega y y_1 \geq \text{ grado } \omega y^2;$$

dunque, se (x, y) è ellittica:

$$\text{grado } \omega y^2 \leq \text{ grado } \mathrm{N}.$$

Dico ora che, se (x, y) è iperbolica (epperò il grado di y_1 minore del grado di y), dovrà essere

$$\text{grado } \omega y^2 > \text{ grado } \mathrm{N}.$$

Ripresa infatti l'eguaglianza

$$(x + \omega y)\, y_1 = \mathrm{N} + r y^2,$$

si distinguano i due casi:

$$\text{grado } r y^2 \geq \text{ grado } \mathrm{N}; \quad \text{grado } r y^2 < \text{ grado } \mathrm{N}.$$

Nel primo:

$$\text{grado } \omega y^2 > \text{ grado } \mathrm{N},$$

e la tesi è dimostrata. Nel secondo:

$$\text{grado } (x + \omega y)\, y_1 = \text{ grado } \mathrm{N},$$

o anche:

$$\text{grado } (y_1 + 2\omega y)\, y_1 = \text{ grado } \mathrm{N}.$$

D'onde, considerando che nel primo membro il grado del 2° termine prevale:

$$\text{grado } \omega y y_1 = \text{grado N}$$

e conseguentemente:

$$\text{grado } \omega y^2 > \text{grado N}.$$

Corollario. - *Le soluzioni ellittiche si possono riguardare come note.*

Infatti la condizione

$$\text{grado } \omega y^2 \leq \text{grado N}$$

fissa il limite superiore del grado che può e deve avere la y di una soluzione ellittica. Conosciuto il limite superiore del grado, si troveranno le soluzioni come sopra fu detto.

6. Problema. - *Trovare tutte le soluzioni d'indice non superiore a un limite dato.*

Sia δ questo limite. Fu già visto come si trovino le soluzioni ellittiche o d'indice zero. Sia dunque (x, y) una soluzione iperbolica, d'indice non maggiore di δ. Percorrendo la serie

$$(x+y\sqrt{\mathrm{D}}),\ (x+y\sqrt{\mathrm{D}})(\sqrt{\mathrm{D}}-\omega),\ (x+y\sqrt{\mathrm{D}})(\sqrt{\mathrm{D}}-\omega)^2, \ldots\ (x+y\sqrt{\mathrm{D}})(\sqrt{\mathrm{D}}-\omega)^\delta,$$

che comincia da un binomio iperbolico, si dovrà, dopo alcuni termini iperbolici, trovarne in essa un primo ellittico:

$$(x+y\sqrt{\mathrm{D}})\ (\sqrt{\mathrm{D}}-\omega)^{\delta_1}.$$

Se così non fosse, significando con $\mathrm{H}+\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{D}}$ un binomio iperbolico, si avrebbe, per tutti i valori di δ_1 da 1 a δ inclusivamente:

$$(x+y\sqrt{\mathrm{D}})\ (\sqrt{\mathrm{D}}-\omega)^{\delta_1} = \mathrm{H}+\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{D}},$$

ovvero

$$x+y\sqrt{\mathrm{D}} = \left(\frac{\sqrt{\mathrm{D}}+\omega}{r}\right)^{\delta_1}(\mathrm{H}+\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{D}});$$

e il binomio $x+y\sqrt{\mathrm{D}}$ sarebbe decomponibile in $\delta+1$ fattori iperbolici almeno, contro l'ipotesi. Sempre indicando con $\mathrm{H}+\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{D}}$ un binomio ellittico e con δ_1 un intero non superiore a δ, sussisterà dunque l'eguaglianza:

$$(x+y\sqrt{\mathrm{D}})\ (\sqrt{\mathrm{D}}-\omega)^{\delta_1} = \mathrm{H}+\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{D}}.$$

E qui due casi potranno darsi: 1° che (H, K) sia soluzione, e naturalmente dell'equazione

$$x^2-\mathrm{D}y^2 = \mathrm{N}\,(-r)^{\delta_1},$$

che cioè H e K, quali conseguono dal calcolo dell'espressione

$$(x+y\sqrt{\mathrm{D}})\ (\sqrt{\mathrm{D}}-\omega)^{\delta_1},$$

rispondano alla convenzione fatta circa il segno relativo dei valori delle incognite; e in tal caso, sostituendo ad (H, K) la notazione (x_0, y_0) altrove usata per le soluzioni ellittiche, si avrà:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^{\delta_1} (x_0 + y_0\sqrt{D}).$$

2°. Può invece accadere che la detta convenzione non sia osservata dalla coppia (H, K). Ma poichè dalla coppia (H,-K) sarà osservata certamente, ove si dimostri che la *soluzione* (H,-K) è ellittica, e per indicarla si usi la solita notazione (x_0, y_0), rimarrà provato che in questo secondo caso:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^{\delta_1} (x_0 - y_0)\sqrt{D}),$$

e quindi in ogni caso:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^{\delta_1} (x_0 \pm y_0\sqrt{D}).$$

Per mettere in chiaro la natura ellittica di (H,-K), basterà verificare che è soddisfatta la condizione:

$$\text{grado } \omega(-K)^2 \leq \text{grado } N(-r)^{\delta_1}.$$

A tal fine, rammentando il significato di δ_1, si rifletta che il binomio

$$H' + K'\sqrt{D} = (x + y\sqrt{D})\ (\sqrt{D} - \omega)^{\delta_1 - 1}$$

è iperbolico. Si consideri inoltre l'eguaglianza

$$H' + K'\sqrt{D} = (H + K\sqrt{D})\left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right),$$

da cui si trae:

$$\frac{H'}{K'} = \omega + \frac{Kr}{H + K\omega}.$$

Dovendo la parte intera di H' : K' essere ω, il grado del denominatore della frazione

$$\frac{Kr}{H + K\omega}$$

dovrà superare quello del numeratore; cioè

$$\text{grado } (H + K\omega) > \text{grado } Kr.$$

Ma poichè, per l'ammessa ipotesi, il binomio $H - K\omega$ non soffre elisioni fra i termini di massimo grado, si ha pure:

$$\text{grado } (H - K\omega) \geq \text{grado } K\omega;$$

perciò:

$$\text{grado } (H + K\omega)\ (H - K\omega) > \text{grado } K^2 r\omega.$$

Ora:

$$(H + K\omega)\ (H - K\omega) = N(-r)^{\delta_1} + K^2 r;$$

d'onde e dalla precedente disuguaglianza si deduce:

$$\text{grado N}\,(-r)^{\delta_1} > \text{grado K}^2 r\omega,$$

e conseguentemente:

$$\text{grado K}^2\omega < \text{grado N}\,(-r)^{\delta_1},$$

come bisognava dimostrare. Dunque: *Se l'esponente* δ_1 *prende tutti i valori da* 0 *a* δ *inclusivamente, e se* (x_0, y_0) *è soluzione ellittica dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N\,(-r)^{\delta_1},$$

le soluzioni d'indice non superiore a δ, *relative all'equazione* $x^2-Dy^2=N$, *si otterranno dalla formola:*

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^{\delta_1}(x_0 \pm y_0\sqrt{D}).$$

Nota. - L'ultima formola dà bensì tutte le soluzioni d'indice non superiore a δ, ma non è provato che dia quelle soltanto. Così pure non è da credere che la x e la y corrispondenti a una (x_0, y_0) qualsiasi verranno intere (v. anche l'osservazione al n. 3. del precedente capitolo).

7. Si ammetta ora la possibilità dell'equazione di Pell:

$$x^2 - Dy^2 = 1;$$

e dico *si ammetta*, perchè tale equazione, sempre possibile quando D è un numero intero e positivo, potrebbe non esserlo quando D è polinomio. Aggiungasi che non si conosce in questo caso criterio alcuno di sicura riuscita per giudicare della possibilità dell'equazione. È bensì noto che $\sqrt{D}-\omega$ dev'essere sviluppabile in frazione continua periodica secondo un noto algoritmo del prof. Pincherle; (*) un altro criterio di possibilità meno restrittivo viene anche dato in appendice del presente scritto: peraltro siffatti criterj, fondati sulla periodicità, cadono a vuoto quando il periodo nè si manifesta nè si può escludere *a priori* al prolungarsi dei calcoli.

Se non che pel fine del presente scritto basta sapere che $\sqrt{D}-\omega$ è sviluppabile in frazione continua periodica: tale frazione, per un noto teorema del Pincherle, è poi convergente per tutti i valori di a abbastanza grandi. Supponendo possibile l'equazione di Pell sussisterà dunque un'eguaglianza della forma:

$$\sqrt{D} - \omega = \cfrac{1}{\varphi_1 + \cfrac{1}{\varphi_2 + \ldots}},$$

il secondo membro della quale, convergente per valori molto grandi

(*) E. Bortolotti, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1895.

di a, è privo di parte intera. Chè altrimenti il suo limite per $a=\infty$ sarebbe differente da zero; mentre il limite di

$$\sqrt{D}-\omega=\frac{r}{\sqrt{D}+\omega},$$

per $a=\infty$, è zero evidentemente.

Ciò premesso, sia (α, β) una soluzione dell'equazione Pelliana. Nell'eguaglianza

$$\alpha^2-(\omega^2+r)\beta^2=1$$

i termini del 1° membro affetti dalla massima potenza di a si dovranno elidere; i primi termini di α e di $\beta\omega$ saranno perciò eguali; osservando quindi le eguaglianze:

$$\alpha+\beta\sqrt{D}=\alpha+\beta\omega+\frac{\beta r}{\varphi_1+\ddots}$$

$$\alpha-\beta\sqrt{D}=\alpha-\beta\omega-\frac{\beta r}{\varphi_1+\ddots},$$

si vedrà chiaramente che, almeno per valori di a molto grandi:

$$\text{mod.}\,(\alpha-\beta\sqrt{D})<\text{mod.}\,(\alpha+\beta\sqrt{D}),$$

ossia:

$$\text{mod.}\left(\frac{\alpha-\beta\sqrt{D}}{\alpha+\beta\sqrt{D}}\right)<1.$$

Detta pertanto (x, y) una soluzione dell'equazione

$$x^2-Dy^2=N$$

e posto come al n. 4 del precedente capitolo:

$$(x+y\sqrt{D})(\alpha-\beta\sqrt{D})^z=u+v\sqrt{D},$$

nello stesso modo ivi tenuto si dimostrerebbe che

$$\lim_{z=\infty}\frac{u}{v}=-\sqrt{D}=-\omega-\frac{1}{\varphi_1+\ddots},$$

almeno per a sufficientemente grande. Estraendo da $\frac{u}{v}$ la parte intera I e scrivendo:

$$\frac{u}{v}=I+\frac{U}{V},$$

(e per U si dovrà intendere un polinomio minore di V in grado), si avrà dunque, per $z=\infty$:

$$I+\frac{U}{V}=-\omega-\frac{1}{\varphi_1+\ddots}.$$

Ciò prova che vi sarà un valore dell'esponente z tanto grande, che per esso e pei valori maggiori si abbia: $I = -\omega$. Se infatti per z comunque grande tra I e $(-\omega)$ esistesse una differenza (polinomio intero in a), si potrebbe regolare la grandezza di a per modo che il limite di quella differenza per $z = \infty$ fosse differente da zero. Ma ciò è assurdo. Infatti, per z infinito:

$$I + \omega = -\frac{U}{V} - \frac{1}{\varphi_1 + \cdots};$$

espressione quest'ultima che per a grandissimo tende a zero, qualunque sia z. Da ciò si conclude che, per z sufficientemente grande, la parte intera del quoziente $u : v$ sarà $(-\omega)$, come nel caso aritmetico considerato al n. 4 del precedente capitolo.

Esempio. - L'equazione sia:

$$x^2 - (a^2 + 4)\, y^2 = a,$$

e inoltre

$$x = \frac{a}{2} + 1; \qquad y = \frac{1}{2};$$

$$\alpha = \frac{a^2}{2} + 1; \qquad \beta = \frac{a}{2}.$$

Posto:

$$\left(\frac{a}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)\left(\frac{a^2}{2} + 1 - \frac{a}{2}\sqrt{a^2+4}\right)^2 = u + v\sqrt{a^2+4},$$

si avrà:

$$u = \frac{a^4}{2} - \frac{a^3}{2} + 2a^2 - \frac{3a}{2} + 1; \quad v = -\frac{a^3}{2} + \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2};$$

e si trova che la parte intera del rapporto $u : v$ è $(-\omega)$; nel caso presente $(-a)$.

8. La proprietà testè dimostrata e l'altra: che l'equazione Pelliana non può ammettere soluzioni ellittiche o d'indice zero (*), ne pongono in grado di applicare per filo e per segno al presente caso algebrico la dimostrazione che, pel caso aritmetico, si legge al n. 4 del 1° capitolo, concludendo come ivi: *Se* (α, β) *è una soluzione qualunque dell'equazione di Pell, tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

sono date dalla formula

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^k\,(x' \pm y'\sqrt{D}),$$

il secondo membro della quale va esteso solamente a quelle soluzioni particolari (x', y') *il cui* **indice** *non supera la metà dell'indice della soluzione dell'equazione Pelliana.*

(*) Perchè (α, β) fosse ellittica, occorrerebbe la condizione:

$$\text{grado } \omega\beta^2 = 0:$$

dalla quale si deduce che β ed ω, e conseguentemente anche r ed α, sarebbero indipendenti da a.

Le soluzioni d'indice non superiore a un dato limite si sanno trovare: l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ è dunque risoluta.

9. Anche pel caso algebrico vale il teorema: *Tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

sono esprimibili mediante una soluzione qualunque dell'equazione Pelliana e mediante le soluzioni ellittiche di un sistema finito di equazioni note, **il numero delle quali è fisso e indipendente da** N.

Dicasi infatti η la parte intera del quoziente

$$\frac{\operatorname{ind}(\alpha + \beta\sqrt{D})}{2},$$

e si rammenti che le soluzioni (x', y') d'indice non superiore a η sono date dalla formola:

$$x' + y'\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

da estendere a tutti i valori dell'esponente i da 0 a η inclusivamente, e per ciascun valore di i, a tutte le soluzioni ellittiche dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N\,(-r)^i.$$

Conseguentemente: (*)

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^k \left(\frac{\pm\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

formola che fa dipendere tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ dalla soluzione Pelliana (α, β) e dalle soluzioni *ellittiche* del sistema

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= N \\ x^2 - Dy^2 &= -Nr \\ x^2 - Dy^2 &= Nr^2 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ x^2 - Dy^2 &= N\,(-r)^\eta. \end{aligned}$$

In esso (sistema *risolvente* come nel caso aritmetico) il numero delle equazioni è $\eta + 1$, epperò fisso e indipendente da N.

Per tal modo, *mercè il concetto d'indice,* trattazione e regole abbracciano egualmente il caso aritmetico e il caso algebrico, conforme si annunziò al principio del lavoro.

(*) Circa i doppi segni è da notare che le scelte possibili sono quattro, mentre nel caso aritmetico erano due soltanto.

Nota sull'equazione di Pell

Affinchè l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

sia risolubile in numeri interi quando D *è un intero positivo, o in polinomj interi, quando* D *è un polinomio intero di grado pari per rispetto ad una lettera* a, *è necessario e sufficiente che* $\sqrt{D}$ *sia sviluppabile in frazione continua periodica semplice secondo un qualche algoritmo;* (*) *che cioè sussista un'identità della forma*

$$\sqrt{D} = (a_1, \quad a_2, \ldots, a_n, \quad c + \sqrt{D}),$$

dove $a_1, a_2, \ldots a_n$, c *indicano numeri interi (positivi o negativi) se* D *è numero, e polinomj interi, se* D *è polinomio.*

1. *La condizione è sufficiente.* - Sia infatti

$$\sqrt{D} = (a_1, \quad a_2, \ldots a_n, \quad c + \sqrt{D}).$$

Indicando con $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ le ridotte consecutive della frazione continua

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots),$$

l'identità precedente si potrà scrivere:

$$\sqrt{D} = \frac{(c + \sqrt{D})\, p_n + p_{n-1}}{(c + \sqrt{D})\, q_n + q_{n-1}},$$

eguaglianza che si risolve nelle due:

$$cq_n + q_{n-1} = p_n$$
$$cp_n + p_{n-1} = Dq_n$$

d'onde, eliminando c:

$$p^2_n - Dq^2_n = \pm 1.$$

Se vale il segno superiore, il teorema è dimostrato: se no, ponendo

$$x = 2p^2_n + 1$$
$$y = 2p_n q_n,$$

si soddisferà, come è noto, l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

2. *La condizione è necessaria.* - Si supponga infatti che l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

sia soddisfatta da $x = \alpha$, $y = \beta$, talchè si abbia:

$$\alpha^2 - D\beta^2 = 1.$$

(*) Nel caso speciale in cui l'algoritmo è quello del Pincherle, il teorema fu già dato dalla signora Bortolotti, sebbene con dimostrazione molto diversa dalla presente. Notissimo è poi il caso in cui D, nonchè i quozienti incompleti, sono numeri interi e positivi: su esso poggia la famosa dimostrazione lagrangiana della possibilità dell'equazione di Pell.

Certamente α e β (numeri o polinomj) saranno primi tra loro. Perciò, se si sviluppa il quoziente $\alpha:\beta$ in frazione continua dividendo α per β, β per il resto, il 1° resto pel 2° resto ecc., non solo lo sviluppo sarà limitato; ma l'ultima sua ridotta sarà $\alpha:\beta$, tanto per rispetto al valore come per rispetto ai termini. Indicando con $p:q$ la penultima ridotta e con n il numero delle ridotte, si avrà quindi:

$$\alpha q - \beta p = (-1)^n.$$

Qui sono da distinguere i due casi: n pari; n dispari. Se n è pari:

$$\alpha^2 - D\beta^2 = \alpha q - \beta p = 1,$$

d'onde:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{D\beta - p}{\alpha - q}.$$

Detto pertanto c' un fattore di proporzionalità, necessariamente intero per essere α e β primi fra loro, si può scrivere:

$$D\beta - p = c'\alpha$$
$$\alpha - q = c'\beta,$$

eguaglianze che si compendiano nell'unica:

$$\sqrt{D} = \frac{(c' + \sqrt{D})\,\alpha + p}{(c' + \sqrt{D})\,\beta + q},$$

o anche (detti a'_1, a'_2, $a'_3, \ldots$ i quozienti incompleti dello sviluppo di $\alpha:\beta$ in frazione continua):

$$\sqrt{D} = (a'_1, \quad a'_2, \ldots a'_n, \quad c' + \sqrt{D}).$$

Dunque $\sqrt{D}$ si sviluppa in frazione continua periodica semplice.

Se poi n è dispari e conseguentemente

$$\alpha^2 - D\beta^2 = 1, \quad \alpha q - \beta p = -1,$$

si avrà per confronto:

$$\alpha^2 - D\beta^2 = \beta p - \alpha q$$

ovvero:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{D\beta + p}{\alpha + q}.$$

Epperò, detto c'' un fattore intero di proporzionalità:

$$D\beta + p = c''\alpha$$
$$\alpha + q = c''\beta,$$

od anche:

$$\sqrt{D} = \frac{(-c'' - \sqrt{D})\,\alpha + p}{(-c'' - \sqrt{D})\,\beta + q},$$

eguaglianza che si può mettere sotto la forma:

$$\sqrt{D} = (a'_1, \quad a'_2, \ldots a'_n, \quad -c'' - \sqrt{D}).$$

Sostituendo in quest'ultima a $(-\sqrt{D})$ il valore

$$-\sqrt{D} = (-a'_1, \quad -a'_2, \ldots -a'_n, \quad c'' + \sqrt{D}),$$

si avrà finalmente:

$$\sqrt{D} = (a'_1, \quad a'_2, \ldots a'_n, \quad -c'' - a'_1, \quad -a'_2, \ldots -a'_n, \quad c'' + \sqrt{D}).$$

Anche in questo caso $\sqrt{D}$ si sviluppa in frazione continua periodica semplice. Così il teorema è dimostrato per tutti i casi.

Corollario. — *Se il radicale $\sqrt{D}$ si sviluppa in frazione continua periodica semplice in un certo modo, e se il penultimo termine del periodo è l'unità, il radicale stesso si svilupperà in frazione continua periodica semplice anche in un secondo modo, differente dal primo.*

Sia infatti
$$\sqrt{D} = (a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-1}, \quad 1, \quad c + \sqrt{D}),$$
e si ponga:
$$(a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-1}, \quad 1) = \frac{u}{v}.$$

Se n è pari, sarà, come già si vide:
$$u^2 - Dv^2 = 1.$$
Ma si noti che, sviluppando $u:v$ in frazione continua, non si tornerà alla forma
$$(a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-1}, \quad 1)$$
con un numero pari di quozienti incompleti: si troverà invece
$$(a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-2}, \quad 1 + a_{n-1}),$$
dove il numero dei quozienti incompleti è dispari. Talchè, indicando con $p:q$ la penultima ridotta di questa frazione continua (l'ultima è $u:v$), dovrà aversi:
$$uq - vp = -1 = Dv^2 - u^2.$$
Chiamato pertanto k un fattore intero di proporzionalità, si avrà consecutivamente:
$$Dv + p = ku$$
$$u + q = kv;$$
$$\sqrt{D} = \frac{(-k - \sqrt{D})\,u + p}{(-k - \sqrt{D})\,v + q} = (a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-2}, \quad 1 + a_{n-1}, \quad -k - \sqrt{D}) =$$
$$= (a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-2}, \quad 1 + a_{n-1}, \quad -k - a_1, \quad -a_2, \ldots \quad k + \sqrt{D}),$$
che rappresenta un secondo modo di sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua periodica semplice.

Alla stessa conclusione e con ragionamento consimile si giunge, qualora nella formola
$$\sqrt{D} = (a_1, \quad a_2, \ldots a_{n-1}, \quad 1, \quad c + \sqrt{D})$$
n si supponga dispari, e conseguentemente: $u^2 - Dv^2 = -1$.

Esempio. — Posto:
$$D = 25x^2 - 14x + 2,$$
è facile verificare che
$$\sqrt{D} = (5x - 2, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 5x - 2 + \sqrt{D}).$$
Qui il periodo è
$$(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 10x - 4),$$
col penultimo termine eguale all'unità. Perciò si ha pure:
$$\sqrt{D} = (5x - 2, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad -10x + 3, \quad -1, \quad -1, \quad -2, \quad 5x - 1 + \sqrt{D}),$$
come è facile dedurre col ragionamento fatto sopra, oppure verificare direttamente. (*)

G. Frattini.

(*) V. pure un mio articoletto nel *Pitagora*, anno IX, n. 1 e 2.

UN NUOVO SISTEMA DI DEFINIZIONI

PER LA

GEOMETRIA EUCLIDEA [1]

§ 1. — Studi precedenti.

Il significato di taluni *simboli* che si incontrano in *Geometria* deve essere presupposto, anche dopo aver presupposto quello dei simboli che appartengono alla *Logica pura*. [2]

Poichè vi è qualche *arbitrarietà* nella *scelta* dei *simboli non definiti*, è necessario enunciare il *sistema prescelto*. [3]

Citeremo soltanto *tre geometri* che si sono preoccupati di tale questione, ***riducendo*** successivamente *il numero dei simboli non definiti* mediante i quali (e mediante i *simboli* che appartengono alla *Logica pura*) si possono *definire* tutti gli *altri simboli*. [4]

---

(1) Questa memoria fu comunicata dall'A. al "II Congresso internazionale di matematica„ a Parigi, il 9 agosto 1900, e fu inserita integralmente nei *Rendiconti* di tale congresso (Paris, Gauthier-Villars, 1902). Tuttavia, per darle maggior diffusione fra i nostri colleghi, la riproduciamo qui, nella traduzione fornitaci dall'A. *(Nota del D.)*

(2) Quasi sempre si identifica una *cosa* col suo *nome* (si dice, per es.: Parigi *è* una città, e non Parigi *è il nome di* una città), un' *idea* col *simbolo* (parola o frase, segno o gruppo di segni) che la rappresenta, un *fatto* con la *proposizione* che lo enuncia: ecco perchè si può limitarsi a parlare di *simboli* e di *proposizioni*. Poichè, in Geometria, *definire un simbolo* significa *esprimerlo mediante altri già considerati* e *dimostrare una proposizione* significa *dedurla da altre già enunciate*, l'impossibilità di *definire tutti i simboli* e di *dimostrare tutte le proposizioni* è conseguenza immediata del significato attribuito alle parole *definire* e *dimostrare*.

Dicendo che sarebbe impossibile definire i simboli dei quali si fa uso in Geometria mediante quelli che appartengono alla Logica pura, affermiamo che *la Geometria è una teoria deduttiva particolare* e non un ramo della Logica pura: nel quale asserto tutti convengono senza discutere, benchè tale affermazione non possa venir giustificata e non abbia neppure un significato preciso se non si prestabiliscono i limiti della Logica pura, il che noi abbiamo procurato di fare in altro studio: *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie deductive quelconque* (Bibliothèque du Congrès international de Philosophie, Paris, Armand Colin, 1900, pag. 309-365).

(3) La libertà relativa nella scelta di cui parliamo è sufficientemente dimostrata da questo studio stesso.

(4) Non è inutile far notare che si può ripetere, a proposito delle *proposizioni* e delle *dimostrazioni*, tutto quanto abbiamo enunciato relativamente ai *simboli* ed alle *definizioni*. [Infatti: fra le *proposizioni* (definizioni eccettuate) che si incontrano in *Geometria* ve n'hanno necessariamente che non sono *dimostrate*, anche dopo aver presupposto quelle che appartengono alla *logica pura* (assiomi). Poichè vi è qualche arbitrarietà nella loro scelta, bisogna enunciare *il sistema prescelto di proposizioni non dimostrate* (postulati) mediante i quali (e mediante gli *assiomi* e le *definizioni*) si possono *dimostrare* tutte le *altre proposizioni*.]

Malgrado l'evidente analogia del loro ufficio, la preoccupazione della scelta dei *postulati* è molto antica, mentre quella della scelta *dei simboli non definiti* è modernissima. Senza darne una dimostrazione *storica*, che ci pare superflua, ne diamo una *filologica*, meno banale di quel che possa sembrare: mentre alla frase *proposizione non dimostrata* può sostituirsi la parola *postulato*, non si è attribuito ancora ad un' unica *parola* il significato della frase *simbolo non definito*, perchè questa frase è stata sì poco adoperata sin qui che non si è trovato necessario abbreviarla.

Dapprima il Pasch, che nel 1882 [1] riuscì a definire tutti gli altri simboli mediante i quattro seguenti:

1) *punto*, 2) *segmento* (di retta), [2] 3) *piano*, [3] 4) *è sovrapponibile a*.

Poi il Peano, che nel 1889 [4] riuscì a definire *piano* mediante *punto* e *segmento*, e che nel 1894 [5] sostituì nel sistema di simboli non definiti *è sovrapponibile a* con *movimento*, [6] riducendo questo sistema ai simboli:

1) *punto*, 2) *segmento*, 3) *movimento*.

Infine il Pieri, che nel 1899 [7] è riuscito a definire *segmento*, mediante *punto* e *movimento*.

Per conseguenza, *tutti i simboli che si incontrano nella Geometria euclidea possono venir definiti mediante due soli di essi*, cioè

1) *punto*, 2) *movimento*. [8]

§ 2. — Questione.

Si può chiedere: *Per quanto semplice sia il sistema di simboli non definiti scelto dal Pieri, non si potrebbe trovarne uno ancor più semplice?*

Anzitutto convien precisare questa domanda, togliendo alla *semplicità* cui si allude ogni carattere di *relatività* e di *soggettività*.

Ciascun movimento, secondo il Peano e il Pieri, è una funzione che trasforma in un particolar modo i punti in punti.

Ora, poichè: 1° i punti distinti sono innumerevoli, 2° vi è un movimento, almeno, che trasforma un punto dato in altro punto dato, 3° due movimenti che

(1) *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Teubner, Leipzig.

(2) Alla parola *segmento* convien dare il suo significato *elementare* e non *proiettivo*; due punti distinti sono dunque estremi d'un *solo* segmento. Se a e b sono punti distinti, invece della *figura continua* "segmento ab", si può considerare dapprima, quale simbolo non definito, la *relazione fra tre punti* "x è un punto situato tra a e b", la quale consente di enunciare questa *definizione:* "segmento ab" significa "figura cui appartengono a, b e tutti i punti x situati tra a e b".

(3) Anzi, soltanto *parte finita di piano*.

(4) *I principii di geometria logicamente esposti*. Bocca. Torino.

(5) *Sui fondamenti della geometria*. (Revue de Mathématiques. Turin.)

(6) In un *movimento* di una *figura*, invece delle sue *innumerevoli posizioni successive*, se ne considerano soltanto la *posizione iniziale* e la *finale*. Se a è un *punto* (o una *figura*) e se m è un *movimento*, si rappresenta con ma ciò che diviene il punto (o la figura) a dopo il movimento m. In tal modo si viene a considerare *ciascun movimento* quale *segno particolare* di *funzione* che trasforma i *punti* in *punti*.

Il *legame logico* tra il *quarto simbolo non definito* di Pasch e il *terzo* di Peano si rende allora evidente: *ciascuno si può definire mediante l'altro*, con l'aiuto del *primo* soltanto. Infatti, supposto noto il simbolo *è sovrapponibile a*: "m è un movimento" significa "m è un segno di funzione che trasforma ogni figura in una figura che è sovrapponibile alla figura data"; e, reciprocamente, supposto noto il simbolo *movimento:* se a e b sono figure, allora "a è sovrapponibile a b" significa "esiste almeno un movimento m per cui ma coincide con b".

(7) *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino).

(8) Pare che tutto quanto ho rammentato sinora non sia molto noto, perchè in parecchi lavori che si prefiggono di analizzare i principi della Geometria, si incontra un numero ben maggiore di simboli non definiti. Cito ad esempio: Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, 1898. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1900. Enriques, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, 1900. Con ciò, evidentemente, non si nega che quei lavori possano riuscire interessanti da altri punti di vista.

trasformano differentemente il medesimo punto sono distinti; si deduce che i movimenti distinti sono innumerevoli e, per conseguenza: *movimento è la classe cui appartengono innumerevoli funzioni determinate* (movimenti), e *ciascuna di queste funzioni è una relazione determinata fra innumerevoli oggetti* (punti).

Preciseremo dunque la nostra domanda così: *Dopo avere assunto quale primitivo il simbolo* punto, *non basterebbe assumere quale secondo simbolo primitivo* una *relazione particolare tra* un numero finito *di punti?*

Ci proponiamo di giustificare la *risposta affermativa* che riteniamo poter dare a questa domanda.

§ 3. — Introduzione.

I nostri simboli non definiti sono soltanto

1) *punto* 2) *è sovrapponibile a*,

con questa restrizione, per il *secondo*, che noi *non lo definiamo soltanto* nel caso in cui è adoperato *tra coppie di punti.* (1)

Dopo il lavoro citato del Pieri (§ 1), la nostra affermazione (§ 2) sarà giustificata quando avremo *definito il movimento* mediante i nostri *simboli non definiti,* il che faremo nel § 4, lasciando da parte ogni preoccupazione didattica. (2)

Poichè qui non vogliamo occuparci dei *postulati,* supponiamo di averne costruito un *sistema* nel quale siano enunciate *talune proprietà* dei nostri *simboli non definiti,* sufficienti per *dedurne* tutte le *altre proprietà* di *questi simboli* e degli *altri* che, per loro mezzo, saranno definiti. (3)

Per brevità scriveremo: Def., invece di *definizione*; figura, invece di *insieme di punti*; $\equiv$, invece di *è sovrapponibile a*; (a, b) invece di *coppia* i cui elementi sono ordinatamente a e b.

---

(1) Debbo avvertire che, all'insaputa l'uno dell'altro, il Pieri ed io abbiamo avuto contemporaneamente la medesima idea. Infatti, il Pieri, nel suo studio *Sur la Géometrie envisagée comme un système purement logique* (che è un riassunto dell'altro già citato e che fu comunicato al Congresso internazionale di filosofia dal Couturat, il 3 agosto 1900, quando la mia comunicazione attuale era già preparata ed annunciata), enuncia la possibilità di definire tutti gli altri simboli geometrici per mezzo dei due che ho assunto quali non definiti, aggiungendo però che la complicazione eccessiva, alla quale sembragli dare origine lo sviluppo di questo sistema, gli desta il desiderio di proseguire lo studio di tale questione, prima di annunciarne alcun risultato.

(2) È quasi superfluo osservare che enunciando senz'altro questa *definizione*: *movimento* significa " la classe cui appartiene ogni funzione m tale che: 1º se x è un punto, mx è pure un punto; 2º quali che siano i punti x ed y, la coppia (mx, my) è sovrapponibile alla coppia (x, y) ", si potrebbe *dedurre* che la *simmetria* rispetto ad un piano arbitrario è un *movimento*; e allora la parola *movimento* non avrebbe più il suo *significato abituale* [mentre l'ha conservato nel lavoro citato del Pieri, come pure nell'altro del Peano (§ 1)].

(3) È dunque bene inteso che, se qui mi occupo soltanto di *simboli non definiti* e di *definizioni*, non è perchè io ritenga di poter fare a meno di *postulati*. Ma la disinvoltura con la quale suppongo costruito un sistema di postulati, senza assumermi la briga di costruirlo realmente, può sembrare molto comoda e forse eccessiva. Spero tuttavia che la seguente osservazione semplicissima valga a giustificarmi. *Se* (dopo avere scelto un sistema di simboli non definiti e un sistema di postulati) *si vuol cambiare il sistema di simboli non definiti, non è necessario cambiare il sistema di postulati,* (tutt'al più si potrebbero *trascrivere*, agli *antichi simboli non definiti* sostituendo il loro *significato* espresso mediante i *nuovi*; ma sembra che nemmen questo sia considerato necessario, poichè non si trova forse alcun libro di Geometria nel quale i postulati siano enunciati senza far uso esplicito di qualche *simbolo definito*). Dunque, purchè taluno abbia costruito un sistema accettabile di postulati per la Geometria euclidea, si potrà ricorrere a tale sistema, senza preoccuparsi della diversità dei sistemi di simboli non definiti.

§ 4. — Definizione di " movimento ".

Def. I. — Se a e b sono punti distinti, [1]

retta ab

significa: figura cui appartiene ogni punto x tale che non esiste alcun punto y, distinto da x, che verifichi simultaneamente le condizioni

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{e} \quad (b, y) \equiv (b, x).$$

Def. II. — Quali che siano i punti a e b,

centro di (a, b)

significa: punto x tale che

$$(a, x) \equiv (x, b)$$

e che non esiste alcun punto y, distinto da x, che verifichi simultaneamente le condizioni

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{e} \quad (b, y) \equiv (b, x). \text{ [2]}$$

Def. III.

t è una traslazione

significa: quale che sia il punto x, anche tx è un punto; e, quali che siano i punti x ed y, il centro di (x, ty) (Def. II) è pure il centro di (tx, y).

Def. IV. — Se a e b sono punti distinti,

r è una rotazione intorno ad (a, b),

significa:

1) quale che sia il punto x, anche rx è un punto;

2) quali che siano i punti x ed y $(rx, ry) \equiv (x, y)$;

3) ra ed rb coincidono rispettivamente con a e b;

4) se un punto x, che non appartiene alla retta ab (Def. I), coincide con rx, allora, se y è un punto qualunque, y coincide con ry. [3]

Def. V. — Se a è un punto,

r è una rotazione intorno ad a

---

(1) " x od y sono punti *coincidenti* " significa " x è un punto e y è lo *stesso* punto "; " x ed y sono punti *distinti* " significa " x è un punto ed y è un *altro* punto ". Per conseguenza, benchè le parole *coincidenti* e *distinti* siano usate quasi esclusivamente in Geometria, le *idee* che rappresentano appartengono alla *Logica pura*, se ad essa appartengono quelle rappresentate dalle frasi *lo stesso* e *un altro*.

(2) Alla Def. II si potrebbero sostituire le seguenti:

Def. II'. — Quale che sia il punto a " centro di (a, a) " significa " a ":

Def. II''. — Se a e b sono punti distinti " centro di (a, b) " significa: " punto x, della retta ab (Def. I), tale che $(a, x) \equiv (x, b)$ ".

I *postulati* (§ 3) devono *enunciare* o permettere di *dedurre*, l'*esistenza* e l'*unicità* del punto x considerato nella Def. II'' e devono pur consentire di dedurre la Def. II' dalla Def. II.

(3) Vediamo se un r che soddisfi alle condizioni enunciate in questa Def. potrebbe *non* essere una *rotazione* intorno ad (a, b), dando a questa frase il suo *significato abituale*. Dopo le condizioni 1); 2) 3), se r non fosse una *rotazione* intorno ad (a, b), dovrebb'essere una *simmetria* rispetto ad un piano determinato, per esempio σ, al quale apparterrebbero i punti a e b; ma allora, se x fosse un punto appartenente al piano σ e non alla retta ab, e se y fosse un punto non appartenente al piano σ, x coinciderebbe con rx, mentre y sarebbe distinto da ry, il che contraddirebbe alla condizione 4). Sicchè, mediante la Def. IV, la frase definita " r è una rotazione intorno ad (a, b) " acquista esattamente il suo *significato abituale*.

significa: si possono determinare due punti b e c distinti da a, una rotazione r' intorno ad (a, b) (Def. IV) e una rotazione r'' intorno ad (a, c), per modo che, se x è un punto qualunque, rx coincida con $r''(r'x)$. (1)

Def. VI.

m è un movimento

significa: si può determinare una traslazione t (Def. III), un punto a e una rotazione r intorno ad a (Def. V), per modo che, se x è un punto qualunque, mx coincida con $r(tx)$. (2)

§ 5. — Saggio di altre definizioni.

Ora che abbiamo esaurito il nostro compito (§ 4), lasciando da parte ogni preoccupazione *didattica* (§ 3), desideriamo mostrare la possibilità di adottare il nostro *sistema* di *simboli non definiti* (§ 3), anche nell' *insegnamento elementare*. Naturalmente converrà modificare un poco la *definizione* di *movimento*; (3) si potranno definire prima altri *simboli* e *svilupparne* la teoria mediante *postulati* (§ 3).

---

(1) Sia r una *rotazione* intorno ad a, nel *significato abituale* di questa frase, allora ra coincide con a. Se vi è un punto y distinto da a che coincide con ry, si verificheranno le condizioni enunciate nella Def. V, identificando b con y, r' con r, c con un punto qualsiasi ed r'' con una *trasformazione identica* (cioè in questo caso, *rotazione nulla* o *giro completo*).

Se nessun punto y distinto da a coincide con ry, si potranno facilmente soddisfare le condizioni enunciate nella Def. V, scegliendo b e r in modo che per un dato punto y, qualsiasi ma distinto da a, $r'y$ coincida con ry [per esempio, sia b il centro di (y, ry) e sia r' un mezzo giro intorno ad (a, b)], c con ry e scegliendo r'' in modo che per un dato punto z, qualsiasi ma non appartenente alla retta ay, $r''(r'z)$ coincida con rz [il che è sempre possibile; invero, qualunque sia il punto z, da quanto precede e da Def. IV 2) 3) risulta che

$$(a, r'z) \equiv (a, z) \equiv (a, rz) \quad \text{e} \quad (r'y, r'z) \equiv (y, z) \equiv (ry, rz),$$

da cui, per quanto precede, si deduce che

$$(a, r'z) \equiv (a, rz) \quad \text{e} \quad (c, r'z) \equiv (c, rz);$$

in altri termini, il triangolo $a, c, r'z$ risulta ordinatamente sovrapponibile al triangolo a, c, rz; è dunque possibile far ruotare il primo intorno ad (a, c) in modo che venga a coincidere col secondo; chiamando r'' tale rotazione, si avrà che $r''(r'z)$ coincide con rz].

Dopo ciò, poichè a, y, z non appartengono ad una stessa retta e poichè, per quanto precede, ra, ry, rz coincidono rispettivamente con $r''(r'a)$, $r''(r'y)$, $r''(r'z)$, se x è un punto qualunque allora rx coincide pure con $r''(r'x)$.

(2) Sia m un *movimento*, nel significato abituale di questa parola.

Se esiste un punto y che coincida con my, si verificheranno le condizioni enunciate nella Definizione VI, identificando t con una *trasformazione identica* (cioè, in questo caso, *traslazione nulla*), a con y, r con m.

Se nessun punto y coincide con my, si potranno facilmente soddisfare le condizioni enunciate nella Def. VI, scegliendo t in modo che, per un dato punto qualunque y, ty coincida con my, identificando a con my e scegliendo r in modo che, se u è un dato punto qualunque distinto da y e v è un dato punto qualunque non appartenente alla retta yu, allora $r(tu)$ e $r(tv)$ coincidano rispettivamente con mu ed mv.

[Dalla Def. III e dai postulati (§ 3) si dedurrà che, se t è una traslazione qualunque e se x ed y sono punti qualunque,

$$(tx, ty) \equiv (x, y).$$

Nel caso nostro, poichè ty coincide con my che fu indicato con a, il triangolo y, u, v è ordinatamente sovrapponibile al triangolo a, tu, tv; d'altra parte, il medesimo triangolo y, u, v dev'essere ordinatamente sovrapponibile al triangolo a, mu, mv; i triangoli a, tu, tv ed a, mu, mv son dunque ordinatamente sovrapponibili ed esiste quindi una rotazione r intorno ad a per cui $r(tu)$ ed $r(tv)$ coincidono rispettivamente con mu ed mv].

Dopo ciò, poichè per ipotesi y, u, v non appartengono ad una medesima retta e poichè per quanto precede $r(ty)$, $r(tu)$, $r(tv)$ coincidono rispettivamente con my, mu, mv, se x è un punto qualunque, allora $r(tx)$ coincide con mx.

(3) Si potrà anche fare a meno completamente di questo simbolo, definendo la relazione « è *sovrapponibile* » tra *figure qualsiasi*.

Daremo qui un piccolo saggio di queste definizioni.

DEF. I. — (La DEF. I del § 4).

DEF. II. — (La DEF. II'' enunciata nella nota alla DEF. II del § 4).

In tutte le DEF. seguenti è sottinteso che a e b sono punti distinti.

DEF. III.

Superficie sferica che ha per centro a e che passa per b,

significa: figura cui appartiene ogni punto x tale che

$$(a, x) \equiv (a, b).$$

DEF. IV.

Superficie sferica che ha per poli a e b,

significa: superficie sferica che ha per centro il centro di (a, b) (DEF. II) e che passa per b (DEF. III).

DEF. V. — Se c e d sono punti distinti della retta ab (DEF. I),

(c, d) non intreccia (a, b), [1]

significa: la superficie sferica che ha per poli a e b (DEF. IV) non ha alcun punto comune con la superficie sferica che ha per poli c e d.

DEF. VI.

c è un punto situato fra a e b,

significa: se d è il centro di (a, b) (DEF. II), allora c coincide con d ovvero è un punto della retta ab (DEF. I) tale che (c, d) non intreccia (a, b) (DEF. V).

DEF. VII.

segmento ab

significa: figura cui appartengono a, b ed ogni punto situato fra a e b (DEF. VI).

DEF. VIII.

prolungamento di ab, [2]

significa: figura cui appartiene ogni punto x tale che b sia situato fra a ed x.

DEF. IX.

raggio ab, [3]

significa: figura cui appartiene ogni punto del segmento ab (DEF. VII) e del prolungamento di ab (DEF. VIII). [4]

DEF. X. — Se c e d sono punti distinti della retta ab (DEF. I),

d segue c come b segue a,

significa: il prolungamento di ab (DEF. VIII) contiene il prolungamento di cd, o questo contiene quello.

---

(1) Per evitare ogni ambiguità, sostituisco *non intreccia* alla frase, abituale in Geometria proiettiva, *non separa*; poichè, se ad esempio i punti considerati si susseguono nell'ordine a, c, d, b, mi sembra che l'enunciato "(c, d) non intreccia (a, b)" sia più prossimo al linguaggio comune dell'altro "(c, d) non separa (a, b)".

(2) Abbrevio così la frase troppo lunga "prolungamento del segmento ab dalla parte di b".

(3) Abbrevio così la frase troppo lunga "raggio uscente da a e che passa per b".

(4) Ovvero, riferendosi direttamente alla DEF. VI, "figura cui appartiene ciascun punto x tale che esiste almeno un punto y per cui b ed x risultan situati fra a ed y (DEF. VI).

Def. XI.

simmetrico di a rispetto a b

significa: punto x tale che b sia il centro di (a, x) (Def. II).

In tutte le Def. seguenti, è sottinteso che c è un punto non appartenente alla retta ab (Def. I).

Def. XII.

(a, b) è perpendicolare a (b, c),

significa: b è un punto della superficie sferica che ha per poli a e c (Def. IV).

Def. XIII. — Se d è un punto distinto da c,

(c, d) è parallelo ad (a, b)

significa: il simmetrico di a rispetto al centro di (bc) (Def. II, XI) è un punto della retta cd (Def. I).

Def. XIV.

x è un punto interno al triangolo abc,

significa: x è un punto distinto da a e vi è un punto del prolungamento di ax (Def. VIII) che è situato fra b e c (Def. VI).

Def. XV.

x è un punto interno all'angolo $\widehat{abc}$,(1)

significa: x è un punto distinto da b e vi è un punto del raggio bx (Def. IX) che è situato fra a e c (Def. VI).

Def. XVI.

piano abc,

significa: figura cui appartiene ogni punto x, tale che non esiste alcun punto y, distinto da x, che verifichi simultaneamente le condizioni:

$$(a, y) \equiv (a, x), \qquad (b, y) \equiv (b, x), \qquad (c, y) \equiv (c, x).$$

Il saggio di Def. che abbiamo dato ci sembra sufficiente a provare la possibilità di adottare il nostro metodo anche nell'insegnamento elementare.

Si noterà la perfetta analogia delle Def. I e XVI delle due figure fondamentali *retta* e *piano*, e la possibilità di definire il *piano* immediatamente dopo la *retta* (2) o differire la Def. di *piano*, come noi abbiamo fatto, per definire prima le relazioni di *perpendicolarità* e di *parallelismo* fra *coppie di punti* (o rette).

Alessandro Padoa.

(1) Qui considero soltanto gli *angoli convessi*.

(2) Invero nella Def. XVI sono usati soltanto i due *simboli non definiti*; ma l'ipotesi di tale Def. (c non appartiene alla ab) presuppone la Def. I.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE CURVE PIANE

Si consideri una curva piana c, e supponiamo che una sua tangente mobile incontri rispettivamente in A e B due rette ortogonali x e y del piano della c; indichiamo con c' la curva luogo del punto medio del segmento AB.

Inversamente, se da ogni punto P' della curva c' si conduce una retta r tale che, incontrando x e y rispettivamente in due punti A e B, il segmento AB abbia il suo punto medio in P', è chiaro che l'inviluppo di tale retta r è la curva c.

Mi propongo di occuparmi della trasformazione (c, c').

1. Se la curva c è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = f_1(t) \ , \quad y = f_2(t),$$

l'equazione della tangente mobile sarà

$$(y - f_2) f'_1 - (x - f_1) f'_2 = 0,$$

dove, per semplicità, si è posto

$$f'_1 = \frac{df_1}{dt} \ , \qquad f'_2 = \frac{df_2}{dt} \ .$$

I punti A e B avranno perciò rispettivamente per coordinate

$$\left[0, \quad \frac{1}{f'_1}(f_2 f'_1 - f_1 f'_2)\right] ; \quad \left[\frac{1}{f'_2}(f_1 f'_2 - f_2 f'_1), \quad 0\right],$$

e quindi per il punto medio $P' \equiv (\xi, \eta)$ di AB avremo:

$$\xi = \frac{1}{2f'_2}(f_1 f'_2 - f_2 f'_1) \ , \qquad \eta = \frac{1}{2f'_1}(f_2 f'_1 - f_1 f'_2), \tag{1}$$

che sono le equazioni parametriche della curva c'.

Esempio. — Sia c l'ellisse rappresentata dalle equazioni

$$x = a \cos \theta, \qquad y = b \operatorname{sen} \theta.$$

Poichè in tal caso si ha $f_1(\theta) = a \cos \theta$, $f_2(\theta) = b \operatorname{sen} \theta$, $f'_1(\theta) = -a \operatorname{sen} \theta$, $f'_2(\theta) = b \cos \theta$, le (1) dànno

$$\xi = \frac{a}{2 \cos \theta} \ , \qquad \eta = \frac{b}{2 \operatorname{sen} \theta} \ ,$$

che sono le equazioni parametriche della curva c'.

Da queste, eliminando θ, si ha l'equazione cartesiana

$$\frac{a^2}{\xi^2}+\frac{b^2}{\eta^2}=4,$$

che rappresenta una Kreuzcurva.

Se c è un circolo, c' è una Kreuzcurva equilatera.

2. Se la curva c, riferita a gli assi coordinati x, y, è rappresentata da una equazione esplicita

$$y=f(x),$$

poichè l'equazione della tangente in un punto $P\equiv(x_1, y_1)$ è

$$y-f_1=f'_1(x-x_1),$$

dove, per semplicità, si è posto

$$f(x_1)=f_1\ ;\quad \left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]_{x=x_1}=f'_1\,,$$

si ha, conservando le notazioni del § precedente:

$$\xi=\frac{1}{2f'_1}(x_1f'_1-f_1)\,,\qquad \eta=\frac{1}{2}(f_1-x_1f'_1)\,, \tag{2}$$

dalle quali, eliminando x_1, si ha l'equazione della c'.

Esempio. — Sia c la parabola cubica rappresentata dalla equazione

$$y=\frac{1}{a^2}x^3.$$

Facilmente si ha che le (2) in tal caso divengono

$$\xi=\frac{x_1}{3}\,;\qquad \eta=-\frac{x_1^3}{a^2}$$

e quindi, eliminando x_1 fra queste, si ha

$$\eta=-\frac{27}{a^2}\xi^3$$

che rappresenta un'altra parabola cubica col flesso e la tangente stazionaria in comune con la data.

3. Se la curva c, sempre riferita a gli assi x, y, è rappresentata dall'equazione implicita

$$f(x, y)=0\,, \tag{3}$$

l'equazione della tangente t a c in un punto $P\equiv(x_1, y_1)$ è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1\cdot(x-x_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\cdot(y-y_1)=0 \tag{4}$$

dove, per semplicità, si è posto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_1,\, y=y_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=x_1,\, y=y_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 .$$

Indicando, come già si è detto, con A e B le intersezioni della t con x e y, avremo:

$$A \equiv (x_0, 0) , \qquad B \equiv (0, y_0) ,$$

dove, a causa della (4), x_0 e y_0 hanno rispettivamente i valori:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\right] : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \\ y_0 &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\right] : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

e quindi, indicando, al solito, con $P' \equiv (\xi, \eta)$ il punto medio del segmento AB, si ha:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\right] : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \\ \eta &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\right] : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Eliminando x_1 e y_1 fra le (6) e la (3), dopo di aver sostituito in quest'ultima x_1 ed y_1 rispettivamente a x e y, si otterrà l'equazione (in ξ, η) della trasformata c' (luogo di P').

Nel caso in cui c sia una curva algebrica dell'n^o ordine, rendendo omogenea la (3) col porre momentaneamente

$$x = X : Z ; \qquad y = Y : Z , \tag{7}$$

potremo applicare il teorema di Euler su le funzioni omogenee, e quindi si ha

$$X \frac{\partial f}{\partial X} + Y \frac{\partial f}{\partial Y} = nf - Z \frac{\partial f}{\partial Z}$$

e per $X = x_1$, $Y = y_1$, $Z = 1$, poichè è

$$f(x_1 , y_1) = 0 , \tag{3'}$$

avremo

$$x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=x_1} + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{Y=y_1} = - \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1}$$

e perciò le (6) divengono:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= - \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1} : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=x_1} \\ \eta &= - \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1} : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{Y=y_1} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Eliminando x_1 e y_1 fra le (8) e la (3'), si otterrà l'equazione (in ξ, η) della trasformata di c' (luogo di P').

4. Applichiamo ciò che è stato esposto nel § precedente al caso particolare in cui la curva data c sia una conica ($n=2$).

Sia

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (9)$$

l'equazione cartesiana di tale curva, riferendoci a gli assi rettangolari x e y.

Rendendo omogenea la (9) con le posizioni (7), si ha per $X = x_1$, $Y = y_1$, $Z = 1$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=x_1} = 2\,(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial Y}\right)_{Y=y_1} = 2\,(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1} = 2\,(a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}), \end{cases}$$

e quindi le (8) divengono

$$\xi = -\frac{1}{2}\,\frac{a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}}{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}; \qquad \eta = -\frac{1}{2}\,\frac{a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}. \qquad (10)$$

Dalle (10) si ricava

$$x_1 = \frac{A_{11}\eta + A_{12}\xi - 2A_{13}\xi\eta}{A_{13}\eta + A_{23}\xi - 2A_{33}\xi\eta}; \qquad y_1 = \frac{A_{12}\eta + A_{22}\xi - 2A_{23}\xi\eta}{A_{13}\eta + A_{23}\xi - 2A_{33}\xi\eta}, \qquad (11)$$

dove A_{rs} indica l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante

$$\Delta = \Sigma(\pm\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}),$$

nel quale si suppone $a_{rs} = a_{sr}$.

Sostituendo con le (11) nella (3'), fatte le riduzioni e tralasciato un fattore Δ, si ha:

$$4A_{33}\xi^2\eta^2 - 4A_{23}\xi^2\eta - 4A_{13}\xi\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta + A_{22}\xi^2 + A_{11}\eta^2 = 0, \qquad (12)$$

che è l'equazione del luogo di P', cioè della curva c'.

La trasformata di una conica centrale ($A_{33} \gtrless 0$) è dunque, in generale, una quartica; se invece la c è una parabola ($A_{33}=0$), la trasformata è, in generale, una cubica.

In entrambi i casi la (12) ha un punto doppio nell'origine; questo punto è nodo, cuspide o punto isolato, secondo che è

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \lesseqgtr 0,$$

cioè secondo che è tale Δa_{33}, ossia finalmente secondo che l'origine O delle coordinate (punto d'incontro delle rette ortogonali date x, y) è esterno alla conica o è su la conica o è interno a questa.

CASI PARTICOLARI. — *a)* Se è $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, cioè se la c è una conica col centro in O e le direzioni degli assi coincidono con x, y, la (12) diviene

$$4A_{33}\xi^2\eta^2 + A_{22}\xi^2 + A_{11}\eta^2 = 0,$$

e perciò se la c è l'ellisse (reale) rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la c' è la Kreuzcurva

$$4\xi^2\eta^2 - b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0.$$

In particolare se la c è un circolo

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

la c' è una Kreuzcurva equilatera

$$4\xi^2\eta^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

resultati questi che coincidono con quelli ottenuti al § 1.

Se la c è l'iperbole rappresentata dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la c' è la Kohlenspitzencurva

$$4\xi^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0,$$

resultati tutti questi prevedibili, tenendo conto delle ordinarie generazioni delle Kreuzcurve e delle Kohlenspitzencurve. (1)

b) Se è $A_{11} = A_{22} = 0$, cioè se gli assi x, y sono tangenti alla conica c, la c' si scinde negli assi ($\xi\eta = 0$), com'è naturale, e nella

$$2A_{33}\xi\eta + 2A_{23}\xi + 2A_{13}\eta - A_{12} = 0$$

che, per $A_{33} \gtrless 0$ e $A_{12} \gtrless 0$, rappresenta una iperbole.

In particolare se c è il circolo rappresentato dalla equazione

$$x^2 + y^2 - 2rx - 2ry + r^2 = 0,$$

la trasformata è (oltre a $\xi\eta = 0$), l'iperbole equilatera

$$2\xi\eta + 2r\xi - 2r\eta + r^2 = 0,$$

il cui centro (r, r) coincide con quello del circolo dato.

c) Se è $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, cioè se la c è una parabola tangente agli assi x, y, si ha per la trasformata c', oltre a $\xi\eta = 0$, la retta

$$2A_{23}\xi + 2A_{13}\eta + A_{12} = 0,$$

e quindi si ha il teorema: *Se* x *e* y *sono due tangenti ortogonali di una parabola*

(1) Cfr. BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Bar-le-duc, 1897-99 (autografia).

e t *è una tangente mobile, se* t *incontra in* A *e* B *rispettivamente* x *e* y, *il luogo del punto medio di* AB *è una retta.* Facilmente si potrebbe generalizzare questo teorema.

d) Se c è una iperbole equilatera che ha per assintoti x e y, cioè se è rappresentata dalla equazione

$$xy = k^2,$$

è $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{33} = -k^2$, e quindi anche

$$A_{11} = A_{22} = A_{13} = A_{23} = 0, \ A_{12} = \tfrac{1}{2}k^2, \ A_{33} = -\tfrac{1}{4},$$

e perciò la trasformata c' è, oltre a $\xi\eta = 0$, che corrisponde agli assintoti,

$$\xi\eta = k^2,$$

cioè la c si trasforma in se stessa (anallagmatica); ciò è naturale quando si pensi alla nota proprietà dell'iperbole: " *Ogni segmento di tangente compreso fra gli assintoti è diviso per metà dal punto di contatto* ".

e) Se la c è una parabola col vertice in O e tale che x, y sieno rispettivamente l'asse principale e la tangente al vertice, cioè se è rappresentata dalla equazione

$$y^2 = 2px,$$

la c' diviene

$$\eta^2 = -\frac{p}{4}\xi,$$

altra parabola con l'asse ed il vertice comune con la data.

f) Infine noteremo che se c è una parabola tangente ad uno degli assi o a tutti due (ed in quest'ultimo caso l'abbiamo già provato), la cubica trasformata si scinde, come si scinde pure in altri casi, ecc.

5. Occupiamoci ora della trasformazione inversa. Riferendoci sempre ai soliti assi $\xi = x$, $\eta = y$, sia $P' \equiv (\xi, \eta)$ un punto qualunque di una curva c'; una retta passante per P' ha per equazione

$$y - \eta = \mu(x - \xi), \text{ [1]} \tag{13}$$

dove μ è un parametro variabile.

Se questa retta incontra gli assi in due punti A e B, in modo che P' sia medio di AB, dovrà essere

$$\mu = -\frac{\eta}{\xi},$$

com'è chiaro anche geometricamente, e quindi l'equazione (13) diviene in tal caso

$$x\eta + y\xi - 2\xi\eta = 0. \tag{14}$$

Per avere l'equazione della curva c, trasformata della c', bisognerà trovar l'inviluppo della (14).

---

[1] Indichiamo per comodità con x, y le coordinate correnti, quantunque dovrebbero indicarsi con ξ, η.

6. Supponiamo dapprima che c' sia data dalle equazioni parametriche

$$\xi = \varphi_1(t), \qquad \eta = \varphi_2(t); \tag{15}$$

la (14) diviene in tal caso

$$x\varphi_2 + y\varphi_1 - 2\varphi_1\varphi_2 = 0 \tag{16}$$

e, derivando rispetto a t:

$$x\varphi'_2 + y\varphi'_1 - 2\varphi'_1\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi'_2 = 0, \tag{17}$$

dove si è posto $\varphi'_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$, $\varphi'_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$.

Finalmente, combinando le (16), (17), si ha

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\varphi_1^2 \cdot \varphi'_2}{\varphi_1\varphi'_2 - \varphi'_1\varphi_2} \\ y &= \frac{2\varphi_2^2 \cdot \varphi'_1}{\varphi'_1\varphi_2 - \varphi_1\varphi'_2} \end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

che sono le equazioni parametriche della curva c, dalle quali, se vogliamo, può eliminarsi t, ottenendo l'equazione cartesiana.

Esempi. — 1°. Supponiamo che c' sia un circolo col centro in O, cioè supponiamo che le (15) divengano

$$\xi = r\cos\theta, \qquad \eta = r\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

allora, per le (18), le equazioni parametriche della trasformata sono:

$$x = 2r\cos^3\theta, \qquad y = 2r\,\mathrm{sen}^3\theta,$$

ossia l'equazione cartesiana è

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}},$$

che rappresenta una ipocicloide tetracuspide (astroide).

2°. Se c' è una cissoide di Diocle, rappresentata dalle equazioni

$$\xi = \frac{a}{1+t^2}, \qquad \eta = \frac{a}{t(1+t^2)} = \frac{\xi}{t},$$

avremo

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{-2at}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{-a(1+3t^2)}{t^2(1+t^2)^2},$$

e quindi le (18) dànno per la trasformata c:

$$x = \frac{2a(1+3t^2)}{1+t^2}, \qquad y = \frac{-4at}{(1+t^2)^2},$$

da cui, eliminando t, si ha, dopo aver posto $x - 6a = \mathrm{X}$, $4a = \alpha$:

$$\mathrm{X}^4 + \alpha\mathrm{X}^3 + \alpha^2 y^2 = 0,$$

che rappresenta una particolare quartica piriforme. (1)

---

(1) Brocard, *op. cit.*, I, pag. 235.

7. Supponiamo che la curva c' sia data per mezzo di una equazione esplicita

$$\eta = \varphi(\xi). \tag{19}$$

In tal caso, derivando il 1° membro della (14) rispetto a ξ ed eguagliando a 0, si ha:

$$\frac{d\eta}{d\xi}(x - 2\xi) - 2\eta + y = 0. \tag{20}$$

Eliminando ξ e η fra le (14), (19), (20), si ha l'equazione della c.

Esempio. — Supponiamo che la c' sia una retta rappresentata dalla equazione

$$\eta = m\xi + n. \tag{21}$$

Poichè si ha $\frac{d\eta}{d\xi} = m$, le (14), (20), tenuto conto della (21), divengono rispettivamente

$$(x - 2\xi)(m\xi + n) + y\xi = 0$$
$$m(x - 2\xi) - 2(m\xi + n) + y = 0$$

dalle quali, eliminando ξ, si ha

$$(mx + y)^2 + 4n(mx - y + n) = 0,$$

che rappresenta una parabola tangente agli assi (cfr. § 4, es. c)).

8. Supponiamo finalmente che la curva c' sia data per mezzo di una equazione implicita

$$\varphi(\xi, \eta) = 0; \tag{22}$$

dovremo allora eliminare ξ e η fra la (22), la (14) e la (20), che in tal caso, essendo

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} : \frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$

diviene

$$(x - 2\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - (y - 2\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0. \tag{20'}$$

Esempio. — Sia c' la parabola semi-cubica, rappresentata dalla equazione

$$\varphi = \eta^3 - a\xi^2 = 0.$$

Per avere l'equazione della trasformata c, poichè è

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -2a\xi, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 3\eta^2,$$

dovremo eliminare ξ e η fra le equazioni

$$\begin{cases} x\eta + y\xi - 2\xi\eta = 0 \\ 2a\xi(x - 2\xi) + 3\eta^2(y - 2\eta) = 0 \\ \eta^3 - a\xi^2 = 0 \end{cases} \tag*{[14]}$$

e tale resultante, oltre all'equazione complessiva degli assi, è

$$y^3 - \frac{27}{2}ax^2 = 0,$$

che rappresenta un'altra parabola semi-cubica con la cuspide e la tangente di regresso in comune con la data.

Note. — Abbiamo considerato tre procedimenti diversi anche perchè l'eliminazione in molti casi riesce difficile, o almeno assai laboriosa, e quindi, caso per caso, conviene di scegliere il metodo per il quale tale eliminazione sia facilitata.

Facilmente potrebbe generalizzarsi la trasformazione considerando due rette x, y, anzichè ortogonali, oblique fra loro.

Susa, 1903.

Dott. Giulio Cardoso-Laynes.

IPERBOLE D'APOLLONIO GENERALIZZATA

1. Chiamerò *inclinate di un angolo* α ad una curva in un punto P le due rette condotte per P che formano un angolo α colla normale ordinaria in P.

Cerchiamo l'equazione delle due inclinate di un angolo α ad un'ellisse in un suo punto P.

Sia φ l'angolo eccentrico in P; $\theta, \theta', \theta''$, gli angoli della normale in P e delle normali inclinate di α in P coll'asse x; N, N', N'' i punti d'incontro di queste con l'asse x. Si ha

$$\tan\theta = \frac{a \operatorname{sen}\varphi}{b\cos\varphi}. \tag{1}$$

L'equazione della PN' è

$$y - b\operatorname{sen}\varphi = (x - a\cos\varphi)\tan\theta'. \tag{2}$$

Essendo $\theta' = \theta + \alpha$ si ha

$$\tan\theta' = \tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}, \tag{3}$$

ovvero per la (1)

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\dfrac{a\operatorname{sen}\varphi}{b\cos\varphi} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{a\operatorname{sen}\varphi}{b\cos\varphi}} = \frac{a\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha + b\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha}{b\cos\varphi\cos\alpha - a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha}.$$

Per conseguenza l'equazione (2) diventa

$$y - b\operatorname{sen}\varphi = (x - a\cos\varphi)\left(\frac{a\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha + b\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha}{b\cos\varphi\cos\alpha - a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha}\right),$$

ovvero

$$\begin{aligned} x\,(a\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha + b\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha) - y\,(b\cos\varphi\cos\alpha - a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha) &= \\ = c^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\alpha + ab\operatorname{sen}\alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

ovvero

$$(ax\operatorname{sen}\varphi - by\cos\varphi - c^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\cos\alpha + (bx\cos\varphi + ay\operatorname{sen}\varphi - ab)\operatorname{sen}\alpha = 0. \tag{5}$$

Per la seconda retta PN″ si ha $\theta'' = \theta - \alpha$. Basta dunque cambiare α in $-\alpha$ nelle equazioni (4) e (5) per avere l'equazione della PN″ che è

$$x\,(a \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha - b \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha) - y\,(b \cos \varphi \cos \alpha + a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha) = \\ = c^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cos \alpha - ab \operatorname{sen} \alpha, \qquad (6)$$

ovvero

$$(ax\operatorname{sen}\varphi - by\cos\varphi - c^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\cos\alpha - (bx\cos\varphi + ay\operatorname{sen}\varphi - ab)\operatorname{sen}\alpha = 0. \quad (7)$$

2. Consideriamo ora le *inclinate* che si possono condurre da un punto M (x_0, y_0), e chiamiamo X, Y le coordinate del piede di una di esse.

Ponendo

$$\cos \varphi = \frac{X}{a}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{Y}{b}, \quad x = x_0, \quad y = y_0,$$

l'equazione (5) diventa

$$(c^2XY + b^2y_0X - a^2x_0Y)\cos\alpha - (b^2Xx_0 + a^2Yy_0 - a^2b^2) \operatorname{sen} \alpha = 0, \qquad (8)$$

ovvero

$$c^2XY\cos\alpha - b^2X(x_0\operatorname{sen}\alpha - y_0\cos\alpha) - a^2Y(x_0\cos\alpha + y_0\operatorname{sen}\alpha) + a^2b^2\operatorname{sen}\alpha = 0, \quad (9)$$

e la (6) diventa

$$(c^2XY + b^2y_0X - a^2x_0Y) \cos \alpha + (b^2Xx_0 + a^2Yy_0 - a^2b^2) \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad (10)$$

ossia

$$c^2XY\cos\alpha + b^2X(x_0\operatorname{sen}\alpha + y_0\cos\alpha) - a^2Y(x_0\cos\alpha - y_0\operatorname{sen}\alpha) - a^2b^2\operatorname{sen}\alpha = 0. \quad (11)$$

Per conseguenza esistono otto inclinate di un angolo α, i piedi delle quali sono le intersezioni della ellisse con le due iperboli (9) e (11), che possiamo chiamare *iperboli di Apollonio generalizzate*. Quando $\alpha = 0$, esse si riducono alla iperbole d'Apollonio relativa ad M, cioè

$$c^2XY + b^2y_0X - a^2x_0Y = 0. \qquad (12)$$

3. Ecco alcune proprietà e luoghi geometrici relativi a queste iperbole.

1°. *Qualunque sia l'angolo α, le due iperboli d'Apollonio generalizzate passano per due punti fissi.*

Infatti dall'equazioni (8), (10) si vede che le due curve passano per i punti comuni alle due linee

$$\begin{cases} c^2Xy + b^2y_0X - a^2x_0Y = 0, \\ b^2Xx_0 + a^2Yy_0 - a^2b^2 = 0, \end{cases}$$

cioè per i punti d'incontro della iperbole d'Apollonio di M colla polare di M rispetto all'ellisse data.

2°. Le coordinate del centro di ciascuna delle due iperbole (9), (11) sono rispettivamente

$$\begin{cases} X = \dfrac{a^2}{c^2 \cos \alpha}\,(x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha), \\ Y = \dfrac{b^2}{c^2 \cos \alpha}\,(x_0 \operatorname{sen} \alpha - y_0 \cos \alpha); \end{cases} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} X' = \dfrac{a^2}{c^2 \cos \alpha}\,(x_0 \cos \alpha - y_0 \operatorname{sen} \alpha), \\ Y' = -\dfrac{b^2}{c^2 \cos \alpha}\,(x_0 \operatorname{sen} \alpha + y_0 \cos \alpha). \end{cases} \qquad (14)$$

Se ne deduce

$$\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}=\frac{X'^2}{a^4}=\frac{Y'^2}{b^4}=\frac{x_0^2+y_0^2}{c^4\cos^2\alpha},$$

ovvero

$$\frac{X^2-X'^2}{a^4}=\frac{Y'^2-Y^2}{b^4}. \tag{15}$$

Il punto medio del segmento che ha per estremi questi centri ha per coordinate

$$A=\frac{X+X'}{2}=\frac{a^2x_0}{c^2}, \qquad B=\frac{Y+Y'}{2}=-\frac{b^2y_0}{c^2}. \tag{16}$$

Se dunque il punto (x_0, y_0) descrive una curva, il punto (A, B) descrive una curva dello stesso ordine.

3°. *Luogo del centro delle iperboli d'Apollonio generalizzate al variare di α.*

L'equazioni (13) si possono scrivere

$$X-\frac{a^2x_0}{c^2}=\frac{a^2y_0}{c^2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$Y+\frac{b^2y_0}{c^2}=\frac{b^2x_0}{c^2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Eliminando $\operatorname{tg}\alpha$ fra queste, si ha

$$b^2Xx_0-a^2Yy_0=\frac{a^2b^2(x_0^2+y_0^2)}{c^2}; \tag{17}$$

il luogo dei centri è dunque una retta.

Se il punto (x_0, y_0) percorre il circolo $x^2+y^2-R^2=0$, si ha $x_0^2+y_0^2=R^2$, e la retta (17) inviluppa l'ellisse

$$\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}=\frac{R^2}{c^4}. \tag{18}$$

4°. Se il punto $M(x_0, y_0)$ percorre l'ellisse, si ha

$$x_0=a\cos\psi, \qquad y_0=b\,\mathrm{sen}\,\psi,$$

e la (17) diviene

$$bX\cos\psi-aY\,\mathrm{sen}\,\psi=\frac{ab}{c^2}(a^2\cos^2\psi+b^2\,\mathrm{sen}^2\psi). \tag{19}$$

Per trovare l'inviluppo di questa retta, prendiamo la derivata della (19) rispetto a φ: si ha così

$$bX\,\mathrm{sen}\,\psi+aY\cos\psi=2\,ab\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi. \tag{20}$$

Risolvendo le (19) e (20) rispetto a X e Y, si ha

$$\begin{cases} X=\dfrac{a}{c^2}\left[(b^2+2\,c^2)\cos\psi-c^2\cos^3\psi\right] \\ Y=-\dfrac{b}{c^2}\left[(a^2-2\,c^2)\,\mathrm{sen}\,\psi+c^2\,\mathrm{sen}^3\psi\right]. \end{cases} \tag{21}$$

Si vede, soto questa forma, anche senza fare l'eliminazione di ψ che le equazioni (21) rappresentano una curva unicursale di sesto grado.

Essa è una curva chiusa la cui area è

$$U=\frac{\pi\,ab}{8\,c^4}(a^4+b^4-10a^2b^2)=\frac{\pi\,ab}{8}-\frac{\pi\,a^3b^3}{c^4}.$$

5°. *Se il punto* (x_0, y_0) *percorre una retta il luogo dei punti fissi comuni a tutte le iperboli d'Apollonio generalizzate* (1°) *è una cubica.*

Se il punto (x_0, y_0) *percorre l'ellisse dato il luogo suddetto è una sestica.*

6°. *Gl'inviluppi delle iperboli d'Apollonio generalizzate, quando il punto* (x_0, y_0) *percorre l'ellisse dato, l'angolo* α *restando costante, sono due quartiche.*

Infatti $x_0 = a \cos \psi$, $y_0 = b \operatorname{sen} \psi$ nella (9), si ha

$$b\,(b^2\,X \cos \alpha - a^2\,Y \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \psi - a\,(b^2\,X \operatorname{sen} \alpha + \\ + a^2\,Y \cos \alpha) \cos \psi + c^2\,XY \cos \alpha + a^2b^2 \operatorname{sen} \alpha = 0.$$

Per conseguenza, l'inviluppo indicato è la quartica

$$b^2\,(b^2\,X \cos \alpha - a^2\,Y \operatorname{sen} \alpha)^2 + a^2\,(b^2\,X \operatorname{sen} \alpha + a^2\,Y \cos \alpha)^2 = \\ = (c^2\,XY \cos \alpha + a^2b^2 \operatorname{sen} \alpha)^2. \qquad (22)$$

Similmente si trova che l'inviluppo dell'iperbole (11) è la quartica

$$b^2\,(b^2\,X \cos \alpha + a^2\,Y \operatorname{sen} \alpha)^2 + a^2\,(b^2\,X \operatorname{sen} \alpha - a^2\,Y \cos \alpha)^2 = \\ = (c^2\,XY \cos \alpha - a^2b^2 \operatorname{sen} \alpha)^2. \qquad (23)$$

Quando $\alpha = 0$, queste due (22) e (23) diventano le *kreuycurve.*

$$b^6\,X^2 + a^6\,Y^2 = c^4\,X^2Y^2. \qquad (24)$$

E.-N. BARISIEN.

PICCOLE NOTE

Sopra una speciale trasformazione quadratica del piano. — 1. Siano dati sopra un piano una retta r ed un punto O; e, indicando con P un punto qualsiasi del piano, sia A l'intersezione della retta r colla retta OP. Facciamo corrispondere al punto P il punto P' in cui la parallela alla r passante per P incontra la perpendicolare alla r passante per A.

Prendiamo il punto O come origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali XOY rispetto il quale l'equazione della retta r sia: $x - 1$. Nel modo suaccennato si viene a stabilire fra due piani sovrapposti π e π' la trasformazione quadratica definita dalle formole: $x = x'$, $y = x'y'$; $x' = x$, $y' = \frac{y}{x}$.

È questa la trasformazione per la quale: al cerchio $(x-1)^2 + y^2 = 1$ del piano π corrisponde nel piano π' la *versiera di Agnesi* $x'y'^2 + x' = 2$; ed al cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$ del piano π' corrisponde nel piano π la *lemniscata di Gerono* $x^4 = x^2 - y^2$.

In tale trasformazione vi sono però altre corrispondenze degne di nota.

2. Alle rette $y = mx + b$ del piano π corrispondono nel piano π' le iperbole equilatere $x'(y' - m) = b$ aventi per assintoti l'asse OY ed una parallela all'asse OX.

Alle rette $y' = mx' + b$ del piano π' corrispondono nel piano π le parabole $y = mx^2 + bx$ cioè $y + \frac{b^2}{4m} = m\left(x + \frac{b}{2m}\right)^2$ passanti per O ed aventi l'asse parallelo all'asse OY.

Siccome con tale trasformazione i punti dell'asse OX e della retta r sono punti fissi, così è chiaro che in ambo i casi la conica corrispondente ad una retta data passa pei punti d'intersezione di tal retta coll'asse OX e colla retta r.

3. Alla parabola $y'^2 = px'$ del piano π' corrisponde nel piano π la *parabola semicubica* $y^2 = px^3$; ed alla parabola $x'^2 = py'$ del piano π' corrisponde nel piano π la *parabola cubica* $x^3 = py$.

Alla parabola $y^2 = px$ ed all'iperbole equilatera $xy = p$ del piano π corrispondono nel piano π' rispettivamente le *iperbole cubiche* $x'y'^2 = p$ ed $x'^2y' = p$, cioè la stessa curva ruotata di un angolo retto.

4. Al cerchio $x^2 + y^2 = a^2$ del piano π corrisponde nel piano π' la curva $x'^2y'^2 = a^2 - x'^2$.

Spostando tale curva parallelamente all'asse OX la sua equazione diventa $y'^2(x' - b)^2 = a^2 - (x' - b)^2$; e nel piano π le corrisponde la *concoide di Nicomede* $y^2(x - b)^2 = x^2\left\{a^2 - (x - b)^2\right\}$.

5. Al cerchio $(x + a)^2 + y^2 = a^2$ cioè $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ del piano π corrisponde nel piano π' la curva $x'y'^2 + 2a + x' = 0$.

Spostando tale curva parallelamente all'asse OX la sua equazione diventa $y'^2(x' - b) + (2a - b) + x' = 0$ cioè $x'(1 + y'^2) + (2a - b) - by'^2 = 0$; e nel piano π le corrisponde la curva $x(x^2 + y^2) + (2a - b)x^2 - by^2 = 0$.

Tale curva è la *strofoide retta* $x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$, se $b = a$; è la *cissoide di Diocle* $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$, se $b = 2a$; è la *trisettrice di Maclaurin* $x(x^2 + y^2) = \frac{a}{2}(y^2 - 3x)$, se $b = \frac{a}{2}$.

6. Da quanto precede si possono facilmente dedurre dei metodi per costruire per punti colla riga e col compasso le curve ivi nominate.

Sarei lieto se qualche altro lettore del " Periodico „ ripigliasse lo studio di tale trasformazione che può forse offrire un certo interesse.

Padova

PAOLO CATTANEO.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 641, 643 E 644

641. *Dimostrare che, se si indicano con* $d_{11}, d_{12}, \ldots d_{1l_1}$ *tutti i divisori del numero intero* i, *con* $\varphi(i)$ *il numero dei numeri primi con* i *ed inferiori ad* i, *e con* α_j *una radice di* $x^n - 1 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ *si ha:*

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2} = \prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{l_1}\varphi(d_{1i}) + \alpha_j\sum_{i=1}^{l_2}\varphi(d_{2i}) + \ldots + \alpha_j^{n-1}\sum_{i=1}^{l_n}\varphi(d_n)\right\}.$$

OCCHIPINTI.

Risoluzione del sig. Gandini, I. T. di Varese.

LEMMA I. — Se m ed n sono numeri primi tra loro si ha:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Siano $ab\ldots l$, $a'b'\ldots l'$ i fattori primi di m ed n. Avremo:

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{l}\right), \quad \varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{l'}\right),$$

$$\varphi(mn) = mn\left(1 - \frac{1}{a}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{l}\right)\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{l'}\right) = \varphi(m)\varphi(n) \quad \text{cdd.}$$

LEMMA II. — Se d assume successivamente i valori dei divisori di un numero n, si ha:

$$(1) \qquad \Sigma\, \varphi(d) = n.$$

Supponiamo che la (1) sia vera. Essendo r un numero primo e primo con n, e ρ un intero qualunque, dimostreremo che $\Sigma\,\varphi(d') = nr^{\rho}$, dove d' assume successivamente tutti i valori dei divisori di nr^{ρ}. Infatti:

$$\Sigma\,\varphi(d') = \Sigma\,\varphi(d) + \Sigma\left\{\varphi(dr) + \varphi(dr^2) + \ldots + \varphi(dr^{\rho})\right\}$$

e per il Lemma I

$$\begin{aligned}\Sigma'\,\varphi(d') &= n + \Sigma\,\varphi(d)\left\{\varphi(r) + \varphi(r^2) + \ldots + \varphi(r^{\rho})\right\} \\ &= n\left\{1 + \varphi(r) + \ldots + \varphi(r^{\rho})\right\} = \\ &= n\left\{1 + r\left(1 - \frac{1}{r}\right) + r^2\left(1 - \frac{1}{r}\right) + \ldots + r^{\rho}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right\} = r^{\rho}. \qquad \text{cdd.}\end{aligned}$$

La (1) è vera per $n = 1$, perciò vale per $n = r^{\rho}$ e quindi per $n = r^{\rho}\, r_1^{\rho_1}$, $n =$ ecc. dove $r_1, \ldots$ è un altro numero primo, cosicchè vale in generale per qualunque n. Si conclude che

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{l_n} \varphi(d_{ni}) = n.$$

Posto $f(\alpha_i) = 1 + 2\,\alpha_i + \ldots + n\alpha_i^{n-1}$, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ 2 & 3 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 1 \ldots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{i=1}^{n} f(\alpha_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\, n^{n-2}$$

(vedi PASCAL, *I determinanti*, pag. 93 e 197); dunque

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\, n^{n-2} = \prod_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \text{ e per la (2)}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{l_1}\varphi(d_{1i}) + \alpha_j \sum_{i=1}^{l_2}\varphi(d_{2i}) + \ldots + \alpha_j^{n-1}\sum_{i=1}^{l_n}\varphi(d_{ni})\right\} \text{ cdd.}$$

643. *Sia* c^2 *un cerchio fisso di centro* C *e* c'^2 *uno di raggio variabile e di centro* C', *e sia* P *un punto d'intersezione dei due cerchi; il luogo delle ulteriori intersezioni tanto dei raggi* CP *con* c'^2 *quanto delle tangenti in* P *a* c^2 *o con* c'^2, *sono conchiglie di Pascal simmetriche l'una dell'altra. In particolare se la distanza dei centri* CC' *è metà del raggio di* c^2 *si hanno due cardioidi.*

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del sig. Com. E.-N. Barisien di Costantinopoli.

Sieno $cc' = d$, R e R' i raggi di c^2 e c'^2, P' il secondo punto d'incontro di c'^2 con CP, Q quello di c' con la tangente in P a c^2, ω l'angolo PCC', $\rho =$ CP', I il punto di mezzo di PP'. Si ha $\rho = \mathrm{R} + \mathrm{PP'}$; ma

$$\mathrm{PI} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{PP'} = \mathrm{IC} - \mathrm{R} = d\cos\omega - \mathrm{R},$$

dunque

$$\rho = \mathrm{R} + 2\,(d\cos\omega - \mathrm{R}) = 2d\cos\omega - \mathrm{R}.$$

Questa è l'equazione di una *conchiglia di Pascal*, che diviene una *cardioide* se è $d = \frac{1}{2}\mathrm{R}$.

Il punto Q è il simmetrico di P rispetto a C', ed essendo C'Q = CP', resulta che il luogo di Q è simmetrico del luogo precedente, rispetto al punto C'.

Altra risoluzione del sig. Gandini, I. T. di Varese.

644. *Si considerino tutte le coniche simili γ^2 aventi un fuoco* F *sopra un dato cerchio* c^2 *di centro* C *e di raggio* r *e aventi per direttrice corrispondente una data retta* d; *si dimostri che:*

a) *L'inviluppo di tali coniche è, in generale, una coppia di coniche simili alle γ^2.*

b) *Il luogo dei centri delle γ^2 (quando queste sono coniche centrali) è, in generale, un'ellisse.*

c) *Il luogo dei vertici delle γ^2 è composto di due coniche, di cui una è sempre un'ellisse, e l'altra è ellisse se le γ^2 son dotate di centro, e si scinde invece in una coppia di rette parallele o coincidenti se le γ^2 sono parabole.*

d) *Il luogo dei secondi fuochi delle γ^2 (nel caso in cui queste siano coniche centrali) è un'ellisse.*

e) *Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le tangenti in* F *a* c^2 *è, in generale, una conica simile alle γ^2. Trovare la condizione che deve essere soddisfatta, affinchè tale conica degeneri, e dimostrare che nel caso che le γ^2 sono parabole, tale condizione esprime che la* d *passa per* C.

f) *Il luogo delle intersezioni della γ^2 coi raggi* $\overline{\mathrm{CF}}$ *coincide con l'inviluppo delle γ^2 (vedi* a).

g) *Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le parallele condotte da* F *a* d *è composto di due ellissi: queste sono concentriche in* C *quando* d *passa per* C.

Si esaminino in tutta questa quistione i seguenti casi particolari:

1°. Se le γ^2 sono parabole.

2°. Se d *è tangente a* c^2.

3°. Se d *passa per* C.

4°. Se indicando con k *la distanza di* c *da* d *e con* e *l'eccentricità delle γ^2,* è $e = \frac{r}{k}$.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. E.-N. Barisien.

Sieno

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{1}$$

$$x \cos\theta + y \,\mathrm{sen}\,\theta - a = 0 \tag{2}$$

le equazioni del cerchio c^2 e della retta d.

Indichiamo con (α, β) il fuoco F di γ^2 e con e la sua eccentricità, che resta costante perchè le coniche γ^2 sono simili. L'equazione delle γ^2 è dunque

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 (x\cos\theta + y \,\mathrm{sen}\,\theta - a)^2. \tag{3}$$

Ma è

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2, \tag{4}$$

e perciò la (3) diviene

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - e^2 (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta - a)^2 + r^2 = 0. \tag{5}$$

a) Per avere l'inviluppo delle coniche (5) formiamo l'equazione per mezzo dei rapporti delle derivate di (5) e (4) rispetto ad α e β, e si ha

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}. \tag{6}$$

Dalle (6), (4) si deduce

$$\alpha = \frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \beta = \frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Questi valori, posti nella (5) danno:

$$x^2 + y^2 - 2r\sqrt{x^2+y^2} + r^2 - e^2 (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta - a)^2 = 0,$$

o

$$(\sqrt{x^2+y^2}-r)^2 - e^2(x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta - a^2) = 0,$$

o finalmente

$$[\sqrt{x^2+y^2}-r-e(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a)]\ [\sqrt{x^2+y^2}-r+e(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a)]=0;$$

e perciò si hanno per il luogo cercato le due coniche

$$x^2+y^2 = e^2\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a + \frac{r}{e}\right)^2, \tag{7}$$

$$x^2+y^2 = e^2\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a - \frac{r}{e}\right)^2, \tag{8}$$

che hanno la stessa eccentricità di γ^2, sono similmente poste ed aventi tutte un fuoco in C.

b) Le equazioni che danno le coordinate del centro della (3) sono

$$x - \alpha - e^2\cos\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a) = 0 \tag{9}$$
$$y - \beta - e^2\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a) = 0. \tag{10}$$

L'eliminazione di α e β fra queste due equazioni e la (4) dà immediatamente

$$[x - e^2\cos\theta\,(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a)]^2 + [y - e^2\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a)]^2 = r,$$

ossia

$$\begin{aligned}(11)\quad &[x(1-e^2\cos^2\theta) - e^2 y\operatorname{sen}\theta\cos\theta + ae^2\cos\theta]^2 +\\ &+ [e^2x\operatorname{sen}\theta\cos\theta - y(1-e^2\operatorname{sen}^2\theta) - ae^2\operatorname{sen}\theta]^2 = r^2.\end{aligned}$$

Questo rappresenta una ellisse.

c) Luogo dei vertici sull'asse focale delle γ^2.

L'equazione di quest'asse è

$$(x-\alpha)\operatorname{sen}\theta - (y-\beta)\cos\theta = 0 \tag{12}$$

Bisogna eliminare α e β fra le (3), (4) e (12).

Ma le (3), (12) danno

$$\frac{x-\alpha}{\cos\theta} = \frac{y-\beta}{\operatorname{sen}\theta} = \pm e\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a);$$

da cui

$$\alpha = x \mp e\cos\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a)$$
$$\beta = y \mp e\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a).$$

Il luogo si compone dunque delle due ellissi

$$[x \mp e\cos\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a)]^2 + [y \mp e\operatorname{sen}\theta\,(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a)]^2 = r,$$

ossia

$$\begin{aligned}(13)\quad &[x(1 \mp e\cos^2\theta) \mp ey\operatorname{sen}\theta\cos\theta \pm ae\cos\theta]^2 +\\ &+ [\mp ex\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y(1 \mp e\operatorname{sen}^2\theta) \pm ae\operatorname{sen}\theta]^2 = r^2.\end{aligned}$$

Se prendiamo il segno superiore con $e = 1$, si ha

$$[x\operatorname{sen}^2\theta - y\operatorname{sen}\theta\cos\theta + a\cos\theta]^2 + [-x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y\cos^2\theta + a\operatorname{sen}\theta]^2 = r^2$$

ossia

$$[(x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta)\operatorname{sen}\theta + a\cos\theta]^2 + [(x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta)\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta]^2 = r^2$$

cioè

$$(x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta)^2 = r^2 - a^2$$

e perciò in tal caso una delle coniche (13) si riduce alla coppia di rette parallele

$$x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta = \pm \sqrt{r^2 - a^2},$$

che coincidono se è $a = r$, cioè se la retta d è tangente al cerchio c^2.

d) Risolvendo le (9), (10) rispetto ad x e y si ottiene per le coordinate (X, Y) del centro di γ^2:

$$\text{(14)} \qquad X = \frac{1}{1-e^2}\left[\alpha\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta\right) + e^2\beta \operatorname{sen}\theta \cos\theta - ae^2 \cos\theta\right),$$

$$\text{(15)} \qquad Y = \frac{1}{1-e^2}\left[\alpha e^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \beta\left(1 - e^2\cos^2\theta\right) - ae^2 \operatorname{sen}\theta\right].$$

Le coordinate dei secondi fuochi sono

$$x = 2X - \alpha, \qquad y = 2Y - \beta,$$

dunque x e y sono funzioni lineari di α e β e analogamente α e β sono funzioni lineari di x e y. Questi valori, sostituiti nella (4) mostrano che il luogo del secondo fuoco è una ellisse.

e) La tangente in F a c^2 ha per equazione

$$\text{(16)} \qquad \alpha x + \beta y = r^2,$$

ossia

$$\text{(17)} \qquad \alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) = 0.$$

Dalle (3), (17) si ha

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{y-\beta}{-\alpha} = \frac{e\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a\right)}{r},$$

da cui

$$\alpha r + e\beta\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a\right) = rx,$$
$$\alpha e\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a\right) - \beta r = -ry.$$

Addizionando membro a membro queste due ultime, dopo aver quadrato, si ha:

$$(\alpha^2 + \beta^2)r^2 + (\alpha^2 + \beta^2)e^2\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a\right)^2 = r^2\left(x^2 + y^2\right),$$

ossia, poichè è $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$,

$$r^2 + e^2\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a\right)^2 = x^2 + y^2,$$

cioè

$$\text{(18)} \qquad x^2 + y^2 - r^2 = e^2\left(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - a\right)^2.$$

Questa rappresenta una conica simile alle γ^2.

Se poniamo la (18) sotto la forma

$$\text{(19)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

si ha

$$A = 1 - e^2\cos^2\theta, \qquad B = -e\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \qquad C = 1 - e^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$D = ae^2\cos\theta, \qquad E = ae^2\operatorname{sen}\theta \qquad F = -\left(a^2e^2 + r^2\right).$$

La condizione che deve esser soddisfatta affinchè la (19) degeneri è dunque

$$AE^2 + CD^2 - 2BDE + F\left(B^2 - AC\right) = 0,$$

cioè

$$\text{(20)} \qquad e^2\left(r^2 - a^2\right) = r^2$$

che è indipendente da θ.

Se γ^2 è una parabola è $e = 1$ e quindi $a = 0$; dunque in questo caso d passa per C.

f) Questa proposizione è evidente perchè l'equazione (6) è quella del raggio CF.

g) La corda focale principale di γ^2, passante per F, ha per equazione

$$(x-\alpha)\cos\theta+(y-\beta)\operatorname{sen}\theta-0; \tag{21}$$

bisogna eliminare α e β fra le (3), (4), (21). Ma delle (3) (21) si ha

$$\frac{x-\alpha}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{y-\beta}{-\cos\theta}=\pm e(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a),$$

da cui

$$\begin{aligned}\alpha&=x\mp e\operatorname{sen}(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a)\\ \beta&=y\pm e\cos(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a);\end{aligned}$$

il luogo si compone dunque di due ellissi

$$\begin{aligned}&[x(1\mp e\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\mp ey\operatorname{sen}^2\theta\pm ae\operatorname{sen}\theta]^2+\\ &+[\pm ex\cos^2\theta\pm y(1\pm e\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\mp ae\cos\theta]^2=r^2.\end{aligned} \tag{22}$$

Se d passa per C, si ha $a=0$, e le due coniche hanno i loro centri in C.

CASI PARTICOLARI.

1. γ^2 *è una parabola* $(e=1)$.

a) L'inviluppo delle γ^2 si compone di due parabole

$$x^2+y^2=(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a\pm r)^2.$$

b) Il luogo va all'infinito.
c) Il luogo dei vertici si compone di un'ellisse e di una retta.
d) Il luogo va all'infinito.
e) Il luogo è la parabola $x^2+y^2-r^2=(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-a)^2$.
g) Il luogo si compone di due ellissi.

2. d *è tangente a* c^2 $(a=r)$.

a) Due coniche.
b) Ellisse.
c) Due ellissi.
d) Ellisse.
e) Conica.
g) Due ellissi.

3. d *passa per* C $(a=o)$.

a) Due coniche.
b) Ellisse di centro C.
c) Due ellissi di centro C.
d) Ellisse di centro C
e) Conica
g) Due ellissi di centro C.

4. *Quando è* $K=a$ *e* $e=\frac{r}{a}$.

a) L'inviluppo delle γ^2 si compone di due rette $x^2+y^2=e^2(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta)^2$ e della conica $x^2+y^2=e^2(x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-2a)^2$.
b) Ellisse.
c) Due ellissi passanti per C.
d) Ellisse.
e) Conica passante per C.
g) Due ellissi passanti per C.

Altra risoluzione del sig. Gandini di Varese.

QUISTIONI PROPOSTE

646. Da un punto P del piano d'una ellisse di centro O si conducano le quattro normali all'ellisse nei punti A, B, C, D. Dimostrare che la retta che congiunge il centro I di OP col centro del circolo circoscritto al triangolo BCD è parallelo alla normale in A.

647. È dato un circolo c ed una ellisse e. Essendo F un fuoco di e ed M un punto variabile su di essa, si consideri il circolo c' che ha MF per diametro. Il luogo dei centri di similitudine dei circoli c e c' si compone di due coniche.

648. Si consideri il circolo c avente per centro un punto M variabile di una ellisse e passante per un fuoco F. Trovare:

1° il luogo dei centri di similitudine di questo circolo con ciascuno dei circoli direttori dell'ellisse;

2° l'inviluppo dell'asse radicale del circolo c con ciascuno dei circoli direttori.

649. Essendo data una ellisse, si considerino i due punti P e Q, coniugati armonici di un punto M dell'ellisse e del centro di curvatura C relativo a M. Sia λ il rapporto $\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QC}}$, P essendo situato fra M e C. Calcolare l'area di ciascuna delle curve luogo di P e Q, e dimostrare che se l'ellisse è tale che l'area della sua sviluppata sia 8 volte quella dell'ellisse, e si ha inoltre $\lambda=2$, la differenza delle aree del luogo di P e Q è uguale all'area della sviluppata.

E.-N. Barisien.

650. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int\frac{dx}{x\,\mathrm{sen}\log x^k}.$$

F. Sibirani.

651. L'inviluppo delle mediatrici delle corde focali di una conica è una quartica bicircolare cuspidata, se la conica è a centro, ed è invece una parabola semi-cubica, se la conica è una parabola.

G. Cardoso-Laynes.

BIBLIOGRAFIA

G. Candido. — *La formula di Waring e sue notevoli applicazioni.* [presso l'A., Galatina (Lecce). L. 2,25.

Un grave imbarazzo per gli studiosi che vogliono conoscere qualche speciale teorica matematica, è il doverne cercare lo sviluppo e le principali applicazioni in parecchi libri ed in memorie sparse pe' giornali scientifici. Ed ognuno sa perciò come riescano vantaggiose quelle monografie che raccolgono e sviluppano quanto si è già pubblicato sopra un dato argomento, specialmente se alla competenza dell'autore ed alla sua facoltà di assimilazione si unisca un'esposizione facile, chiara, ordinata.

Di questi pregi mi sembra dotata la recente pubblicazione del Candido sulla formula di Waring, e perciò ho voluto richiamarvi l'attenzione degli studiosi e specialmente dei giovani.

Premesso un cenno sulla vita del Waring, l'A. in un primo capitolo stabilisce la nota formula con diversi metodi, ponendola anche sotto forma di determinante —; riporta la dimostrazione del Pellet per la formula più generale, e fa subito alcune applicazioni. Nel secondo capitolo deduce dalla formula di Waring il celebre teorema di Fermat e quello di Legendre sui numeri primi, e con considerazioni semplici ed eleganti ritrova importanti risultati dovuti a Cauchy ed a Catalan sulla divisibilità dell'espressione $(a+b)^n - a^n - b^n$.

Nel terzo capitolo sono ottenute le formule del seno e coseno degli archi multipli in funzione degli archi semplici e le potenze delle stesse funzioni; e nel quarto sono trattate l'equazione reciproca e la doppiamente reciproca con considerazioni che generalmente non si trovano nei trattati di algebra. Nel quinto è risoluta con molta semplicità l'equazione di Moivre ed è discussa completamente. Importante è l'applicazione all'equazione di decimo grado di Jacobi e la trasformazione dell'espressione $\sqrt[m]{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}$. Anche il noto problema di Adriano Romano è ridotto ad essere un caso particolare dell'equazione di Moivre. Questo quinto capitolo è seguito da un'aggiunta notevole, perchè stabilisce le condizioni affinchè si verifichino le eguaglianze del tipo: $\sqrt[k]{m+\sqrt{n}}+\sqrt[k]{m-\sqrt{n}}=p$. Infine nel sesto capitolo, con osservazioni che sarebbe inutile cercar nei trattati, è applicata allo studio di sistemi di equazioni, e specialmente del sistema $x^n+y^n=a,\ x+y=b$. Notevole in questo capitolo la ricerca della condizione affinchè tale sistema possa essere risoluto algebricamente. Ogni capitolo è seguito da molti esercizi in parte proposti dall'A., in parte tolti da speciali pubblicazioni. Accompagna anche ogni capitolo una completa bibliografia degli argomenti trattati.

E. Nannei.

I. et P. Tannery. — *Notions de mathématique et notions historiques.* Paris, Delagrave, 1903.

Questo libro è destinato alle classi di filosofia ed a coloro che aspirano al certificato di scienze fisiche, chimiche e naturali di Francia.

Il programma della classe suddetta del 31 maggio 1902 è inspirata agli stessi concetti che indussero in Italia il Ministro della pubblica istruzione, a stabilire nelle nostre Università un corso di matematica per gli studenti di chimica.

Tale programma richiede una corsa rapida nel campo delle matematiche più elevate, senza fermarsi a studiarle profondamente. Si tratta insomma di sollevare soltanto un lembo del velo che nasconde la sfinge matematica senza rivelarne tutti i misteri, di dare una nozione sommaria dei vari metodi che hanno maggior importanza nel campo della matematica.

I *consigli generali* che seguono il programma indicato, contengono le parole seguenti: « Il professore non dimenticherà che gli allievi ai quali si dirige non hanno « l'abitudine delle matematiche; eviterà dunque ogni teoria astratta; non metterà

" innanzi le idee generali, ma cercherà di farle risaltare su esempi particolari, " sviluppati col dettaglio e la lentezza che giudicherà necessari per essere ben " seguiti ". Ed a questi concetti s'inspira tutto il libro del sig. Giulio Tannery.

Circa un terzo del volume è occupato da una introduzione, nella quale sono richiamate le nozioni di aritmetica, algebra e geometria necessarie per intendere il seguito.

Il primo capitolo *Su alcune identità* si riferisce agli sviluppi di $(a+b)^n$, $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ e simili, e alle conseguenze che se ne possono trarre. Il secondo *Algebra geometrica* contiene i teoremi sull'equivalenza delle figure geometriche piane che sotto un certo aspetto posson considerarsi come l'algebra degli antichi greci; il terzo tratta delle equazioni di 2° grado.

I capitoli IV, V, VI contengono il concetto generale di coordinate e le nozioni fondamentali di geometria analitica.

Il VII partendo dal concetto di tangente e velocità contiene la nozione di derivata.

L'VIII partendo dalla ricerca di aree e volumi dà la nozione d'integrale e le sue principali proprietà; ed il IX tratta rapidamente dei limiti, infinitesimi, integrali, definiti, serie.

Il libro si chiude con una interessantissima appendice *Nozioni storiche*, redatta dall'illustre Paolo Tannery, fratello dell'A. della prima parte dell'opera, nella quale è esposta con molta chiarezza e brevità la storia delle origini dei vari rami delle matematiche, dei segni più comunemente usati, ecc.

F.-S. Holzinger. — *Aritmetica politica per le scuole superiori di commercio.* (Accademia di commercio). — Prima versione italiana. Vienna, Hoelder, 1902.

Col nome di aritmetica politica l'A. ha designato quell'insieme di problemi che si riferiscono alle diverse operazioni bancarie e di assicurazione, come risulta dall'indice che riportiamo sommariamente.

Introduzione. — Progressioni aritmetiche e geometriche. Calcolo dell'interesse semplice.

Parte I. — Calcoli d'interesse composto o rendita.
" II. — Corso dei prestiti e costruzioni di piani d'ammortizzazione.
" III. — Piani d'ammortamento per prestiti con lotteria.
" IV. — Calcolo delle probabilità e delle rendite vitalizie.
" V. — Assicurazione di un capitale in caso di morte.
" VI. — Assicurazione fra congiunti.

Appendice.

Tavola I. — Valore di $\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$ e di $\lg\left(1-\frac{p}{100}\right)$ (p variabile di $\frac{1}{4}$ da 2 a 6).
" II. — Valori di $v^n = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ (p variabile di $\frac{1}{4}$ da 2 a 6 ed n variabile da 1 a 100).
" III. — Valori di $w^n = \left(1-\frac{p}{100}\right)^n$ (p ed n variabili c. s.)
" IV. — Valori di $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ (n variabile da 1 a 200).
" V. — Tabelle di mortalità.
" VI. — Tabella fondamentale delle rendite personali ed assicurazioni di capitali, basata sulla tav. di mortalità di Florencourt e sul 4 % d'interesse composto.

TAVOLA VII. — Tabella fondamentale c. s. basata sulla tavola di mortalità di Brune-Fischer per uomini e sull' interesse composto del 4 %.

" VIII. — Tabella fondamentale c. s. basata sulla tavola di mortalità di Brune-Fischer per donne e sull'interesse composto del 4 %.

" IX. — Valori attuali delle rendite *d* 1K per coniugi calcolati a caso dalla tavola di mortalità di Brune-Fischer per uomini e donne e del 4 %.

Come si vede dall'indice riportato l'opera contiene in piccolo volume (118 pagg.) tutto quanto può occorrere agli uomini di affari, ed è scritta con lodevole brevità e chiarezza.

Un appunto bisogna fare all'anonimo traduttore. In questo libro si trovano barbarismi abbondanti come *Valerà, esborsare, Va da sè, percento* resto sostantivo e simili. Inoltre gli esempi che nell'originale si trovano giustamente sempre in *marchi* o *corone* avrebbero opportunamente potuto esser trasformati in *lire* nella traduzione italiana.

III CONGRESSO

fra i professori di matematica delle scuole medie d'Italia

promosso dall'Associazione " Mathesis „

Napoli - Settembre 1903

Sala *Principe di Napoli* concessa dal Municipio

Seduta inaugurale.

Lunedì 14 settembre, ore 11

Intervengono alla seduta inaugurale l'assessore AGRESTI, rappresentante il sindaco ed il provv. DE LUCA APRILE, rappresentante il Ministro dell'istruzione pubblica. Dei professori d'Università sono presenti il DEL PEZZO ed il MONTESANO.

Assume la presidenza il prof. BETTAZZI, presidente dell'associazione " Mathesis „ per iniziativa della quale è stato indetto il congresso.

Parlano, vivamente applauditi: Il prof. BETTAZZI, il quale ringrazia a nome dell'associazione l'on. sindaco di Napoli ed il suo rappresentante, per la cortese ospitalità, e saluta con belle parole gl'intervenuti; l'assessore AGRESTI, che saluta i congressisti a nome del sindaco e del consiglio comunale ed augurandosi che i lavori del congresso siano di immediata efficacia per il miglioramento della scuola ed il prof. AMODEO il quale a nome del comitato locale, porge il saluto ai professori qui arrivati da ogni parte d'Italia.

Il prof. DE LUCA APRILE legge quindi un telegramma gentile d'augurio del ministro Nasi, e la Presidenza si incarica rispondere seduta stante.

Il presidente indice la prima seduta, per i lavori del congresso alle ore 15.

In fine, il Municipio ha offerto dei rinfreschi ai congressisti.

Discussione sul primo tema.

Lunedì 14 settembre ore 15, martedì 15 settembre ore 8.

Al principio della seduta pomeridiana del 14 si procede all'elezione dell'ufficio di presidenza che risulta così costituito: BETTAZZI, presidente; AMODEO, FAZZARI, vice-presidenti; GALLUCCI, MARI, segretari.

Si inizia poi la discussione sul tema primo riguardante *le cause del poco profitto che gli allievi delle nostre scuole medie fanno nella matematica;* è relatore il prof. Nannei del R. Istituto Tecnico di Bari. Anche nel congresso si sono manifestate le due correnti per cui già sorsero vive discussioni nelle adunanze parziali di Bologna, Roma e Milano. Alcuni, come il Frattini e il De Amicis, negano il fatto del poco profitto, specialmente nel secondo biennio d'istituto tecnico, nel quale è avvenuta una certa selezione degli allievi, per cui restano nelle ultime classi i migliori ed i più adatti; la maggioranza però è d'accordo coi proff. Betazzi e Fazzari, i quali dichiarano che la quistione è stata posta specialmente per quelle scuole nelle quali la matematica non è materia professionale.

Respinta la pregiudiziale sull'opportunità del tema, si discute la relazione Nannei e se ne approvano tutte le conclusioni con modificazioni di forma in qualche parte e con le seguenti aggiunte:

1ª. Il prof. Certo riconosce, come causa principale del poco profitto, il troppo affollarsi degli allievi nelle scuole classiche a scapito delle scuole professionali e propone quindi l'istituzione di scuole commerciali industriali ed agrarie secondo i bisogni delle varie regioni. Il congresso approva a maggioranza.

2ª. Il prof. Rozzolino, preside del Liceo di Campobasso, ritiene che il poco profitto che gli allievi delle scuole classiche fanno nella matematica è dovuto in gran parte al preconcetto che, approvati nelle materie letterarie, anche se meritano zero in matematica sono promossi lo stesso; propone perciò un ordine del giorno col quale si fa voto che la matematica venga considerata come materia principale anche nelle scuole classiche. Il congresso approva a maggioranza.

3ª. Il prof. Gallucci, in aggiunta alla relazione Nannei, fa notare che le cause del poco profitto e le proposte per ovviarvi si possono ordinare secondo due principii pedagogici, il principio di continuità ed il principio dell'interesse. In base a tali principii si possono fare alcune proposte, specialmente riguardanti l'inizio dell'insegnamento della matematica razionale.

Il congresso delibera che queste considerazioni e le relative proposte vengano inserite negli atti in seguito alla relazione Nannei.

Discussione sul secondo tema.

Martedì 15 settembre ore 15, mercoledì 16 settembre ore 8.

Il prof. Palatini, relatore del secondo tema, riguardante *l'estensione e i limiti dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie,* è assente; però il presidente apre la discussione sulla relazione già stampata e nota a tutti i congressisti.

I professori De Amicis e Conti, riferendosi a quanto ebbero già a dire nelle adunanze del congresso di Livorno e nelle adunanze di Bologna riguardo ai programmi di matematica, pongono due pregiudiziali entrambe respinte dal congresso. Si passa quindi a discutere sui programmi delle scuole secondarie inferiori e si approva quello proposto dal relatore, con lievi modificazioni di forma. Per le scuole secondarie superiori, i professori Conti, Perna, De Amicis, sono d'avviso che non si possa prescindere dallo scopo che ciascuna scuola si propone, e presentano un ordine del giorno in questo senso. Il congresso approva a debole maggioranza quest'ordine del giorno ed il presidente dichiara chiusa la discussione sul secondo tema. I professori Rozzolino e Bernardi presentano un ordine del giorno col quale si raccomanda al comitato della *Mathesis* di proporre all'associazione lo studio dei programmi dei licei e degli istituti tecnici, per le relative riforme.

Discussione sul terzo tema.

Martedì 15 settembre ore 8, mercoledì 16 settembre ore 8 ed ore 15.

Prima di iniziare la discussione, il prof. Costanzi relatore del terzo tema, *sulla convenienza di rendere non obbligatoria la laurea in matematica per quelli che si dedicano all'insegnamento,* dà schiarimenti su varii punti della sua relazione.

Si approvano quindi due ordini del giorno, con i quali si domanda che non solo la laurea resti obbligatoria, ma che sia reso obbligatorio anche il diploma della scuola di magistero.

Portata la discussione sul miglioramento della scuola di magistero si fanno varie proposte, le quali vengono riunite in un solo ordine del giorno presentato dai professori Frattini, Perna, Certo e Conti, e col quale si fanno voti perchè si migliorino ulteriormente le scuole di magistero secondo le proposte già fatte dalla *Mathesis* in altri congressi, e perchè sia affidata una parte degl'insegnamenti relativi a valorosi e provetti insegnanti delle scuole medie.

In ultimo il prof. Cesarelli presenta alcune proposte per l'istituzione di una scuola di magistero anche per il primo biennio dell'Università. Il congresso prende atto e propone l'importante questione per il prossimo congresso.

Seduta di chiusura.

Giovedì 17 settembre ore 8 ½.

Questa seduta è dedicata alla lettura delle comunicazioni, terminate le quali, il presidente prof. Bettazzi dichiara chiuso il III congresso dei professori di matematica delle scuole medie.

Non si decide nulla circa il congresso futuro.

Il Presidente accetta, come raccomandazione, la proposta del De Amicis, di tenere il IV congresso a Milano, proposta che verrà messa in votazione per *referendum*.

Elenco delle comunicazioni fatte al congresso.

Candido. Sul giornalismo matematico elementare in Italia.

Frattini. Sul movimento con o senza deformazione.

Bustelli. Sul concetto di massa nella meccanica razionale.

Biasi. Sulle coordinate triangolari di ordine 2ⁿ.

De Amicis. Sull'equivalenza dei parallelogrammi equiangoli ed equilateri.

Angeleri. Sulla fusione della geometria piana con la solida (letta dal presidente prof. Bettazzi).

Gallucci. Sull'indirizzo formale e sull'indirizzo intuitivo nei fondamenti della matematica.

Gallucci. Sulla costruzione dei concetti dell'eguaglianza e dell'equivalenza geometrica.

CORRISPONDENZA

Ill.mo Sig. Direttore,

La prego d'inserire nel suo pregiato *Periodico* le seguenti brevi osservazioni sulle *Nuove considerazioni sulle permutazioni* del Dott. L. Carlini.

Le considerazioni che il Dott. Carlini fa intorno alle permutazioni di un dato numero di elementi, comparse nell'ultimo fascicolo (luglio-agosto 1903) ebbi già l'occasione di farle anch'io risolvendo *Un problema sulla partizione dei numeri*. (V. fasc. settembre-ottobre 1902): Ivi è ancora completata la determinazione del numero delle permutazioni che presentano un dato numero di inversioni, che il Dott. Carlini dichiara difficoltosa.

Ringraziandola della ospitalità accordatami mi creda

Palermo, 22 settembre 1902.

Dev.mo
Dott. Gaspare Mignosi
(S. Agostino, 33).

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 novembre 1904.

INTORNO ALLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE

DIPENDENTI DA QUELLE DI PIÙ FUNZIONI DATE

Un notevole contributo allo studio delle singolarità delle funzioni analitiche ha recentemente portato il sig. HADAMARD con un importante teorema, (*) per mezzo del quale, data una funzione mediante il suo sviluppo in serie di potenze intere e positive della variabile, si può, scomponendo opportunamente i coefficienti, conoscere in molti casi le singolarità della funzione data, per mezzo delle singolarità di note funzioni.

Il teorema di HADAMARD si può enunciare:

Siano date due serie di potenze

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \tag{1}$$
$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots \tag{2}$$

convergenti in cerchi aventi per centro l'origine e per raggi rispettivamente R *ed* R′ *e rappresentanti ivi due funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$. *La serie*

$$a_0b_0 + a_1b_1x + a_2b_2x^2 + \dots + a_nb_nx^n + \dots,$$

di cui ciascun coefficiente è eguale al prodotto dei coefficienti corrispondenti delle serie (1) *e* (2), *ha il suo cerchio di convergenza di raggio almeno eguale ad* RR′, *e rappresenta ivi una funzione* $f(x)$, *la quale ha (e ciò in tutto il piano) per soli punti singolari possibili* (**) *quelli che si ottengono moltiplicando le affisse dei diversi punti singolari di* $\varphi(x)$ *per quelle dei diversi punti singolari di* $\psi(x)$.

La dimostrazione del teorema di HADAMARD, fondata sulla considerazione di integrali curvilinei, venne in seguito semplificata di molto dal sig. BOREL (***) con la considerazione dell'espressione analitica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(xz)\,\psi\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

della funzione $f(x)$ sotto forma d'integrale curvilineo (esteso ad un contorno C che separa i punti singolari di $\varphi(xz)$ da quelli di $\psi(\frac{1}{z})$).

(*) J. HADAMARD, *Théoreme sur les series entieres.* "Comptes rendus," t. 124, pr. sem. 1897; e "Acta math.," t. 22.

(**) Perchè qualcuno di questi punti può essere anche punto ordinario della funzione $f(x)$, e ciò quando dipenda da più coppie α, β; α', β'; ... di punti singolari rispettivamente di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, tali che sia $\alpha\beta = \alpha'\beta' = \dots$.

(***) E. BOREL, *Sur les singularites des series de Taylor.* "Bull. de la Soc. math. de Fr.," t. XXV, 1897, pp. 238-248.

Il teorema di HADAMARD ha dato origine ad un importante teorema del sig. HURWITZ, (*) mediante il quale da due funzioni, regolari nell'intorno del punto all'infinito, se ne ricava una terza che ha per punti singolari quelli che si ottengono sommando le affisse dei diversi punti singolari dell'una funzione con le affisse dei diversi punti singolari dell'altra. Il sig. HURWITZ dimostra il suo teorema considerando un certo integrale curvilineo doppio, e si limita semplicemente al caso in cui le due funzioni date abbiano soltanto singolarità polari di prim'ordine.

In questo studio ci proponiamo: 1° Dimostrare il teorema di HURWITZ in casi affatto generali, con lo stesso metodo seguito dal sig. BOREL nella dimostrazione del teorema di HADAMARD; 2° Studiare le singolarità dipendenti da singolarità polari od essenziali isolate, calcolandone la caratteristica; 3° Dedurre con una semplice generalizzazione del teorema di HADAMARD un teorema più generale di quello accennato dal sig. BOREL nella sua memoria; 4° Mostrare come una opportuna legge di combinazione dei coefficienti di una serie di potenze conduca al metodo di HADAMARD (**) per calcolare i moduli dei poli successivi di una funzione meromorfa. A questa questione accenna fugacemente l'HURWITZ nella sua citata memoria.

1. — Teorema di Hurwitz.

1. *Siano due serie di potenze*

$$\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^{n+1}}+\ldots \tag{1}$$

$$\frac{b_0}{x}+\frac{b_1}{x^2}+\ldots+\frac{b_n}{x^{n+1}}+\ldots \tag{2}$$

nulle per $x=\infty$, *convergenti all'esterno di cerchi aventi per centro l'origine e per raggi rispettivamente* R *ed* R′ *e rappresentanti ivi due funzioni* $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_0b_n+na_1b_{n-1}+\binom{n}{2}a_2b_{n-2}+\ldots+a_nb_0\right]\frac{1}{x^{n+1}} \tag{3}$$

è convergente all'esterno di un cerchio di centro l'origine e raggio al massimo eguale ad $R+R'$ *e rappresenta ivi una funzione* $f(x)$ *la quale ha (e ciò in tutto il piano) per soli punti singolari possibili quelli che si ottengono sommando le affisse dei diversi punti singolari di* $\varphi(x)$ *con quelle dei diversi punti singolari di* $\psi(x)$.

Se R ed R′ sono i raggi dei cerchi di centro l'origine, all'esterno dei quali convergono rispettivamente le serie (1) e (2), si ha

$$|\sqrt[n]{a_n}|\leqslant R,\qquad |\sqrt[n]{b_n}|\leqslant R'\qquad (n=1,2,\ldots)$$

(*) A. HURWITZ, *Sur un théorème de M. Hadamard.* "Comptes rendus," t. 128, pr. sem. 1899.

(**) J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor.* "Journal de Math.," Série 4ª, t. VIII, 1892.

quindi abbiamo per $n=1,2,\ldots.$

$$\left|\sqrt[n]{a_0b_n+na_1b_{n-1}+\binom{n}{2}a_2b_{n-2}+\ldots+a_nb_0}\right|$$

$$=\sqrt[n]{\left|a_0b_n+na_1b_{n-1}+\binom{n}{2}a_2b_{n-2}+\ldots+a_nb_0\right|}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{|a_0b_n|+n\,|a_1b_{n-1}|+\binom{n}{2}|a_2b_{n-2}|+\ldots+|a_nb_0|}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{R'^n+nRR'^{n-1}+\binom{n}{2}R^2R'^{n-2}+\ldots+R^n}=R+R';$$

se ne conclude che la serie (3) converge all'esterno di un cerchio di centro l'origine e raggio al massimo eguale ad $R+R'$.

Consideriamo ora le due serie *rispetto alla variabile* z

$$\varphi(x-z)=\frac{a_0}{x-z}+\frac{a_1}{(x-z)^2}+\frac{a_2}{(x-z)^3}+\ldots$$

$$\psi(z)=\frac{b_0}{z}+\frac{b_1}{z^2}+\frac{b_2}{z^3}+\ldots$$

convergenti rispettivamente per $|x-z|>R$ e $|z|>R'$. Essendo

$$|x-z|\geqslant|x|-|z|$$

è *a fortiori* la serie $\varphi(x-z)$ convergente per

$$|z|<|x|-R,$$

cioè dentro il cerchio di centro l'origine e raggio $|x|-R$. Quindi i punti singolari di $\varphi(x-z)$ cadranno all'esterno del cerchio di centro l'origine e raggio $|x|-R$, e i punti singolari di $\psi(z)$ all'interno e sulla circonferenza del cerchio di centro l'origine e raggio R'.

Supposto $|x|-R>R'$, ossia $|x|>R+R'$, dimostreremo che la somma della serie (3) si può mettere sotto forma d'integrale.

Ordinando $\varphi(x-z)$ secondo le potenze di z, si ha, all'interno del cerchio di centro l'origine e raggio $|x|-R$,

$$\varphi(x-z)=\varphi(x)-\frac{\varphi'(x)}{1!}z+\frac{\varphi''(x)}{2!}z^2-\ldots+(-1)^n\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}z^n+\ldots.$$

Avendo supposto $|x|-R>R'$, è determinata dai due cerchi di raggi $|x|-R$ ed R' una corona nell'interno della quale non cade nessun punto singolare della funzione di z

$$\varphi(x-z)\psi(z)=\left(-b_0\frac{\varphi'}{1!}+b_1\frac{\varphi''}{2!}-\ldots\right)+\frac{b_0\varphi-b_1\frac{\varphi'}{1!}+\ldots}{z}+$$

$$+\frac{b_1\varphi-b_2\frac{\varphi'}{1!}+\ldots}{z^2}+\ldots+\left(b_0\frac{\varphi''}{2!}-b_1\frac{\varphi'''}{3!}+\ldots\right)z+\ldots.$$

Lungo la circonferenza C d'un cerchio di centro l'origine e raggio compreso tra $|x| - R$ ed R', questa funzione è determinata e finita. La serie a secondo membro è uniformemente convergente rispetto a z e si può integrare termine a termine lungo C. Si ottiene

$$b_0\varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + b_2 \frac{\varphi''}{2!} - \ldots = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(x - z)\, \psi(z)\, dz.$$

Ora è noto che se il cerchio di centro x e raggio r appartiene al campo di regolarità della funzione $\varphi(x)$, ed M è il massimo modulo di $\varphi(x)$ sulla circonferenza, si ha

$$|\varphi^{(n)}(x)| < \frac{n!}{r^n} M;$$

supposto $r \geqslant R'$, sarà $|x| \geqslant R + R'$ e avremo per tali valori di x

$$\frac{|b_n|\,|\varphi^{(n)}(x)|}{n!} < \frac{M\,|b_n|}{r^n},$$

ma $r \geqslant R'$, quindi la serie $\Sigma \frac{b_n}{x^n}$ è uniformemente convergente per tali valori di x, quindi sarà anche uniformemente convergente la serie

$$b_0\varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + b_2 \frac{\varphi''}{2!} - \ldots,$$

e potremo ad essa applicare il teorema di Weierstrass sulle serie doppie; avremo

$$b_0\varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + b_2 \frac{\varphi''}{2!} - \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n b_0 + n a_{n-1} b_1 + \binom{n}{2} a_{n-2} b_2 + \ldots + a_0 b_n \right] \frac{1}{x^{n+1}} = f(x),$$

quindi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(x - z)\, \psi(z)\, dz.$$

Questa espressione analitica di $f(x)$ permette di farne il prolungamento analitico e di determinarne i punti singolari *possibili*.

Cancelliamo i cerchi di raggi $|x| - R$ ed R', e per ogni valore di x fissiamo sul piano z i due insiemi di punti singolari di $\varphi(x - z)$ e $\psi(z)$. Deformiamo allora il cerchio C in una maniera *continua*, ed in modo che durante questa deformazione la sua circonferenza non *traversi* nessuno dei punti singolari dei due insiemi. Sia C' una forma di C durante questa deformazione. All'interno dell'area determinata da C e C' la funzione $\varphi(x - z)\, \psi(z)$ di z è regolare, e quindi

$$\int_C \varphi(x - z)\, \psi(z)\, dz = \int_{C'} \varphi(x - z)\, \psi(z)\, dz.$$

Possiamo dunque deformare, nell'accennato modo, il contorno d'integrazione senza che il valore dell'integrale si alteri.

Fissata allora in tal modo la forma di C, facciamo muovere x nel suo piano, in un modo qualunque. Si muoveranno con esso i punti singolari di φ e potrebbero *traversare* il contorno C, nel qual caso nulla può dirsi del senso dell'integrale. Se però si fa muovere x in modo che i punti singolari di φ non traversino il contorno C fissato, l'integrale non cessa d'avere senso nella nuova regione x, e si avrà il prolungamento analitico di $f(x)$.

È evidente che si può contemporaneamente deformare in modo continuo C con la condizione che esso non traversi mai alcun punto singolare dei due insiemi, e far muovere x con la condizione che i punti singolari di φ non traversino le varie forme di C, purchè si escludano le posizioni di x per le quali un punto singolare dell'un insieme coincida con un punto singolare dell'altro.

Sia ora $x=\alpha$ un punto singolare di $\varphi(x)$ e $x=\beta$ un punto singolare di $\psi(x)$; saranno

$$z=\alpha-x \qquad \text{e} \qquad z=\beta$$

punti singolari rispettivamente delle funzioni di z $\varphi(x-z)$ e $\psi(z)$; e

$$\alpha-x=\beta$$

è la condizione necessaria perchè un punto dell'insieme dei punti singolari di $\varphi(x-z)$ coincida con uno di quelli dell'insieme dei punti singolari di $\psi(z)$.

Pertanto si potrà sempre realizzare la doppia condizione di deformare il contorno d'integrazione senza traversare punti singolari dei due insiemi e spostare x in modo che i punti del primo insieme non traversino il contorno, purchè si evitino i punti

$$x=\alpha+\beta.$$

Dunque i punti $\alpha+\beta$ sono i soli punti singolari possibili della funzione $f(x)$ in tutto il piano.

Abbiamo detto che i punti $\alpha+\beta$ sono punti singolari *possibili* della funzione $f(x)$ perchè qualche punto $\alpha+\beta$ può essere anche punto ordinario della $f(x)$ e ciò quando dipenda da più coppie α, β; α', β'; ... di punti singolari rispettivamente di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, tali che sia

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'=\dots$$

Notiamo ancora che l'origine si comporta come qualunque altro punto, e quindi si può concludere che se esso è punto singolare di una delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ o di tutte e due, la funzione $f(x)$ avrà rispettivamente per punti singolari anche quelli della funzione regolare nell'origine, o quelli di ambedue le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

2. — Singolarità polari ed essenziali isolate. Determinazione delle caratteristiche.

2. La funzione del teorema di HADAMARD si può ottenere dalle due funzioni date mediante un'operazione funzionale distributiva tanto rispetto a $\varphi(x)$ quanto rispetto a $\psi(x)$.

Consideriamo infatti una delle due funzioni date, per esempio la $\varphi(x)$, come fissa, e l'altra, cioè la $\psi(x)$, come variabile; la funzione $f(x)$ del teorema di HADAMARD si può ottenere dalle due funzioni date mediante un'operazione funzionale A definita mediante la funzione fissa $\varphi(x)$ ed applicata alla funzione variabile $\psi(x)$. Quest'operazione è distributiva rispetto alla funzione variabile $\psi(x)$, cioè, se si pone

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_k ,$$

e se c denota una costante, è

$$f(x) = A(\psi) = A(\psi_1) + A(\psi_2) + \ldots + A(\psi_k)$$
$$A(c\psi) = cA(\psi) ;$$

ciò si vede immediatamente considerando la funzione $f(x)$, per esempio, sotto forma d'integrale curvilineo. Inoltre l'operazione funzionale A è distributiva anche rispetto alla funzione fissa $\varphi(x)$, cioè, se si pone

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_l ,$$

e si chiamano $A_1, A_2, \ldots A_l$ le operazioni funzionali analoghe alla A e definite rispettivamente mediante $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, possiamo ottenere la operazione A come somma delle operazioni $A_1, A_2, \ldots A_l$, cioè

$$A(\psi) = A_1(\psi) + A_2(\psi) + \ldots + A_l(\psi) ;$$

ciò discende ancora dalla forma sotto cui possiamo considerare la funzione $f(x)$.

Quanto abbiamo detto per la funzione del teorema di HADAMARD si potrebbe ripetere per la funzione del teorema di HURWITZ.

3. Ciò posto, chiamiamo genericamente con

$$H(\varphi, \psi)$$

una delle due operazioni funzionali mediante le quali si ottiene rispettivamente la funzione del teorema di HADAMARD o di HURWITZ; e con γ la singolarità della funzione $H(\varphi, \psi)$ dipendente da una singolarità α di φ e da una singolarità β di ψ. Supponiamo che si abbia

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 ,$$

dove φ_1 abbia in α la stessa singolarità di φ e ψ_1 in β la stessa singolarità di ψ, e φ_2 e ψ_2 siano regolari rispettivamente in α e β. Per essere

$$\mathrm{H}(\varphi, \psi) = \mathrm{H}(\varphi_1, \psi_1) + \mathrm{H}(\varphi_1, \psi_2) + \mathrm{H}(\varphi_2, \psi_1) + \mathrm{H}(\varphi_2, \psi_2),$$

e le funzioni $\mathrm{H}(\varphi_1, \psi_2)$, $\mathrm{H}(\varphi_2, \psi_1)$, $\mathrm{H}(\varphi_2, \psi_2)$ regolari in γ, avrà la funzione $\mathrm{H}(\varphi, \psi)$ nel punto γ la stessa singolarità della funzione $\mathrm{H}(\varphi_1, \psi_1)$.

Cosicchè, se $g_1\left(\dfrac{1}{x-\alpha}\right)$ e $g_2\left(\dfrac{1}{x-\beta}\right)$ sono le caratteristiche delle singolarità polari od essenziali isolate α e β rispettivamente di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, avrà la funzione $\mathrm{H}(\varphi, \psi)$ in γ la stessa singolarità di

$$\mathrm{H}(g_1, g_2).$$

Ne concludiamo che *la natura della singolarità γ della funzione* $\mathrm{H}(\varphi, \psi)$, *dipende essenzialmente dalla natura delle singolarità α e β rispettivamente delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.*

Fondandoci su questo principio, potremo determinare la natura di ogni singolarità delle funzioni dei teoremi di HADAMARD e di HURWITZ, dipendenti da singolarità polari od essenziali isolate delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, e calcolarne le caratteristiche.

Esaminiamo separatamente le due dette funzioni.

4. FUNZIONE DEL TEOREMA DI HADAMARD. — Premettiamo un breve calcolo: Sia

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{A}}{(x-\alpha)^p},$$

dove A è una costante, p un numero intero. Nel cerchio di centro l'origine e raggio $|\alpha|$, si ha

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{A}}{(x-\alpha)^p} = (-1)^p \frac{\mathrm{A}}{\alpha^p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n;$$

e se nel cerchio di centro l'origine e raggio R' si ha

$$\psi(x) = \sum_{0}^{\infty} b_n x^n,$$

avremo nel cerchio di centro l'origine e raggio almeno eguale a $|\alpha|$ R'

$$f(x) = (-1)^p \frac{\mathrm{A}}{\alpha^p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} b_n \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n;$$

ma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} b_n \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[x^{p-1} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right],$$

quindi

$$f(x) = \frac{(-1)^p \mathrm{A}}{(p-1)!\, \alpha^p} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[x^{p-1} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right].$$

Ciò posto, supponendo che si abbia

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{B}}{(x-\beta)^q},$$

dove B è una costante, q un numero intero; avremo

$$f(x)=\frac{(-1)^p AB}{(p-1)!\,\alpha^{p-q}}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[\frac{x^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^q}\right].$$

Supponiamo ora che sia $p \leqslant q$; avremo

$$\frac{x^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^q}=\frac{\alpha^{p-1}\beta^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^q}+\binom{p-1}{1}\frac{\alpha^{p-2}\beta^{p-2}}{(x-\alpha\beta)^{q-1}}+\binom{p-1}{2}\frac{\alpha^{p-3}\beta^{p-3}}{(x-\alpha\beta)^{q-2}}+\ldots+$$
$$+\binom{p-1}{p-1}\frac{1}{(x-\alpha\beta)^{q-p+1}}$$

sostituendo e sviluppando i calcoli si ha

$$f(x)=-AB\left\{\frac{\binom{q+p-2}{p-1}\binom{p-1}{0}\alpha^{q-1}\beta^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^{q+p-1}}+\frac{\binom{q+p-3}{p-1}\binom{p-1}{1}\alpha^{q-2}\beta^{p-2}}{(x-\alpha\beta)^{q+p-2}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\binom{q}{p-1}\binom{p-1}{p-2}\alpha^{q-p+1}\beta}{(x-\alpha\beta)^{q+1}}+\frac{\binom{q-1}{p-1}\binom{p-1}{p-1}\alpha^{q-p}}{(x-\alpha\beta)^{q}}\right\}.$$

Se fosse $p \geqslant q$, si avrebbe

$$f(x)=-AB\left\{\frac{\binom{p+q-2}{q-1}\binom{q-1}{0}\alpha^{p-1}\beta^{q-1}}{(x-\alpha\beta)^{p+q-1}}+\frac{\binom{p+q-3}{q-1}\binom{q-1}{1}\alpha^{p-2}\beta^{q-2}}{(x-\alpha\beta)^{p+q-2}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\binom{p}{q-1}\binom{q-1}{q-2}\alpha^{p-q+1}\beta}{(x-\alpha\beta)^{p+1}}+\frac{\binom{p-1}{q-1}\binom{q-1}{q-1}\alpha^{p-q}}{(x-\alpha\beta)^{p}}\right\}.$$

Le due formole coincidono quando $p=q$.

5. Sia ora $x=\alpha$ un punto singolare essenziale isolato della funzione $\varphi(x)$, e

$$g_1\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{(x-\alpha)^i},$$

serie intera convergente in tutto il piano eccetto che in α, la sua caratteristica; sia $x=\beta$ un punto singolare essenziale isolato di $\psi(x)$, e

$$g_2\left(\frac{1}{x-\beta}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j}{(x-\beta)^j}$$

la sua caratteristica.

La funzione

$$f(x)=A(\varphi,\psi),$$

definita mediante l'operazione funzionale A (n. 2), avrà in $\alpha\beta$ la stessa singolarità di

$$A(g_1, g_2),$$

e lo sviluppo, $G\left(\frac{1}{x-\alpha\beta}\right)$, in serie di potenze in $\frac{1}{x-\alpha\beta}$ di $A(g_1, g_2)$ ne sarà la caratteristica.

Possiamo dimostrare che l'operazione A, definita mediante g_1 ed applicata a g_2, è distributiva tanto rispetto alla serie g_2, quanto alla serie g_1.

Poniamo, infatti, l'operazione A sotto la forma di integrale curvilineo; si ha

$$A(g_1, g_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_C g_1\left(\frac{1}{xz-\alpha}\right) g_2\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)\frac{dz}{z},$$

il contorno C dovendo comprendere l'origine e il punto singolare fisso $\frac{1}{\beta}$ di g_2 ed escludere il punto singolare mobile $\frac{\alpha}{x}$ di g_1, e l'integrale rappresenta una funzione regolare in tutto il piano x, tranne che nel punto $x = \alpha\beta$. La serie

$$g_2\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) = \frac{B_1 z}{1-\beta z} + \frac{B_2 z^2}{(1-\beta z)^2} + \dots$$

per tutti i valori di z diversi da $\frac{1}{\beta}$ è uniformemente convergente rispetto a z sul contorno C, che non contiene $\frac{1}{\beta}$, ed i suoi termini sono integrabili lungo il medesimo contorno; la funzione $\frac{g_1}{z}$ poi è finita lungo tutti i punti z di C, che non contiene $\frac{\alpha}{x}$, nè l'origine. Si può pertanto integrare termine a termine lungo C ed ottenere

$$A(g_1, g_2) = \sum_{j=1}^{\infty} A\left(g_1, \frac{B_j}{(x-\beta)^j}\right),$$

la quale dimostra appunto la distributività dell'operazione A rispetto alla serie g_2.

In modo del tutto analogo si vede che l'operazione A è anche distributiva rispetto alla serie g_1; si avrà quindi

$$A(g_1, g_2) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} A\left(\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}, \frac{B_j}{(x-\beta)^j}\right),$$

ed è indifferente estendere la sommatoria prima rispetto ad i e poi rispetto ad j, o viceversa.

6. Applicando le due formole del n. 4, si ha

$$A(g_1, g_2) = -\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\{ \sum_{j=1}^{i} B_j \left[\frac{\binom{i+j-2}{j-1}\binom{j-1}{0}\alpha^{i-1}\beta^{j-1}}{(x-\alpha\beta)^{i+j-1}} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\binom{i+j-3}{j-1}\binom{j-1}{1}\alpha^{i-2}\beta^{j-2}}{(x-\alpha\beta)^{i+j-2}} + \dots + \frac{\binom{i-1}{j-1}\binom{j-1}{j-1}\alpha^{i-j}}{(x-\alpha\beta)^{i}} \right] +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{\infty} B_j \left[\frac{\binom{j+i-2}{i-1}\binom{i-1}{1}\alpha^{j-1}\beta^{i-1}}{(x-\alpha\beta)^{j+i-1}} + \frac{\binom{j+i-3}{i-1}\binom{i-1}{1}\alpha^{j-2}\beta^{i-2}}{(x-\alpha\beta)^{j+i-2}} + \dots \right.$$

$$\left.\left. \dots + \frac{\binom{j-1}{i-1}\binom{i-1}{i-1}\alpha^{j-i}}{(x-\alpha\beta)^{j}} \right] \right\} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{C_l}{(x-\alpha\beta)^l},$$

dove, se l è pari, si ha

$$(1)\quad C_l = -\sum_{i=1}^{\frac{l}{2}} A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \beta^i \sum_{\nu=1}^{i} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{l-i+\nu}}{\beta^{l-i+\nu}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{l-i} -$$

$$- \sum_{i=\frac{l}{2}+1}^{l} A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \alpha^i \sum_{\nu=1}^{2i-l-1} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{l-i+\nu}}{\alpha^{l-i+\nu}} + \beta^i \sum_{\nu=2i-l}^{i} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{l-i+\nu}}{\beta^{l-i+\nu}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{l-i};$$

e se l è dispari

$$(2)\quad C_l = -\sum_{i=1}^{\frac{l+1}{2}} A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \beta^i \sum_{\nu=1}^{i} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{l-i+\nu}}{\beta^{l-i+\nu}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{l-i} -$$

$$- \sum_{i=\frac{l+3}{2}}^{l} A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \alpha^i \sum_{\nu=1}^{2i-l-1} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{l-i+\nu}}{\alpha^{l-i+\nu}} + \beta^i \sum_{\nu=2i-l}^{i} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{l-i+\nu}}{\beta^{l-i+\nu}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{l-i}.$$

In tal modo veniamo a calcolare la caratteristica di una singolarità dipendente da due singolarità essenziali isolate. Per mezzo di queste stesse formole si può inoltre calcolare la caratteristica di una singolarità dipendente da una singolarità polare e da una singolarità essenziale isolata, o da due singolarità polari. Basterà porre 0 al posto di quelle **A** e **B** d'indici superiori all'ordine del polo α e β rispettivamente. Per es., nel primo caso accennato, se α è un polo d'ordine p di $\varphi(x)$, con la caratteristica $\sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$ e β una singolarità essenziale isolata di $\psi(x)$, con la caratteristica $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{(x-\beta)^j}$, per la caratteristica della singolarità $\alpha\beta$ della funzione $f(x)$, si ha l'espressione

$$G\left(\frac{1}{x-\alpha\beta}\right) = \sum_{l=1}^{p} \frac{C_l}{(x-\alpha\beta)^l} + \sum_{m=p+1}^{2(p-1)} \frac{C_m}{(x-\alpha\beta)^m} + \sum_{n=2p-1}^{\infty} \frac{C_n}{(x-\alpha\beta)^n},$$

dove C_l ha una espressione analoga alle (1) e (2); lo stesso dicasi per C_m salvo che la seconda sommatoria è estesa sino ad $i=p$; finalmente

$$C_n = -\sum_{i=1}^{p} A_i \binom{n-1}{i-1} \left\{ \beta^i \sum_{\nu=1}^{i} \binom{i-1}{\nu-1} \frac{B_{n-i+\nu}}{\beta^{n-i+\nu}} \right\} \alpha^{n-i} \beta^{n-i}.$$

Non entrando in più minuti particolari, deduciamo solo dalle formole (1) e (2) quanto segue:

1°. *Se α e β sono singolarità essenziali isolate rispettivamente delle funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, *sarà in generale $\alpha\beta$ singolarità essenziale isolata della funzione* $f(x)$.

2°. *Se α è un polo della funzione* $\varphi(x)$ *e β una singolarità essenziale isolata della funzione* $\psi(x)$, *sarà in generale $\alpha\beta$ singolarità essenziale isolata della funzione* $f(x)$.

3°. *Se α è un polo d'ordine* p *della funzione* $\varphi(x)$ *e β un polo d'ordine* q *della funzione* $\psi(x)$, *sarà in generale $\alpha\beta$ un polo d'ordine* $p+q-1$ *della funzione* $f(x)$. Basta osservare che dalle formole (1) e (2) si ricava

$C_l = 0$ per $l > p + q - 1$, e il coefficiente C_{p+q-1} della potenza $(p+q-1)^{\text{esima}}$ di $\dfrac{1}{x - \alpha\beta}$, che è eguale a $-A_p B_q \binom{p+q-2}{p-1} \alpha^{p-1} \beta^{q-1}$, o a $-A_p B_q \binom{p+q-2}{p-1} \alpha^{q-1} \beta^{p-1}$, secondochè $p \geqslant q$ o $p \leqslant q$, *è certamente diverso da zero.*

4°. In ogni caso il residuo è

$$-A_1 B_1,$$

ossia: *Il residuo di* $f(x)$ *nel punto singolare* $\alpha\beta$ *è eguale al prodotto cambiato di segno dei residui nelle singolarità* α *e* β *delle funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$.

È da notare inoltre che nella espressione dei coefficienti della caratteristica G entrano un numero finito di coefficienti delle caratteristiche g_1 e g_2.

7. Abbiamo implicitamente ammesso che la singolarità $\alpha\beta$ della funzione $f(x)$ dipenda da una sola singolarità α di $\varphi(x)$ e da una sola singolarità β di $\psi(x)$; se però la singolarità $\alpha\beta$ dipende da più singolarità sovrapposte, dipendenti da punti singolari $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ di $\varphi(x)$ e da punti singolari $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ di $\psi(x)$, tali che sia

$$\alpha^{(i)} \beta^{(i)} = \alpha\beta, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

può il punto $\alpha\beta$ essere per la funzione $f(x)$ un polo o financo un punto ordinario.

A proposito di una singolarità $\alpha\beta$ dipendente da singolarità polari, notiamo:

Se $\varphi(x)$ *ha nei punti* $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(k)}$ *dei poli rispettivamente d'ordine* $p, p', \ldots, p^{(k)}$ *e* $\psi(x)$ *ha nei punti* $\beta, \beta', \ldots, \beta^{(k)}$ *dei poli rispettivamente d'ordine* $q, q', \ldots, q^{(k)}$; *se inoltre*

$$\alpha^{(i)} \beta^{(i)} = \alpha\beta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

e se ancora è $p^{(l)} + q^{(l)}$ *il massimo* unico *della successione* $p^{(i)} + q^{(i)}$ *per le varie coppie di punti* (1); *è* $\alpha\beta$ *un polo d'ordine* $p^{(l)} + q^{(l)} - 1$ *per la funzione* $f(x)$.

Se poi $p^{(l)} + q^{(l)}$ *non fosse un massimo* unico, *allora* $f(x)$ *potrebbe avere in* $\alpha\beta$ *un polo d'ordine minore di* $p^{(l)} + q^{(l)} - 1$, *e in particolare essere anche regolare in* $\alpha\beta$.

8. Funzione del teorema di Hurwitz. — Si supponga dapprima che si abbia

$$\varphi(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^p}, \qquad \psi(x) = \frac{B}{(x-\beta)^q},$$

dove A e B sono costanti, p e q numeri interi. Fuori dei cerchi di centro l'origine e raggi $|\alpha|$ e $|\beta|$ si ha rispettivamente

$$\varphi(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^p} = A \sum_{n=p-1}^{\infty} \binom{n}{p-1} \frac{\alpha^{n-p+1}}{x^{n+1}},$$

$$\psi(x) = \frac{B}{(x-\beta)^q} = B \sum_{n=q-1}^{\infty} \binom{n}{q-1} \frac{\beta^{n-q+1}}{x^{n+1}};$$

si ha quindi fuori del cerchio di centro l'origine e raggio $|\alpha+\beta|$:

$$f(x)=\mathrm{AB}\sum_{n=p+q-2}^{\infty}\left\{\binom{n}{q-1}\binom{n-q+1}{p-1}\binom{q-1}{q-1}\alpha^{n-p-q+2}+\right.$$

$$+\binom{n}{q}\binom{n-q}{p-1}\binom{q}{q-1}\alpha^{n-p-q+1}\beta+\binom{n}{q+1}\binom{n-q-1}{p-1}\binom{q+1}{q-1}\alpha^{n-p-q}\beta^2+\ldots+$$

$$\left.+\binom{n}{n-p}\binom{p}{p-1}\binom{n-p}{q-1}\alpha\beta^{n-p-q+1}+\binom{n}{n-p+1}\binom{p-1}{p-1}\binom{n-p+1}{q-1}\beta^{n-p-q+2}\right\}\frac{1}{x^{n+1}}$$

$$=\mathrm{AB}\sum_{n=p+q-2}^{\infty}\binom{n}{q-1}\binom{n-q+1}{p-1}\frac{(\alpha+\beta)^{n-p-q+2}}{x^{n+1}}$$

$$=\mathrm{AB}\binom{p+q-2}{p-1}\sum_{n=p+q-2}^{\infty}\binom{n}{p+q-2}\frac{(\alpha+\beta)^{n-p-q+2}}{x^{n+1}};$$

si ha quindi

$$f(x)=\binom{p+q-2}{p-1}\frac{\mathrm{AB}}{[x-(\alpha+\beta)]^{p+q-1}}. \tag{1}$$

9. Sia ora $x=\alpha$ un punto singolare essenziale isolato della funzione $\varphi(x)$, con la caratteristica

$$g_1\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{A}_i}{(x-\alpha)^i},$$

e $x=\beta$ un punto singolare essenziale isolato di $\psi(x)$, con la caratteristica

$$g_2\left(\frac{1}{x-\beta}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{B}_j}{(x-\beta)^j}.$$

La funzione del teorema di Hurwitz

$$f(x)=\mathrm{B}(\varphi,\psi),$$

ottenuta dalle due funzioni date, mediante un'operazione funzionale distributiva B, avrà in $\alpha+\beta$ la stessa singolarità di

$$\mathrm{B}(g_1, g_2)$$

e lo sviluppo, $\mathrm{G}\left(\frac{1}{x-(\alpha+\beta)}\right)$, in serie di potenze in $\frac{1}{x-(\alpha+\beta)}$ di $\mathrm{B}(g_1, g_2)$ ne sarà la caratteristica.

Potremmo dimostrare, analogamente a quanto abbiamo fatto per l'operazione A al n. 5, che l'operazione B, definita mediante g_1 ed applicata a g_2, è distributiva tanto rispetto alla serie g_2, quanto alla serie g_1, ossia che si ha

$$\mathrm{B}(g_1, g_2)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{A}_i}{(x-\alpha)^i}, \frac{\mathrm{B}_j}{(x-\beta)^j}\right).$$

10. Applicando la formola del n. 8, si ha

$$\mathrm{B}(g_1, g_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\binom{i+j-2}{i-1}\frac{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j}{[x-(\alpha+\beta)]^{i+j-1}}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_l}{[x-(\alpha+\beta)]^l},$$

dove si ricava

$$C_l = \sum_{i=1}^{l} \binom{l-1}{i-1} A_i B_{l-i+1}. \tag{1}$$

Veniamo in tal modo a calcolare, anche per la funzione di HURWITZ, la caratteristica di una singolarità dipendente da due singolarità essenziali isolate.

Per mezzo di questa stessa formola si può inoltre calcolare la caratteristica di una singolarità dipendente da una singolarità polare e da una singolarità essenziale isolata, o da due singolarità polari.

Dalla formola (1), deduciamo delle conseguenze perfettamente analoghe a quelle dedotte al n. 6:

1°. *Se* α *e* β *sono singolarità essenziali isolate rispettivamente delle funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, *sarà in generale* $\alpha + \beta$ *singolarità essenziale isolata della funzione* $f(x)$.

2°. *Se* α *è un polo della funzione* $\varphi(x)$ *e* β *una singolarità essenziale isolata della funzione* $\psi(x)$, *sarà in generale* $\alpha + \beta$ *singolarità essenziale isolata della funzione* $f(x)$.

3°. *Se* α *è un polo d'ordine* p *della funzione* $\varphi(x)$ *e* β *un polo d'ordine* q *della funzione* $\psi(x)$, *sarà in generale* $\alpha + \beta$ *un polo d'ordine* $p + q - 1$ *della funzione* $f(x)$.

Il coefficiente della potenza $(p+q-1)^{\text{esima}}$ di $\dfrac{1}{x-(\alpha+\beta)}$ nello sviluppo della caratteristica della singolarità $\alpha+\beta$ di $f(x)$ è

$$C_{p+q-1} = \binom{p+q-2}{p-1} A_p B_q,$$

certamente diverso da zero, e per $l > p+q-1$ si ha $C_l = 0$.

4°. In ogni caso il residuo è

$$A_1 B_1,$$

ossia: *Il residuo di* $f(x)$ *nel punto singolare* $\alpha + \beta$ *è eguale al prodotto dei residui nelle singolarità* α *e* β *delle funzioni* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$.

11. Vale anche per la funzione di HURWITZ l'osservazione che abbiamo fatta al n. 7 e il teorema che ne abbiamo dedotto.

3. — Generalizzazione del teorema di Hadamard.

12. Oltre alla accennata espressione analitica sotto forma di integrale curvilineo, della funzione del teorema di HADAMARD, ne possiamo dare ancora un'altra sotto forma di integrale curvilineo doppio.

Siano $\varphi(z)$ e $\psi(t)$ le due funzioni regolari rispettivamente nei cerchi di centro l'origine e raggi R ed R' (incluse le circonferenze), rappresentate quivi dagli sviluppi

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad , \quad \varphi(t) = \sum_0^\infty b_n t^n;$$

per $|x| < RR'$ l'integrale

$$(1) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int\frac{\varphi(z)\,\psi(t)\,dz\,dt}{zt-x}$$

preso lungo le circonferenze $|z| = R$ e $|t| = R'$, è sviluppabile in serie di potenze intere e positive di x e rappresenta per conseguenza una funzione olomorfa di x.

Infatti, per $|x| < RR'$, si ha

$$\frac{1}{zt-x} = \frac{1}{zt} + \frac{x}{z^2t^2} + \frac{x^2}{z^3t^3} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}t^{n+1}} + \ldots;$$

moltiplicando i termini di questa serie, uniformemente convergente, per $\varphi(z)\,\psi(t)\,dz\,dt$ e integrando termine a termine lungo i contorni $|z| = R$ e $|t| = R'$, dove le funzioni $\varphi(z)$ e $\varphi(t)$ sono finite, si ha

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int\frac{\varphi(z)\,\psi(t)\,dz\,dt}{zt-x} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int\int\frac{\varphi(z)\,\psi(t)\,dz\,dt}{z^{n+1}t^{n+1}}.$$

Il prodotto $\varphi(z)\,\psi(t)$ si mette sotto forma di una serie di polinomi omogenei P_k,

$$\varphi(z)\,\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_0\,b_k\,t^k + a_1\,b_{k-1}\,z\,t^{k-1} + \ldots + a_k\,b_0\,z^k),$$

dei gradi $0, 1, 2, \ldots,$ in z e t, ed essendo

$$\int\int\frac{dz\,dt}{z^\mu\,t^\nu} = \begin{cases}(2\pi i)^2 & \text{per} \quad \mu = 1 \text{ e } \nu = 1\\ 0 & \text{in ogni altro caso,}\end{cases}$$

pel calcolo dell'integrale

$$\int\int\frac{\varphi(z)\,\psi(t)\,dz\,dt}{z^{n+1}t^{n+1}},$$

basta ritenere soltanto dei polinomi P_k quello di grado $2n$, cioè

$$P_{2n} = a_0\,b_{2n}\,t^{2n} + a_1\,b_{2n-1}\,zt^{2n-1} + \ldots + a_nb_n\,z^nt^n + \ldots + a_{2n}\,b_0\,z^{2n};$$

moltiplicando per $dz\,dt$, dividendo per $z^{n+1}\,t^{n+1}$ e integrando lungo le circonferenze $|z| = R$ e $|t| = R'$, si ha

$$\int\int\frac{\varphi(z)\,\psi(t)\,dz\,dt}{z^{n+1}t^{n+1}} = \int\int\frac{P_{2n}\,dz\,dt}{z^{n+1}t^{n+1}} = (2\pi i)^2\,a_n\,b_n;$$

quindi per $|x| < RR'$ l'integrale (1) si sviluppa nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,b_n\,x^n.$$

13. Notiamo ancora che se una delle funzioni date è regolare nell'intorno dell'origine e rappresentata ivi, in un cerchio di raggio R, dalla serie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

e l'altra funzione data è regolare nell'interno del punto all'infinito e rappresentata ivi, all'esterno di un cerchio di centro l'origine e raggio R', dalla serie

$$\psi(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x_2} + \dots;$$

la serie

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \dots$$

ha il suo cerchio di convergenza di raggio almeno eguale ad $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}$, e rappresenta ivi una funzione $f(x)$, la quale ha (e ciò in tutto il piano) per soli punti singolari possibili quelli che si ottengono dividendo le affisse dei diversi punti singolari di $\varphi(x)$ per quelle dei diversi punti singolari di $\psi(x)$.

Ciò si deduce immediatamente dal teorema di HADAMARD con un semplice cambiamento della variabile x della seconda funzione, in $\frac{1}{x}$. Inoltre siccome questa trasformazione, come facilmente si può mostrare, non altera la natura dei punti singolari, si possono dedurre anche per la funzione $f(x)$ le conseguenze che abbiamo tratte al n. 6.

14. Ciò posto, siano

$$\varphi_1(z_1),\ \varphi_2(z_2), \dots, \varphi_p(z_p)$$

p funzioni delle variabili $z_1, z_2, \dots, z_p$, regolari nell'intorno dell'origine, e rappresentate ivi, nei cerchi di raggi rispettivamente $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \dots, \mathrm{R}_p$, dalle serie

$$\sum_0^\infty a_{1n} z_1^{\,n},\quad \sum_0^\infty a_{2n} z_2^{\,n}, \dots, \sum_0^\infty a_{pn} z_p^{\,n};$$

siano poi

$$\psi_1(t_1),\ \psi_2(t_2), \dots, \psi_q(t_q)$$

q funzioni delle variabili $t_1, t_2, \dots, t_q$, regolari all'infinito, e rappresentate fuori dei cerchi di centro l'origine e raggi rispettivamente $\mathrm{R}'_1, \mathrm{R}'_2, \dots \mathrm{R}'_q$, dalle serie

$$\sum_0^\infty \frac{b_{1n}}{t_1^{\,n}},\quad \sum_0^\infty \frac{b_{2n}}{t_2^{\,n}}, \dots, \sum_0^\infty \frac{b_{qn}}{t_q^{\,n}};$$

posto

$$t_1 = \frac{1}{x_1},\ t_2 = \frac{1}{x_2}, \dots, t_q = \frac{1}{x_q},$$

la funzione rappresentata dall'integrale

$$\frac{1}{(2\pi i)^{p+q}} \int_{(p+q)} \frac{\varphi_1(z_1)\varphi_2(z_2)\dots\varphi_p(z_p)\psi_1\left(\frac{1}{x_1}\right)\psi_2\left(\frac{1}{x_2}\right)\dots\psi_q\left(\frac{1}{x_q}\right)dz_1 dz_2\dots dz_p dx_1 dx_2\dots dx_q}{z_1 z_2\dots z_p x_1 x_2\dots x_q - x},$$

esteso lungo le circonferenze $|z_1| = \mathrm{R}_1$, $|z_2| = \mathrm{R}_2, \dots, |z_p| = \mathrm{R}_p$, $|x_1| = \frac{1}{\mathrm{R}'_1}$, $|x_3| = \frac{1}{\mathrm{R}'_2}, \dots, |x_q| = \frac{1}{\mathrm{R}'_q}$, e che è rappresentata dalla serie

$$\sum_0^\infty a_{1n} a_{2n} \dots a_{pn} b_{1n} b_{2n} \dots b_{qn} x^n$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio almeno eguale a

$$\frac{R_1 R_2 \ldots R_p}{R'_1 R'_2 \ldots R'_q},$$

ha per soli punti singolari possibili, in tutto il piano, i punti della forma

$$\omega = \frac{\alpha_{1i}\alpha_{2j} \ldots \alpha_{pk}}{\beta_{1r}\beta_{2s} \ldots \beta_{qt}},$$

dove α_{1i} rappresenta genericamente un punto singolare di $\varphi_1(z_1)$, ed analogo significato hanno $\alpha_{2j}, \ldots, \beta_{1r}, \ldots$, e siamo al grado di potere determinare la natura di ogni punto singolare ω, dipendente da singolarità α e β isolate.

15. Più generalmente, *se*

$$P(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}, b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{qn})$$

è un polinomio in $a_{1n}, a_{2n}, \ldots$, *a coefficienti costanti, la funzione rappresentata in un certo intorno dell'origine dalla serie*

$$F(x) = \sum_0^\infty P(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}, b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{qn})\, x^n$$

ha punti singolari che possiamo calcolare facilmente, conoscendo quelli delle funzioni φ *e* ψ, *e ne possiamo determinare la natura nel caso che la singolarità considerata dipenda da singolarità isolate.*

In particolare $F(x)$ *sarà meromorfa, qualora lo siano le funzioni* φ *e le funzioni* ψ.

4. — Sul metodo di Hadamard per calcolare i moduli dei poli successivi di una funzione meromorfa.

16. Nel teorema di Hadamard abbandoniamo una delle due funzioni date e adoperiamo invece più variabili indipendenti; una più generale ed opportuna legge di combinazione dei coefficienti dell'unica serie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

conduce al metodo di Hadamard per calcolare i moduli dei poli successivi di una funzione meromorfa.

Supponiamo, dunque, che la funzione precedente sia rappresentata dallo stesso sviluppo nei p piani delle variabili complesse

$$z_1, z_2, \ldots, z_p,$$

e che sia olomorfa in ciascun piano nei cerchi di raggio comune

$$|z_i| = r,$$

e centro le origini.

Poniamo

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \cdots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}.$$

La serie di potenze

$$f(x) = D_{0,p} + D_{1,p}\, x + D_{2,p}\, x^2 + \ldots + D_{n,p}\, x^n + \ldots$$

definisce una funzione olomorfa rispetto alla variabile x, nel cerchio di centro l'origine e raggio

$$|x| = r^p.$$

Consideriamo l'integrale multiplo

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{(p)} \frac{\Delta^2 \varphi(z_1)\, \varphi(z_2) \ldots \varphi(z_p)}{z_1 z_2 \ldots z_p - x}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_p,$$

esteso lungo le circonferenze dei cerchi di raggio r nei piani $z_1, z_2, \ldots, z_p$. In esso, Δ denota il determinante di Cauchy formato colle inverse delle $z_1, z_2, \ldots, z_p$, ossia è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_1^{p-1}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \cdots & \frac{1}{z_2^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{z_p} & \frac{1}{z_p^2} & \cdots & \frac{1}{z_p^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

La funzione di x, definita dall'integrale I, all'interno del cerchio di raggio r^p, coincide, a parte un fattore costante, precisamente con la funzione $f(x)$.

Infatti, all'interno di detto cerchio, si ha

$$\frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_p - x} = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_p} + \frac{x}{z_1^2 z_2^2 \ldots z_p^2} + \frac{x^2}{z_1^3 z_2^3 \ldots z_p^3} + \ldots,$$

col secondo membro uniformemente convergente, sempre che sia

$$|z_i| \leqq r.$$

Segue pertanto

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^p} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{(p)} \frac{\Delta^2 \varphi(z_1)\, \varphi(z_2) \ldots \varphi(z_p)}{z_1^{n+1} z_2^{n+1} \ldots z_p^{n+1}}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_p.$$

Al calcolo dell'integrale a secondo membro si può procedere nel seguente modo:

Il prodotto delle serie (con $|z_i| < r$)

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots \\ \varphi(z_2) &= a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(z_p) &= a_0 + a_1 z_p + a_2 z_p^2 + \ldots \end{aligned}$$

si mette sotto la forma di una serie di polinomi omogenei P_k,

$$\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_p)=\sum_0^\infty P_k\,,$$

dei gradi 0, 1, 2, ..., in $z_1, z_2, \ldots, z_p$, e si osservi che, essendo

$$\int_{(p)}\frac{dz_1\,dz_2\ldots dz_p}{z_1^{k_1}\,z_2^{k_2}\ldots z_p^{k_p}}=\begin{cases}(2\pi i)^p & \text{per } k_1=k_2=\ldots=k_p=1\\ 0 & \text{in ogni altro caso,}\end{cases}$$

e Δ^2 un polinomio omogeneo del grado $p(p-1)$ nelle variabili $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_p}$, dei polinomi P_k, pel calcolo dell'integrale, basta ritenere soltanto quello di grado

$$np+p(p-1).$$

Intanto si ha

$$P_{np+p(p-1)}=\sum_\alpha a_{\alpha_1}\,a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_p}\,z_{i_1}^{\alpha_1}\,z_{i_2}^{\alpha_2}\ldots z_{i_p}^{\alpha_p}\,,$$

dove $i_1\,i_2\ldots i_p$ è una permutazione qualunque degli elementi $1\,2\ldots p$, e la sommatoria va estesa a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=np+p(p-1)\,;$$

ed inoltre

$$\frac{\Delta^2}{z_1^{n+1}\,z_2^{n+1}\ldots z_p^{n+1}}=\sum_{i,\nu}(-1)^r\frac{1}{z_{i_1}^{\nu_1+n}\,z_{i_2}^{\nu_2+n+1}\ldots z_{i_p}^{\nu_p+n+p-1}}\,,$$

dove $i_1\,i_2\ldots i_p$, $\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_p$ sono permutazioni degli elementi $1\,2\ldots p$ e la sommatoria va estesa à tutte queste permutazioni, r poi è il numero delle inversioni della permutazione $\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_p$.

Quindi

$$\int_{(p)}\frac{\Delta^2\,\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_p)}{z_1^{n+1}\,z_2^{n+1}\ldots z_p^{n+1}}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_p=\int_{(p)}\frac{\Delta^2\,P_{np+p(p-1)}}{z_1^{n+1}\,z_2^{n+1}\ldots z_p^{n+1}}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_p$$

$$=\sum_i\int_{(p)}\sum_{\alpha,\nu}a_{\alpha_1}\,a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_p}\,z_{i_1}^{\alpha_1-\nu_1-n}\,z_{i_2}^{\alpha_2-\nu_2-n-1}\ldots z_{i_p}^{\alpha_p-\nu_p-n-p+1}\,dz_{i_1}\,dz_{i_2}\ldots dz_{i_p}\,;$$

i termini non nulli dell'integrale sono quelli corrispondenti ai valori

$$\alpha_1=\nu_1+n-1\,,\ \alpha_2=\nu_2+n\,,\ldots,\ \alpha_p=\nu_p+n+p-2\,;$$

quindi si ha

$$\int_{(p)}\frac{\Delta^2\,\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_p)}{z_1^{n+1}\,z_2^{n-1}\ldots z_p^{n+1}}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_p=$$

$$=\sum_i(2\pi i)^p\sum_\nu(-1)^r\,a_{\nu_1+n-1}\,a_{\nu_2+n}\ldots a_{\nu_p+n+p-2}=$$

$$=p\,!\,(2\pi i)^p\,D_{n,p}\,.$$

Per conseguenza la serie $f(x)$ definisce nel cerchio di centro l'origine e raggio r^p una funzione olomorfa della variabile x.

17. Cio posto, chiamiamo in generale con l_P il limite superiore di

$$\left|\sqrt[n]{D_{n,\,P}}\right|,$$

per $n = \infty$.

Se r è il raggio di convergenza della serie $\varphi(x)$, meromorfa in tutto il piano, l'intero $P = p$ per cui il rapporto

$$r' = \frac{l_{p-1}}{l_p} > r,$$

dà il numero dei poli di $\varphi(x)$ situati sulla circonferenza (r), e, tranne che in questi punti, la φ è regolare dentro (r'). (*)

E così, se per $P = q$, si ha

$$r'' = \frac{l_{q-1}}{l_q} > r',$$

la funzione $\varphi(x)$ ha p poli su (r), $q - p$ su (r') e, tranne che in questi punti, è regolare dentro (r''). E così di seguito. Di modo che i rapporti

$$\frac{l_{p-1}}{l_p},\quad \frac{l_{q-1}}{l_q},\ldots$$

dànno i moduli $r, r', \ldots$ dei poli successivi della funzione $\varphi(x)$ meromorfa in tutto il piano. Di qui l'importanza della considerazione della serie $f(x)$.

E. Lugaro.

SULLE EVOLVENTI SUCCESSIVE DI UN CERCHIO

1. In due lavori pubblicati anni sono in questo giornale (**) si è fatto vedere come, in qualche caso, sia possibile con metodo elementare, e tutto al più applicando qualcuno dei principali teoremi sui limiti, studiare qualche linea piana o a doppia curvatura anche da chi non abbia ancora familiare il metodo infinitesimale.

Una nuova conferma si avrà colla presente nota, dove vengono studiate le evolventi successive di un cerchio che hanno origine da uno stesso punto di questo *(evolventi principali)*.

Se, dopo di avere avvolto a una curva piana qualunque l_1 un filo flessibile ed inestendibile, lo si svolge gradatamente in modo che la parte che via via abbandona la curva si tenda in linea retta e la parte re-

(*) Cfr. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonction*, ecc.

(**) *Alcune proprietà della sviluppante di cerchio*, 1897 — *Proiezione stereografica e sua applicazione allo studio delle linee sferiche*, 1899.

stante si conservi aderente alla curva, ogni punto del filo descrive una curva l, che si chiama *evolvente* di l_1. La linea l_1 si dice *evoluta* di l, e può riguardarsi come l'inviluppo delle normali di l.

Ne segue che una curva piana ha infinite evolventi ed una sola evoluta. Il punto comune alla curva l_1 e alla sua evolvente l è l'*origine* dell'evolvente.

Indicando con A, A_1 due punti corrispondenti di l, l_1, il punto A_1 e il segmento A_1A si dicono rispettivamente *centro di curvatura* e *raggio di curvatura* di l.

L'evoluta dell'evoluta di una linea si dice *evoluta seconda;* l'evoluta dell'evoluta seconda *evoluta terza* ecc.

Analogamente da una linea si possono ricavare le successive evolventi.

Queste, nel caso in cui abbiano origine da uno stesso punto della curva data, si dicono *evolventi principali.*

Indicando con ρ ed s il raggio di curvatura e l'arco di l, con ρ_1 e s_1 il raggio di curvatura e l'arco di l_1, e supponendo di contare questi archi s, s_1 dall'origine dell'evolvente, il modo stesso con cui da l_1 si genera l, suggerisce immediatamente la formola:

$$s_1 = \rho. \tag{1}$$

Siano (A, B) due punti vicinissimi di l e (A_1, B_1), (A_2, B_2) i punti corrispondenti sulle evolute prima e seconda l_1 e l_2. L'arco AB di l si può allora considerare come un arco circolare di centro A_1 e di raggio ρ, e l'arco A_1B_1 di l_1 come un arco circolare di centro A_2 e di raggio ρ_1.

Indicando con σ l'aumento piccolissimo che subisce l'arco s nel passaggio dal punto A al punto B, con τ l'aumento corrispondente del raggio di curvatura ρ e con ε l'angolo infinitamente piccolo delle rette AA_1, BB_1 (o delle altre A_1A_2, B_1B_2 perpendicolari alle prime), si ha:

$$\sigma = \text{arco } AB = \rho \cdot \varepsilon, \qquad \tau = \text{arco } A_1B_1 = \rho_1 \cdot \varepsilon,$$

da cui risulta la formola:

$$\rho_1 = \rho \cdot \left(\frac{\tau}{\sigma}\right), \tag{2}$$

nella quale (giova ripeterlo esplicitamente) gli aumenti σ, τ dell'arco s e del raggio di curvatura ρ si debbono intendere *infinitamente piccoli.*

Si consideri ora una linea piana l in cui il raggio di curvatura è legato all'arco dalla relazione:

$$\rho = hs^m, \tag{3}$$

dove h ed m sono costanti.

Si dia all'arco s un aumento qualunque s_0 e sia ρ_0 il corrispondente aumento di ρ. Applicando allora lo sviluppo del binomio di *Newton* (valido, come è noto, per qualsiasi valore dell'esponente), si ottiene:

$$\rho + \rho_0 = h\,(s + s_0)^m =$$
$$= h\left\{s^m + ms^{m-1} \cdot s_0 + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,s^{m-2} \cdot s_0^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,s^{m-3} \cdot s_0^3 + \ldots\right\}.$$

Ricavandosi da questa:

$$\frac{\rho_0}{s_0} = mhs^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} hs^{m-2} . s_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} hs^{m-3} . s_0^2 + \ldots,$$

se si fa tendere s_0 a zero e si nota che, al limite, il rapporto $\frac{\rho_0}{s_0}$ si riduce all'altro $\frac{\tau}{\sigma}$, si ottiene:

$$(4) \qquad \frac{\tau}{\sigma} = mh . s^{m-1}.$$

Tenendo conto delle relazioni (3), (4), le (1), (2) divengono:

$$s_1 = hs^m, \qquad \rho_1 = mh^2 . s^{2m-1}$$

e da queste, eliminando s, si deduce il teorema:

Se fra il raggio di curvatura e l'arco di una linea piana l *ha luogo la relazione* (3), *fra il raggio di curvatura e l'arco della sua evoluta* l_1 *ha luogo l'altra relazione:*

$$(5) \qquad \rho_1 = mh^{\frac{1}{m}} . s_1^{\frac{2m-1}{m}}.$$

Ora l'equazione (5) è della stessa forma della (3); applicando quindi il teorema ora dimostrato, si deduce che fra il raggio di curvatura ρ_2 e l'arco s_2 della seconda evoluta l_2 ha luogo la relazione:

$$\rho_2 = (2m-1) . m^{\frac{1-m}{2m-1}} . h^{\frac{1}{2m-1}} s_2^{\frac{3m-2}{2m-1}}.$$

Analogamente si trova:

$$\rho_3 = (3m-2)(2m-1)^{\frac{1-m}{3m-2}} . m^{\frac{1-m}{3m-2}} . h^{\frac{1}{3m-2}} . s_3^{\frac{4m-3}{3m-2}}$$

. . . . , ecc.

Procedendo in modo simile, si giunge al teorema:

Se per una linea piana l *ha luogo la relazione* (3), *per la sua evoluta* n^{ma} l_n *ha luogo la relazione:*

$$(6) \qquad \rho_n = A_n . s_n^{\frac{m+(m-1)n}{1+(m-1)n}},$$

dove A_n *è la costante definita dall'equazione:* (*)

$$(7) \quad A_n = \left\{1+(m-1)n\right\} . \left\{\prod_{i=1}^{i=n-1} [1+(m-1)i]\right\}^{\frac{1-m}{1+(m-1)n}} . h^{\frac{1}{1+(m-1)n}}.$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè la linea (6) sia un cerchio di raggio r è che risulti $\rho_n = r$, il che avviene per

$$m = \frac{n}{n+1}.$$

(*) Il simbolo $\prod_{i=1}^{i=k} f(i)$, applicato a una funzione $f(i)$ di i, equivale al prodotto dei k fattori che si deducono dalla funzione $f(i)$ attribuendo ad i i valori successivi 1, 2, 3, ... $k-1$, k.

La (7) si riduce allora all'altra:

$$r = \frac{n!}{(n+1)^n} \cdot h^{n+1},$$

dalla quale si deduce:

$$h = \left[\frac{(n+1)^n}{n!} \cdot r \right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Questo cerchio l_n assumiamolo come linea primitiva L; allora la curva l è evidentemente la sviluppante n^{ma} di tale cerchio, e perciò la indicheremo con L_n.

Si ha dunque il teorema:

Se si costruisce la serie infinita delle evolventi di un cerchio (di raggio r) aventi l'origine nello stesso punto, la n^{ma} *evolvente* L_n *è definita per mezzo dell'equazione:*

$$(8) \qquad \rho_n = \left[\frac{(n+1)^n}{n!} r \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot s_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

2. L'equazione (8), cambiando n in $n-1$, dà:

$$\rho_{n-1} = \left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} r \right]^{\frac{1}{n}} \cdot s_{n-1}^{\frac{n}{n+1}};$$

e siccome $s_{n-1} = \rho_n$, si deduce:

I raggi di curvatura corrispondenti ρ_n, ρ_{n-1} *di due evolventi principali consecutive* L_n, L_{n-1} *di un cerchio, sono legati dalla relazione:*

$$(9) \qquad \frac{\rho_n^{n-1}}{\rho_{n-1}^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Se si considerano le evolventi principali consecutive

$$L_1, L_2, L_3, \ldots L_{n-1}, L_n$$

d'un cerchio, si ha in conseguenza dell'equazione (9):

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\rho_n^{n-1}}{\rho_{n-1}^n} = \dfrac{(n-1)!}{r \cdot n^{n-1}}; \qquad \dfrac{\rho_{n-1}^{n-2}}{\rho_{n-2}^{n-1}} = \dfrac{(n-2)!}{r \cdot (n-1)^{n-2}}; \ldots \\ \ldots \dfrac{\rho_3^2}{\rho_2^3} = \dfrac{2!}{r \cdot 3^2}; \qquad \dfrac{\rho_2}{\rho_1^2} = \dfrac{1}{r \cdot 2}. \end{cases}$$

Se fra queste ultime equazioni eliminiamo $\rho_2, \rho_3, \ldots \rho_{n-2}, \rho_{n-1}$, si trova che: *Il raggio di curvatura* ρ_n *della* n^{ma} *evolvente e il raggio di curvatura* ρ_1 *della prima evolvente d'un cerchio, sono legati dalla relazione:*

$$(11) \qquad \rho_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\rho_1^n}{r^{n-1}}.$$

L'equazione (11) dà:

$$\rho_1^{nm} = (n!\ r^{n-1})^m \cdot \rho_n^m = (m!\ r^{m-1})^n \cdot \rho_m^n.$$

Conseguentemente: *I raggi di curvatura corrispondenti* ρ_n, ρ_m *di due evolventi principali arbitrarie* L_n, L_m *di un cerchio, verificano la relazione:*

$$\frac{\rho_n{}^m}{\rho_m{}^n} = \frac{(m\,!)^n}{(n\,!)^m} \cdot r^{m-n}. \tag{12}$$

Siccome $\rho_n = s_{n-1}$, $\rho_m = s_{m-1}$, l'equazione (12) dà:

$$\frac{s_{n-1}^m}{s_{m-1}^n} = \frac{(m\,!)^n}{(n\,!)^m} \cdot r^{m-n}.$$

Se quindi si cambia m ed n rispettivamente in $m+1$ ed $n+1$, si ottiene:

Gli archi corrispondenti s_n, s_m *di due evolventi principali arbitrarie* L_n, L_m *di un cerchio, verificano la relazione:*

$$\frac{s_n^{m+1}}{s_m^{n+1}} = \frac{[(m+1)\,!]^{n+1}}{[(n+1)\,!]^{m+1}} \cdot r^{m-n}. \tag{13}$$

La linea L_n (8), la sua evoluta L_{n-1} e il raggio di curvatura ρ_n in un punto qualsiasi, formano una figura chiusa, della quale ci proponiamo di valutare l'area S_n.

Considerando per maggior generalità la curva (3), l'area S precedentemente definita è una certa funzione dell'arco s della curva.

Fissato per s un valore qualunque, se all'arco si dà un aumento piccolissimo σ, l'area S subisce pure un aumento piccolissimo Σ, che si può considerare rappresentato da un settore appartenente a un cerchio di raggio ρ e avente il centro nel centro di curvatura. Avremo quindi:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \sigma = \frac{1}{2} h^2 s^{2m} \cdot \sigma,$$

d'onde:

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{1}{2} h^2 \cdot s^{2m}. \tag{14}$$

Ora si è dimostrato precedentemente che, avendo la funzione $\rho = hs^m$ di s, il rapporto $\frac{\tau}{\sigma}$ dell'aumento di ρ all'aumento di s *al limite* è proporzionale alla potenza $(m-1)^{ma}$ dell'arco. Tale osservazione, applicata alla (14), dimostra che deve essere:

$$S = k \cdot s^{2m+1}, \tag{15}$$

essendo k una costante conveniente.

Applicando alla (15) la relazione (4), si deduce che il rapporto degli aumenti infinitamente piccoli Σ, σ dell'area S e dell'arco s è espresso dall'equazione:

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = k\,(2m+1) \cdot s^{2m},$$

la quale, confrontata colla (14), dà:

$$k\,(2m+1)=\frac{1}{2}\,h^2\,,$$

d'onde:

$$k=\frac{1}{2}\,h^2\,.\,\frac{1}{2m+1}\,.$$

Con tal valore di k, la (15) diviene:

$$\text{(16)}\qquad S=\frac{1}{2}\,h^2\,.\,\frac{s^{2m+1}}{2m+1}\,,$$

la quale esprime l'area precedentemente definita, relativa alla curva (3), supposto che essa si conti partendo dalla stessa origine da cui s'incomincia a contare l'arco s.

Adattando la formola (16) al caso particolare della curva (8), si ha il teorema:

L'area S_n *compresa fra l'evolvente* n^{ma} L_n *del cerchio, l'evolvente*

$$(n-1)^{ma}\ L_{n-1}$$

(*evoluta di* L_n) *e il raggio di curvatura* ρ_n *in un punto qualsiasi, è data dalla formola:*

$$\text{(17)}\qquad S_n=\frac{1}{2(2n+1)}\cdot\left[\frac{(n+1)^{2n+1}}{n\,!}\,.\,r\right]^{\frac{1}{n+1}}.\,s_n^{\frac{2n+1}{n+1}}.$$

Da quest'equazione, ricorrendo alla relazione (13), si deduce:

Se L_n, L_m *sono due evolventi arbitrarie di un cerchio, comincianti dalla stessa origine, le aree* S_n, S_m *sono legate fra loro dalla relazione:*

$$\text{(18)}\qquad \frac{S_n^{2m+1}}{S_m^{2n+1}}=\frac{[2(2m+1)]^{2n+1}}{[2(2n+1)]^{2m+1}}\,.\,\frac{(m\,!)^{2(2n+1)}}{(n\,!)^{2(2m+1)}}\,.\,r^{4(m-n)}.$$

3. Se si moltiplicano membro a membro le equazioni (10), si ha il teorema:

I raggi di curvatura corrispondenti

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \ldots\ \rho_{n-1},\ \rho_n$$

delle evolventi consecutive L_1, L_2, L_3, ... L_{n-1}, L_n *di un cerchio, comincianti dalla stessa origine, sono legati fra loro dalla relazione:*

$$\text{(19)}\quad \frac{\rho_1^2\,\rho_2^2\,\rho_3^2\ldots\rho_{n-2}^2\,\rho_{n-1}^2}{\rho_n^{n-1}}=\frac{2^1.\,3^2.\,4^3.\ldots(n-1)^{n-2}.\,n^{n-1}}{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(n-2)\,!\,(n-1)\,!}\cdot r^{n-1}=\text{costante}$$

Se si nota che

$$\text{(20)}\qquad \rho_k=s_{k-1}$$

l'equazione (19), colla sostituzione di $n+1$ ad n, dà:

$$\frac{s^2.\,s_1^2\,s_2^2\ldots s_{n-2}^2\,s_{n-1}^2}{s_n^n}=\frac{2^1.\,3^2.\,4^3.\ldots n^{n-1}.\,(n+1)^n}{1\,!\,2\,!\,3\,!\ldots(n-1)\,!\,n\,!}\,r^n=\text{costante}.$$

Questa è una notevole relazione fra l'arco s del cerchio dato L e gli archi $s_1, s_2, s_3, \ldots s_{n-1}, s_n$ delle sue successive evolventi principali

$$L_1, L_2, L_3, \ldots L_{n-1}, L_n.$$

Nell'equazione (18) facciamo $m = n - 1$; poscia, nell'equazione ottenuta, cambiamo successivamente n in $n-1, n-2, \ldots 4, 3, 2$; finalmente moltiplichiamo fra loro tutte le equazioni ottenute.

Si ottiene così la relazione notevole:

$$\frac{S_1^4 S_2^4 S_3^4 \ldots S_{n-2}^4 S_{n-1}^4}{S_n^{2n-1}} S_1 =$$
$$= \frac{5^3.7^5.9^7\ldots(2n-1)^{2n-3}(2n+1)^{2n-1}}{3^5.5^7.7^9\ldots(2n-3)^{2n-1}(2n-1)^{2n+1}} \cdot \frac{[2^3.3^5.4^7\ldots(n-1)^{2n-3}\,n^{2n-1}]^2}{[1!2!3!\ldots(n-2)!(n-1)!]^4} \cdot r^{4(n-1)} =$$
$$= \text{costante}.$$

Nella (19) si cambi successivamente n in $n-1, n-2, \ldots 3, 2$ e si moltiplichino poi fra loro l'equazione (19) e le equazioni ottenute.

Si giunge così al teorema:

I raggi di curvatura corrispondenti $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_{n-1}, \rho_n$ *delle evolventi successive* $L_1, L_2, L_3, \ldots L_{n-1}, L_n$ *di un cerchio, comincianti dalla stessa origine, verificano la seguente relazione:*

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{i=n-1} [\rho_i^{2(n-i)}]}{\prod\limits_{i=2}^{i=n} [\rho_i^{\,i-1}]} = \frac{\prod\limits_{i=2}^{i=n} [i^{(i-1)(n-i+1)}]}{\prod\limits_{i=1}^{i=n-1} [(i!)^{n-i}]} \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}} = \text{costante}.$$

Considerando la relazione (20), l'ultimo teorema si trasforma nell'altro:

Gli archi corrispondenti $s, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s_n$ *del cerchio* L *e delle sue evolventi consecutive* $L_1, L_2, L_3, \ldots L_{n-1}, L_n$, *che cominciano dalla stessa origine, sono legati fra loro dalla relazione:*

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{i=n-1} [s_i^{2(n-i)}]}{\prod\limits_{i=1}^{i=n} [s_i^{\,i}]} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{i=n} [(i+1)^{i(n+1-i)}]}{\prod\limits_{i=1}^{i=n} [(i!)^{n+1-i}]} \cdot r^{\frac{n(n+1)}{2}} = \text{costante}.$$

Introduciamo la condizione (20) nell'equazione (11) e applichiamo poscia l'equazione (17). Si ottiene così il teorema:

Se L_n *è la* n^{ma} *evolvente principale di un cerchio* L, *le quantità* ρ_n, s_n, S_n *sono legate all'arco* s *del cerchio* L *mediante le relazioni seguenti:*

$$(21) \qquad \begin{cases} \rho_n = \dfrac{1}{n!} \cdot \dfrac{s^n}{r^{n-1}}; \qquad s_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \cdot \dfrac{s^{n+1}}{r^n}; \\ S_n = \dfrac{1}{2(n+1)(n!)^2} \cdot \dfrac{s^{2n+1}}{r^{\frac{2n^2+n-1}{n+1}}}. \end{cases}$$

Se quindi s', s'' sono due speciali valori dell'arco s del cerchio L, e

(ρ_n', ρ_n''), (s_n', s_n''), (S_n', S_n'') i valori corrispondenti delle altre grandezze ρ_n, s_n, S_n, si ha:

$$\left(\frac{\rho_n'}{\rho_n''}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{s_n'}{s_n''}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{S_n'}{S_n''}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \frac{s'}{s''}.$$

Conseguentemente:

Se gli archi $s', s'', s''', \ldots$ *del cerchio* L *sono in progressione geometrica, avviene il medesimo per le quantità corrispondenti* $(\rho_n', \rho_n'', \rho_n''', \ldots)$, $(s_n', s_n'', s_n''', \ldots)$, $(S_n', S_n'', S_n''', \ldots)$ *relative a un'evolvente principale arbitraria* L_n.

Dalle equazioni (21) si ricava la notevole conseguenza:

Le quantità S_n, ρ_n, s_n *verificano la relazione:*

$$\frac{S_n'}{S_n''} = \frac{\rho_n' \cdot s_n'}{\rho_n'' \cdot s_n''}.$$

4. Il centro O del cerchio L, un punto qualunque A del medesimo e il punto corrispondente A_1 della sua prima evolvente sono manifestamente i vertici di un triangolo rettangolo.

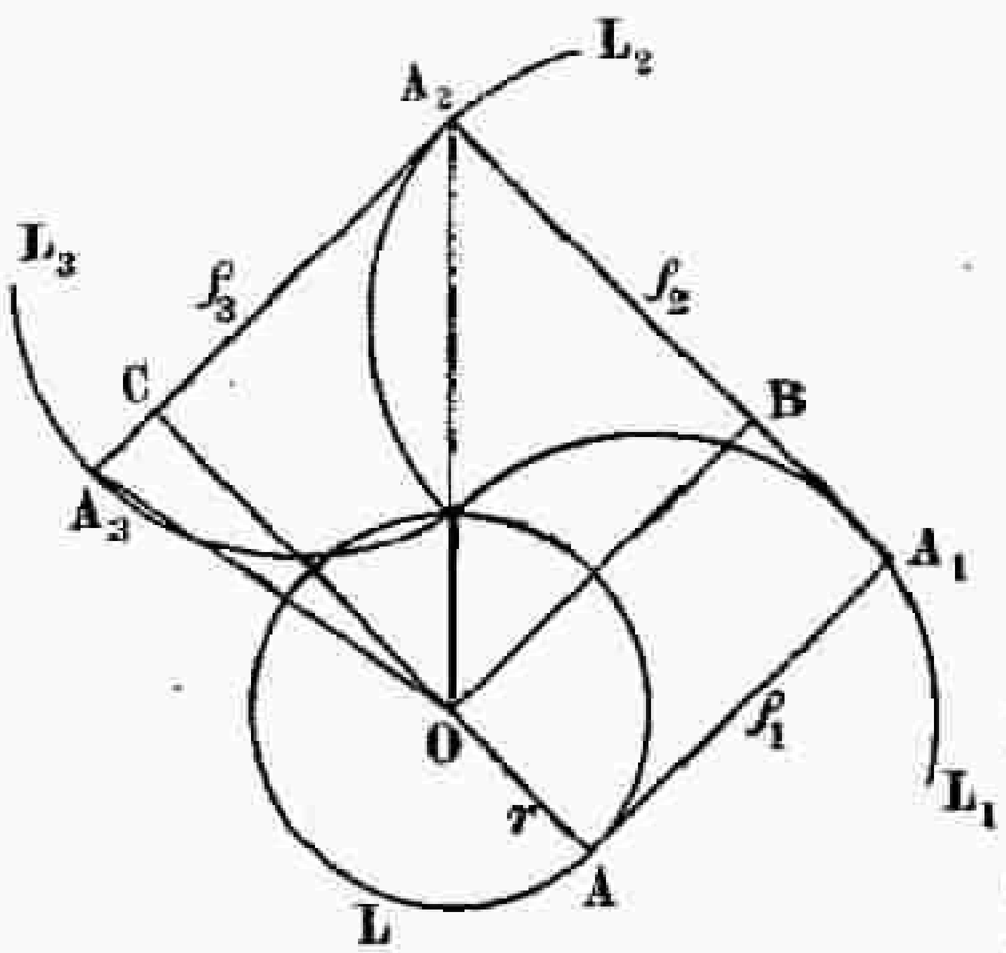
Indicando quindi con R_1 il raggio vettore OA_1, si ha la relazione:

$$R_1^2 = \rho_1^2 + r^2. \tag{22}$$

Si vedrà ora che una relazione analoga sussiste per la seconda sviluppante di cerchio.

Infatti se A, A_1, A_2 sono tre punti corrispondenti del cerchio L e delle due evolventi successive L_1, L_2, indicando con B il punto dove A_1A_2 è segata dalla retta condotta da O parallelamente ad AA_1 e con R_2 il raggio vettore OA_2, si ha:

$$R_2^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{A_2B}^2 = \overline{AA_1}^2 + (A_1A_2 - OA)^2 = \rho_1^2 + (\rho_2 - r)^2 =$$
$$= \rho_2^2 + r_2^2 + (\rho_1^2 - 2r\rho_2).$$



Ma dalla (11) si deduce:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{2r}, \tag{23}$$

e quindi:

$$\rho_1^2 - 2r\rho_2 = 0.$$

Avremo dunque la formola:

$$R_2^2 = \rho_2^2 + r^2, \tag{24}$$

perfettamente analoga alla (22).

Nella dimostrazione fatta vi è implicitamente l'ipotesi che A_1A_2 sia maggiore di r, e che quindi B cada fra A_1 e A_2.

Quando $A_1A_2 < r$, il punto B cade fuori del segmento A_1A_2 e allora si ha:

$$R_2^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{A_2B}^2 = \overline{AA_1}^2 + (A_1B - A_1A_2)^2 = \rho_1^2 + (r - \rho_2)^2,$$

relazione che conduce evidentemente alla (24).

Qualora poi sia $A_1A_2 = r$, la figura OAA_1A_2 è un rettangolo e quindi risulta:

$$R_2^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{AA_1}^2 = \rho_1^2 = 2r\rho_2 = 2r^2 = \rho_2^2 + r^2.$$

Si può quindi dire:

Nella seconda sviluppante principale del cerchio fra il raggio vettore R_2 *e il raggio di curvatura* ρ_2 *sussiste la relazione* (24).

Dal fatto che nella prima e nella seconda sviluppante del cerchio il raggio vettore è legato al raggio di curvatura rispettivamente dalla relazione (22) e (24) di forma identica, si potrebbe essere indotti a credere che una tale proprietà si verificasse per qualsiasi sviluppante principale del cerchio.

Ma, col sussidio del calcolo infinitesimale, si dimostra che:

Nella famiglia di linee piane definita dall'equazione (3), *le due prime sviluppanti principali del cerchio sono le uniche che godano della proprietà dimostrata.*

Non potendo noi entrare in tale dimostrazione senza varcare i limiti che ci siamo imposti, considereremo direttamente la terza sviluppante principale di cerchio.

Essendo A, A_1, A_2, A_3 (figura precedente) punti corrispondenti del cerchio L e delle sue tre prime sviluppanti principali L_1, L_2, L_3, si congiunga A col centro O del cerchio, e si prolunghi il raggio OA fino che tagli il raggio di curvatura $A_2A_3 = \rho_3$.

Detto C questo punto d'incontro e R_3 il raggio vettore OA_3, si ha:

$$\begin{aligned}R_3^2 = \overline{OA_3}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CA_3}^2 &= (AC - OA)^2 - (A_2A_3 - A_2C)^2 = \\ &= (\rho_2 - r)^2 + (\rho_3 - \rho_1)^2 = \rho_3^2 + r^2 + (\rho_1^2 - 2r\rho_2) + c\,(\rho_2^2 - 2\rho_1\rho_3).\end{aligned}$$

Ma, come si è visto,

$$\rho_1^2 - 2r\rho_2 = 0:$$

e d'altronde, essendo per la (11):

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{2r}, \qquad \rho_3 = \frac{\rho_1^3}{6r^2},$$

risulta:

$$\rho_2^2 - 2\rho_1\rho_3 = -\frac{\rho_1^4}{12r^2}.$$

Si trova quindi che fra R_3 e ρ_3 sussiste la relazione:

$$R_3^2 = \rho_3^2 + r^2 - \frac{1}{12}\frac{\rho_1^4}{r^2},$$

che è di forma diversa dalle (22), (24).

Le equazioni (22), (24) dimostrano che

Se si segano la prima e la seconda sviluppante L_1, L_2 *di cerchio, con un cerchio arbitrario concentrico al cerchio* L, *i raggi di curvatura* ρ_1, ρ_2 *nei due punti d'intersezione sono fra loro eguali.*

Se fra le equazioni (22), (23) e (24) si eliminano le quantità ρ_1, ρ_2, si ha:

I raggi vettori corrispondenti R_1, R_2 *relativi alla prima e alla seconda sviluppante di cerchio sono legati fra loro dalla relazione:*

$$R_2 = \frac{\sqrt{R_1^4 - 2r^2R_1^2 + 5r^4}}{2r}.$$

Parma, ottobre 1903.

GEMINIANO PIRONDINI.

ALCUNE APPLICAZIONI DI CALCOLO DELLE DIFFERENZE

1. Sia data una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{1}$$

Ponendo, come si usa nel *Calcolo delle differenze*

$$\Delta^p a_q = a_{p+q} - \binom{p}{1} a_{p+q-1} + \binom{p}{2} a_{p+q-2} - \dots \pm a_q$$

è facile vedere come possa scriversi identicamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(1-x)^{k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Delta^{k-1} a_n.$$

Se avviene che sia

$$\Delta^k a_n = 0$$

tranne che per valori di n di una successione di numeri v_m soddisfacenti alla condizione

$$\lim_{m=\infty} (v_{m+1} - v_m) = \infty$$

un teorema di Fabry ci fa conoscere che la serie $\Sigma\, a_n x^n$ non è prolungabile al di fuori di un determinato cerchio. (*)

Se avviene invece che sia

$$\Delta^k a_n = 0 \tag{2}$$

per qualunque valore di n, sarà

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \Delta^{k-1} a_n = \Delta^{k-1} a_0 \cdot \frac{1}{1-x}$$

(*) E. FABRY, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son developpement en série et l'impossibilité de prolongement analytique dans des cas très généraux.* Annales scientifique de l'École normale supérieure 1896. Vedi anche: F. SIBIRANI, *Un teorema della teoria delle serie di potenze.* Jornal des Sciencias matematicas e astronomicas (Coimbra) 1903.

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \ldots + \frac{x^{k-1}\,.\,\Delta^{k-1} a_0}{(1-x)^k} \qquad (3)$$

cioè la serie rappresenta una funzione razionale.

La relazione (2) è la *scala di ricorrenza* della serie.

I coefficienti a_n si possono esprimere in funzione razionale intera del proprio indice. Infatti riguardando la (2) come un'equazione lineare alle differenze di ordine k, il suo integrale è

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_{k-1} n^{k-1}$$

dove le costanti $c_0, c_1, \ldots c_{k-1}$ sono determinate dal sistema di k equazioni

$$a_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + \ldots + c_{k-1} i^{k-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

2. Se ψ è simbolo di funzione razionale intera di grado $k-1$, poichè vale la relazione

$$\Delta^r \psi(n) = 0 \qquad (r \geqq k)$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(n)\, x^n$$

è lo sviluppo della funzione razionale

$$\frac{A_0}{1-x} + \frac{A_1 x}{(1-x)^2} + \frac{A_2 x^2}{(1-x)^3} + \ldots + \frac{A_{k-1} x^{k-1}}{(1-x)^k} \qquad (4)$$

dove è

$$A_i = \Delta^i \psi(0).$$

Viceversa sia data la funzione (4): essa sarà sviluppabile in una serie di potenze i cui coefficienti sono esprimibili in funzione, razionale intera di grado $k-1$, del proprio indice.

Posto infatti

$$a_n = \psi(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_{k-1} n^{k-1} \qquad (5)$$

basterà poter determinare $c_0, c_1, \ldots c_{k-1}$ in modo che sia

$$\Delta^i \psi(0) = A_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots k-1). \qquad (6)$$

Ora, avendo posto

$$\Delta^p 0^q = p^q - \binom{p}{1}(p-1)^q + \binom{p}{2}(p-2)^q - \ldots \pm \binom{p}{p-1}$$

sarà

$$\Delta^i \psi(0) = \Delta^i 0^i c_i + \Delta^i 0^{i+1} c_{i+1} + \ldots + \Delta^i 0^{k-1} c_{k-1}$$

e quindi le (6) diverranno

$$\Delta^i 0^i c_i + \Delta^i 0^{i+1} c_{i+1} + \ldots + \Delta^i 0^{k-1} c_{k-1} = A_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots k-1) \quad (6')$$

Si osservi ora che le (6′) formano un sistema di k equazioni fra le k incognite $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$, sistema che è normale, poichè il determinante dei coefficienti, come facilmente si verifica, è diverso da zero e precisamente uguale a $1!\,2!\,3!\ldots k-1!$: si possono perciò determinare i coefficienti c_i e quindi la $\psi(n)$.

3. La formula

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1}\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \ldots + \Delta^n a_0$$

fornitaci dal Calcolo delle differenze, ci dà

$$\begin{aligned} a_n &= A_0 + \binom{n}{1}A_1 + \binom{n}{2}A_2 + \ldots + A_n \qquad \text{per } n \leqslant k-1 \\ a_n &= A_0 + \binom{n}{1}A_1 + \binom{n}{2}A_2 + \ldots + \binom{n}{k-1}A_n \quad \text{per } n > k-1 \end{aligned} \tag{7}$$

formule che servono a calcolare rapidamente i coefficienti a_n dello sviluppo in serie della funzione (4).

Ma delle (7) ce ne serviamo anche ad altro scopo.

Sviluppiamo il secondo membro della seconda formula per le potenze crescenti di n. Se denotiamo con $S_{h,n}$ $(h < n)$ la somma dei $\binom{n-1}{h}$ prodotti dei numeri $1, 2, 3, \ldots n-1$ combinati ad h ad h in tutti i modi possibili, detto sviluppo sarà

$$a_n = \sum_{r=0}^{k-1} n^r \left(\frac{A_r S_{o,r}}{r!} - \frac{A_{r+1} S_{1,r+1}}{r+1!} + \frac{A_{r+2} S_{2,r+2}}{r+2!} - \ldots \pm \frac{A_{k-1} S_{k-r-1,k-1}}{k-1!} \right) \tag{8}$$

Confrontando la (5) con la (8) si ottiene

$$c_r = \frac{A_r S_{o,r}}{r!} - \frac{A_{r+1} S_{1,r+1}}{r+1!} + \frac{A_{r+2} S_{2,r+2}}{r+2!} - \ldots \pm \frac{A_{k-1} S_{k-r-1,k-1}}{k-1!}$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots k-1)$$

che ci dà le soluzioni del sistema (6′). Ora tenendo conto che

$$A_i = \Delta^i a_0 = a_i - \binom{i}{1} a_{i-1} + \binom{i}{2} a_{i-2} - \ldots \pm a_0$$

si ottiene ancora

$$c_r = a_0 B_{o,r} + a_1 B_{1,r} + a_2 B_{2,r} + \ldots a_{k-1} B_{k-1,r} \tag{9}$$

ove è

$$B_{q,r} = \begin{cases} (-1)^{q+r} \dfrac{1}{q!} \displaystyle\sum_{t=0}^{k-q-1} \dfrac{S_{q-r+t,q+t}}{t!} & \text{per } q = r,\ r+1, \ldots k-1 \\ (-1)^{q+r} \dfrac{1}{q!} \displaystyle\sum_{t=0}^{k-r-1} \dfrac{S_{t,r+t}}{r+t-q!} & \text{per } q = 0, 1, \ldots r-1 \end{cases}$$

L'espressione dei coefficienti c_r in funzione di $a_0, a_1, \dots a_{k-1}$ può aversi ancora risolvendo il sistema

$$a_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + \dots + c_{k-1} i^{k-1} \qquad (1 = 0, 1, 2, \dots k-1)$$

ottenuto dalla (5) ponendo $n = 0, 1, 2, \dots k-1$.

Tale risoluzione dà

$$(r = 0, 1, \dots k-1) \qquad c_r = \frac{a_0 D_{1,r+1} + a_1 D_{2,r+1} + \dots + a_{k-1} D_{k,r+1}}{1!\,2!\,3!\dots k-1!} \quad (10)$$

dove $D_{m,n}$ è il reciproco dell'elemento n^0 nella linea m^a del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 \dots\dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \dots\dots & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & (k-1)^{k-1} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Si trae dunque confrontando (9) con (10)

$$D_{q+1,r+1} = 1!\,2!\,3!\dots k-1!\, B_{q,r}.$$

Si sono espressi così i reciproci del determinante (11) mediante i numeri $S_{h,n}$ che si calcolano con molta rapidità: (*) ciò ci permette di risolvere immediatamente il sistema di k equazioni lineari non omogenee fra k incognite $x_0, x_1, \dots x_{k-1}$

$$(i = 0, 1, \dots k-1) \qquad x_0 + x_1 i + x_2 i^2 + \dots x_{k-1} i^{k-1} = \alpha_i$$

senza aver bisogno di eseguire il calcolo laboriosissimo dei determinanti di k^0 ordine cui darebbe luogo la risoluzione diretta.

Le formule già trovate ci danno

$$x_r = \sum_{q=0}^{k-1} \alpha_q B_{q,r}.$$

Ed è facile vedere come si risolva immediatamente anche il sistema

$$(i = 1, 2, \dots k-1) \qquad x_1 i + x_2 i^2 + \dots x_{k-1} i^{k-1} = \alpha_i$$

che, come il primo, interviene spesso in problemi di interpolazione.

Cento, Settembre 1903.

FILIPPO SIBIRANI.

(*) Cfr. SIBIRANI, *Un notevole specchio di numeri.* "Periodico di Matematica," tomo XVI.

IL "LATINO SINE FLEXIONE" DEL PROF. PEANO

1. Da diversi anni, dai dotti dei varî paesi si vanno facendo tentativi incessanti per la formazione di una lingua internazionale, tentativi che, sebbene coronati alcuni di qualche successo, pure per diverse ragioni, che qui sarebbe lungo enumerare, non sono mai entrati, per quanti sforzi si siano fatti, nel dominio della pratica.

Dalla *Lingua bleu* del Bolak, dallo *Spokil* del De Nicolas, dalla *Blaia Zimondal* del Meriggi, al *Volapük* dello Schleyer, all'*Esperanto* dello Zamenof, alla *Lingua* di Henderson, al *Le nov-latin* di Rosa, si son fatti indubbiamente dei passi notevoli, e pare che sempre più ci si avvicini all'ideale di una lingua razionale, che è quello della massima semplicità del vocabolario e dell'abolizione completa della grammatica. Sembrerebbe a prima vista che questa meta, per quanto luminosa, fosse irraggiungibile e che tale semplificazione dovesse nuocere all'intelligenza e alla chiarezza delle comunicazioni: eppure non è così, ed il chiarissimo prof. Peano dell'Università di Torino, in una sua nota inserta nel tomo VIII, anno 1903 della *Revue de Mathématiques*, ce ne dà un esempio luminoso. Di questo saggio appunto dell'illustre creatore dell'ideografia intendo parlare nella presente nota, sicuro di far cosa grata a quanti sta a cuore l'interessante questione, di cui già, in uno degli ultimi fascicoli, ebbe ad occuparsi il nostro Periodico. (*)

Partendo dai seguenti concetti di Leibnitz: (**)

« Nominum casus semper eliminari possunt substitutis in eorum locum particulis quibusdam »;

« Discrimen generis nihil pertinet ad grammaticam rationalem »;

« Personae verborum possunt esse invariabiles, sufficit variari *ego*, *tu*, *ille*, etc. »;

il prof. Peano costruisce la sua lingua ausiliaria, che chiama *Latino sine flexione*, ed immediatamente la applica ad una nota sul « Principio de permanentia ».

Principiando dai casi, egli indica il genitivo con *de*, il dativo con *ad*, l'ablativo con *ab*, *ex*, etc.: suppone il nome inflessibile, prendendolo o identico al nominativo, cambiate le desinenze *-us*, *-um*, *-u* in *o*, *-es* in *-e*, o identico al genitivo mutato *-i* in *-o* ed *-is* in *-e*: invece di *ego*, *tu*, prende poi *me*, *te*.

Toglie quindi la distinzione di genere e numero, convenendo che, quando sia necessario distinguerli, si può far precedere il sostantivo, per

(*) Cfr. U. Ceretti, *Matematica ed Esperanto*, nel fasc. VI, anno XVIII del "Periodico di Matematica".
(**) Leibnitz, ed. Couturat, 1901, pag. 67.

il primo, da *mas, femina*, per il secondo da *uno, plure*. Venendo finalmente ai verbi, comincia col sopprimere i suffissi personali, osservando che, per questo, basta far precedere il verbo inflessibile da *me, te, ille* etc., e sopprime poi completamente la coniugazione, prendendo per ogni verbo una forma unica, che si ottiene togliendo dall'infinito presente la terminazione *-re* o *-ri* (*se* pel verbo *esse*). (*)

Con queste convenzioni, è evidente che un semplice vocabolario latino, contenente il nominativo e il genitivo di ogni nome e l'infinito dei verbi, è sufficiente per scrivere e tradurre nella nuova lingua anche a chi non abbia alcuna cognizione di latino: per i vocaboli però bisogna scegliere, oltre che nel latino classico, anche nel latino popolare, introducendo pure quei vocaboli che ora sono divenuti internazionali, come *metro, dyne* etc.

Questi, in breve, i concetti dell'illustre autore, concetti che, dalla larga approvazione già avuta dai dotti, sembrano davvero destinati a trionfare.

Per terminare, porterò, come esempio, la breve nota seguente, scritta nella nuova lingua:

Mensura de circulo iuxta Leonardo Pisano.

Leonardo Fibonacci in « Practica Geometriae » dice:

« Si secundum pisanum modum (circulum) mensurare desideras, dyametrum in se multiplica; et quod provenerit divide per 7, et habebis panora embadj ipsius circulj ». Hic regula significa quod $\pi = \frac{22}{7}$, ut me nunc demonstra. Si enim mensura de diametro de circulo in *pertica*, es $2r$, quadrato de diametro es r^2, qui, diviso per 7, me dice es mensura de superficie de circulo, expresso per *panoro*. Oporte enim nos sci panoro contine pertica $5\,^1/_2$: si igitur $2r$ es mensura de diametro in pertica, iuxta regula de Leonardo, nos habe superficie de circulo æquale ad panoro $\frac{4r^2}{7}$: si nunc hic mensura nos vole reduce in pertica, oporte multiplica $\frac{4r^2}{7}$ per $5\,^1/_2$, id es

$$\text{Sup. de circulo} = \frac{4r^2}{7} \times 5\,^1/_2 = \frac{4r^2}{7} \cdot \frac{11}{2} = 4r^2 \cdot \frac{11}{14}.$$

Sed $\frac{11}{14}$ es æquale $\frac{22}{7} : 4 = \frac{\pi}{4}$: igitur $S = \pi r^2$, ubi r es mensura de medietate de diametro, expresso in pertica, id es in ipse mensura, in qui nos mensura diametros.

MARIO LAZZARINI.

(*) Accenno qui semplicemente le convenzioni dell'autore, rimandando, per maggiori schiarimenti, alla sua magistrale memoria.

ESPRESSIONI SIMBOLICHE

dei coefficienti che compaiono nello sviluppo delle forme ternarie di ordine qualunque con potenze di forme ternarie lineari

Nel volume 76° del *Giornale di Crelle* il Rosanes in una nota « Sopra un principio di associazione per le forme algebriche » dimostra con semplici considerazioni geometriche il teorema:

Data una curva di equazione $f = a_x^n = 0$ *ed un suo* $(n+1)$-gono *coniugato completo, i cui lati siano fra loro distinti, si ha che la* f *si può esprimere linearmente colle ennesime potenze delle forme lineari corrispondenti ai lati dell'* $(n+1)$-gono, *cioè i lati di esso costituiscono un* $\frac{n(n+1)}{2}$-latero *polare della curva.*

Noi ci proponiamo ora di cercare le espressioni simboliche dei coefficienti che entrano in tale sviluppo.

Il metodo che adoperiamo ci venne suggerito da un esempio che si trova nella memoria citata. Esso presenta il vantaggio di dare nello stesso tempo una verifica del teorema enunciato.

Sia data la curva di equazione:

$$f = a^n_x = 0,$$

ed un suo $(n+1)$-agono coniugato completo

$$(y_1),\ (y_2), \ldots (y_{n+1}).$$

Dovrà essere:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{y_2}\ a_{y_3} \ldots a_{y_{n+1}} = 0 \\ a_{y_1}\ a_{y_3} \ldots a_{y_{n+1}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{y_1}\ a_{y_2} \ldots a_{y_n} = 0. \end{cases}$$

I primi membri delle (1) sono gli armonizzanti delle:

$$\begin{array}{l} \varphi_1 = u_{y_2}\ \ u_{y_3} \ldots u_{y_{n+1}} \\ \varphi_2 = u_{y_1}\ \ u_{y_3} \ldots u_{y_{n+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n+1} = u_{y_1}\ \ u_{y_2} \ldots u_{y_n}, \end{array}$$

e della forma f.

Supponiamo che gli $\frac{n(n+1)}{2}$ lati dell'$(n+1)$-gono sieno tra loro distinti; le loro equazioni saranno racchiuse nella

$$(x y_s y_t) = 0,$$

dove s, t indica una combinazione della seconda classe degli indici $1, 2, \ldots n+1$.

Indichiamo con $r_1 r_2 \ldots r_{n+1}$ una permutazione qualunque degli indici $1, 2, \ldots n+1$, e per brevità un determinante $(y_l\, y_m\, y_n)$ con $(l\, m\, n)$.

Consideriamo ora le espressioni:

$$\mathrm{A}_{r_1 r_2} = \frac{a^2_{y_{r_3}}\, a_{y_{r_4}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}}}{(r_1 r_2 r_3)^2 (r_1 r_2 r_4) \ldots (r_1 r_2 r_{n+1})}, \tag{2}$$

Osserviamo anzitutto che:

$$\mathrm{A}_{r_1 r_2} = (-1)^n \mathrm{A}_{r_2 r_1}.$$

Di più il valore di una qualunque delle A non si altera scambiando l'indice r_3 con uno qualunque di quelli che lo seguono. Infatti, indicando con $\mathrm{A}'_{r_1 r_2}$ l'espressione ottenuta da $\mathrm{A}_{r_1 r_2}$ scambiando r_3 con r_s si ha:

$$\mathrm{A}_{r_1 r_2} - \mathrm{A}'_{r_1 r_2} = \frac{a_{y_{r_3}}\, a_{y_{r_4}} \ldots a_{y_{n+1}}}{(r_1 r_2 r_3)^2 (r_1 r_2 r_s)^2 (r_1 r_2 r_4) \ldots (r_1 r_2 r_{n+1})} \left\{ a_{y_{r_3}} (r_1 r_2 r_s) - a_{y_{r_s}} (r_1 r_2 r_3) \right\} =$$

$$= \frac{a_{y_{r_3}}\, a_{y_{r_4}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}}}{(r_1 r_2 r_3)^2 (r_1 r_2 r_s)^2 \ldots (r_1 r_2 r_{n+1})} \left\{ a_{y_{r_1}} (r_3 r_2 r_s) - a_{y_{r_2}} (r_1 r_2 r_s) \right\}$$

per la nota identità:

$$a_{y_{r_3}} (r_1 r_2 r_s) - a_{y_{r_s}} (r_1 r_2 r_3) = a_{y_{r_1}} (r_3 r_2 r_s) - a_{y_{r_2}} (r_3 r_1 r_s),$$

e ricordando le (1),

$$\mathrm{A}_{r_1 r_2} - \mathrm{A}'_{r_1 r_2} = 0.$$

Possiamo quindi dire che in generale le espressioni (2) distinte in valore si riducono ad $n(n+1)$ e quelle distinte in valore assoluto ad $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Ora dalla identità:

$$a_x (r_2 r_3 r_4) = a_{y_{r_2}} (x r_3 r_4) + a_{y_3} (x r_4 r_2) + a_{y_{r_4}} (x r_2 r_3),$$

moltiplicando per

$$a_{y_{r_1}}\, a_{y_{r_2}}\, a_{y_{r_5}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}},$$

si ha, per le (1),

$$a_x\, a_{y_{r_1}}\, a_{y_{r_2}}\, a_{y_{r_5}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}} (r_2 r_3 r_4) = a_{y_{r_1}}\, a^2_{y_{r_2}}\, a_{y_{r_5}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_3 r_4),$$

e per le (2):

$$a_x a_{y_{r_1}} a_{y_{r_2}} a_{y_{r_5}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}} = \mathrm{A}_{r_3 r_4} (r_3 r_4 r_1)(r_3 r_4 r_2)(r_3 r_4 r_5) \ldots (r_3 r_4 r_{n+1})(x r_3 r_4) \tag{3}$$

Evidentemente di tali eguaglianze se ne possono trovare $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Supponiamo ora che per un certo valore k di h $(k < n)$ sussista la seguente formola (qualunque sia la permutazione $r_1 r_2 \ldots r_{n+1}$):

$$a^h_x\, a_{y_{r_{h+2}}} \ldots a_{y_{r_{n+1}}} \sum_{r_s, r_t} \mathrm{A}_{r_s r_t} (r_s r_t r_{h+2}) \ldots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^h, \tag{4}$$

dove nel sommatorio devono comparire tutte le A corrispondenti alle combinazioni della seconda classe degli indici $r_1, r_2 \dots r_{h+1}$: vogliamo dimostrare che essa sussiste per $h = k + 1$. Infatti dalla identità:

$$a_x (r_2 r_3 r_4) = a_{y_{r_2}} (x r_3 r_4) + a_{y_{r_3}} (x r_4 r_2) + a_{y_{r_4}} (x r_2 r_3),$$

moltiplicando per

$$a^k_x \, a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}},$$

si ha:

$$\begin{aligned} a_x^{k+1} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} = {} & \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} a^k_x \, a_{y_{r_2}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_3 r_4) + \\ & + \frac{1}{(r_1 r_2 r_4)} a^k_x \, a_{y_{r_3}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_4 r_3) + \\ & + \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} a^k_x \, a_{y_{r_4}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_2 r_3); \end{aligned} \qquad (5)$$

ed avendo supposto che la formola (4) sussista per $h = k$, si avrà:

$$\begin{aligned} a^k_x \, a_{y_{r_2}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= A_{r_1 r_3} (r_1 r_3 r_2)(r_1 r_3 r_{k+3}) \dots (r_1 r_3 r_{n+1}) (x r_1 r_3)^k + \\ &+ \dots \dots \dots \dots \\ a^k_x \, a_{y_{r_3}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= A_{r_1 r_2} (r_1 r_2 r_3)(r_1 r_2 r_{k+3}) \dots (r_1 r_2 r_{n+1}) (x r_1 r_2)^k + \\ &+ \dots \dots \dots \dots \\ a^k_x \, a_{y_{r_4}} a_{y_{r_{k+1}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= A_{r_1 r_2} (r_1 r_2 r_4)(r_1 r_2 r_{k+3}) \dots (r_1 r_2 r_{n+1}) (x r_1 r_2)^k = \\ &+ \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Sostituendo nel secondo membro della (5), avremo intanto che in esso verranno a comparire tutte e sole le $A_{r_s r_t}$ che compaiono nella (4), quando si faccia $h = k + 1$. Cerchiamo ora i coefficienti che moltiplicano le $A_{r_s r_t}$. Possono presentarsi tre casi, o la $A_{r_s r_t}$ entra nel secondo membro solo in una delle tre parti in cui è scomposto, od entra solo in due, od in tutte tre. Analizziamo i tre casi.

Nel primo caso se $A_{r_s r_t}$ entra ad esempio solo nella prima parte dovrà essere necessariamente $r_s = r_3$, $r_t = r_4$, ma il coefficiente di $A_{r_3 r_4}$ è

$$\begin{aligned} \frac{(r_3 r_4 r_2)}{(r_2 r_3 r_4)} (r_3 r_4 r_{k+3}) \dots (r_3 r_4 r_{n+1}) (x r_3 r_4)^{k+1} = \\ = (r_3 r_4 r_{k+3}) \dots (r_3 r_4 r_{n+1}) (x r_3 r_4)_{k+1}; \end{aligned}$$

e questo è appunto il coefficiente di $A_{r_3 r_4}$ nella (4), quando si faccia $h = k + 1$. Lo stesso dicasi pei coefficienti di $A_{r_2 r_3}$ e di $A_{r_2 r_4}$.

Veniamo al secondo caso. Consideriamo una $A_{r_s r_t}$, che entra solo in due parti per esempio nella prima e nella seconda. Allora dovrà essere od r_s od r_t eguale ad r_4. Poniamo $r_s = r_4$; il coefficiente di $A_{r_4 r_t}$ è

$$\begin{aligned} \Gamma = {} & \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_4 r_t r_2)(r_4 r_t r_{k+3}) \dots (r_4 r_t r_{n+1}) (x r_4 r_t)^k (x r_3 r_4) + \\ & + \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_4 r_t r_3)(r_4 r_t r_{k+3}) \dots (r_4 r_t r_{n+1}) (x r_4 r_t)^k (x r_4 r_2) = \\ & = \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_4 r_t r_{k+3}) \dots (r_4 r_t r_{n+1}) (x r_4 r_t)^k \left\{ (r_4 r_t r_2)(x r_3 r_4) + (r_4 r_t r_2)(x r_4 r_2) \right\} \end{aligned}$$

e per l'identità:

$$(r_4 r_t r_2)(x r_3 r_4) + (x r_4 r_2)(r_4 r_t r_3) = (x r_4 r_t)(r_2 r_3 r_4),$$

si ha:

$$\Gamma = (r_4 r_t r_{k+3}) \dots (x r_4 r_t)^{k+1},$$

che è appunto il coefficiente di $A_{r_4 r_t}$ nella (4), quando si faccia $h = k+1$. Se r_t fosse eguale ad r_4, allora r_s sarebbe necessariamente eguale ad r_1, e non si farebbe che ripetere il ragionamento fatto. Dimostrazione analoga si farebbe se $A_{r_s r_t}$ entrasse solamente nella prima e terza parte o solamente nella seconda e terza.

Veniamo infine al terzo caso. Il coefficiente di $A_{r_s r_t}$ è

$$\frac{1}{(r_2 r_3 r_4)}\{(r_s r_t r_2)(r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1})(x r_s r_t)^k (x r_3 r_4) +$$
$$+ (r_s r_t r_3)(r_s r_t r_{k+1}) \dots (r_s r_t r_{n+1})(x r_s r_t)^k (x r_4 r_2) +$$
$$+ (r_s r_t r_4)(r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1})(x r_s r_t)^k (x r_2 r_3)\} =$$
$$= \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)}(r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1})(x r_s r_t)^k \{(r_s r_t r_2)(x r_3 r_4) +$$
$$+ (r_s r_t r_3)(x r_4 r_2) + (r_s r_t r_4)(x r_2 r_3)\};$$

e per l'identità

$$(r_s r_t r_2)(x r_3 r_4) + (r_s r_t r_3)(x r_4 r_2) + (r_s r_t r_4)(x r_2 r_3) = (x r_s r_t)(r_2 r_3 r_4),$$

esso diventa:

$$(r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1})(x r_s r_t)^{k+1},$$

vediamo quindi che anche in questo caso il coefficiente di $A_{r_s r_t}$ è eguale a quello che dà la (4) per $h = k+1$.

Possiamo perciò concludere che la (4) sussiste pure per $h = k+1$; ma noi l'abbiamo verificata per $h = 1$, quindi essa è sempre vera.

In particolare per $h = n$ si ha:

$$f = a^n_x = \sum_{s,t} A_{st}(x\,st)^n,$$

dove nel sommatorio devono comparire tutte le A corrispondenti alle combinazioni della seconda classe dei numeri $1, 2, \dots n+1$.

Osservando che:

$$A_{st} = \frac{a^2_{y_1} \dots a_{y_{s-1}} a_{y_{s+1}} \dots a_{y_{t-1}} a_{y_{t+1}} \dots a_{y_{n+1}}}{(st1)^2 \dots (sts-1)(sts+1) \dots (stt-1)(stt+1) \dots (stn+1)}$$

possiamo enunciare il seguente teorema:

Nello sviluppo di una forma ternaria di ordine n *mediante le ennesime potenze delle forme lineari corrispondenti ai lati di un* (n+1)-gono *coniugato completo, il coefficiente di* $(xy_sy_t)^n$ *non è altro che il rapporto fra l'armonizzante della forma data e di quella* ψ_{st} *che si ottiene come prodotto delle forme lineari corrispondenti ai vertici per cui non passa* $(xy_sy_t)=0$ *prendendone una, due volte e l'armonizzante della stessa* ψ_{st} *e della forma ennesima potenza esatta di* (xy_sy_t).

Si noti che nello sviluppo è indifferente in ogni termine l'ordine degli indici s, t purchè costante in tutto il termine, perchè se n è pari ciascuno dei due fattori di un termine non si altera scambiando s con t, se è dispari entrambi cambiano segno, e quindi il valore del termine non cambia.

L. Tenca.

PICCOLE NOTE

I. — Su alcuni determinanti.

I determinanti che qui considereremo brevemente godono di alcune proprietà, che stanno quasi a contrasto con quelle corrispondenti nei determinanti di sostituzioni ortogonali, derivanti appunto dalla definizione di siffatti determinanti.

Supponiamo che fra gli elementi di un determinante

$$a = | a_{i} | \tag{1}$$

di ordine n sussistano le relazioni:

$$a^2_{1i} + a^2_{2i} + \ldots + a^2_{ni} = 0, \qquad a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = 1 \tag{2}$$
$$(i, j = 1, 2 \ldots n);$$

in virtù di esse si ha:

$$a^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1},$$

epperò:

Un determinante (1) *non può avere che uno dei due valori* $\pm\sqrt{(n-1)(-1)^{n-1}}$; *conseguentemente: se* n *è pari,* a *è puramente immaginario; se* n *è dispari,* a *è reale.*

Dalle stesse relazioni (2) segue:

$$a_{ki} \,.\, a = A_{k1} + A_{k2} + \ldots + A_{k,i-1} + A_{k,i+1} + \ldots A_{kn},$$

dove A_{kr} indica l'aggiunto di a_{kr} in a. Dunque:

Ogni elemento a_{ki} *del determinante* (1) *moltiplicato per* a *è uguale alla somma di tutti i minori della* k^{ma} *riga, escluso quello appartenente alla* i^{ma} *colonna.* Inoltre: *La differenza tra due elementi di una stessa riga, moltiplicata per* a *è uguale alla differenza dei rispettivi complementi algebrici presa col segno meno.*

Consideriamo ora un minore di ordine m^0 qualunque; sia

$$M_{rs} = \begin{vmatrix} a_{r_1s_1} & \ldots & a_{r_1s_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_ms_1} & \ldots & a_{r_ms_m} \end{vmatrix};$$

moltiplicando tutte le linee per a si ha:

$$a^m . M_{rs} = \begin{vmatrix} A_{r_1s_2} + A_{r_1s_3} + \ldots + A_{r_1s_n} \ldots A_{r_1s_1} + A_{r_1s_2} + \ldots + A_{r_1s_{m-1}} + A_{r_1s_{m+1}} + \ldots + A_{r_1s_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{r_ms_2} + A_{r_ms_3} + \ldots + A_{r_ms_n} \ldots A_{r_ms_2} + A_{r_ms_2} + \ldots + A_{r_ms_{m-1}} + A_{r_ms_{m+1}} + \ldots + A_{r_ms_n} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} A_{r_1s_{i_1}} & \ldots & A_{r_1s_{i_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r_ms_{i_1}} & \ldots & A_{r_ms_{i_m}} \end{vmatrix},$$

dove $i_1 i_2 \dots i_m$ è una qualunque delle $\binom{m}{n}$ combinazioni semplici degli indici $1, 2, \dots n$ ad m ad m, alle quali si estende il sommatorio.

Si osservi ora che nel determinante delle somme gli ultimi $n - m$ termini di ogni somma sono comuni a tutte le colonne; per conseguenza nel sommatorio dei determinanti sono nulli tutti quelli formati prendendo in ogni colonna un termine di questi $n - m$, oppure due, tre... fino ad $n - m$ se $n - m < m$, oppure fino ad m se $n - m >$ di m.

Nel primo caso i determinanti nulli sono dunque:

$$\binom{n-m}{1} + \binom{n-m}{2} + \dots + \binom{n-m}{n-m} = 2^{n-m} - 1;$$

nel secondo caso sono:

$$\binom{n-m}{1} + \binom{n-m}{2} + \dots + \binom{n-m}{m}.$$

Ciò posto, applicando un noto teorema si ha:

$$a^m \,.\, M_{rs} = a^{m-1} \,.\, \Sigma\, M_{n-r,n-s}$$

dove $M_{n-r,n-s}$ indica il minore di ordine $n - m$ ottenuto trascurando in a la combinazione $r_1 r_2 \dots r_m$ di righe e la combinazione $s_1 s_2 \dots, s_m$ di colonne ed il sommatorio va esteso a tutte le combinazioni $i_1 i_2 \dots i_m$. Dunque:

Un minore qualunque M_{rs} *ottenuto considerando in* a *la combinazione* $r_1 r_2 \dots r_m$ *di righe e la* $s_1 s_2 \dots s_m$ *di colonne moltiplicato per* a *è uguale alla somma dei minori di ordine* $n - m$ *ottenuti trascurando in* a *la combinazione* $r_1 r_2 \dots r_m$ *di righe ed escludendo nella somma le combinazioni uno ad uno, due a due... fino ad* $n - m$ *se* $n < 2m$ *oppure fino ad* m *se* $n > 2m$ *delle colonne complementari delle* $s_1 s_2 \dots s_m$.

Consideriamo ora, per terminare il reciproco Δ di a; abbiamo:

$$\frac{\Delta}{a^{n-1}} = \begin{vmatrix} a_{1i} - a_{11} \dots A_{1i} \dots a_{1i} - a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{ni} - a_{n1} \dots A_{ni} \dots a_{ni} - a_{nn} \end{vmatrix} = A_{1i} \,.\, S_{1i} + A_{2i} S_{2i} + \dots + A_{ni} S_{ni}$$

dove S_{ki} indica la somma di tutti i minori di ordine $n - 1$ di a ottenuti trascurando in a la k^{ma} riga e la i^{ma} colonna e sostituendo volta per volta ad ogni colonna la i^{ma} colonna di a; infine:

$$A_{1i} \,.\, S_{1i} + A_{2i} S_{2i} + \dots + A_{ni} S_{ni} = 1.$$

R. Occhipinti.

II. — **Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva.**

In tutti i trattati di geometria descrittiva si trova risoluto il problema seguente:

Date le due proiezioni ortogonali di una retta r *sopra due piani fra loro perpendicolari, determinare le tracce* T_1 *e* T_2 *della retta sopra i due piani di riferimento, nonchè quelle,* T *e* U, *sopra i due piani bisettori, e finalmente le due proiezioni di un punto qualunque* P *di* r.

Le consuete soluzioni allora presuppongono necessariamente che la retta r non si trovi in un piano perpendicolare alla linea di terra t_{12}, perchè in tale ipotesi cessano di essere applicabili; è dunque necessario allora riprendere la questione *ex novo*, alla qual cosa sono appunto dedicate le linee seguenti:

Osserviamo che se un punto P descrive la retta r, le sue proiezioni P' e P'' descrivono sopra r' e r'' due punteggiate prospettive a quelle di sede r, e quindi fra loro proiettive; anzi, siccome il punto all'infinito di r' corrisponde al punto all'infinito r e quindi a quello di r'', così *quelle due punteggiate sono fra loro simili.* [Nel caso in cui r non si trovi in un piano perpendicolare alle linee di terra, tale relazione risulta notoriamente anche dall'essere le due punteggiate r' e r'' prospettive ad un fascio improprio].

Quando la retta r sta in un piano perpendicolare alla linea di terra, è costume individuarla col mezzo di due suoi punti $A \equiv (A', A'')$ e $B \equiv (B', B'')$ (supposto che A', A'', B', B'' appartengono alla stessa ordinata h); allora la similitudine fra le punteggiate di sedi r' e r'' è individuata dalle coppie A', B' e A'', B''; due punti corrispondenti qualunque P', P'' di r', r'' sono immagini di un punto P di r; in particolare nel punto unito (al finito) di tale corrispondenza coincidono U' e U'', mentre T_1 e T_2 sono i punti che corrispondono al punto ht_{12} considerato in r'' o in r'; finalmente la coppia di punti corrispondenti in r', r'' e simmetrici rispetto a t_{12} rappresenta la traccia T della retta r sul primo piano bisettore.

Per effettuare comodamente queste costruzioni prendiamo ad arbitrio due punti O', O'' appartenenti alla stessa ordinata, e proiettiamo da essi le due punteggiate di sedi r', r''; otterremo così due fasci proiettivi, i quali, avendo evidentemente la retta $O'O''$ come raggio unito, sono prospettivi. L'asse di prospettiva u è individuato da' punti

$$A^{(o)} \equiv O'A' \, . \, O''A'', \qquad B^{(o)} \equiv O'B' \, . \, O''B''.$$

Preso un punto qualunque $P^{(o)}$ di u, le rette $O'P^{(o)}$ e $O''P^{(o)}$ taglieranno h in due punti P', P'', i quali sono le due proiezioni di un punto della retta r. In particolare, se come punto $P^{(o)}$ si prende il punto uh, P' e P'' coincideranno in un punto $U' \equiv U''$, nel quale combaciano le due proiezioni del punto U in cui r taglia il secondo piano bisettore. — Si consideri invece il punto ht_{12}, e lo si chiami T''_1 o T'_2, secondo che lo si riguardi come appartenente alla r'' od alla r'. La retta $O''T''_1$ tagli u in $T^{(o)}_1$; proiettando questo punto O' sopra h si otterrà $T'_1 \equiv T_1$. similmente le rette $O'T_2$ tagli u in $T^{(o)}_2$; proiettando questo punto di O'' sopra h si otterrà $T''_2 \equiv T_1$. — Per trovare finalmente le proiezioni del punto T, in cui la retta r taglia il primo piano bisettore, ricordiamo che T', T'' sono punti corrispondenti nella similitudine esistente fra r' e r'' e di più simmetrici rispetto alla linea di terra. Ora, se noi costruiamo i punti A_1, B_1 simmetrici di A'', B'' rispetto alla linea di terra, otterremo un'altra similitudine fra i punti della retta r', similitudine che è determinata dalle coppie di punti A', A_1 e B', B_1; se ne cerchi il punto unito (al finito) T'; esso col suo simmetrico T'' rappresenterà T. Per trovare T' si prendano due punti O', O_1 sopra una stessa ordinata si trovino i punti

$$A^{(1)} \equiv O'A' \, . \, O_1A_1, \qquad A^{(1)} \equiv O'B' \, . \, O_1B_1;$$

la retta $A^{(1)}B^{(1)}$ taglierà h in T'.

Così il problema che ci eravamo proposto è risoluto in tutte le sue parti, senza ricorrere a piani ausiliari per la retta data, cosa che, dal punto di vista didattico, va rilevata, essendo desiderabile di avere il mezzo di trattare tutti i problemi concernenti la retta prima di avere apprese le soluzioni di quelli riguardanti i piani.

Gino Loria.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 611 E 629

611. *Dimostrare che le aree delle linee descritte da un fuoco e dal centro d'un'ellisse che sdrucciola sopra una retta fissa, che cioè si muove nel proprio piano toccando una retta fissa in un punto fisso, sono espresse da:* $2a\pi(a-b)$; $\frac{1}{2}\pi(a-b)^2$ *essendo* a *il semiasse e* b *l'altro.*

G. Longobardi.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Chiamiamo: XY la retta fissa, P un suo punto fisso; F, F', C i fuochi e il centro dell'ellisse.

I. Assumiamo PX per asse polare e P per polo, e determiniamo l'equazione della curva descritta da F. Posto $PF=\rho$, $\widehat{XFP}=\omega$, avremo:

$$\omega \pm \tfrac{1}{2}\widehat{FPF'} = 90^\circ. \tag{1}$$

Dal triangolo PFF' per note formule di trigonometria si ha:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\widehat{FPF'} = \frac{(PF+PF')^2-\overline{FF'}^2}{4PF.PF'} = \frac{b^2}{PF.PF'}; \tag{2}$$

quindi per le (1), (2) l'equazione della curva descritta da F sarà:

$$\operatorname{sen}^2\omega = \frac{b^2}{\rho(2a-\rho)}. \tag{3}$$

II. Troviamo l'equazione della curva descritta da C. Sia $PC=\rho$, $\widehat{CPX}=\omega$; tenendo conto che $\widehat{FPX}=\widehat{F'PY}=90^\circ \mp \frac{1}{2}\widehat{FPF'}$ avremo:

$$2\rho \operatorname{sen}\omega = PF \operatorname{sen}\widehat{FPX} + PF' \operatorname{sen}\widehat{F'PY} = 2a\cos\tfrac{1}{2}\widehat{FPF'}, \tag{4}$$

inoltre

$$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2 = 2(\rho^2+\overline{FC}^2) = 2(\rho^2+a^2-b^2)$$

cioè

$$PF.PF' = \tfrac{1}{2}(PF+PF')^2 - \tfrac{1}{2}(\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2) - 2a^2 - (\rho^2+a^2-b^2) = a^2+b^2-\rho^2, \tag{5}$$

quindi per le (4), (2), (5) l'equazione della curva descritta da C è:

$$\rho^2\operatorname{sen}^2\omega = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2-\rho^2}. \tag{6}$$

III. Dalle (3), (6) si ha rispettivamente:

$$\rho^2_{1,2} = 2a^2 - \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2\omega} \pm \frac{2a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \frac{b^2}{a^2}}}{\operatorname{sen}\omega},$$

$$\rho^2_{1,2} = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \frac{(a^2+b^2)\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}}{2\operatorname{sen}\omega};$$

le (3), (6) sono simmetriche rispetto alla perpendicolare in P alla XY ed ammettono nel primo quadrante punti reali rispettivamente per $\omega \geqslant \varphi$; $\omega \geqslant \varphi'$ dove

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{a}, \tag{7}$$ $$\operatorname{sen}\varphi' = \frac{2ab}{a^2+b^2}. \tag{8}$$

Siano A e B rispettivamente le aree delle (3), (6). Si avrà:

$$A = \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho^2_1 \, d\omega - \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho^2_2 \, d\omega = 4a^2 \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega - \frac{b^2}{a^2}}}{\operatorname{sen} \omega} d\omega ;$$

analogamente si ha:

$$B = (a^2 + b^2) \int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega - \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}}{\operatorname{sen} \omega} d\omega.$$

Per compiere queste integrazioni calcoliamo l'integrale indefinito

$$\Sigma = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega - (1 - n^2)}}{\operatorname{sen} \omega} d\omega.$$

Si ha:

$$\Sigma = - \int \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \omega}}{1 - \cos^2 \omega} d \cos \omega ;$$

e facendo

$$\cos \omega = n \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

donde

$$x = \sqrt{\frac{n + \cos \omega}{n - \cos \omega}}, \tag{9}$$

$$d \cos \omega = \frac{4nxdx}{(x^2 + 1)^2},$$

avremo:

$$\Sigma = - \int \frac{8n^2x^2dx}{\left\{(x^2+1)^2 - n^2(x^2-1)^2\right\}(x^2+1)} = \int \frac{2(1-n^2)(x^2+1)dx}{(x^2+1)^2 - n^2(x^2-1)^2} - \int \frac{2dx}{x^2+1} =$$

$$= \int \frac{2(1-n^2)(x^2+1)\,dx}{\left\{1 + n + (1-n)x^2\right\}\left\{1 - n + (1+n)x^2\right\}} - 2 \operatorname{arc\,tag} x =$$

$$= \int \frac{(1-n^2)\,dx}{1 + n + (1-n)x^2} + \int \frac{(1-n^2)\,dx}{1 - n + (1+n)x^2} - 2 \operatorname{arc\,tag} x =$$

$$= \sqrt{1 - n^2} \left(\operatorname{arc\,tag} \alpha x + \operatorname{arc\,tag} \frac{x}{\alpha}\right) - 2 \operatorname{arc\,tag} x + \mathrm{cost} \tag{10}$$

dove s'è posto $\alpha = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}}$. La (10) vale per α reale cioè per $|n| < 1$.

Calcoliamo A. Abbiamo $1 - n^2 = \frac{b^2}{a^2}$ cioè

$$n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{11}$$

Facendo nella (9) successivamente $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \varphi$, per le (7), (11) risulta rispettivamente $x = 1$, $x = \infty$ dunque per la (10):

$$A = 4a^2 \left\{\frac{b}{a}\left(\operatorname{arc\,tag} \alpha x + \operatorname{arc\,tag} \frac{x}{\alpha}\right)_{\infty}^{1} - 2\,(\operatorname{arc\,tag} x)_{\infty}^{1}\right\} =$$

$$= 4a^2\left\{\frac{b}{a}\left(\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{b}{a}\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = 4a^2\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2a\pi(a-b).$$

c. d. d.

Calcoliamo B. Si ha:

$$1-n^2=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

cioè

$$n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Facendo nella (9) successivamente $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\omega=\varphi'$, per le (8), (12) risulta rispettivamente $x=1$, $x=\infty$. Dunque per la (10):

$$B=(a^2+b^2)\left\{\frac{2ab}{a^2+b^2}\left(\text{arc tg}\,\alpha x+\text{arc tg}\,\frac{x}{\alpha}\right)_{\infty}^{1}-2\,(\text{arc tag}\,x)_{\infty}^{1}\right\}=$$

$$=(a^2+b^2\left\{\frac{2ab}{a^2+b^2}\left(\text{arc tag}\,\alpha+\text{arc tag}\,\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{2ab}{a^2+b^2}\pi+\frac{\pi}{2}\right\}=$$

$$=(a^2+b^2)\left(-\frac{2ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\,(a-b)^2. \quad \text{c. d. d.}$$

629. *Si consideri un circolo* c *e una sua corda* FF'. *Una conica variabile, ma avente per fuochi* F, F' *incontra il circolo* c *in quattro punti* A, B, A', B'. *Dimostrare che ciascuno dei quadrilateri* FAF'A', FAF'B, FAF'B', FBF'B', FA'F'B', FA'F'B *ha i suoi lati tangenti ad un circolo. Il luogo dei centri di questi circoli è un circolo.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Premetto e dimostro il seguente teorema: *Le congiungenti i fuochi* F, F' *con due punti* A *e* B *d'una conica sono tangenti ad un cerchio che ha per centro il polo* P *della* $\overline{AB}$.

Siano α, β, rispettivamente i punti d'incontro di FA e FB con le perpendicolari condotte da F' a PA, PB. Avremo:

$$F\alpha=F\beta; \tag{1}$$

le rette PA, PB sono le mediatrici dei lati $F'\alpha$, $F'\beta$ del triangolo $\alpha F'\beta$, quindi la mediatrice di $\alpha\beta$ passa per P, e per la (1) passa anche per F cioè P è equidistante dalle rette FA, FB; inoltre esso equidista dalle rette FA, F'A e anche dalle FB, F'B perciò il punto P è equidistante dai lati del quadrilatero FAF'B. c. d. d.

Ciò posto, sia DE il diametro perpendicolare ad FF' e supponiamo che A sia su $\widehat{FD}$, B su $\widehat{FE}$, B' su $\widehat{EF'}$ e A' su $\widehat{F'D}$. Consideriamo un'iperbole di fuochi F, F'.

I. Le rette AE, BD, A'E, B'D sono rispettivamente le tangenti nei punti A, B, A', B' all'iperbole. Per il teorema precedente i punti E, R = (AE, BD), S = (AE, B'D), D, R' = (A'E, B'D), S' = (A'E, BD), sono rispettivamente i centri di cerchi tangenti ai lati dei quadrilateri FAF'A', FAF'B, FAF'B', FBF'B', FA'F'B', FA'F'B.

II. Sia O il punto d'incontro delle parallele condotte ad AB, AB' rispettivamente per R ed S; P = (AB, FR). Si ha: $\widehat{BAE}=\widehat{ORS}=\widehat{B'AE}=\widehat{OSR}$ cioè

$$\overline{OS}-\overline{OR}; \tag{2}$$

$\widehat{ORD}=\widehat{ABD}=\widehat{RED}$, $\widehat{OSD}=\widehat{AB'D}=\widehat{SED}$ dunque OR, OS sono tangenti ai cerchi DER, DES, e per la (1) il punto O si troverà sul loro asse radicale DE. Sia O' il punto d'incontro della tangente in F a c con OR. Siccome R è il centro del cerchio inscritto nel quadrilatero FAF'B, sarà $\widehat{RFA}=\widehat{RFB}$, e quindi

$$\widehat{O'FR}=\widehat{O'FA}+\widehat{AFR}=\widehat{FBA}+\widehat{BFR}=\widehat{FPA}=\widehat{FRO'};$$

cioè $\overline{O'F} = \overline{O'R}$ ossia O′ si trova sull'asse radicale DE dei cerchi c e DER e quindi coincide con O. Si conclude che il luogo dei punti R, S, R′, S′ è il circolo di centro O e raggio OF.

Questo cerchio taglia ortogonalmente in F ed F′ il circolo c. Nel caso che la conica considerata fosse un'ellisse le dimostrazioni sarebbero sostanzialmente eguali alle I, II.

QUISTIONI PROPOSTE

652. Dimostrare che

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{1 + \cos\alpha}\, dx = \sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\alpha}{4} \log \frac{2a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{2a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

653. Dimostrare che

$$\int \sqrt{\frac{a^2 - 1 + t\,(a^2 + 1)}{(1 - t^2)^2 (1 + t)}}\, dt =$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{1 - t}{1 + t}} - \frac{a}{4} \log \frac{2a^2 - 1 + t\,(1 + 2a^2) + 2a\sqrt{a^2 - 1 + t\,(a^2 + 1)}}{2a^2 - 1 + t\,(1 + 2a^2) - 2a\sqrt{a^2 - 1 + t\,(a^2 + 1)}}.$$

654. Dimostrare che

$$\int \frac{x^{\frac{1}{8}} dx}{(a^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x^{\frac{1}{8}}\,(a^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}}{48} \Big\{ 48x^{\frac{3}{4}} + 56a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}} + 70ax^{\frac{1}{4}} + 105a^{\frac{3}{4}} +$$

$$+ 105a^{\frac{7}{8}}x^{\frac{1}{8}} \operatorname{arctg} \frac{(a^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{8}}}.$$

F. Sibirani.

655. Se ABC, A′B′C′ sono due triangoli omologici l'uno inscritto nell'altro, e P è un punto qualunque del loro piano, le coniche ABCA′P, ABCB′P, ABCC′P incontrano i lati B′C′, C′A′, A′B′ in tre punti d'una retta r, e le loro tangenti in A, B, C concorrono in un punto Q.

Se P è nella conica circoscritta ad ABC e inscritta in A′B′C′, la retta r tocca questa conica nel punto P, e Q è nell'asse d'omologia dei due triangoli.

656. Ogni conica circoscritta a un triangolo ha doppio contatto colla conica concentrica che tocca le parallele ai lati condotte per i vertici opposti; ogni conica inscritta al triangolo ha doppio contatto colla conica concentrica che passa per i punti medii dei lati. Nell'un caso e nell'altro il diametro che congiunge i punti di contatto passa per il baricentro e le due coniche coincidono se il centro è lo stesso baricentro.

657. Le tre iperbole circoscritte a un triangolo e tangenti nei vertici di questo alle semidiane corrispondenti hanno per centri i punti medii dei lati opposti e per asintoti le rette di Wallace relative ai punti medii delle coppie di archi che gli stessi lati determinano nel circolo circoscritto.

I piedi delle ceviane dei punti appartenenti a ciascuna delle tre iperbole sono in circoli che passano per il centro della curva.

G. Biasi.

658. Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotti da un punto fisso a tutti i circoli bitangenti a una conica.

659. Da un punto M del piano di un' ellisse di centro O si conducano le tangenti MP, MQ nei punti P, Q. Il luogo dei punti M tali che il quadrilatero MPOQ sia inscrittibile in un circolo è formato dalle diagonali del rettangolo che ha per mediane gli assi. Si trovi anche il centro del circolo circoscritto a MPOQ.

660. Una parabola di grandezza invariabile rota attorno al fuoco; si trovi: 1° il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto fisso; 2° il luogo dei piedi delle normali condotte dallo stesso punto.

661. L'ortocentro di un triangolo inscritto in una iperbole equilatera è simmetrico rispetto al centro della iperbole del quarto punto d'incontro dell'iperbole stessa col circolo circoscritto al triangolo.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Euclide emendato dal P. Gerolamo Saccheri. Traduzione e note del prof. G. Boccardini. Manuali Höepli, 1904.

L'*Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia, auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu*, pubblicato nel 1733 a Milano, poco prima della morte dell'autore, non è da confondersi con i tanti infelici tentativi fatti per dimostrare il postulato delle parallele; l'illustre Beltrami esumò e comunicò alla R. Acc. dei Lincei nel 1899 quest'opera del Saccheri, che qualificò come un precursore di Legendre e Lobatschewsky.

Il procedimento del Saccheri consiste nel supporre che il postulato V d'Euclide non sia vero; partendo da questa ipotesi, egli ricava una serie di proposizioni che avrebbero dovuto portarlo alla scoperta fatta un centinaio d'anni dopo da Lobatchewsky e Bolyai, se il suo ragionamento non fosse stato traviato dalla convinzione che l'unica geometria possibile fosse quella d'Euclide.

Questo libro fu tradotto in inglese nel 1894 e in tedesco nel 1895, e se ne sono occupati distinti matematici come il Mansion, il Veronese, il Segre, ecc.

Crediamo perciò che abbiano fatto molto bene il prof. Boccardini e l'editore Hoepli a pubblicarne questa traduzione italiana, affinchè sia maggiormente conosciuta l'interessante operetta.

CASTELNUOVO. — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva.* Vol. I. (Forme di prima specie - Geometria analitica del piano. - Curve di secondo ordine). Roma, Società editrice Dante Alighieri, 1894.

È noto che, mentre nelle nostre Università esistono in generale due corsi distinti di geometria analitica e di geometria proiettiva, nella Università di Roma questi sono stati da vari anni riuniti in un solo insegnamento " allo scopo, dice " l'A. nella prefazione, di associare in armonica unione, i due metodi cui la Geo- " metria deve le sue vittorie, e rivolgerli insieme ad accrescere la cultura scien- " tifica dei giovani ".

L'illustre prof. Castelnuovo chiamato ad attuare questa innovazione didattica, ha compilato un corso di lezioni, e da quello ha tratto l'opera di cui ora è stato pubblicato il I volume relativo alla forme di 1ª e 2ª specie.

" In essa, dice l'A., il lettore non deve adunque cercare quella unità di mezzi, " quella purezza di linee, che attribuiscono ad un trattato di geometria proiettiva " i caratteri di un'opera d'arte. Ma non troverà nemmeno traccia dello sforzo, a " cui deve adattarsi chi vuole da un unico punto di vista osservare un orizzonte " troppo vasto. Ogni questione vien qui discussa col metodo che più si presta ad " approfondirla, e vari argomenti, esaminati sotto molteplici aspetti, acquistano " un singolare rilievo ".

Queste parole sintetizzano a meraviglia il carattere dell'opera, che è veramente pregevole e degna del nome dell'autore, ben noto ai cultori delle matematiche discipline per le sue importanti e geniali ricerche nel campo della geometria. Trattandosi di un nuovo indirizzo didattico si può affermare che non poteva esser fatta la prova con maggiore acume, competenza e coscienza.

L'opera è divisa nel modo seguente:

INTRODUZIONE, nella quale sono stabilite le nozioni di forme geometriche fondamentali, elementi impropri, dualità, proiettività e gli altri fondamentali della geometria proiettiva.

PARTE I. — *Forme di prima specie.* Questa è divisa in tre capitoli, e cioè:

I. — *Sistemi di coordinate delle forme di prima specie.*

II. — *Proiettività tra due forme di prima specie.*

III. — *Involuzione sopra una forma di prima specie.*

In tutti questi capitoli dopo avere stabiliti i vari sistemi conosciuti di coordinate per le forme di prima specie, è fatto uno studio profondo e accurato in tutti i minimi particolari, della proiettività e dell'involuzione nelle forma medesima, alternando opportunamente le considerazioni puramente geometriche colle analitiche.

PARTE II. — *Geometria analitica del piano.* Questa si compone di una breve introduzione, nella quale si stabilisce la nozione di coordinate cartesiane, e di sei capitoli, e cioè:

I. — *Relazioni di posizione fra punti e rette.*

II. — *Distanze, angoli, aree.*

III. — *Trasformazione delle coordinate - Coordinate omogenee di punte e rette - Coordinate proiettive.*

IV. — *Rappresentazione analitica delle curve piane - Inviluppi di rette.*

V. — *Il cerchio ed altre curve particolari.*
VI. — *Proiettività tra forme di seconda specie.*

PARTE III. — *Curve di second'ordine.* — Questa è pure divisa nei sei capitoli seguenti:

I. — *Polarità definita dalla curva.*
II. — *Costruzioni di coniche - Teoremi di Pascal, Brianchon e Desargues.*
III. — *Proprietà diametrali.*
IV. — *Forme ridotte delle equazioni delle coniche.*
V. — *Proprietà focali delle coniche.*
VI. — *Trasformazione di una conica mediante una collineazione.*

APPENDICE. — I. *Sui problemi geometrici.* — Questa parte è una seconda edizione dell'articolo *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogl'istrumenti elementari*, che fa parte della raccolta di *Questioni riguardanti la geometria elementare*, pubblicati da F. Enriques nel 1900.

II. *Raccolta di alcune formule di geometria analitica piana.* — È questo una specie di formulario contenente i risultati più necessari per la pratica ottenuti nella II e III parte.

Abbiamo riprodotto questo breve sommario per dare una pallida idea delle materie contenute nel volume (che sono in sostanza quelle che si svolgono negli ordinari corsi di geometria analitica e proiettiva) e dell'ordine nel quale esse si seguono.

È superfluo accennare che sempre le considerazioni algebriche e geometriche si succedono e s'intrecciano, sviscerando per così dire, i vari argomenti. Ad ogni capitolo segue una copiosa raccolta di esercizi gradualmente e razionalmente disposti, alcuni con cenni di risoluzioni, nella quale sono svolte importanti teorie accessorie, che sono casi speciali e importanti complementi della parte generale, in guisa che il volume diviene per essi una specie di enciclopedia contenente tutti i concetti fondamentali relativi alla parte elementare della geometria analitica e proiettiva.

Con questi brevi cenni non abbiamo per nulla preteso di far conoscere il libro, ma piuttosto d'invogliare i lettori a leggerlo e meditarlo.

WEBER. — *Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis.* Leipzig, Teubner, 1903.

Questo bel volume di circa 450 pagine è il primo dei tre che costituiscono la *Encyklopädie der Elementar-Mathematik* dei professori WEBER e WELLSTEIN.

Come dichiara l'autore, un tale libro non è nè vuole essere un libro scolastico, ma è per così dire una ricca miniera, dove gl'insegnanti possono scegliere la materia del loro insegnamento, e gli studenti che si dedicano alla matematica possono trovare quanto occorre per ordinare e arricchire le loro cognizioni. E veramente la quantità di materia raccolta con rigore e chiarezza in un volume relativamente piccolo è considerevolissima, come si può giudicare dall'indice che riportiamo sommariamente.

LIBRO I. — *Fondamenti dell'Aritmetica.*

Sezione I. — Numeri naturali.
" II. — Operazioni di calcolo.
" III. — Divisione ed introduzione delle frazioni.
" IV. — Numeri irrazionali.
" V. — Rapporti.

Sezione VI. — **Potenze e logaritmi.**
" VII. — **Equazioni di 1° grado.**
" VIII. — **Equazioni quadratiche e numeri imaginari.**
" IX. — **Permutazioni e combinazioni.**
" X. — **Applicazioni diverse.**

LIBRO II. — ***Algebra.***

Sezione XI. — **Equazioni algebriche.**
" XII. — **Teorema fondamentale dell'algebra.**
" XIII. — **Equazioni indeterminate di 1° grado.**
" XIV. — **Equazioni indeterminate di 2° grado.**
" XV. — **Frazioni continue**
" XVI. — **Risoluzione algebrica delle equazioni cubiche e biquadratiche.**
" XVII. — **Calcolo delle radici dell'equazioni numeriche.**
" XVIII. — **Divisione del cerchio.**
" XIX. — **Esempi d'impossibilità.**

LIBRO III. — ***Analisi.***

Sezione XX. — **Serie**
" XXI. — **Serie a termini positivi e negativi.**
" XXII. — **Serie illimitatamente convergenti per la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche.**
" XXIII. — **Serie binomiale.**
" XXIV. — **Serie logaritmica.**
" XXV. — **Prodotti infiniti.**
" XXVI. — **Trascendenza di e e di π.**

APPENDICE. — **Congruenze di grado superiore - Esistenza di radici primitive dei numeri primi - Determinazione algebrica delle radici dell'unità.**

CORRISPONDENZA

Ill.mo Sig. Direttore,

La prego d'accogliere la seguente mia dichiarazione, in risposta alla lettera del dott. G. Mignosi inserita nell'ultimo fascicolo del *Periodico*.

Ella sa che il manoscritto delle mie *Nuove considerazioni sulle permutazioni* Le pervenne nel giugno 1902, cioè tre mesi prima che comparisse il lavoro del dott. Mignosi; e ricorderà pure che, appena fu pubblicato quest'ultimo scritto, io Le feci rilevare la quasi identità dei due lavori, ed Ella ebbe a rispondermi che, ponendo la data del giugno 1902 al mio, tutto si sarebbe rimediato. Sfortunatamente correggendo le bozze, un anno dopo, dimenticai (contro il mio interesse) di apporre questa data. Aggiungerò infine non aver io mai dichiarata *difficoltosa* la ricerca del numero delle permutazioni che presentano un dato numero d'inversioni; soltanto osservai giustamente che coi metodi da me seguiti tale ricerca *va rapidamente complicandosi*.

Salutandola distintamente La ringrazio.

Dev.mo

Dott. LUIGI CARLINI.

Cuneo, 21 novembre 1903.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 decembre 1903.

INTORNO AD ALCUNI SPECIALI POLIEDRI AUTOCORRELATIVI

1. In una mia pubblicazione, fatta pochi mesi or sono, mi sono occupato di alcune *Ricerche intorno ai poliedri ed alle reti autocorrelative.* (*)

Nella prima parte di quel lavoro, *Poliedri e reti autocorrelative in generale,* dopo avere esteso il significato di poliedro coll'introdurvi il concetto di *facce monolatere* e *bilatere* e quello di *angoloidi monospigoli* e *bispigoli,* e dopo avere ben precisato il concetto di *ordine,* di *correlatività* e *autocorrelatività* nei poliedri. (**) ho stabilito le formule generali che servono di base alla determinazione di tutti i poliedri e delle reti richieste. In questa ricerca sono state distinte le tre seguenti classi di poliedri: I. Autocorrelativi con elementi del 3° ordine; II. id. con elementi del 2°, ma senza elementi del 3°; III. id. con elementi del 1° ma senza elementi del 2°. Per ognuna di queste classi ho dimostrato l'esistenza di infinite serie di poliedri, ho accennato al modo per poterli effettivamente costruire ed ho dimostrato che le relazioni fondamentali oltre esprimere la condizione necessaria, esprimono anche la condizione sufficiente per l'esistenza dei poliedri e delle reti autocorrelative. Nella II parte del lavoro *Poliedri e reti autocorrelative uniformi,* mi occupo della ricerca di quegli speciali autocorrelativi nei quali i vari elementi dei differenti ordini prendono parte in egual numero alla costituzione del corpo. Per questa ricerca, partendo sempre dalle stesse formule fondamentali, opportunamente ridotte pel caso speciale da studiarsi, determino i 44 *poliedri* e le 31 *reti* che sole esistono sotto le condizioni poste. Tanto i poliedri che le reti

(*) *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti.* Anno Accad. 1902-903. Tomo LXII. Parte II, pagg. 147-173 e 729-764.

(**) Per coloro che non conoscessero il mio citato lavoro, credo utile di riportare alcune definizioni, limitandomi però a quelle solamente, che possono facilitare la lettura della presente nota.

Non avendo occasione in questo scritto di dover considerare *reti* e *poliedri* contenenti *facce monolatere* e *bilatere* e *angoloidi monospigoli* e *bispigoli* si può per questi elementi, prendere la parola *ordine* nel suo significato ordinario, cioè di numero dei *lati* o delle *facce* che formano rispettivamente un poligono (piano o sferico) o un angolo solido.

Due poliedri vengono detti *correlativi* quando ad un *angoloide m-spigolo* dell'uno, corrisponde una *faccia m-latera* nell'altra, ed inversamente a ciascuna *faccia n-latera* del primo corrisponde un *angoloide n-spigolo* del secondo. Segue da questa definizione che due poliedri correlativi hanno uno stesso numero di costole.

Un poliedro lo diremo *autocorrelativo* quando ad ognuna delle sue facce corrisponde un angoloide dello stesso ordine, e quando ad una *costola* che separa due *facce* rispettivamente *m-* ed *n-latere* e riunisce i *vertici* di due *angoloidi* rispettivamente *q-* ed *r-spigoli,* corrisponde una *costola* che riunisce i *vertici* di due *angoloidi m-* ed *n-spigoli* e separa due *facce q-* ed *r-latere.*

trovate sono distinte nelle tre seguenti specie: 1ª, ordinari (cioè senza elementi di 1° e 2° ordine); 2ª, con elementi del 2°; 3ª, con elementi del 1°. Dopo aver dato le figure corrispondenti ai corpi e alle reti della 1ª specie e alle corrispondenti varietà, accenno al modo di dedurre da esse, mediante semplicissime operazioni, le figure corrispondenti ai corpi delle ultime due specie. Chiamati *coniugati* due poliedri correlativi quando hanno forma e posizione tali che, essendo iscritti in una medesima sfera, i vertici dell'uno sieno nei centri sferici delle facce dell'altro e conseguentemente le costole corrispondenti vengano ad avere direzione ortogonale fra di loro, descrivo le due sole coppie esistenti di poliedri ordinari autocorrelativi coniugati, e cioè la coppia di due *tetraedri regolari* e quello di due *ottaedri-ottangoloidi*.

Per quest'ultima coppia, della quale ognuno dei poliedri componenti ha la forma del solido rappresentante due mucchi di ghiaia riunite per le basi, stabilisco le formule esprimenti le relazioni analitiche di posizione fra gli elementi dei due solidi coniugati.

2. Richiamate queste poche nozioni e accennato ai risultati ottenuti, verrò allo scopo della presente nota che è quello di ritrovare per la coppia coniugata predetta, le corrispondenti formule con un procedimento alquanto più semplice di quello allora usato, e di dedurre da esse lo sviluppo delle varie parti dell'aggruppamento, dando così il mezzo di poter costruire con facilità una coppia di due *ottaedri-ottangoloidi* in posizione *coniugata*. Inoltre, siccome nella I Parte del mio lavoro citato accennai solamente di passaggio alla classe generale dei poliedri autocorrelativi rappresentati dalla serie indefinita di piramidi di cui il numero dei lati della base varia da tre all'infinito (cono), così trovo ora opportuno di ritornare su questo argomento per occuparmi: 1°, della ricerca della forma generale delle coppie di piramidi che possono mettersi in posizione coniugata; 2°, della determinazione dello *sviluppo* necessario alla effettiva costruzione di una qualunque di queste coppie; 3°, dei modi per poter dedurre da ogni piramide altri solidi autocorrelativi mediante la opportuna aggiunzione di elementi del 4° ordine.

I. — Ottaedri-ottangoloidi autocorrelativi in posizione coniugata.

3. L'*ottaedro-ottangoloide autocorrelativo* è costituito da 4 triangoli isosceli e da 4 trapezi pure isosceli; contiene 4 angoloidi triedri con due diedri eguali, e 4 angoloidi tetraedri con due coppie di diedri eguali. Ha due costole che sono comuni a coppie di angoloidi trispigoli e che separano facce quadrilatere; ad esse corrispondono due costole che separano due facce trilatere e che risultano comuni a due angoloidi quadrispigoli. Infine vi sono otto costole che sono lati comuni ad una faccia triangolare e ad una quadrangolare, e sono spigoli comuni ad un angoloide trispigolo e ad uno quadrispigolo.

Per mettere due di tali autocorrelativi uniformi in posizione coniugata immaginiamo uno di essi inscritto in una sfera di raggio uno, e proiettato su di essa.

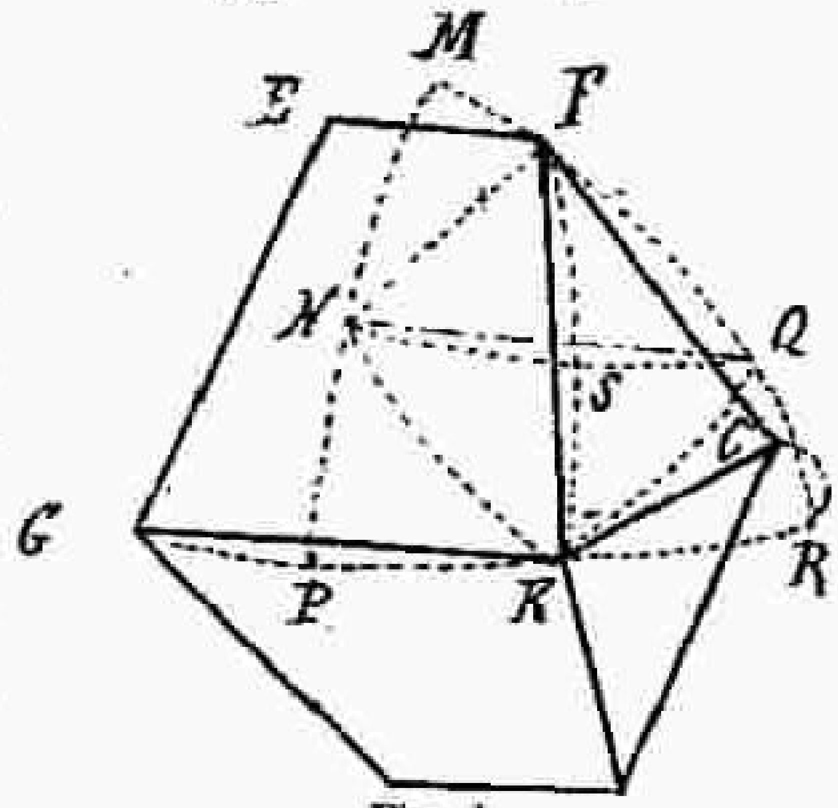


Fig. 1.

Se GEFK e KCF (fig. 1) sono due facce sferiche adiacenti, rispettivamente di 3 e 4 lati, di tale poliedro, l'altro corpo dovrà avere il vertice N di un angoloide quadrispigolo, nel centro sferico della faccia quadrangolare GEFK, e il vertice Q, di un angoloide trispigolo, nel centro sferico della faccia triangolare KCF e per conseguenza i due archi di circolo massimo $\widehat{NQ}$ e $\widehat{FK}$ si tagliano scambievolmente per metà e ad angolo retto in S. Il quadrato sferico FNKQ risulta perciò inscritto nel triangolo trirettangolo MPR, ed è facile riconoscere che deve essere

$$\widehat{PN} = \widehat{PK} = \widehat{SF} = \widehat{SK} = \widehat{SQ} = SN.$$

Chiamando x la lunghezza comune di questi archi e ponendo inoltre $y = \widehat{MF} = \widehat{QR}$, sarà ancora

$$\widehat{MN} = \widehat{KR} = 90^0 - x; \qquad \widehat{FQ} = \widehat{QK} = \widehat{KN} = \widehat{NF} = 90^0 - 2y.$$

Ora si ricavano facilmente, per mezzo delle note formule di trigonometria sferica applicate ai triangoli sferici rettangoli MNF, MNQ e PNK, rispettivamente le formule seguenti:

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\operatorname{sen} 2y = \operatorname{sen} x \cos y\\ &\cos 2x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\\ &\operatorname{sen} 2y = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\end{aligned}\right\} \equiv (2)\left\{\begin{aligned}&2\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x\\ &\cos 2x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{1-\cos 2x}{4}\\ &\cos 2y = \sqrt{1-\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2}\end{aligned}\right\} \equiv$$

$$(3) \quad \equiv \left\{\begin{aligned}&\cos 2x = \frac{1}{5}\\ &\cos 2y = \frac{4}{5}\end{aligned}\right., \quad \text{da cui} \quad (4)\left\{\begin{aligned}&\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\\ &\cos y = \sqrt{\frac{1+\cos 2y}{2}} = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{10}}{5}.\end{aligned}\right.$$

La (fig. 1) e la prima delle (3) mostrano che pel trapezio GKFE, che è una delle facce quadrangolari dell'ottaedro-ottangoloide autocorrelativo, si ha

$$GK = KF = GE = 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\operatorname{arc} \cos \tfrac{1}{5}).$$

Parimenti dalla 1ª delle (2) si ha, sempre pel solito trapezio,

$$EF = 2 \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}\, GK.$$

Il trapezio predetto è quindi facilmente costruibile quando di essa si conosca un lato, per esempio la base maggiore GK.

Determiniamo ora la faccia triangolare FKC (fig. 1); di essa si conoscono intanto i due lati $FK = FC = GK$; ora io dico che la base KC è eguale alla diagonale GF del trapezio. Infatti, supponendo tracciata questa diagonale, il triangolo sferico isoscele GFK è eguale all'altro triangolo sferico isoscele FKC perchè hanno eguali le coppie di lati eguali ed inoltre l'angolo in K del primo è eguale all'angolo in F del secondo essendo questi due angoli eguali all'angolo del quadrato sferico FNKQ; segue di qui che la corda GF è eguale alla corda KC. Si può anche osservare che l'angolo al vertice del triangolo isoscele che rappresenta la faccia trian-

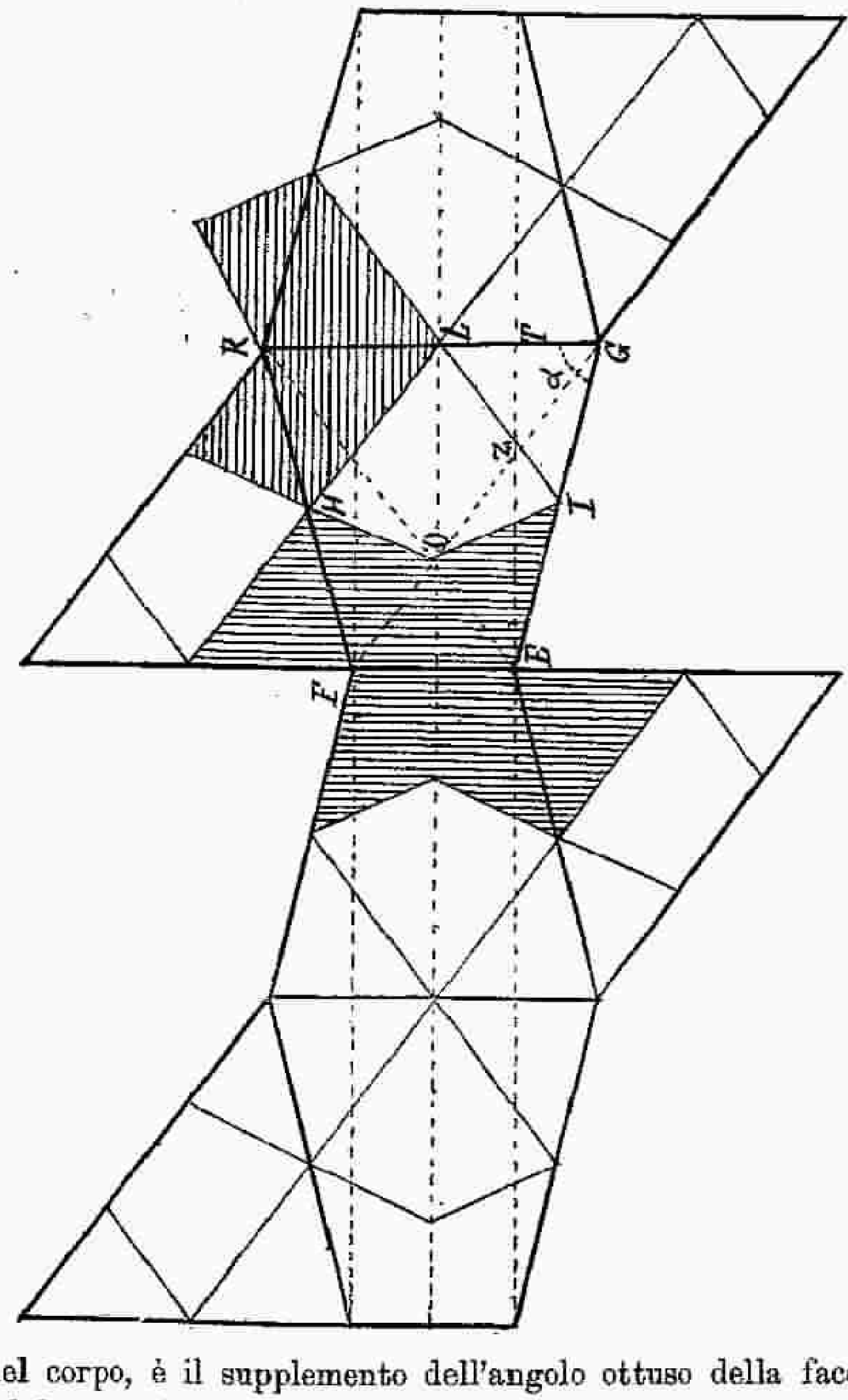


Fig. 2.

golare del corpo, è il supplemento dell'angolo ottuso della faccia rappresentata dal trapezio. Da quanto precede si ricava immediatamente il modo di costruire una delle facce quadrangolari (trapezio), dopo di che è poi facile dedurre tutto lo sviluppo dell'ottaedro-ottangoloide. Tale sviluppo disegnato su cartoncino come apparisce nella fig. 2 (della quale devesi considerare solamente la parte disegnata in linea più marcata) ci darà il mezzo, dopo aver tagliate, intaccate e ripiegate le varie parti di esso in modo conveniente, (*) di poter ottenere, nella sua vera forma, l'ottaedro-ottangoloide autocorrelativo in modo che due di tali solidi possono mettersi in perfetta posizione coniugata.

4. Vediamo ora come possa essere costruito l'aggruppamento di questa coppia coniugata. A tale scopo cominciamo a determinare alcune proprietà del trapezio isoscele che rappresenta la faccia quadrangolare dell'ottaedro ottangoloide autocorrelativo. Sapendo, come abbiamo già mostrato, che i lati non paralleli sono eguali alla base inferiore e che questa è doppia della superiore, si deduce subito (fig. 2) che:

1°. Le diagonali si tagliano in due parti che stanno come 1 : 2.

2°. L'angolo acuto α si ricava dal triangolo EGT per mezzo della relazione, $\cos\alpha = 0{,}25$, da cui $\alpha = 75^{\circ}\,31'\,20'', 957$ e conseguentemente gli angoli ottusi hanno il valore di $104^{\circ}\,28'\,39'', 043$.

3°. Le diagonali sono bisettrici degli angoli ottusi.

4°. Essendo L, I, H i punti di mezzo rispettivamente dei lati GK, GE, FK, ed O il punto d'incontro delle diagonali, dico che il quadrilatero LIOH è quello secondo il quale il trapezio appartenente ad uno degli *ot-*

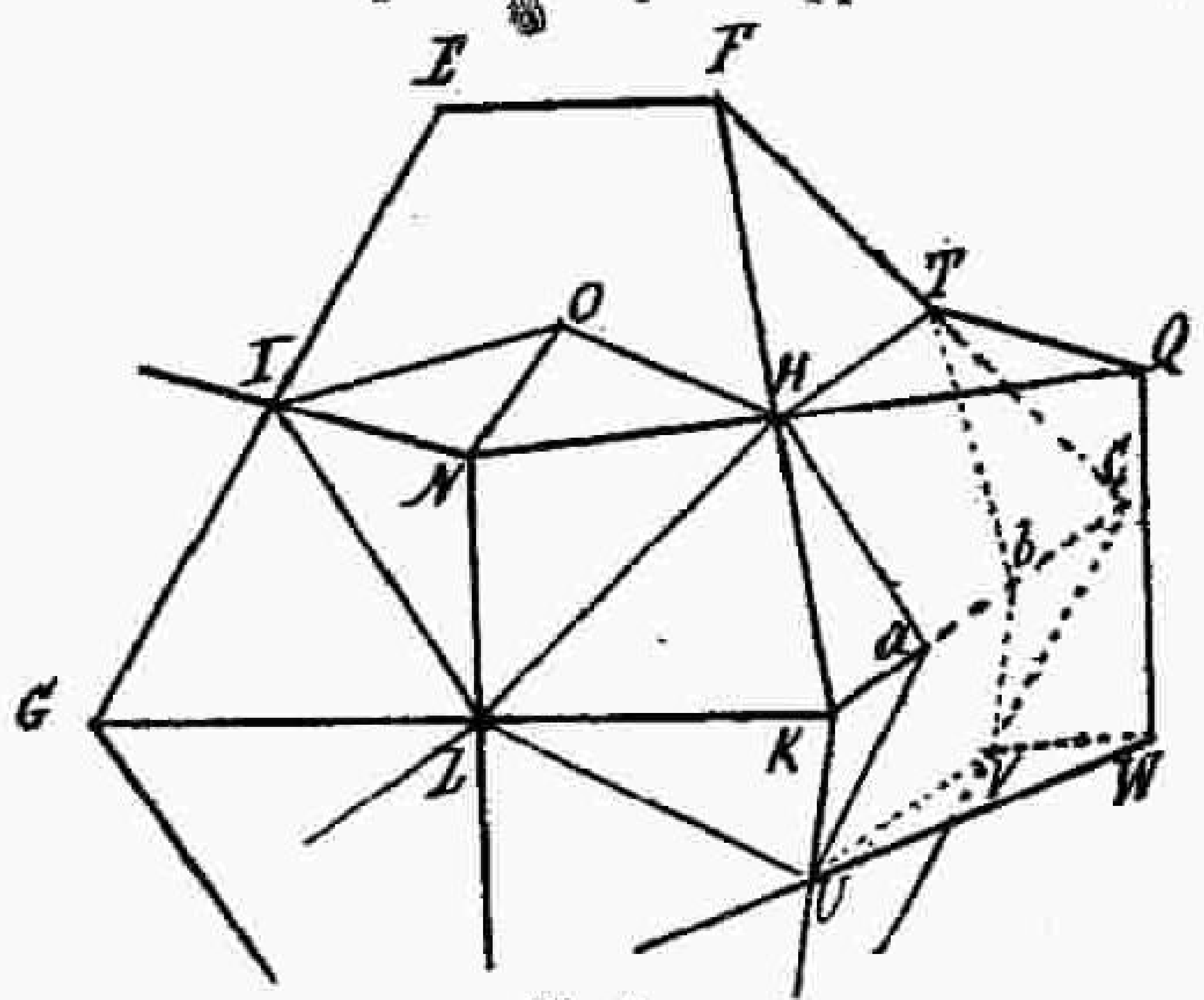


Fig. 3.

taedri-ottangoloidi, taglia l'angoloide quadrispigolo corrispondente del suo coniugato. Riferendoci alla fig. 3 si vede subito che i punti L, I, H di essa corrispondono effettivamente, nella fig. 2, ai punti omonimi. Rimane da dimostrare che il punto O della fig. 3 è quello stesso punto O determinato, nel modo già detto, sulla fig. 2. Basta per questo far vedere (fig. 3) che $NL = \frac{2}{3}\partial$, essendo ∂ la distanza dello spigolo EF dal piano dei punti G, K, C. Infatti (fig. 1 e 3), $NL = \text{sen}\,\widehat{NP} = \text{sen}\,x$, e $\partial = \cos y$, ora le relazioni (4) provano appunto che $NL = \frac{2}{3}\,\partial$.

5°. La faccia triangolare FKC (fig. 3) è eguale al triangolo GKF (fig. 2 e 3), ed è facile riconoscere che la linea OHLZ (fig. 2) corrisponde alla

(*) Veggasi, a questo proposito, quanto ebbi occasione di scrivere in una mia nota, *Sullo sviluppo dei Poliedri e su alcune norme pratiche per la costruzione dei loro modelli in cartone.* "Periodico di Matematica„ Tomo XV, maggio-giugno 1900.

linea $bTHa$ della fig. 3, la quale linea rappresenta l'intersezione della faccia triangolare KFI coll'altro solido ottaedro-ottangoloide.

Dopo ciò è facile costruire lo sviluppo richiesto come mostra la fig. 2 nella quale le linee piene rappresentano, come abbiamo già detto, l'intero sviluppo di un ottaedro-ottangoloide; le punteggiate sono linee di costruzione; le linee più sottili circoscrivono, per ogni faccia, la parte secondo la quale succede l'intersezione dei due solidi coniugati. La parte tratteggiata con linee parallele ad FE rappresenta lo sviluppo del solido WQTbVUaH (fig. 3); di questi piccoli solidi se ne costruiscono due che vengono posti a cavalcione dell'intero ottaedro-ottangoloide lungo i due spigoli che separano le due facce triangolari. Infine l'altra parte tratteggiata rappresenta lo sviluppo della piramide quadrangolare ILHON (fig. 3); di esse se ne formano 4 e debbono essere poste sopra ciascun trapezio dello stesso ottaedro-ottangoloide completo.

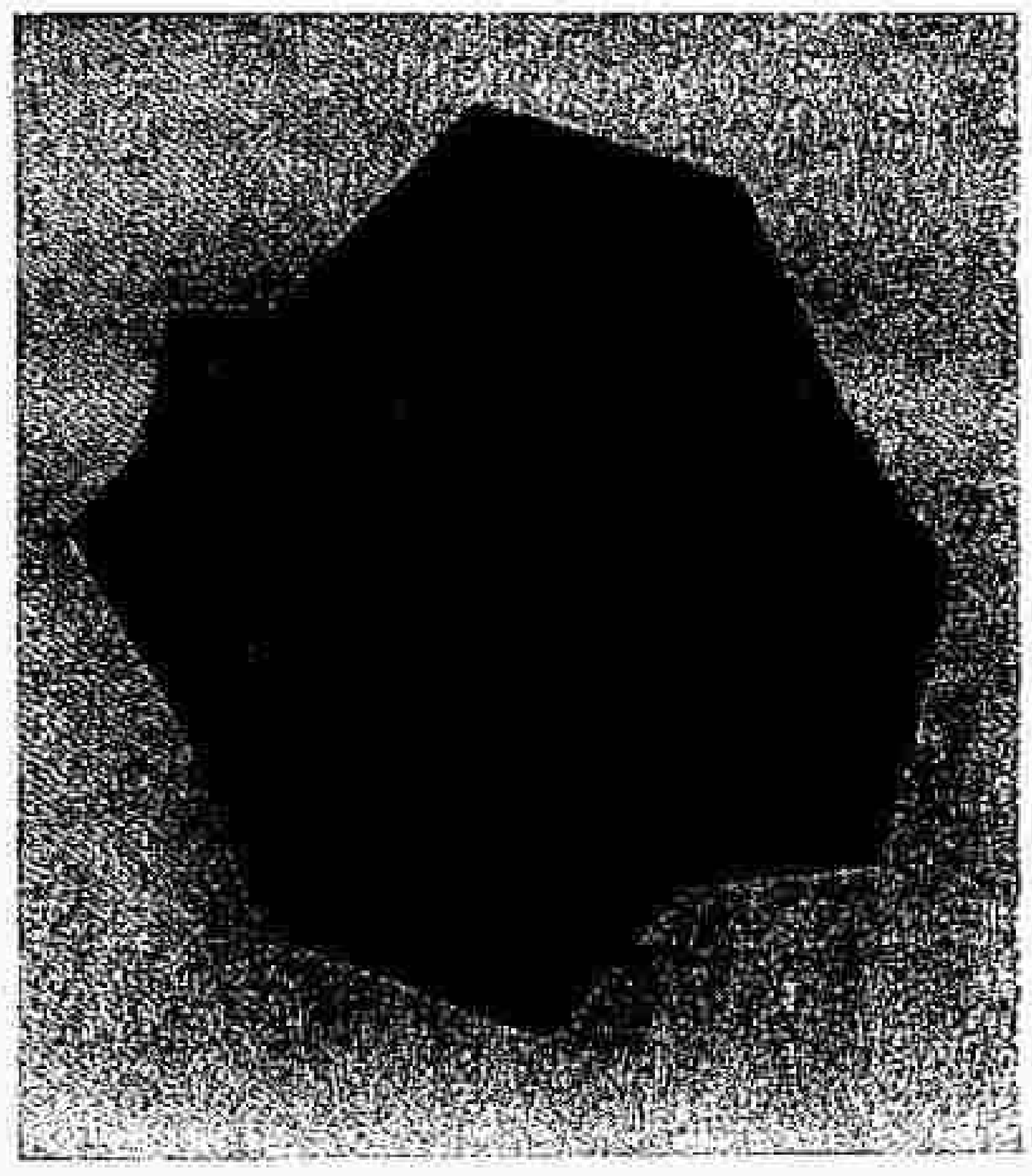


Fig. 4.

La (fig. 4) rappresenta l'immagine fotografica di un modello in cartone di due ottaedri-ottangoloidi in posizione coniugata, costruiti cogli sviluppi precedentemente descritti.

II. — Coppie di piramidi coniugate.

5. 1°. — *Determinazione delle coppie.* — Una piramide, qualunque sia il numero delle sue facce laterali, è un poliedro autocorrelativo. Vogliamo ora determinare la forma speciale di tali corpi in modo che i due che costituiscono una stessa coppia, possano mettersi in posizione coniugata. È facile persuadersi che le due piramidi eguali che formano una delle coppie predette, debbono essere eguali, regolari e inscritte in una medesima sfera di cui il raggio potrà sempre prendersi eguale all'unità. Sia allora (fig. 5) PAB una delle facce laterali di una delle piramidi della coppia, avente per base un poligono di n lati, e indichiamo con $\widehat{PAB}$ il triangolo sferico corrispondente. Siano per la seconda piramide della coppia, P'A'B' e $\widehat{P'A'B'}$ rispettivamente la faccia laterale e il triangolo sferico corrispondente. Per la condizione di autocorrelatività, di posizione coniugata e di eguaglianza delle due piramidi, dovrà essere: PP' un diametro della sfera; B' il centro sferico di $\widehat{PAB}$ e B quello di $\widehat{P'A'B'}$; $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{P'A'} = \widehat{P'B'}$ il valore comune dei quali sarà indicato con $2l$; $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$. Avremo inoltre l'eguaglianza degli angoli sferici $\widehat{APB}$ e $A'\widehat{P'}B'$ il cui valore comune è dato da $\frac{360^0}{n}$. Detto ora M il punto di mezzo di $\widehat{AP}$, dal triangolo sferico PMB', rettangolo in M, si ricava

$$\cos\frac{180^0}{n} = -\operatorname{tg} l \cot 2l = \frac{1-\cot^2 l}{2\cot^2 l}$$

da cui

$$\operatorname{tg} l = \sqrt{1 + 2\cos\frac{180^0}{n}}$$

e quindi

$$\cos l = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 l}} = \frac{1}{2\cos\frac{90^0}{n}}$$

e infine

$$\cos 2l = \frac{1}{2\cos^2\frac{90^0}{n}} - 1.$$

Chiamando ora H l'altezza della piramide avremo:

$$H = 1 - \cos 2l = 2 - \frac{1}{2\cos^2\frac{90^0}{n}} \cdot \quad (5)$$

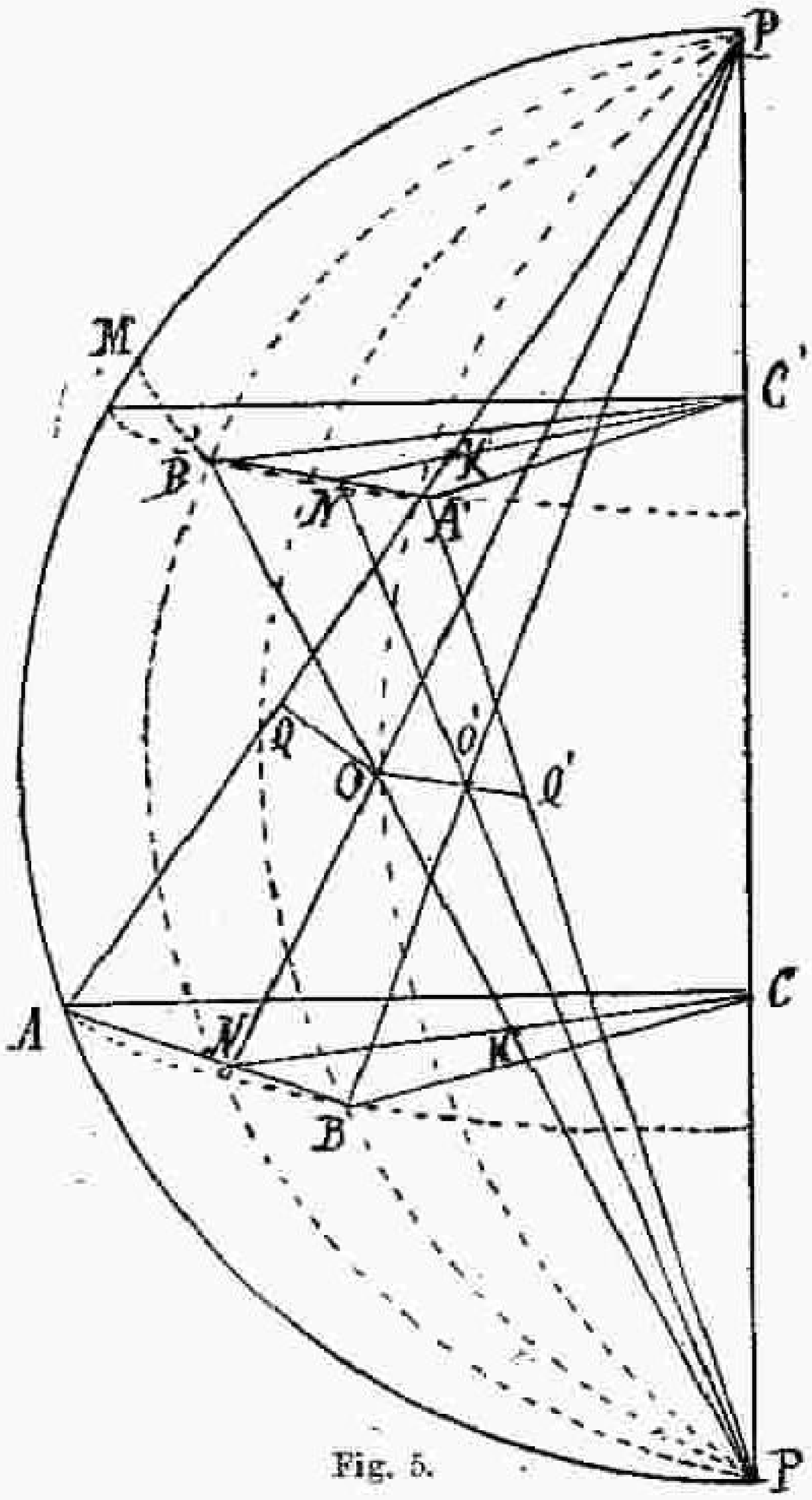


Fig. 5.

La conoscenza di H è sufficiente per la determinazione della piramide che si cerca, ed è facile dedurre graficamente da questa tutti gli elementi della piramide stessa.

Esaminiamo alcuni casi particolari. Per $n = 2$, che corrisponde alla piramide di cui la base è un segmento rettilineo (che può riguardarsi come un bilatero regolare) si ha $H = 1$. Questa coppia coniugata può ottenersi tagliando un quadrato secondo una diagonale e facendo poi ruotare di 90° metà di esso intorno all'altra diagonale.

Per $n = 3$ si trova $H = \frac{4}{3}$, che corrisponde al caso di una coppia di tetraedri regolari.

Per $n = \infty$ (caso in cui la piramide diventa un cono) si ha $H = \frac{3}{2}$

vale a dire perchè due coni, riguardati come piramidi di un numero infinito di facce, possono mettersi in posizione coniugata, è necessario che siano eguali ed equilateri.

6. 2°. — ***Sviluppo e costruzione di una piramide e di una coppia di piramidi in posizione coniugata.***

I risultati precedenti danno il modo di determinare lo sviluppo di una delle due piramidi costituenti una coppia coniugata. Ora proveremo che questo sviluppo si può ottenere immediatamente per mezzo del confronto dell'angolo $\frac{360^0}{n}$ al centro della base, coll'angolo 2ω al vertice della piramide. Chiamando r il raggio CA del circolo minore della sfera circoscritta alla base, s lo spigolo laterale della piramide, avremo

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\frac{180^0}{n}}=\frac{r}{s}=\frac{\sqrt{\mathrm{H}\,(2-\mathrm{H})}}{\sqrt{2\mathrm{H}}}=\sqrt{1-\frac{\mathrm{H}}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{90^0}{n}}$$

quindi

$$\operatorname{sen}\omega=\frac{\operatorname{sen}\frac{180^0}{n}}{2\cos\frac{90^0}{n}}=\operatorname{sen}\frac{90^0}{n}.$$

da cui $\omega=\frac{90^0}{n}$ e $n\,(2\omega)=180^0$. Si può dunque concludere che la somma di tutti gli angoli al vertice della piramide è sempre eguale a due retti. Questo risultato suggerisce la seguente semplicissima regola:

Lo sviluppo della superficie laterale di una delle piramidi di una coppia coniugata, qualunque sia il numero delle sue faccie laterali, è dato dagli n *triangoli che si ottengono riunendo col centro i vertici di un semipoligono regolare di* n *lati inscritto in una semicirconferenza di raggio eguale allo spigolo laterale. Il poligono regolare di* n *lati costruito sul lato di questo semi-poligono ci darà la base della piramide stessa.*

7. Per costruire una coppia di piramidi in posizione coniugata, se ne costruisce intanto una intera per mezzo dello sviluppo precedentemente determinato; a questa si aggiungono poi delle convenienti appendici per rappresentare le parti della seconda piramide che emergono dalla compenetrazione della prima. Per la costruzione di queste parti osserveremo che le superfici laterali delle due piramidi si tagliano secondo una linea gobba, chiusa, regolare a zig-zag, rappresentata da QOO'Q' (fig. 5).

Si possono facilmente determinare i vertici di questa linea e quindi disegnare la linea stessa sullo sviluppo della prima piramide, osservando che O è il punto d'incontro dell'apotema PN della prima piramide, con uno spigolo laterale P'B' della seconda.

Ora dal primo sviluppo si deducono con facilità, graficamente i segmenti PC, CP' = C'P, CN e CB', e quindi si deducono in grandezza e posizione le due linee P'B' e PN che stanno in un piano colla PP'.

Determinato NO = N'O', B'O = AQ = A'Q', restano determinati tutti i vertici della linea poligonale, e dopo ciò è facile determinare sullo sviluppo già disegnato della superficie laterale della prima piramide, quello della zona piramidale terminata dalla linea a zig-zag sopra accennata. Lungo questa linea deve venire a combaciare la parte superiore di uno speciale tronco di piramide che fa parte della seconda piramide della coppia. La base di questo tronco speciale di piramide, aperto superiormente, deve poi contenere un'apertura centrale limitata da un poligono di n lati, concentrico a quello che rappresenta il perimetro della base, e ruotato rispetto a questa, di un angolo eguale a $\frac{180^\circ}{n}$. Per questa apertura deve passare la parte superiore della piramide intera.

È facile vedere che il raggio del circolo circoscritto a questo poligono concentrico è rappresentato da $K'C' = KC$. Questo stesso poligono dovrà essere disegnato anche sulla base della prima piramide, perchè su di essa deve attaccarsi, per la base, la piccola piramide simile alla grande avente per base il poligono predetto e per spigolo laterale la lunghezza del segmento $K'P = KP'$.

8. Come applicazione di quanto precede, consideriamo il caso particolare di una coppia coniugata di piramidi pentagonali; dico che i 12 vertici dei due solidi sono quelli di un *icosaedro regolare*. Infatti il valore 2λ del lato della base pentagonale della piramide è dato, per la proprietà enunciata al n. 6, da

$$2\lambda = 2s \operatorname{sen} 18^\circ = \sqrt{2H} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ma per $n = 5$, la (5) dà

$$H = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

quindi

$$2\lambda = \tfrac{1}{5}\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}$$

che è appunto il valore del lato dell'icosaedro regolare inscritto nella sfera di raggio uno. Segue di qui che l'angoloide al vertice della piramide è quello stesso di uno dei dodecaedri stellati di Keplero (*) detto anche dal Poinsot (**) *dodecaedro stellato di 2ª specie*. Dopo ciò è facile verificare che lo sviluppo delle diverse parti della coppia coniugata di piramidi pentagonali si può ottenere facilmente nel seguente modo: Costruito il pentagono p base della piramide, si disegni in esso il pentagono stellato p' determinato dalle sue diagonali; il piccolo pentagono p'' centrale è quello che deve essere disegnato sulla base della piramide intera, e tagliato su quello della seconda piramide. I triangoli isosceli t che rappresentano le punte del pentagono p' sono le facce laterali della piccola piramide da incollarsi sulla parte centrale della base p della prima piramide: infine, ciò che rimane del triangolo isoscele formato da un lato di p e da due delle sue diagonali, dopo avervi tolto p'' e il triangolo t

(*) *Harmonices Mundi*, proposizione 26 del 2º libro.
(**) *Journal de l'éc. polytec.* Cah. 10, p. 39.

posto al vertice, rappresenta una delle faccie della zona piramidale terminata dalla linea a zig-zag di cui abbiamo parlato al n. 7. La fig. 6 rappresenta la coppia coniugata ora descritta.

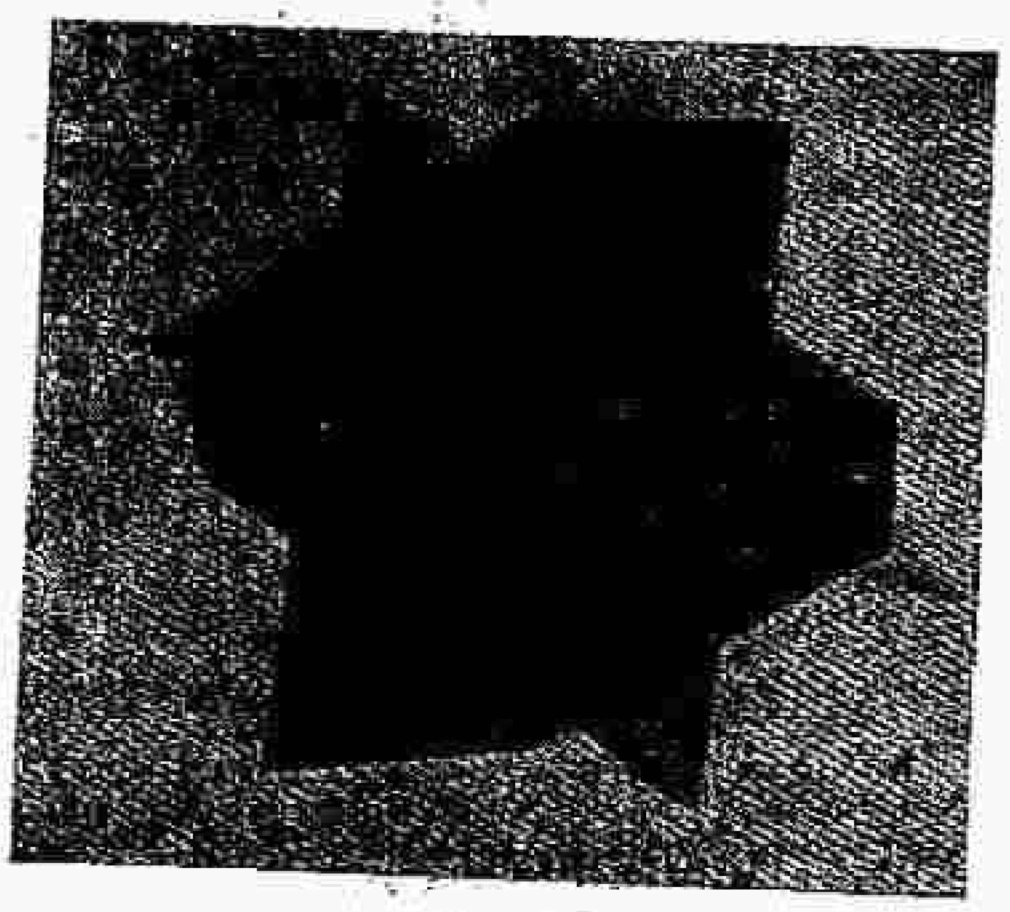


Fig. 6.

9. 3°. — *Autocorrelativi dedotti da altri mediante l'aggiunzione di elementi del 4° ordine.*

Nel mio lavoro citato al principio di questo scritto, ho dimostrato che dato un poliedro autocorrelativo qualunque se ne possono sempre ottenere quanti altri si vogliano aggiungendo convenientemente un numero qualunque di elementi del 4° ordine (angoloidi quadrispigoli e faccie quadrilatere). Per le piramidi si vede subito che si possono aggiungere facilmente quante serie si vogliano di tali elementi del 4° ordine, quando ogni serie abbia un numero n di elementi del 4° ordine eguale al numero dei lati della base. Basta per far ciò considerare quante sezioni si vogliano della piramide, con piani paralleli alla base, perchè ognuno di tali sezioni aggiunge al solido n quadrilateri ed n angoloidi quadrispigoli. I solidi così ottenuti, pur restando sempre autocorrelativi, perdono però la proprietà di far parte di una coppia coniugata; è quindi necessario, per ogni sezione, di modificare la forma del solido se si vuol conservare quest'ultima proprietà.

Servendoci della terminologia geografica è evidente che la rete formata dai paralleli e dai meridiani quando quest'ultimi siano tracciati in un emisfero, per esempio in quello settentrionale, fino al polo, e per l'australe sino all'ultimo parallelo, costituiscono un reticolato autocorrelativo. Un secondo reticolato di meridiani e di paralleli, i cui punti di incontro fossero nei centri dei quadrilateri e dei triangoli sferici della prima rete, coi meridiani che si estendessero per l'emisfero australe fino al polo e pel settentrionale fino all'ultimo parallelo, costituirebbe una rete in posizione coniugata alla precedente. Per queste reti la semplice conoscenza del numero dei meridiani basta per determinare facilmente la loro posizione; invece dalla conoscenza del numero dei paralleli non si può con eguale facilità stabilire la posizione di essi, e conseguentemente neppure la lunghezza dei meridiani in quelli emisferi in cui non si estendono fino al polo corrispondente.

Un altro modo per aggiungere elementi del 4° ordine è quello di troncare con altrettanti piani, gli n angoloidi alla base della piramide in modo che la base stessa venga a trasformarsi in un poligono avente i suoi vertici nei punti di mezzo dei lati di quello che forma la base della piramide.

Firenze, settembre 1903.

Angelo L. Andreini.

BARICENTRO DI UN SISTEMA PIANO DI PUNTI CON MASSE IMMAGINARIE

In questo lavoro, seguendo una notazione già molto diffusa, pongo:
$p =$ punto; $v =$ vettore $= p - p$; $q =$ numero reale;
$q' =$ numero complesso del tipo $\rho e^{i\varphi} = q + qi$; $.\supset. =$ si deduce; $\varepsilon =$ è un;
$c \varepsilon q' . \supset .$ imm $c =$ coefficiente di i nella parte immaginaria di c;
real $c =$ parte reale di c; mod $c =$ modulo di $c = e$ elevato real c log c);
arg $c =$ argomento di $c =$ imm (log c);
cong $c =$ coniugato di $c =$ real $c - i \cdot$imm c.
Se P, Q sono due proposizioni, la scrittura P $. = .$ Q significa che P$.\supset.$Q e che Q$.\supset.$P, cioè le due proposizioni P e Q sono equivalenti.

---

1. Siano $A_1, A_2, \ldots A_n$ dei p ed $m_1, m_2, \ldots m_n$ dei q e sia

$$m = \sum_1^n {}_r m_r .$$

Se $m \neq 0$, si chiama baricentro dei punti A_r colle masse m_r e con $r = 1, 2, \ldots n$, un punto G tale che, essendo O un punto qualunque, sempre si abbia:

$$m\,(G - O) = \sum_1^n {}_r m_r\,(A_r - O)$$

e si scrive:

$$mG = \sum_1^n {}_r m_r A_r .$$

Se $m = 0$, l'espressione $\sum_1^n m_r A_r$ rappresenta un v definito dalla egua-glianza:

$$\sum_1^n {}_r m_r A_r = \sum_1^{n-1} {}_r m_r\,(A_r - A_n).$$

2. Questa definizione, che è fondata sulla nozione di prodotto di un v per un q, e di somma di più v, si può estendere ad un sistema di punti le masse dei quali siano *enti analitici* tali che il prodotto di ciascuno di essi per un vettore sia un vettore unicamente determinato.

Godono di queste proprietà i quaternioni di Hamilton per alcune classi di vettori dello spazio, ed i q' per i vettori di un piano.

Oggetto di questa nota è di definire il baricentro di un sistema di punti tutti contenuti in un piano, ed aventi per masse dei numeri complessi del tipo $\rho e^{i\varphi}$ cioè dei q'.

3. Al prodotto dei vettori di un piano per i q' è stata data questa interpretazione:

se U è un v, Ui rappresenta il vettore U rotato di un angolo retto nel verso positivo delle rotazioni;

se $x, y \varepsilon q$, sarà:

$$U(x+iy)=(x+iy)U=xu+yUi;$$

ne consegue che se c è un q', cU rappresenta il vettore U moltiplicato per mod c e rotato di un angolo uguale all'argomento di c.

In quanto segue intendo che i punti ed i vettori che avrò occasione di considerare appartengano tutti ad uno stesso piano π in cui è definita l'operazione accennata.

4. Siano U, V dei v, U/V sarà un complesso avente per modulo il rapporto del mod U al mod V ed avente per argomento l'angolo di V con U; ossia:

$$U/V=(\text{mod } U/\text{mod } V)\, e^{i \text{ ang}(V,\, U)}.$$

Se U, V, W sono v del piano π, sussistono le relazioni:

$$(U/V)\,V=U\ ; \qquad \frac{U}{V}\cdot\frac{V}{W}=\frac{U}{W}\,; \qquad \frac{U}{V}\cdot W=\frac{V}{W}\cdot U\,.$$

5. Nella proporzione tra vettori espressa dalla relazione:

$$U_1/V_1=U_2/V_2$$

si può permutare, alternare, comporre e scomporre come nella proporzione tra numeri.

Il vettore X quarto proporzionale dopo tre vettori dati U, V, W si costruisce conducendo i vettori dati da un punto O, cioè ponendo:

$$A-O=U\,, \qquad B-O=V\,, \qquad C-O=W\,.$$

Costrutto su OC il triangolo OCD direttamente simile ad OAB, sarà

$$D-O=X\,.$$

I vettori che soddisfano alla condizione di essere ciascuno medio proporzionale tra due vettori U, V sono due, uguali ed opposti. Sia b la bisettrice interna dell'angolo AOB, e b' la bisettrice esterna dello stesso angolo. La circonferenza che passa per A e B ed ha il centro sulla b' incontra la b in due punti C e D. Ciascuno dei vettori C — O e D — O è medio proporzionale tra U e V. (*)

Le dimostrazioni sono ovvie.

6. Siano $A_1, A_2, \ldots A_n$ dei punti del piano π, siano $c_1, c_2, \ldots c_n$ dei q', e sia $\sum_1^n{}_r\, c_r=c$.

(*) Il lettore è pregato di fare la figura in questo e negli altri punti in cui si accenna a costruzioni geometriche.

Se $c \neq 0$, chiamo baricentro del sistema

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots c_n A_n$$

il punto G tale che essendo O un punto qualunque del piano, sempre si abbia:

$$c\,(G - O) = \sum_1^n{}_r\, c_r\,(A_r - O)$$

e scrivo:

$$cG = \sum_1^n{}_r\, c_r A_r\,.$$

Se $c = 0$, l'espressione $\sum_1^n{}_r\, c_r A_r$ rappresenta un vettore definito dalla relazione

$$\sum_1^n{}_r\, c_r A_r = \sum_1^{n-1}{}_r\, c_r\,(A_r - A_n)\,.$$

7. Siano a_r, b_r dei q, posto

$$c_r = a_r + ib_r \qquad \text{con} \qquad r = 1, 2, \dots n$$

sarà:

$$\sum_1^n{}_r\,(a_r + ib_r)\,A_r = \sum_1^n{}_r\, a_r A_r + i \sum_1^n{}_r\, b_r A_r\,.$$

Se

$$\Sigma\, a_r = a \neq 0\ ; \qquad \Sigma\, b_r = b \neq 0$$

posto:

$$aA = \sum_1^n{}_r\, a_r A_r\ , \qquad bB = \sum_1^n b_r A_r$$

$$\sum_1^n{}_r\,(a_r + ib_r)\,A_r = (a + bi)\,G$$

sarà

$$(a + bi)\,G = aA + bi\,B$$

$$a\,(G - A) = b\,(B - G)\,i$$

$$(G - A)\,/\,(B - G) = \frac{b}{a}\,i$$

i vettori $G - A$ e $B - G$ sono perpendicolari ed il rapporto delle loro grandezze è b/a. Il punto G è sulla circonferenza di diametro AB e la bisettrice interna dell'angolo BGA incontra AB nel punto $(aA + bB)/(a + b)$ che divide AB nel rapporto b/a. Se ne deduce una facile costruzione di G.

8. Si ha:

$$(a + bi)\,G = aA + bi\,B\,.=.$$

$$G = \frac{aA + bi\,B}{a + bi} = \frac{a^2 A + b^2 B + ab\,(B - A)\,i}{a^2 + b^2}\,.$$

Posto

$$G' = \frac{aA - bi\,B}{a - bi} = \frac{a^2 A + b^2 B - ab\,(B - A)\,i}{a^2 + b^2}$$

.⊃.

$$G + G' = 2\,\frac{a^2 A + b^2 B}{a^2 + b^2}$$

$$G - G' = 2\,\frac{ab}{a^2 + b^2}\,(B - A)\,i$$

ossia i punti G e G′ sono simmetrici rispetto ad AB; essi sono i punti d'incontro della circonferenza di diametro AB colla circonferenza d'Apollonio relativa ai punti A e B col rapporto b/a.

I punti $(A + iB)/(1 + i)$ ed $(A - iB)/(1 - i)$ sono vertici opposti nel quadrato di diagonale AB.

Coordinate baricentriche complesse.

9. Fissati nel piano π due punti distinti A_1 ed A_2, ogni punto P del piano si può considerare come baricentro dei punti $A_1 A_2$ a cui siano applicate masse convenienti. Siano c_1 e c_2 due q' tali che

$$(c_1 + c_2) P = c_1 A_1 + c_2 A_2$$

sarà

$$c_1 (P - A_1) = c_2 (A_2 - P) . = . (P - A_1)/(A_2 - P) = c_1/c_2 .$$

I due numeri c_1 e c_2 si possono assumere come coordinate del punto P rispetto ad A_1, A_2, e sono coordinate omogenee, inquantochè P dipende unicamente dal loro rapporto.

I complessi conj c_1 conj c_2 sono le coordinate di un punto P′ simmetrico di P rispetto ad A_1A_2.

10. Posto $c_2/c_1 = - c$, sarà

$$(1 - c) P = A_1 - cA_2$$
$$(A_1 - P)/(A_2 - P) = c = (A_1P/A_2P)\, e^{\widehat{A_2PA_1}\, i} .$$

Ne consegue che

$$A_1P/A_2P = \text{mod}\, c$$
$$\text{ang}\,(PA_2 , PA_1) = \widehat{A_2PA_1} = \arg c.$$

Il complesso c è la coordinata del punto P rispetto ad A_1, A_2 e si può chiamare *coordinata rapporto.*

La coordinata rapporto esprime col suo modulo il rapporto delle distanze del punto variabile dai due punti fondamentali, e col suo argomento l'angolo sotto cui dal punto stesso sono veduti i punti fondamentali.

11. Specializzando la natura di c, si hanno punti e linee particolari.

Se $c = - 1$, sarà $P = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$ = punto medio di A_1A_2.

Se imm $c = 0$ il punto P descrive la retta A_1A_2. In questo caso la c è un q, e coincide colla coordinata rapporto dei punti della retta A_1A_2.

Arg $c = 0$ rappresenta i punti della retta A_1A_2 esterni al segmento A_1A_2.

Arg $c = \pi$ rappresenta i punti interni al segmento A_1A_2.

Real $c = 0$ rappresenta la circonferenza di diametro A_1A_2.

Se arg c = costante, il punto P descrive un arco di circonferenza che ha per estremi A_1 ed A_2.

Se mod c = costante, il punto P descrive una delle circonferenze di Apollonio relativa alla coppia A_1A_2.

Mod $c = 1$ è l'equazione dell'asse della coppia A_1A_2 cioè della perpendicolare ad A_1A_2 nel punto $(A_1 + A_2) / 2$.

12. La coordinata rapporto definisce nel piano un sistema di coordinate reali finora poco usato, in cui ciascun punto è determinato dal rapporto delle sue distanze da due punti fissi, e dall'angolo sotto cui i punti fissi sono veduti dal punto mobile. Però dalla coordinata rapporto si deducono facilmente le coordinate cartesiane e polari. Mi limito al caso più semplice. Se si assume A_1 con origine o polo e la retta A_1A_2 come asse delle x o asse polare, posto

$$(A_1 - P) / (A_2 - P) = c$$

ossia

$$P = (A_1 - cA_2) / (1 - c) = A_1 + \frac{c}{c-1}(A_2 - A_1),$$

sarà

$$\text{raggio vettore di } P = \text{mod}\,\frac{c}{c-1}(A_1 - A_2) = A_1A_2 \,\text{mod}\,\frac{c}{c-1}$$

$$\text{ascissa angolare} = \arg\frac{c}{c-1}$$

$$\text{ascissa di } P = \text{real}\,[c\,(A_2 - A_1) / (c-1)] = A_1A_2\,\text{real}\,c / (c-1)$$
$$\text{ordinata di } P = \text{imm}\,[c\,(A_2 - A_1) / (c-1)] = A_1A_2\,\text{imm}\,c / (c-1).$$

Rapporti e birapporti.

13. Siano A, B, C, D punti del piano, pongo:

$$(ABC) = (A - C) / (B - C) = \text{rapporto semplice dei punti } A, B, C,$$
$$(ABCD) = (ABC) / (ABD) = \text{birapporto dei punti } A, B, C, D.$$

Il rapporto semplice ed il birapporto sono q', e si ha:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}\,e^{i\,\widehat{BCA}}$$
$$(ABCD) = \left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right) e^{i\,(\widehat{BCA} - \widehat{BDA})}\,.$$

14. Dalla identità:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$$

dividendo per $C - B$, $.\supset.$

$$(ACB) + (ABC) = 1\,.$$

Si ha pure identicamente:

$$(ABC)\,.\,(BAC) = 1$$

quindi posto:

$$(ABC) = c,\ .\supset.$$

$(BAC) = 1 / c$, $(ACB) = 1 - c$, $(BCA) = 1 - 1 / c = (c-1) / c$
$(CBA) = c / (c-1)$, $(CAB) = 1 / (1-c)$

ed anche:

$$A = (ABC)\,B + (ACB)\,C$$
$$B = (BCA)\,C + (BAC)\,A$$
$$C = (CAB)\,A + (CBA)\,B\,.$$

15. Dalla relazione:

$$(ABC) + (ACB) = 1 \;.\supset.$$
$$\frac{AC}{BC}\, e^{i\,\widehat{BCA}} + \frac{AB}{CB}\, e^{i\,\widehat{CBA}} = 1\,.$$

Uguagliando nei due membri le parti reali e le parti immaginarie, avremo:

$$AC \cos \widehat{BCA} + AB \cos \widehat{CBA} = BC$$
$$AC \operatorname{sen} \widehat{BCA} + AB \operatorname{sen} \widehat{CBA} = 0$$

che sono le formule fondamentali della trigonometria.

16. Dalla identità:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$$

dividendo per un vettore I, $.\supset.$

$$(A - B) / I + (B - C) / I + (C - A) / I = 0$$

ed annullando il reale e l'immaginario, avremo:

$$AB \cos (AB, I) + BC \cos (BC, I) + CA \cos (CA, I) = 0$$
$$AB \operatorname{sen} (AB, I) + BC \operatorname{sen} (BC, I) + CA \operatorname{sen} (CA, I) = 0$$

che sono note formule fondamentali nella trigonometria.

17. Se A, B sono punti distinti, l'equazione:

$$(ABP) = 1$$

non rappresenta, rispetto a P, punti a distanza finita. Si può ritenere come l'equazione della retta all'infinito del piano. Indicheremo che P è all'infinito scrivendo P_∞, ed allora qualunque sia P_∞, sempre sarà:

$$(ABP_\infty) = 1\,.$$

18. L'equazione

$$(PAB)^n = 1$$

dove n è un numero intero, ed A, B sono punti fissi distinti, rappresenta rispetto a P, n punti, che sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nel circolo di centro B e raggio BA.

19. Posto

$$(ABC) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

sarà:

$$(ABC) = (BCA) = (CAB) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$
$$(ACB) = (CBA) = (BAC) = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

ed i punti A, B, C sono i vertici di un triangolo equilatero.

Se

$$\text{imm}\,(ABC) = 0$$

i punti A, B, C sono allineati.

Se

$$\text{reale}\,(ABC) = 0$$

il triangolo ACB è rettangolo in C.

$$(ABC) = -1 \,.=.\, C = (A + B)/2 = \text{punto medio di } AB.$$

Se $(ABC) = (A'B'C')$, i due triangoli ABC, A'B'C' sono direttamente simili.

20. Tra quattro punti ed un vettore I del piano sussiste la relazione

$$(A - B) \,.\, \frac{C - D}{I} + (A - C) \,.\, \frac{D - B}{I} + (A - D) \,.\, \frac{B - C}{I} = 0. \qquad (1)$$

Essa si deduce dalle identità

$$\begin{aligned}(C - D)/I &= (A - D)/I - (A - C)/I \\ (D - B)/I &= (A - B)/I - (A - D)/I \\ (B - C)/I &= (A - C)/I - (A - B)/I\end{aligned}$$

moltiplicando la prima per $A - B$, la seconda per $A - C$, la terza per $A - D$, sommando e riducendo.

Dividendo nella (1) per $(B - D) \,.\, \dfrac{C - B}{I}$, si ricava:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1\,. \qquad (2)$$

La (1) e la (2) sono relazioni fra quattro punti di un piano analoghe a quelle che sussistono fra quattro punti allineati. Esse contengono notevoli relazioni relative al quadrangolo. Se nella (1) si divide per un vettore J e quindi si uguagliano a zero la parte reale e la parte immaginaria dei due membri, si ottiene:

$$\begin{aligned}\Sigma\, AB \,.\, CD \cos(AB, J + CD, I) &= 0 \\ \Sigma\, AB \,.\, CD \,\text{sen}\,(AB, J + CD, I) &= 0\,.\end{aligned}$$

Dalla (2) si deduce:

$$AB \,.\, CD \cos(\widehat{CBA} - \widehat{CDA}) + AC \,.\, DB \cos(\widehat{BCA} - \widehat{BDA}) = AD \,.\, BC$$
$$AB \,.\, CD \,\text{sen}\,(\widehat{CBA} - \widehat{CDA}) + AC \,.\, DB \,\text{sen}\,(\widehat{BCA} - \widehat{BDA}) = 0\,.$$

Da queste formule e dalle altre che si deducono permutando le lettere, si può ricavare tutta la *quadrangolometria*.

Se ABCD è un quadrangolo inscrittibile, ed A, D e B, C sono vertici opposti, sarà:

$$\widehat{CBA} = \widehat{CDA} \;; \qquad \widehat{BCA} = \widehat{BDA}\,,$$

quindi

$$AB \,.\, CD + AC \,.\, DB = AD \,.\, BC$$

che è la relazione di Tolomeo.

21. La condizione affinchè i quattro punti A, B, C, D siano conciclici è espressa da:

$$\text{imm}\,(\mathrm{ABCD}) = 0.$$

Posto $(\mathrm{ABCD}) = c \;.\supset.$

$$\mathrm{D} = \frac{c\mathrm{A} - (\mathrm{ABC})\,\mathrm{B}}{c - (\mathrm{ABC})}.$$

Se c è un numero reale, D descrive la circonferenza circoscritta ad ABC. Se segue che

$$\frac{q\mathrm{A} - (\mathrm{ABC})\,\mathrm{B}}{q - (\mathrm{ABC})}$$

rappresenta la classe dei punti della circonferenza ABC.

Se A, B, C sono allineati, sarà

$$\text{imm}\,(\mathrm{ABC}) = 0, \quad \text{imm}\,(\mathrm{ABCD}) = 0 \qquad \text{quindi} \qquad \text{imm}\,(\mathrm{BCD}) = 0\,,$$

ed il punto **D** è sulla retta ABC.

22. Posto $(\mathrm{ABCD}) = c \;.\supset.$

$$(\mathrm{ACBD}) = 1 - c; \quad (\mathrm{ABDC}) = 1/c; \quad (\mathrm{ACDB}) = 1/(1-c);$$
$$(\mathrm{ADBC}) = (c-1)/c; \quad (\mathrm{ADCB}) = c/(c-1)$$

come nel caso di punti allineati.

23. Posto

$$(\mathrm{ABP}_r) = c \;.=.\; \mathrm{P}_r = (\mathrm{A} - c_r\mathrm{B})/(1 - c_r) \quad \text{imm}\; r = 1, 2, 3, 4,$$

sarà

$$(\mathrm{P_1P_2P_3}) = \frac{(c_3 - c_1)\,(\mathrm{P_1AB})}{(c_3 - c_2)\,(\mathrm{P_2AB})} = \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2}\,(\mathrm{P_1P_2B})$$

$$(\mathrm{P_1P_2P_4}) \qquad\qquad = \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2}\,(\mathrm{P_1P_2B})$$

quindi

$$(\mathrm{P_1P_2P_3P_4}) = \frac{c_1 - c_3}{c_2 - c_3} : \frac{c_1 - c_4}{c_2 - c_4} = (c_1c_2c_3c_4)\,.$$

Se

$$(\mathrm{ABP'}_r) = (\mathrm{ABP}_r) \qquad \text{con} \qquad r = 1, 2, 3, 4,$$

sarà

$$(\mathrm{P'_1\,P'_2\,P'_3\,P'_4}) = (\mathrm{P_1\,P_2\,P_3\,P_4})\,.$$

24. Il complesso (ABCD) si può assumere come coordinata del punto P nel piano ABC rispetto alla terna ABC. Posto

$$(\mathrm{ABCP}) = c$$

sarà

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} / \text{mod}\; c$$
$$\text{ang}\,(\mathrm{BPA}) = \text{ang BCA} - \text{arg}\; c.$$

25. Siano $\mathrm{A_1A_2A_3}$ i vertici di un triangolo, a_1, a_2, a_3 i suoi lati, α_1, α_2, α_3 i suoi angoli contati nel verso positivo delle rotazioni; ogni altro punto P del piano è determinato dalla conoscenza di uno dei sei birapporti $(A_rA_sA_tP)$ dove r, s, t è una delle permutazioni degli indici 1, 2, 3. Posto:

sarà:

$$\left.\begin{aligned}(A_1A_2A_3P) &= c = 1 / c_2 \\ (A_2A_3A_1P) &= 1 - \frac{1}{c} = 1/c_1 \\ (A_3A_1A_2P) &= \frac{1}{1-c} = 1 / c_3\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

quindi:

$$\left.\begin{aligned}(A_2A_3P) &= c_1\,(A_2A_3A_1) \\ (A_3A_1P) &= c_2\,(A_3A_1A_2) \\ (A_1A_2P) &= c_3\,(A_1A_2A_3)\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

26. La coordinata *birapporto complesso* permette di dedurre molto semplicemente tutti gli altri sistemi di coordinate nel piano, ed in particolare quei sistemi di speciale importanza nella *geometria del triangolo.* Posto:

$$c_r = \rho_r e^{i\varphi_r} \qquad \text{con} \qquad r = 1, 2, 3$$

sarà:

$$c_1c_2c_3 = -1$$

quindi:

$$\rho_1\,\rho_2\,\rho_3 = 1\,; \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi.$$

Siano $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ le coordinate angolari di P rispetto al triangolo $A_1A_2A_3$ (coordinate di Poulain) sarà:

$$\lambda_r = \alpha_r + \varphi_r \qquad \text{con} \qquad r = 1, 2, 3.$$

Siano d_1, d_2, d_3 le distanze di P dai vertici. Dalla (1') .⊃.

$$\frac{d_2}{d_3} = \frac{a_3}{a_2}\rho_1\,; \qquad \frac{d_3}{d_1} = \frac{a_1}{a_3}\rho_2\,; \qquad \frac{d_1}{d_2} = \frac{a_2}{a_1}\rho_3\,,$$

da cui:

$$a_1d_1 : a_2d_2 : a_3d_3 = \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_3}} : \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_1}} : \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

e quindi:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{a_1}\sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_3}} : \frac{1}{a_2}\sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_1}} : \frac{1}{a_3}\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}.$$

Siano $x_1\,x_2\,x_3$ le coordinate baricentriche reali di P, sarà:

$$\begin{aligned}x_1 : x_2 : x_3 &= \text{area } A_2A_3P : \text{area } A_3A_1P : \text{area } A_1A_2P \\ &= d_2d_3 \operatorname{sen}\lambda_1 : d_1d_3 \operatorname{sen}\lambda_2 : d_1d_2 \operatorname{sen}\lambda_3 \\ &= \frac{\operatorname{sen}\lambda_1}{d_1} : \frac{\operatorname{sen}\lambda_2}{d_2} : \frac{\operatorname{sen}\lambda_3}{d_3} \\ &= a_1\sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_2}}\operatorname{sen}(\alpha_1+\varphi_1) : a_2\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_3}}\operatorname{sen}(\alpha_2+\varphi_2) : a_3\sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_3}}\operatorname{sen}(\alpha_3+\varphi_3)\,.\end{aligned}$$

Siano $y_1\, y_2\, y_3$ le coordinate trilineari di P rispetto ad $A_1A_2A_3$, sarà:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{x_1}{a_1} : \frac{x_2}{a_2} : \frac{x_3}{a_3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_2}}\,\mathrm{sen}(\alpha_1+\varphi_1) : \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_3}}\,\mathrm{sen}(\alpha_1+\varphi_2) : \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\,\mathrm{sen}(\alpha_3+\varphi_3)\,.$$

27. Ad ogni punto P_3 di coordinata $(A_1A_2A_3P_3) = c$ si possono associare due altri punti P_1 e P_2 definiti dalle relazioni:

$$(A_2A_3A_1P_1) = c\ ; \quad (A_3A_1A_2P_2) = c$$

ed altri tre punti $Q_1\, Q_2\, Q_3$ definiti dalle relazioni:

$$(A_2A_3A_1Q_1) = (A_3A_1A_2Q_2) = (A_1A_2A_3Q_3) = \mathrm{conj}\ c\,.$$

Lo studio delle relative posizioni della terna $P_1\, P_2\, P_3$ e $Q_1\, Q_2\, Q_3$ fra di loro e rispetto al triangolo $A_1\, A_2\, A_3$ può essere di qualche interesse alla geometria del triangolo, e formerà oggetto di un altro lavoro.

Gruppi armonici - Quadrangolo armonico.

28. Se

$$(ABCD) = -1$$

dirò che i punti A, B, C, D formano un *gruppo armonico* e che ABCD è un *quadrangolo armonico.*

Essendo

$$\mathrm{imm}\,(ABCD) = 0$$

il quadrangolo armonico è *inscrittibile,* ed in esso sono vertici opposti A, B e C, D.

29. Dalla definizione si deduce:

$$(ABC) = -(ABD)\ .=.$$

$$\frac{A-C}{B-C} = \frac{D-A}{B-D}$$

quindi:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}\ .=.\ AC\,.\,BD = AD\,.\,BC$$

$$B\widehat{C}A - B\widehat{D}A = \pi\ .=.\ B\widehat{C}A + A\widehat{D}B = \pi\,.$$

I punti D, C sono da bande opposte rispetto alla retta AB, quindi le coppie AB e CD s'intrecciano o si separano sulla circonferenza ABCD. Le bisettrici interne ed esterne degli angoli ACB, BDC s'incontrano rispettivamente sulla retta AB, e lo stesso avviene per le bisettrici degli angoli CAD, DBC.

Dunque: « Il quadrangolo armonico è inscrittibile e convesso; il prodotto di due lati opposti è uguale al prodotto degli altri due; le bisettrici di due angoli opposti si incontrano sulla diagonale che unisce i vertici degli altri due angoli opposti ».

Per costruire il coniugato armonico di C rispetto alla coppia A, B, si descrive la circonferenza ABC; siano M, N gli estremi del diametro normale ad AB; si unisce M (od N) con C, e si unisce con N (o con M) il punto in cui questa retta incontra AB. Il punto D in cui questa seconda retta incontra la circonferenza è il cercato.

30. Dalla relazione $(ABCD) = -1$ si deduce ancora:

$$\begin{aligned}(ABC) + (ABD) = 0 \;.=.\; & (BAC) + (BAD) = 0 \;.=. \\ .=.\; & 1 - (BCA) + 1 - (BDA) = 0 \\ .=.\; & (BCA) + (BDA) = 2\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\cos C\widehat{A}B}{AC} + \frac{\cos (D\widehat{A}B)}{AD} = \frac{2}{AB}$$

$$\frac{\operatorname{sen} C\widehat{A}B}{AC} = \frac{\operatorname{sen} B\widehat{A}D}{AD}$$

ossia: « In un quadrangolo armonico il reciproco di una diagonale è la semisomma dei reciproci dei due lati che partono da un estremo di essa, moltiplicati questi reciproci rispettivamente per i coseni degli angoli che i lati stessi fanno colla diagonale compresa; due lati adiacenti sono proporzionali ai seni degli angoli che essi fanno colla diagonale compresa ».

La seconda proprietà si può enunciare dicendo che: « due lati adiacenti sono proporzionali alle loro distanze da un punto qualunque della diagonale compresa ».

Ne consegue che « i lati di un quadrangolo armonico sono proporzionali alle loro distanze dal punto d'incontro delle diagonali ». (*)

31. Sia O il punto medio di AB, per cui $A - O = O - B$, componendo e dividendo nella: $(A - C)/(B - C) = (D - A)/(B - D) \;.\supset.$

$$(CAO) = (ADO) \;.=.\; \frac{C - O}{A - O} = \frac{A - O}{D - O}.$$

Il vettore $A - O$ è medio proporzionale tra i vettori $C - O$ e $D - O$. Ne consegue che OA è media proporzionale tra OC ed OD e che AB biseca internamente l'angolo COD.

Dati C, D, ed il punto O medio di AB, si possono costruire A e B cercando i vettori $A - O$, $O - B$ medi proporzionali tra i vettori $C - O$ e $D - O$, colla costruzione già indicata.

(*) La denominazione di *armonico* a questo quadrangolo fu proposto da Neuberg "Sur le quadrilatére armonique„. Mathesis, 1885. Il punto d'incontro delle diagonali si chiama "*punto di Lemoine* del quadrilatero„ perchè analogo al punto di Lemoine del triangolo. Sullo stesso argomento vedi L. Téry. "Note sur le quadrilatére armonique„, *Journal de Math. elem.*, 1887. Queste notizie sono raccolte dalla *Recente Geom. del triang.* di C. Allasia, 1900, pag. 177. Gli autori citati giunsero alla considerazione di questo quadrilatero seguendo considerazioni diverse dalle mie.

32. Se i punti ABCD si proiettano da un punto S della circonferenza circoscritta, il fascio S (A, B, C, D) è armonico. Infatti chiamando a, b, c, d i quattro raggi, sarà:

$$(abcd) = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } bc} : \frac{\text{sen } ad}{\text{sen } bd} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{-AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = -1.$$

Involuzione armonica nel piano.

33. Siano A, B due punti fissi del piano; la relazione fra due punti qualunque P, Q definita dalla condizione

$$(ABPQ) = -1$$

è una corrispondenza univoca e reciproca involutoria tra i punti del piano; la chiamerò una *involuzione armonica*.

Sarà:

$$(ABP) + (ABQ) = 0$$

ossia:

$$Q = \frac{A + (ABP)\,B}{1 + (ABP)}; \qquad P = \frac{A + (ABQ)\,B}{1 + (ABQ)}.$$

Sia O il punto corrispondente a P_∞ per cui $(ABP_\infty) = 1$, sarà:

$$O = \frac{A + B}{2}.$$

Chiamerò O il *punto centrale* o *centro* della involuzione. Esso corrisponde ai punti della retta all'infinito. In questa corrispondenza ad ogni punto a distanza finita diverso da O corrisponde un punto unico a distanza finita; al punto O corrispondono i punti della retta all'infinito, ed ai diversi punti della retta all'infinito corrisponde il punto O.

34. Ai punti $P_1P_2P_3P_4$ corrispondono i punti $Q_1Q_2Q_3Q_4$ tali che:

$$(Q_1Q_2Q_3Q_4) = (P_1P_2P_3P_4).$$

Ad A corrisponde A; a B corrisponde B; i punti A e B sono uniti, e non ve ne sono altri.

Essendo:

$$(AQO) = (PAO)$$

sarà:

$$OP \cdot OQ = OA^2 = \text{costante}$$

e le rette OP, OQ sono simmetriche rispetto ad AB.

Ne consegue che l'involuzione armonica è il prodotto di una inversione rispetto ad O come centro, con costante uguale ad $\overline{OA}^2$, per una simmetria ortogonale rispetto ad AB.

35. In questa involuzione ad ogni retta uscente da O corrisponde la sua simmetrica rispetto ad AB. Sono rette unite la retta AB che chiameremo *asse principale*, e la sua normale per O che chiameremo *asse secondario.*

Sull'asse principale i punti corrispondenti costituiscono una involuzione quadratica iperbolica, e sull'asse secondario una involuzione quadratica elittica. In quest'ultima sono equi-coniugati i punti $(A+Bi)/(1+i)$ ed $(A-Bi)/(1-i)$ vertici opposti nel quadrato di diagonale AB.

36. Ponendo nella relazione

$$(P_1P_2P_3P_4)=(Q_1Q_2Q_3Q_4)$$
$$P_4=0_\infty$$

si ha:

$$(P_1P_2P_3)=(Q_1Q_2Q_3 0)$$

e ponendo in questa

$$Q_3=0_\infty$$

si deduce:

$$(P_1P_2O)=(Q_2Q_1O).$$

Se i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati, e la retta $P_1P_2P_3$ non passa per O, sarà:

$$\text{imm}\,(P_1P_2P_3)=0, \qquad \text{imm}\,(P_1P_2O)\neq 0$$

quindi:

$$\text{imm}\,(Q_1Q_2Q_3O)=0, \qquad \text{imm}\,(Q_1Q_2O)\neq 0$$

ed i punti Q_1, Q_2, Q_3, O sono conciclici.

Dunque: « Ad ogni retta non passante per O corrisponde una circonferenza passante per O », e viceversa: « Ad ogni circonferenza passante per O corrisponde una retta non passante per O ».

37. « Ad ogni circonferenza non passante per O corrisponde una circonferenza non passante per O ». Infatti

$$\text{imm}\,(P_1P_2P_3P_4)=\text{imm}\,(Q_1Q_2Q_3Q_4)$$

quindi se P_1, P_2, P_3, P_4 sono conciclici, sarà

$$\text{imm}\,(P_1P_2P_3P_4)=0, \qquad \text{imm}\,(Q_1Q_2Q_3Q_4)=0$$

ed anche Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 saranno conciclici.

Le circonferenze passanti per A_1A_2 sono circonferenze unite, cioè corrispondenti a se stesse. Non ce ne sono altre.

Queste proprietà confermano note proposizioni della teoria della inversione combinata colla simmetria.

38. Dalla relazione

$$(P_1P_2P_3Q_1)=(Q_1Q_2Q_3P_1)$$

$.\supset.$

$$(Q_1Q_2Q_3)=\frac{P_1-P_3}{P_2-P_3}\cdot\frac{P_2-Q_1}{P_1-Q_1}\cdot\frac{Q_1-P_1}{Q_2-P_1}=\frac{P_3-P_1}{Q_2-P_1}\cdot\frac{Q_1-P_2}{P_3-P_2}=(P_3Q_2P_1)(Q_1P_3P_2).$$

Scambiando Q_1 con P_1, Q_2 con P_2 si ha ancora:

$$(P_1P_2Q_3)=(P_3P_2Q_1)\,(P_1P_3Q_2).$$

Ne consegue che se P_3 è il punto d'incontro di P_1Q_2 con P_2Q_1 il suo corrispondente Q_3 è allineato con Q_1Q_2 ed anche con P_1P_2; quindi, « al punto d'incontro di P_1Q_2 con P_2Q_1 corrisponde il punto d'incontro di P_1P_2 con Q_1Q_2 ».

Alla circonferenza $P_1P_2P_3$ corrisponderà la retta $Q_1Q_2Q_3$ ed alla circonferenza $Q_1Q_2P_3$ corrisponderà la retta $P_1P_2Q_3$; ne consegue che le due circonferenze $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$ corrispondenti a due rette, s'incontrano oltre che in P_3 anche in O.

39. Le proprietà enunciate nel n. 38, si possono riunire nell'enunciato: « In un quadrilatero piano, le tre coppie di vertici opposti si corrispondono in una involuzione armonica; ad ogni lato del quadrilatero corrisponde la circonferenza circoscritta al triangolo determinato dagli altri tre lati; il punto comune a queste quattro circonferenze (che è il fuoco della parabola inscritta nel quadrilatero) è il centro della involuzione ».

Od anche: « Ogni trasversale non angolare incontra i lati di un triangolo in tre punti che sono coniugati dei vertici opposti in una involuzione armonica. Il luogo dei centri delle involuzioni corrispondenti a tutte le trasversali del piano è la circonferenza circoscritta al triangolo ».

40. L'involuzione armonica è determinata da due coppie di punti corrispondenti. Siano P_1, Q_1; P_2, Q_2; sia P_3 il punto d'incontro di P_1Q_2 con P_2Q_1. Le circonferenze per $P_1P_2P_3$ e per $Q_1Q_2P_3$ si incontrano in O che sarà il punto centrale. La bisettrice interna comune agli angoli P_1OQ_1, P_2OQ_2 sarà l'asse principale e la bisettrice esterna sarà l'asse secondario. Sull'asse principale stanno i punti uniti equidistanti da O della media proporzionale tra OP_1 ed OQ_1.

Se i punti $P_1Q_1P_2$ sono allineati, e Q_2 non è sulla retta P_1P_2, il punto O è sulla circonferenza $P_1Q_1Q_2$. Sia M il punto medio dell'arco P_1Q_1, che non contiene Q_2; posto $\widehat{MN} = \widehat{Q_2M}$, conduco P_2N che incontrerà la circonferenza in O. Infatti gli angoli P_1OQ_1, P_2OQ_2 hanno per bisettrice interna comune la retta OM, i triangoli OP_2Q_1, OP_1Q_2 sono simili, $OP_1 \,.\, OQ_1 = OP_2 \,.\, OQ_2$, quindi: $(P_1Q_2O) = (O_2P_1O)$ come deve essere.

41. Se i punti $P_1P_2Q_1Q_2$ sono allineati, la retta r che li contiene è un asse, ossia una retta unita sulla quale i punti corrispondenti costituiscono una involuzione rettilinea ordinaria. Si determini con uno dei noti metodi il punto O della r per cui $OP_1 \,.\, OQ_1 = OP_2 \,.\, OQ_2$. Se O è esterno al segmento P_1Q_1 e quindi anche al segmento P_2Q_2, la bisettrice interna dell'angolo P_1OQ_1 coincide colla stessa r che sarà perciò asse principale; i punti uniti saranno i due punti di questa retta equidistanti da O della media proporzionale tra OP_1 ed OA_1. La bisettrice esterna coincide colla normale per O alla r, ed è l'asse secondario su cui stanno i punti equiconiugati che sono equidistanti da O come i punti uniti.

Se O risulta interno a P_1Q_1 e quindi anche a P_2Q_2, l'involuzione sulla r è ellittica, e la r sarà l'asse secondario, mentre l'asse principale è la normale per O alla r. Le circonferenze di diametro P_1Q_1, P_2Q_2 si tagliano nei punti uniti A e B, e la circonferenza di diametro AB taglia la r nelle coppie di punti equiconiugati.

42. Da quanto precede risulta che « l'involuzione ordinaria su di una retta è contenuta nella involuzione armonica nel piano, ed ogni involuzione ordinaria su di una retta definisce e determina una involuzione armonica in ogni piano passante per la retta ».

Seguendo l'ordine di idee da me indicate si può affermare che: « Nella corrispondenza involutiva quadratica tra i punti di una retta *esistono sempre due elementi uniti,* che o sono sulla retta stessa (involuzione iperbolica), oppure sono fuori della retta (involuzione elittica) ». Od anche « Ad ogni involuzione quadratica definita su di una retta in un piano è associata una involuzione su di un'altra retta del piano normale alla prima; una delle due è sempre elittica e l'altra sempre iperbolica ».

43. La condizione affinchè tre coppie di punti P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 appartengano ad una involuzione armonica è espressa dalla relazione del N. (34):

$$(P_1P_2P_3Q_1) = (Q_1Q_2Q_3P_1)$$

che si può mettere sotto la forma:

$$(P_1P_2Q_3)\,(P_2P_3Q_1)\,(P_3P_1Q_2) = 1$$

oppure

$$(Q_1Q_2P_3)\,(Q_2Q_3P_1)\,(Q_3Q_1P_2) = 1.$$

44. Abbiamo osservato che ad ogni retta r uscente da O corrisponde una retta r' uscente da O e che r, r' sono simmetriche rispetto agli assi. I punti coniugati sulle due rette si corrispondono in una omografia, perchè OP . OQ = costante. Ne segue che le rette PQ inviluppano una iperbole che ha per assintoti le due rette rr' ed ha per fuochi i punti uniti. Variando le coppie rr' si ha un fascio di iperboli confocali:

45. Se il punto unito B è all'infinito, anche O è all'infinito. Sia A l'unico punto unito a distanza finita, sarà:

$$(APQ) = -1$$

quindi:

$$P + Q = 2A.$$

I punti corrispondenti P, Q sono simmetrici rispetto ad A. L'involuzione armonica si riduce ad una simmetria centrale.

Gruppi e quadrangoli equianarmonici.

46. Se

$$(ABCD) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

dirò che i punti A, B, C, D formano un gruppo *equianarmonico* e che il quadrangolo ABCD è *equianarmonico.*

Ne consegue:

$$(ABCD) = (BCAD) = (CABD) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$
$$(ACBD) = (CBAD) = (BACD) = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

ossia: « Il quarto equianarmonico dopo tre punti dati non cambia permutando circolarmente i punti stessi; dipende quindi dalla terna dei punti ABC presa in uno dei suoi due ordini ciclici ».

Invertendo l'ordine ciclico della terna ABC si ottiene un altro punto D' definito da:

$$(ABCD') = e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

Ad ogni triangolo ABC corrispondono due punti che con esso formano un quadrangolo equianarmonico. Questi punti sono stati chiamati *centri isodinamici.* (*)

47. Il quadrangolo equianarmonico non è inscrittibile, ed i vertici non possono essere allineati. Essendo:

$$\mathrm{mod}\,(ABCD) = 1 = \mathrm{mod}\,(ACBD)$$

sarà

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}\,; \quad \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$$

ossia

$$AC \,.\, BD = BC \,.\, AD = AB \,.\, CD$$

quindi: « Nel quadrangolo equianarmonico il prodotto dei lati opposti è costante » od anche « le distanze di un vertice dagli altri tre sono inversamente proporzionali ai lati opposti a questi tre vertici nel triangolo da essi determinato ».

Ne consegue che le bisettrici di due angoli opposti si incontrano sul lato opposto a questi angoli. Per esempio le bisettrici di $B\widehat{A}C$, $B\widehat{D}C$ si incontrano sulla BC.

48. Dalla relazione fondamentale tra i punti A, B, C, D si deduce:

$$(ABD) = (ABC)\, e^{-\frac{\pi i}{3}}$$
$$(BCD) = (BCA)\, e^{-\frac{\pi i}{3}}$$
$$(CAD) = (CAB)\, e^{-\frac{\pi i}{2}}$$

da cui:

$$B\widehat{D}A = B\widehat{C}A - \frac{\pi}{3}$$
$$C\widehat{D}A = C\widehat{A}B - \frac{\pi}{3}$$
$$A\widehat{D}B = A\widehat{B}C - \frac{\pi}{3}\,.$$

(*) H. KIEHL, *Zur Theorie der Transversalen*, Progr. di Bromberg, (1881). AZZARELLI. *Atti R. Acc. dei Lincei*, (1880). BOUTIN. *Sur les centresisodinamiques et sur le centres isogones*, " Journal de Math. elem. „ de DE-LONGCHAMPS, Paris, 101-102 (1880). Ho estratto queste notizie dal *Saggio Terminologico-Bibliografico sulla Recente Geom. del triangolo* di C. ALLASIA, 1902, pag. 22.

Se chiamiamo α, β, γ gli angoli di ABC, le coordinate angolari di D rispetto ad ABC saranno

$$\alpha-\frac{\pi}{3}, \qquad \beta-\frac{\pi}{3}, \qquad \gamma-\frac{\pi}{3}$$

e le coordinate angolari di D' per cui $(ABCD')=e^{-\frac{\pi i}{3}}$, saranno

$$\alpha+\frac{\pi}{3}, \qquad \beta+\frac{\pi}{3}, \qquad \gamma+\frac{\pi}{3}.$$

Ne segue che le coordinate baricentriche (reali) di D e di D' rispetto ad ABC saranno

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\left(\alpha \mp \frac{\pi}{3}\right), \qquad \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\left(\beta \mp \frac{\pi}{3}\right), \qquad \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\left(\gamma \mp \frac{\pi}{3}\right)$$

dove il segno — corrisponde a D, il segno + a D'.

Le coordinate trilineari di D e di D' rispetto ad A, B, C saranno

$$\operatorname{sen}\left(\alpha \mp \frac{\pi}{3}\right), \qquad \operatorname{sen}\left(\beta \mp \frac{\pi}{3}\right), \qquad \operatorname{sen}\left(\gamma \mp \frac{\pi}{3}\right).$$

49. Accennerò ad alcune altre proprietà dei punti D e D' ampiamente svolte nei lavori citati, ma che d'altra parte conseguono immediatamente dalle formule premesse.

« I punti D, D' stanno sulla retta che unisce il circumcentro di coordinate trilineari ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) col punto di Lemoine di coordinate tril. ($\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}\gamma$) e dividono armonicamente questa coppia di punti ».

« Le rette AD, BD, CD incontrano il circumcentro nei tre vertici di un triangolo equilatero, e lo stesso avviene per le rette AD', ecc. »

« Se A' è il coniugato armonico di A rispetto a BC, B' il coniugato di B rispetto a CA, C' il coniugato di C rispetto ad AB, le circonferenze che passano per A, A' col centro su BC, per B, B' col centro su CA per C, C' col centro su AB, sono le tre circonferenze di Apollonio relative al triangolo ABC; essi s'incontrano nei due punti D e D' ».

50. Se A, B, C sono allineati, il punto D per cui $(ABCD)=e^{\frac{\pi i}{3}}$ è il punto da cui i segmenti AB, BC sono veduti sotto l'angolo $\frac{\pi}{3}$.

Se $(ABC)=e^{\frac{\pi i}{3}}$, i punti ABC sono vertici di un triangolo equilatero. In questo caso $(ABD)=1$, il punto D è all'infinito.

Corrispondenza pseudo-omografica tra i punti di un piano.

51. Se tra due punti P, P' variabili di un piano e due punti fissi: A_1A_2 del piano stesso stabilisco la relazione:

$$(A_1A_2PP')=c \qquad (1)$$

dove c è un complesso diverso da 1 e da 0, sarà

$$(A_1A_2P') = (A_1A_2P) / c \tag{1'}$$

$$P' = \frac{cA_1 - (A_1A_2P)\, A_2}{c - (A_1A_2P)} \tag{1''}$$

$$P = \frac{A_1 - c(A_1A_2P')A_2}{1 - c\,(A_1A_2P)\, B}\,. \tag{1'''}$$

Ad ogni punto P corrisponde un punto P', ad ogni P' corrisponde un P; a questa corrispondenza dò il nome di *pseudo-omografia.*

52. Posto

$$P = A_1 \,.\!\supset .\; (A_1A_2P) = 0 \,.\!\supset .\; P' = A_1$$
$$P = A_2 \,.\!\supset .\; P' = A_2$$

i punti A_1 ed A_2 sono punti uniti e non ce ne sono altri, come facilmente si dimostra.

53. Posto

$$P = J_\infty \,.\!\supset .\; (A_1A_2J') = 1/c \,.\!\supset .\; J' = \frac{cA_1 - A_2}{c - 1} \tag{2}$$

$$P' = I'_\infty \,.\!\supset .\; (A_1A_2I\,) = c \,.\!\supset .\; I = \frac{A_1 - cA_2}{1 - c}\,. \tag{2'}$$

I punti I ed J' saranno i punti limiti o punti di fuga. Sono legati ai punti A_1A_2 dalle relazioni

$$(A_1A_2I)\,(A_1A_2J') = 1. \tag{3}$$

Sommando le espressioni di I ed J' si trova:

$$I + J' = A_1 + A_2 \,.=.\; I - A_1 = A_2 - J'$$

quindi « Nella pseudo-omografia i punti limiti sono vertici opposti di un parallelogrammo di cui i punti uniti sono gli altri due vertici ».

54. Se

$$\text{mod}\, c = 1, \qquad \text{mod}\,(A_1A_2I) = \text{mod}\,(A_1A_2J')$$

i punti I, J' sono equidistanti da A_1A_2 ed il parallelogrammo A_1IA_2J' è un rombo. Se

$$\text{imm}\, c = 0, \qquad \text{imm}\,(A_1A_2I) = 0, \qquad \text{imm}\,(A_1A_2J') = 0$$

i punti I, J' sono allineati con A_1A_2.

Se $\text{mod}\, c \neq 1$; $\text{imm}\, c \neq 0$ le rette IJ' ed A_1A_2 non sono ortogonali e non sono coincidenti.

55. Nella seconda ipotesi, $\text{imm}\, c = 0$, c è un numero reale; e se P è sulla retta A_1A_2, anche P' appartiene ad essa; la retta A_1A_2 è unita ed i punti PP' si corrispondono su di essa in una omografia ordinaria in cui A_1A_2 sono i punti uniti, IJ' i punti limiti, c la caratteristica (reale). Non ci sono altre rette unite.

Nella prima ipotesi, $\text{mod}\, c = 1$, è unita la retta IJ'; l'omografia su di essa è ellittica, e non ci sono altre rette unite.

Nella terza ipotesi non ci sono rette unite. Queste proprietà risulteranno in seguito.

56. Siano P'_r con $r=1, 2, 3, 4$ quattro punti corrispondenti a P_r con $r=1, 2, 3, 4$ dalle (1) $\supset$.

$$(P'_1P'_2P'_3P'_4)=(P_1P_2P_3P_4) \tag{4}$$

ossia « il birapporto di quattro punti di un piano è uguale al birapporto dei quattro corrispondenti nell'altro ». (*)

57. Applicando la (4) a due coppie $P_1, P_2; P'_1, P'_2$ ed ai punti limiti, avremo:

$$(P'_1\,P'_2\,J')=1\,/\,(P_1\,P_2\,I)=(P_2\,P_1\,I) \tag{5}$$

ossia:

$$\frac{P'_1-J'}{P'_2-J'}=\frac{P_2-I}{P_1-I} \tag{5'}$$

quindi: « Due segmenti corrispondenti determinano coi punti limiti triangoli inversamente simili ». In altre parole: « Il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limiti è costante, e gli angoli sotto cui dai punti limiti sono veduti due segmenti corrispondenti sono uguali ed opposti ».

In particolare:

$$(P'\,A_1\,J')=(A_1\,P\,I) \tag{6}$$

ossia:

$$IP\,.\,J'P'=IA_1\,.\,J'A_1=JA_2\,.\,J'A_2$$
$$A_1\widehat{J'}P'=P\widehat{I}A_1\,,\qquad A_2\widehat{J'}P'=P\widehat{I}A_2\,.$$

58. Ne consegue che « ad ogni retta uscente da I corrisponde una retta uscente da J', e la punteggiata descritta da P sulla IP è omografica a quella descritta da P' sulla J'P' ».

Alla retta IA_1 corrisponde la retta $J'A_1$ ed alla retta IA_2 corrisponde la retta $J'A_2$. Le due coppie di punteggiate sono prospettive perchè nella prima coppia è unito il punto A_1 e nella seconda è unito il punto A_2. Le due punteggiate IA_1 ed $J'A_1$ sono prospettive rispetto ad A_2 e le due punteggiate IA_2, $J'A_2$ sono prospettive rispetto ad A_1.

Infatti dalla (6) con semplici trasformazioni si deduce:

$$(P'PA_1)=(A_2PI)\ ;\qquad (PP'A_2)=(A_1PI)$$

se P è sulla A_1I, P' è sulla PA_2, quindi PP' passa per A_2

se P è sulla A_2I, P' è sulla PA_1, quindi PP' passa per A_1.

59. I fasci di centro I ed J' costituiti dalle rette corrispondenti sono inversamente uguali. Infatti $A_1\widehat{I}P=P'\widehat{J'}A_1$, cioè l'angolo che il raggio mobile IP fa col raggio fisso IA_1 è uguale ed opposto all'angolo che il raggio corrispondente J'P' fa con $J'A_1$. Sono raggi paralleli le bisettrici

(*) Questa proprietà potrebbe servire di definizione della pseudo-omografia tra due piani sovrapposti, od anche fra due piani distinti sui quali siano definiti i prodotti dei ϱ' per i v. Si potrebbe anche applicare la definizione di Staudt per le punteggiate omografiche a definir la pseudo-omografia, cioè far corrispondenze punto a punto due piani per modo che ai vertici di un quadrilatero armonico di un piano corrispondano i vertici di un quadrilatero armonico dell'altro.

degli angoli interni ed esterni del parallelogramma in I ed J'. Ne segue che la conica determinata dall'incontro dei raggi corrispondenti è una iperbole equilatera che passa per i vertici del parallelogramma fondamentale A_1A_2IJ'; ha per centro il centro del parallelogrammo, ed ha per assintoti le parallele alle bisettrici degli angoli opposti.

Se $\bmod c \neq 1$, $\operatorname{imm} c \neq 0$ le bisettrici degli angoli interni in I, J' non coincidono, e la retta IJ' non è unita. Non vi sono rette unite (vedi n. 55).

Se $\bmod c = 1$, le bisettrici degli angoli interni in I, J' coincidono e la retta IJ' è unita. In questo caso i fasci di centro I, J' sono prospettivi e si incontrano sulla retta A_1A_2.

Se $\operatorname{imm} c = 0$, i punti $IJ'\,A_1A_2$ sono allineati. I fasci I, J' sono ancora prospettivi perchè il raggio IA_1 coincidente con $J'A_1$ è unito; l'asse di prospettività è la normale ad A_1A_2 e ad IJ' nel loro punto medio comune.

Se $\operatorname{imm} c = 0$, $\bmod c = 1$, sarà $c = -1$; la pseudo-omografia si riduce ad una involuzione armonica.

60. Sia C il centro del parallelogramma, C' il suo corrispondente.

Sarà:

$$(A_1A_2C') = (A_1A_2C)\,/\,c = -\frac{1}{c} = -(A_1A_2J')$$

quindi:

$$(A_1A_2C'J') = -1$$

cioè: « Il punto C' corrispondente al punto medio di A_1A_2 è coniugato armonico di J' rispetto ai punti uniti ».

61. Dalle relazioni:

$$(P_1\,P_2\,P_3\,P_4) = (P'_1\,P'_2\,P'_3\,P'_4)$$
$$(P_1\,P_2\,P_3) = (P'_1\,P'_2\,P'_3\,J') \;; \qquad (P_1\,P_2\,P_3\,I) = (P'_1\,P'_2\,P'_3)$$

si deduce che:

$$\operatorname{imm}(P_1\,P_2\,P_3) = 0 \;.=.\; \operatorname{imm}(P'_1\,P'_2\,P'_3\,J') = 0$$
$$\operatorname{imm}(P'_1\,P'_2\,P'_3) = 0 \;.=.\; \operatorname{imm}(P_1\,P_2\,P_3\,I) = 0$$
$$\operatorname{imm}(P_1\,P_2\,P_3\,P_4) = 0 \;.=.\; \operatorname{imm}(P'_1\,P'_2\,P'_3\,P'_4) = 0$$

quindi: « Ai punti di una retta del primo piano non passante per I corrisponde nel secondo una circonferenza passante per J'; ai punti di una circonferenza del primo piano passante per I corrispondono nel secondo i punti di una retta non passante per J' e viceversa ».

62. Siano α_1, α_2 gli angoli che la diagonale IJ' fa coi lati adiacenti nel parallelogramma fondamentale, cioè

$$\alpha_1 = A_1\widehat{I}J'; \qquad \alpha_2 = J'\widehat{I}A_2$$

e siano β_1 e β_2 gli angoli che IP ed J'P' fanno con IJ', ossia:

$$\beta_1 = J'\widehat{I}P\,; \qquad \beta_2 = IJ'\widehat{P}'.$$

Dalla relazione (6) e dalle osservazioni del numero (58) $.\supset.$

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \qquad \text{quindi} \qquad \beta_2 = \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Sia q la simmetrica di IP rispetto all'asse del segmento IJ'; la retta J'P' si ottiene rotando la q intorno ad J' dell'angolo $\alpha_1 - \alpha_2$. Se Q è il punto della IP per cui $IP . IQ = IA_1 . IA_2$, e Q' è il simmetrico di Q rispetto all'asse del segmento IJ', il punto P' si ottiene rotando Q' di $\alpha_1 - \alpha_2$ intorno ad J'.

Ne consegue che: « La corrispondenza pseudo-omografica tra i punti di un piano è il prodotto di una inversione, (con centro I e costante uguale ad $IA_1 \times IA_2$) per una simmetria ortogonale rispetto all'asse IJ', per una rotazione intorno ad J' di un angolo uguale alla differenza dei due angoli che la congiungente i punti limiti fa coi lati adiacenti nel parallelogramma fondamentale ».

63. Se mod $c = 1$, oppure imm $c = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$, e la corrispondenza si riduce al prodotto di una inversione per una simmetria. La costante di inversione è $JA_1 \times J'A_2$; l'asse di simmetria è l'asse del segmento IJ'.

In questi casi esistono infinite circonferenze unite e sono quelle che hanno rispetto ai punti I ed J' potenza uguale ad $IA_1 \times J'A_2$. Esse hanno il centro sull'asse del segmento IJ' quindi corrispondono a se stesse, sia nella inversione rispetto ad I, sia nella simmetria. I punti corrispondenti costituiscono per ciascuna circonferenza due serie proiettive, e l'asse di proiettività è la stessa retta IJ'.

64. Se imm $c = 0$, il fascio delle circonferenze unite è costituito da tutte le circonferenze che passano per i due punti uniti $A_1 A_2$.

Se mod $c = 1$, le circonferenze unite hanno il centro sulla retta $A_1 A_2$ e separano armonicamente questi punti.

Se mod $c \neq 1$, imm $c \neq 0$ non vi sono circonferenze unite, ma si possono costruire infinite quaterne di punti conciclici costituiti da due coppie corrispondenti. Basterà condurre per esempio da A_1 due trasversali isogonali rispetto ad IA_2, $J'A_2$; esse incontrano le rette stesse nei punti corrispondenti P, P'; Q. Q' che sono conciclici. Ad un quinto punto R della circonferenza PP'QQ' corrisponde un punto R' che non è più sulla circonferenza. Se ciò avvenisse le rette PQ', P'Q; QR', RQ'; RP', PR' s'incontrerebbero in una retta unita, ciò che è contro l'ipotesi che esclude l'esistenza di rette unite.

65. Costruzione della pseudo-omografia.

α) Dati A_1, A_2, I e quindi J', I, trovare P'. Il problema e già stato risolto precedentemente. Si può ancora osservare che dalla relazione:

$$\begin{aligned} (A_1\, A_2\, P\, P') &= c = (A_1\, A_2\, I) \;. \supset . \\ (P\, A_2\, A_1\, P') &= (I\, A_2\, A_1) \;. \supset . \\ (A_2\, P\, P') &= (I\, P\, A_1) \end{aligned}$$

ed anche:

$$(J'\, P'\, A_1) = (A_2\, P'\, P) . \tag{7}$$

Si costruisca su A_2P un triangolo direttamente simile ad IPA_1; il terzo vertice omologo ad A_1 è il punto P'.

β) Dati A_1, A_2, P, P' trovare I ed J'. Si costruisca su PA_1 un triangolo simile ad A_2PP' con P ed A_1 omologhi a P e P'; il vertice omologo ad A_2

è il punto I e quindi si deduce J'; oppure su $P'A_1$ si costruisca il triangolo simile ad $A_2P'P$ e si ha J'.

Osservazione. — I punti I, J hanno una posizione relativamente notevole rispetto al quadrangolo $P P' A_1 A_2$. Se il quadrangolo è inscrittibile cadono sulla retta A_1A_2 che sarà unita.

γ) Dati cinque dei sei punti A_1, A_2, P, P', I, J' si trova il sesto deducendolo dalla (7) come nei casi precedenti.

δ) Dati cinque dei sei punti P, P', Q, Q', I, J' si trova il sesto deducendolo dalla relazione

$$(PQI) = (Q'P'I') .$$

I punti uniti si ottengono cercando prima il corrispondente C' del punto C medio di IJ', poi con una costruzione già indicata si determinano i punti A_1A_2 soddisfacenti alle condizioni:

$$(A_1 A_2 J' C') = -1 \qquad A_1 + A_2 = 2 C .$$

ε) Dati P, P', Q, Q', R, R' trovare I, e quindi J'.

Sarà:

$$(PQI) = (PQR) / (P'Q'R') .$$

Determino H per modo che

$$(PQH) = (P'Q'R')$$

quindi:

$$(PQI) = (PQRH) \;.\supset.\; \text{(vedi } \alpha)$$
$$(IRP) = (QRH)$$

e si costruisce I, e quindi J', C, C', A_1, A_2.

η) Dati P, P', Q, Q', R, R', M, trovare M'.

Si ha:

$$(P'Q'R'M') = (PQRM) .$$

Trovo H e K per modo che

$$(PQH) = (PQRM) \quad \text{(vedi } \alpha) \; ; \qquad (P'Q'K) = (PQH) ,$$

e quindi M' per modo che

$$(P'Q'M') = (P'Q'R'K) .$$

66. Se i punti P, Q, R, P', Q', R' sono conciclici, la circonferenza su cui stanno sarà unita; la serie P, Q, R sarà proiettiva alla serie $P'Q'R'$; le rette PQ', $P'Q$, ecc., si incontrano su di una retta r. Sulla r stanno i punti limiti. Per determinarli segno il diametro d normale ad r; sia P_1 il simmetrico di P' rispetto a d, la PP_1 incontra r in I; la retta che unisce P' col simmetrico di P rispetto a d incontra r in J'.

Se la r incontra la circonferenza in due punti $A_1 A_2$, questi saranno i punti uniti. Se la retta non incontra la circonferenza, i punti uniti sono sulla d ed hanno per punto medio il punto in cui la d incontra la r, e sono coniugati armonicamente rispetto alla circonferenza.

67. Se i punti PQR sono allineati in r, P′Q′R′ allineati in r', le due punteggiate PQR, P′Q′R′ sono omografiche; ne determino i punti limiti IJ′, il loro punto medio C, ed il corrispondente C′. Se la retta IJ′ non fa angoli inversamente uguali colle rette r, r' la pseudo-omografia non è *speciale;* i punti uniti si ottengono col metodo già indicato. Se le rette rr' sono simmetriche rispetto alla normale in C alla IJ′, la pseudo-omografia è *speciale;* saremo nel caso del rombo se $\mathrm{IC} > \sqrt{\mathrm{IP}\,.\,\mathrm{J'P'}}$ ed i punti uniti stanno sulla normale alla IJ′ nel punto C ad una distanza da I uguale alla $\sqrt{\mathrm{IP}\,.\,\mathrm{J'P'}}$. Se $\mathrm{IC} < \sqrt{\mathrm{IP}\,.\,\mathrm{J'P'}}$ i punti uniti stanno sulla stessa IJ′ e sono equidistanti da C di $\sqrt{\mathrm{CC'}\,.\,\mathrm{CI}}$.

68. Se i punti P, Q, R, P′, Q′, R′ sono allineati in r, si corrispondono in una omografia ordinaria tra i punti di una retta. Se i punti uniti sono reali siamo nel caso di imm $\mathrm{C} = 0$. Se l'omografia è elittica i punti uniti stanno sulla normale alla r per il punto C medio dei punti limiti, ad una distanza da I uguale a $\sqrt{\mathrm{IP}\,.\,\mathrm{J'P'}}$.

Ne consegue che la corrispondenza omografica tra due punteggiate complanari sovrapposte o no, definisce in ogni caso una pseudo-omografia che ha sempre i punti uniti reali.

Torino, dicembre 1903.

F. CASTELLANO.

SU ALCUNE NOTEVOLI SUCCESSIONI DI NUMERI

ciascuno dei quali è funzione lineare dei due precedenti

Consideriamo la successione di numeri $S_1, S_2, S_3, \ldots$ determinata dai valori iniziali a, b, e dalla relazione ricorrente:

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-2}, \qquad (1)$$

k essendo un intero diverso da zero. (*) Si ha:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a \\
S_2 &= b \\
S_3 &= ka + b \\
S_4 &= ka + (k+1)\,b \\
S_5 &= k\,(k+1)\,a + (2k+1)\,b \\
S_6 &= k\,(2k+1)\,a + (k^2+3k+1)\,b \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(*) Uno studio su tali successioni ricorrenti si trova in LUCAS, *Théorie des nombres*, nel capitolo che si riferisce alle funzioni numeriche di 2° ordine. Un secondo studio trovasi nella nota "*Successioni di numeri interi e positivi ciascuno dei quali è funzione lineare dei due precedenti*" del sig. A. TAGIURI "Periodico di Matematica" Fasc. novembre-dicembre 1900 e nell'altra "*Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi*" dello stesso autore, Fasc. luglio-agosto 1900.

Variando k si hanno ∞^1 successioni di numeri, ed in ciascuna di esse ogni termine è funzione lineare dei due precedenti. Indicando con $S'_1, S'_2, S'_3\ldots$ ciò che diventano le $S_1, S_2, S_3, \ldots$, supponendo $a=0$, $b=1$, si ha:

$$\begin{aligned}
S'_1 &= 0\\
S'_2 &= 1\\
S'_3 &= 1\\
S'_4 &= k+1\\
S'_5 &= 2k+1\\
S'_6 &= k^2+3k+1\\
S'_7 &= 3k^2+4k+1\\
S'_8 &= k^3+6k^2+5k+1\\
S'_9 &= 4k^3+10k^2+6k+1\\
S'_{10} &= k^4+10k^3+15k^2+7k+1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ed in generale, come si potrebbe dimostrare senza difficoltà:

$$S'_n = \sum_{j=0}^{j=E\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-j-2}{j} k^j \tag{2}$$

dove $E\left(\frac{n-2}{2}\right)$ è il massimo intero contenuto in $\frac{n-2}{2}$.

Osservando l'espressione di $S_3, S_4, \ldots$, si vede che le S si possono esprimere mediante le S', e precisamente si ha:

$$S_n = kS'_{n-1}\,a + S'_n b. \tag{3}$$

Se $a=0$, $b=k=1$, la successione delle S è la notissima *serie di Fibonacci*

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 . . . .

Indicando i termini di essa con $u_1, u_2, u_3, \ldots$ si ha pertanto dalla (1):

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

a partire da $n=3$, ed inoltre dalla (2):

$$u_n = \sum_{j=0}^{j=E\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-j-2}{j}.$$

Si ha così una dimostrazione molto semplice, di una nota proprietà della serie di Fibonacci.

Se $k=-1$, la (1) diventa

$$S_n = S_{n-1} - S_{n-2},$$

alla quale devono pure soddisfare le S′, calcolate per $a=0$, $b=1$. La serie delle S′, per $k=-1$, è notevole, ed è la seguente:

$$0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\dots$$

In essa il gruppo di numeri 0, 1, 1, 0, -1, -1, si ripete periodicamente, ed ognuno dei suoi termini, a partire dal terzo, si ottiene togliendo l'antiprecedente dal precedente.

Si ha pertanto, se $k=-1$

$$S'_{3n+1}=0;\qquad S'_{6n+2}=S'_{6n+3}=1;\qquad S'_{6n+5}=S'_{6n+6}=-1 \tag{4}$$

qualunque sia n. E gioverà pure notare che ogni numero avente una delle forme $3n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+5$, $6n+6$ non può essere contemporaneamente di un'altra delle stesse. In seguito indicheremo i valori delle S′, per $k=-1$, con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$ Osserviamo ora che $3n+1$ è dispari, o pari, secondochè n è pari o dispari; sono poi pari per qualunqne valore di n i numeri $6n+2$, $6n+6$, e dispari i numeri $6n+3$, $6n+5$; perciò, supponendo nella (2) $k=-1$, e sostituendo ad n rispettivamente $3n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+5$, $6n+6$, si hanno le identità:

$$\sum_{j=0}^{j=\frac{3n-1}{2}}(-1)^j\binom{3n-j-1}{j}=0 \qquad \text{se } n \text{ è dispari;}$$

$$\sum_{j=0}^{j=\frac{3n-2}{2}}(-1)^j\binom{3n-j-1}{j}=0 \qquad \text{se } n \text{ è pari;}$$

$$\sum_{j=0}^{j=3n}(-1)^j\binom{6n-j}{j}=1;\qquad \sum_{j=0}^{j=3n+2}(-1)^j\binom{6n-j+4}{j}=-1$$

$$\sum_{j=0}^{j=3n}(-1)^j\binom{6n-j+1}{j}=1;\qquad \sum_{j=0}^{j=3n+1}(-1)^j\binom{6n-j+3}{j}=-1$$

qualunque sia n.

E sono queste rimarchevoli proprietà del noto simbolo combinatorio.

***

Dalla (1), alla quale soddisfano le S_1, S_2, S_3, ... se ne deducono altre importanti, le quali esprimono notevoli proprietà delle S, e quando a, b, k, abbiano particolari valori, delle S′ e delle u.

Cambiando in essa n in $n-1$, poi n in $n-2$, si hanno due espressioni l'una di S_{n-1}, l'altra di S_{n-2}; sostituendole ad S_{n-1} ed S_{n-2} nella (1), essa diventa:

$$S_n=S_{n-2}+2aS_{n-3}+k^2S_{n-4};$$

e sostituendo in questa ad S_{n-2}, S_{n-3}, S_{n-4}, le espressioni che si ottengono dalla (1), cambiando n in $n-2$, $n-3$, $n-4$, si ha:

$$S_n = S_{n-3} + 3kS_{n-4} + 3k^2S_{n-5} + k^3S_{n-6}.$$

Si vede subito che in questa i coefficienti di S_{n-3}, S_{n-4}, S_{n-5}, S_{n-6}, sono i termini dello sviluppo di $(1+k)^3$ ordinato rapporto alle potenze crescenti di k. Si ha per induzione:

$$S_n = \sum_{j=0}^{j=h} \binom{h}{j} k^j S_{n-h-j}, \tag{5}$$

la quale serve ad esprimere S_n mediante le S_{n-h}, S_{n-h-1}, ... S_{n-2h} qualunque sia l'intero h, tale che $n > 2h$.

Consideriamo ancora la (1). Sostituendo in essa ad S_{n-1} l'espressione che si ha della stessa cambiando n in $n-1$, risulta:

$$S_n = (k+1)\,S_{n-2} + kS_{n-3};$$

e se in queste si sostituisce ad S_{n-2} l'espressione che risulta dalla (1). cambiando n in $n-2$, si ha:

$$S_n = (2k+1)\,S_{n-3} + k\,(k+1)\,S_{n-4}.$$

Similmente si trova essere:

$$S_n = (k^2+3k+1)\,S_{n-4} + k\,(2k+1)\,S_{n-5},$$

ed in generale, a posteriori

$$S_n = S'_{h+2}\,S_{n-h} + kS'_{h+1}\,S_{n-h-1}; \tag{6}$$

la quale serve ad esprimere S_n mediante S_{n-h}, S_{n-h-1} $(n > h)$, che sono due consecutive delle S.

Consideriamo ora q delle S e siano le S_{p_1}, S_{p_2}, ... S_{p_q}, e supponiamo $p_q < p_{q-1} < \ldots < p_2 < p_1$. Dalla (6), cambiando n in p_1 ed h in $n - p_2$, abbiamo:

$$S_{p_1} = S'_{p_1-p_2+2}\,S_{p_2} + kS'_{p_1-p_2+1}\,S_{p_2-1}. \tag{7}$$

Cambiando in questa p_1 in $p_2 - 1$ e p_2 in p_3, si ha l'espressione di S_{p_2-1}. Sostituendo nella (7) ad S_{p_2-1} l'espressione trovata, si ha:

$$S_{p_1} = S'_{p_1-p_2+2}\,S_{p_2} + kS'_{p_1-p_2+1}\,S'_{p_2-p_3}\,S'_{p_3} + k^2S'_{p_1-p_2+1}\,S_{p_2-p_3}\,S_{p_3-1}.$$

Si sostituisca in questa ad S_{p_3-1} l'espressione ottenuta dalla (7) cambiando p_1 in $p_3 - 1$ e p_2 in p_4, e così via; risulterà infine:

$$\begin{aligned}S_{p_1} = S'_{p_1-p_2+2}\,S_{p_2} &+ kS'_{p_1-p_2+1}\,S'_{p_2-p_3+1}\,S_{p_3} + \\ &+ k^2S'_{p_1-p_2+1}\,S'_{p_2-p_3}\,S'_{p_3-p_4+1}\,S_{p_4} + \ldots \\ \ldots + k^{h-2}S'_{p_1-p_2+1}\,S'_{p_2-p_3}\,S'_{p_3-p_4}&\ldots S'_{p_{h-2}-p_{h-1}}\,S'_{p_{h-1}-p_h+1}\,S_{p_h} + \ldots \\ &\ldots + k^{q-1}S'_{p_1-p_2+1}\,S'_{p_2-p_3}\,S'_{p_3-p_4}\ldots S'_{p_{q-1}-p_q}\,S_{p_q-1},\end{aligned}$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
S_{p_1} = {} & S'_{p_1-p_2+2} S_{p_2} + k S'_{p_1-p_3+1} S'_{p_2-p_3+1} + \\
& + \sum_{i=2}^{i=q-2} (k^i S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4} \dots S'_{p_i-p_{i+1}} S'_{p_{i+1}-p_{i+2}+1} S_{p_{i+2}}) + \\
& + k^{q-1} S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4} \dots S'_{p_{q-1}-p_q} S_{p_q-1}, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

la quale serve ad esprimere S_{p_1} mediante S_{p_2}, $S_{p_3}, \dots S_{p_q}$, S_{p_q-1}, qualunque siano $p_1, p_2, \dots p_q$, purchè $p_q < p_{q-1} < \dots < p_2 < p_1$.

La (8) rappresenta la proprietà caratteristica delle S; essa ci dice che: *una qualunque delle* S *è esprimibile linearmente mediante altre qualunque ad essa precedenti (di indice minore), le due più lontane essendo consecutive.*

Supponendo $a=0$, $b=1$, le S si cambiano nelle S'; e poichè le (6), (7), (8) non dipendono dai valori di a e b, si conclude che:

Le proprietà rappresentate dalle identità (6), (7), (8) *sussistono anche cambiando le* S *nelle* S' *e lasciando inalterati gli indici.*

Se nelle (6), (7), (8) si sa $a=0$, $b=1$, $k=1$, le S e le S' diventano le u, e pertanto:

Le proprietà rappresentate dalle (6), (7), (8) *sussistono pure se in luogo delle* S *e delle* S' *si mettono le* u *e si lasciano inalterati gli indici.*

Si hanno così tre proprietà della serie di Fibonacci (soltanto la 2ª di esse è, per quanto so, già nota).

Se infine si suppone $a=0$, $b=1$, $k=-1$, le S o le S' si cambiano nelle σ, e si hanno tre relazioni, delle quali è notevole la 1ª

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{j=h} (-1)^j \binom{h}{j} \sigma_{n-h-j},$$

che esprime una proprietà del simbolo combinatorio $\binom{h}{j}$.

* * *

Vogliamo ora stabilire alcune relazioni importanti tra le S ed i termini di altre serie notevoli. Per $k=1$ la serie delle S è una serie di Fibonacci incominciante con a e b. Indicando i termini di essa con Q_1, Q_2, $Q_3 \dots$ avremo:

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

e sarà:

$$Q_1 = a; \quad Q_2 = b; \quad Q_3 = a+b, \quad Q_4 = a+2b; \quad Q_5 = 2a+3b; \dots.$$

ed in generale:

$$Q_n = u_{n-1} a + u_n b \qquad (9)$$

la quale può anche dedursi dalla (3), ponendo $k=1$.

Consideriamo ora la successione di numeri $P_1, P_2, P_3, \ldots$ determinata dai valori iniziali $P_1 = a$, $P_2 = b$ e dalla relazione ricorrente

$$kP_n = P_{n-1} + P_{n-2}. \tag{10}$$

Ciascun termine di essa si ottiene adunque dividendo per k la somma dei due precedenti. Evidentemente

$$[P_n]_{k=1} = Q_n$$

cioè per $k=1$ le P si cambiano nelle Q.

Si ha:

$$\begin{aligned} P_1 &= a \\ P_2 &= b \\ P_3 &= \frac{1}{k}(a+b) \\ P_4 &= \frac{1}{k^2}\left\{a+(k+1)b\right\} \\ P_5 &= \frac{1}{k^3}\left\{(k+1)a+(2k+1)b\right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ed in generale, a posteriori:

$$P_n = \frac{1}{k^{n-2}}(S'_{n-1}a + S'_n b), \tag{11}$$

la quale lega le P e le S' e serve ad esprimere le P mediante a e b. Ma assai più notevoli sono le relazioni che legano le P e le Q. Si ha:

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 = P_1 \\ &Q_2 = P_2 \\ &Q_3 = Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 = k P_3 \\ &Q_4 = Q_2 + Q_3 = P_2 + k P_3 = P_2 + P_3 + (k-1) P_3 = k P_4 + (k-1) P_3 \\ &Q_5 = Q_3 + Q_4 = kP_3 + k P_4 + (k-1) P_3 = k^2 P_5 + (k-1) P_3 \\ &Q_6 = Q_4 + Q_5 = kP_4 + k^2 P_5 + 2(k-1)P_3 = k^2 P_6 + k(k-1)P_5 + 2(k-1)P_3 \\ &Q_7 = k^3 P_7 + k(k-1) P_5 + 3(k-1) P_3 \\ &Q_8 = k^3 P_8 + k^2 (k-1) P_7 + 2k(k-1) P_5 + 5(k-1) P_3 \\ &Q_4 = k^4 P_9 + k^2 (k-1) P_7 + 3k(k-1) P_5 + 8(k-1) P_3 \\ &Q_{10} = k^4 P_{10} + k^3 (k-1) P_9 + 2k^2 (k-1) P_7 + 5k(k-1) P_5 + 13(k-1) P_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ed in generale, a posteriori:

$$Q_n = k^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} P_n + (k-1) \sum_{j=3,5,7,\ldots,h(n)} k^{\frac{j-3}{2}} u_{n-j+1} P_j, \tag{13}$$

qualunque sia l'intero n. Con $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ si è indicato il massimo intero contenuto in $\frac{n-1}{2}$ e con $h(n)$ il massimo numero dispari non inferiore ad n.

La (13) serve ad esprimere le Q mediante le P; viceversa si possono esprimere le P mediante le Q. Si ha dalle (12):

$$\left.\begin{aligned}
&P_3 = \frac{1}{k} Q_3 \\
&P_4 = \frac{1}{k} [Q_4 - (k-1) P_3] = \frac{1}{k} Q_4 - \frac{k-1}{k} Q_3 \\
&P_5 = \frac{1}{k^2} [Q_5 - (k-1) P_3] = \frac{1}{k^2} Q_5 - \frac{k-1}{k^2} \frac{1}{k} Q_3 \\
&P_6 = \frac{1}{k^2} [Q_6 - k(k-1) P_5 - 2(k-1) P_3] = \frac{1}{k^3} Q_6 - \frac{k-1}{k^3} \left(\frac{1}{k} Q_5 + \frac{k+1}{k^2} Q_3\right) \\
&\text{e similmente:} \\
&P_7 = \frac{1}{k^3} Q_7 - \frac{k-1}{k^3} \left(\frac{1}{k} Q_5 + \frac{2k+1}{k^2} Q_3\right) \\
&P_8 = \frac{1}{k^4} Q_8 - \frac{k-1}{k^3} \left(\frac{1}{k} Q_7 + \frac{k+1}{k^2} Q_5 + \frac{k^2+3k+1}{k^3} Q_3\right) \\
&P_9 = \frac{1}{k^4} Q_9 - \frac{k-1}{k^4} \left(\frac{1}{k} Q_7 + \frac{2k+1}{k^2} Q_5 + \frac{3k^2+4k+1}{k^3} Q_3\right) \\
&P_{10} = \frac{1}{k^4} Q_{10} - \frac{k-1}{k^4} \left(\frac{1}{k} Q_9 + \frac{k+1}{k^2} Q_7 + \frac{k^2+3k+1}{k^3} Q_5 + \frac{k^3+6k^2+5k+1}{k^4} Q_3\right) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ed in generale, a posteriori:

$$P_n = \frac{Q_n}{k^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}} - \frac{k-1}{k^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \sum_{j=3,5,7,\dots,h(n)} \frac{S'_{n-j+1} Q_j}{k^{E\left(\frac{n-j+1}{2}\right)}}, \qquad (15)$$

la quale serve ad esprimere, qualunque sia n, pari o dispari, le P mediante le Q.

Sostituendo nella (13) a Q_n l'espressione data dalla (9) ed alle P le espressioni date dalle (11), si ha:

$$u_{n-1} a + u_n b = \frac{1}{k^{n-2-E\left(\frac{n-1}{2}\right)}} (S'_{n-1} a + S'_n b) + \\ + (k-1) \sum_{j=3,5,7,\dots,h(n)} \left\{ \frac{u_{n-j+1}}{k^{\frac{j-1}{2}}} (S'_{j-1} a + S'_j b) \right\},$$

che è valida qualunque siano a e b; epperò uguagliando i coefficienti di b nei due membri, si avrà l'importante relazione tra le u e le S'

$$u_n = \frac{S'_n}{k^{n-E\left(\frac{n-1}{2}\right)-2}} + (k-1) \sum_{j=3,5,7,\dots,h(n)}' \frac{1}{k^{\frac{j-1}{2}}} u_{n-j+1} S'_j. \qquad (16)$$

In essa il 1° membro non contiene k; quindi il 2° membro è una espressione il cui valore è indipendente da k.

Supponiamo in particolare $k=-1$. Si ha allora:

$$u_n=(-1)^{n-E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma_n-2\sum_{j=3,5,7,\ldots,h(n)}(-1)^{\frac{j-1}{2}}\sigma_j u_{n-j+1}, \tag{17}$$

essendo, come è noto, $\sigma_j=0, 1, -1$, secondochè j è della forma $3p+1$; $6p+2$, $6p+3$; $6p+5$, $6p+6$.

La (17) *rappresenta una notevole e riposta proprietà dei termini della serie di Fibonacci.*

Successioni S il cui discriminante è quadrato perfetto.

Si chiama discriminante di una successione $R_1, R_2, R_3, \ldots$ determinata dai valori iniziali $R_1=0$, $R_2=1$ e dalla relazione ricorrente

$$R_n=lR_{n-1}+kR_{n-2},$$

il binomio l^2+4k. Se $l=1$ il discriminante della successione è il binomio $1+4k$ e se k è il prodotto di due interi consecutivi qualunque q, $q-1$, si ha:

$$1+4k=1+4q(q-1)=(2q-1)^2,$$

cioè il discriminante è quadrato perfetto. Dimodochè la successione $H_1, H_2, H_3, \ldots$ determinata dai valori iniziali $H_1=0$, $H_2=1$ e dalla relazione ricorrente

$$H_n=H_{n-1}+q(q-1)H_{n-2}, \tag{18}$$

q essendo un intero positivo >1, è una di quelle il cui discriminante è quadrato perfetto. Una tale successione gode di tutte le proprietà delle successioni S in genere e di proprietà particolari notevoli che esamineremo a parte.

Si ha dalla (18):

$$\begin{aligned}
&H_3=1\\
&H_4=1+q(q-1)=\frac{q^3-(1-q)^3}{2q-1}\\
&H_5=1+\frac{q^3-(1-q)^3}{2q-1}q(q-1)=\frac{q^4-(1-q)^4}{2q-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ed in generale, a posteriori

$$H_n=\frac{q^{n-1}-(1-q)^{n-1}}{2q-1}, \tag{19}$$

la quale mostra *che* H_n *si può esprimere in funzione di* q *ed* n.

Sommando membro a membro la (19) e quelle che si ottengono da essa cambiando n in $n+1$, $n+2, \dots n+r-1$, si ha:

$$H_n + H_{n+1} + \dots + H_{n+r-1} =$$
$$= \frac{q^{n-1} + q^n + \dots + q^{n+r-2} - \{(1-q)^{n-1} + (1-q)^n + \dots + (1-q)^{n+r-2}\}}{2q-1},$$

od anche, dopo opportune trasformazioni

$$H_n + H_{n+1} + \dots + H_{n+r-1} = \frac{q^{n+r} - q^n + (1-q)^n - (1-q)^{n+r}}{q(q-1)(2q-1)}, \quad (20)$$

la quale permette di calcolare la somma di r termini consecutivi $H_n, H_{n+1}, \dots H_{n+r-1}$, della successione.

Le $H_1, H_2, H_3, \dots$ soddisfano, oltrechè alla (18), anche alle seguenti notevoli relazioni ricorrenti:

$$H_n = qH_{n-1} + (1-q)^{n-2} \quad (21)$$
$$H_n + H_{n-1}(q-1) = q^{n-2}, \quad (22)$$

che si dimostrano sostituendo ad H_n ed H_{n-1} i valori dati dalla (19).

Sostituendo nella (22) ad H_{n-1} il valore dato dalla (18), si ha facilmente:

$$H_n = (q-1)^2 H_{n-2} + q^{n-1}. \quad (23)$$

Molte altre relazioni ricorrenti si possono poi ottenere combinando opportunamente le precedenti che sono le fondamentali.

Servendoci delle (21) e (22), possiamo rinvenire due modi diversi di esprimere H_n mediante H_{n-h}, essendo h un intero qualunque, inferiore ad n. Infatti sostituendo nella (21) ad H_{n-1} l'espressione che si ottiene cambiando in essa n in $n-1$, si ha:

$$H_n = q^2 H_{n-2} + q(1-q)^{n-3} + (1-q)^{n-2};$$

e sostituendo in questa ad H_{n-2} l'espressione che si ha dalla (21) cambiando n in $n-2$, e così continuando, si ha:

$$H_n = q^h H_{n-h} + q^{h-1}(1-q)^{n-h-1} + q^{h-2}(1-q)^{n-h} + \dots$$
$$\dots + q(1-q)^{n-3} + (1-q)^{n-2},$$

od anche, dopo qualche trasformazione

$$H_n = q^h H_{n-h} + \frac{q^h(1-q)^{n-h-1} - (1-q)^{n-1}}{2q-1}. \quad (24)$$

Una seconda espressione di H_n mediante H_{n-h} si può avere ricorrendo alla (22). Si ha da questa:

$$H_n = q^{n-2} - (q-1)H_{n-1}, \quad (25)$$

e cambiando n in $n-1$

$$H_{n-1} = q^{n-3} - (q-1)H_{n-2}.$$

Sostituendo tale espressione di H_{n-1} nella (25), si ha:

$$H_n = q^{n-2} - (q-1)\,q^{n-3} + (q-1)^2\,H_{n-2};$$

e sostituendo in questa ad H_{n-2} l'espressione che si ha dalla (25), cambiando n in $n-2$, e così continuando, si avrà:

$$H_n = q^{n-2} - (q-1)\,q^{n-3} + (q-1)^2\,q^{n-4} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{h-1}(q-1)^{h-1}\,q^{n-h-1} + (-1)^h\,(q-1)^h\,H_{n-h},$$

od anche, dopo qualche trasformazione:

$$H_n = (-1)^h\,(q-1)\,H_{n-h} + \frac{q^{n-1} - (1-q)^h\,q^{n-h-1}}{2q-1} \qquad (26)$$

Le (24) e (26) affermano in sostanza che, date due qualunque delle H, si può esprimere una di esse linearmente mediante l'altra, ed *è questa appunto una notevole proprietà delle successioni* H *il cui discriminante è quadrato perfetto.*

Fra tali successioni è notevole la seguente

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731...

i cui termini indicheremo con L_1, L_2, L_3.... Essa è individuata dai valori iniziali $L_1 = 0$, $L_2 = 1$ e dalla relazione ricorrente:

$$L_n = L_{n-1} + 2L_{n-2}$$

la quale si ottiene dalla (18) supponendo $q = 2$.

Le (19), (21), (22), (23), relativamente a tal successione; diventano:

$$L_n = \frac{1}{3}\,(2^{n-1} + (-1)^n)$$
$$L_n = 2L_{n-1} + (-1)^{n-2} = 2L_{n-1} + (-1)^n$$
$$L_n + L_{n-1} = 2^{n-2}$$
$$L_n - L_{n-2} = 2^{n-1},$$

La seconda di queste afferma che le L sono tutti numeri dispari.

Sono pure notevoli alcune successioni nelle quali le L compaiono come coefficienti o come esponenti dei valori iniziali a e b. Per es. indicando con M_1, M_2, M_3... la successione determinata dai valori iniziali $M_1 = a$, $M_2 = b$ e dalla condizione che ciascun termine sia la media aritmetica dei due precedenti, si ha

$$M_1 = a; \quad M_2 = b; \quad M_3 = \frac{a+b}{2}; \quad M_4 = \frac{a+3b}{2^2}; \quad M_5 = \frac{3a+5b}{2^3}; \dots$$

od in generale:

$$M_n = \frac{L_{n-1}\,a + L_n\,b}{2^{n-2}}.$$

Indicando con N_1, N_2, N_3..., la successione determinata dai valori iniziali a e b e dalla condizione che ciascun termine sia il medio armonico dei due precedenti, si ha:

$$N_1 = a; \quad N_2 = b; \quad N_3 = \frac{3ab}{a+b}; \quad N_4 = \frac{2^2 ab}{3a+b}; \quad N_5 = \frac{2^3 ab}{5a+3b}; \dots$$

ed in generale

$$N_n = \frac{2^{n-2}\, ab}{L_n a + L_{n-1} b}.$$

Infine indicando con $O_1, O_2, O_3, \dots$ la successione determinata dai valori iniziali a, b e dalla condizione che ciascun termine sia medio proporzionale tra i due precedenti, si ha

$$O_1 = a; \quad O_2 = b; \quad O_3 = \sqrt{ab}; \quad O_4 = \sqrt[4]{ab^3}; \quad O_5 = \sqrt[8]{a^3 b^5}; \dots$$

ed in generale

$$O_n = \left(a^{L_{n-1}} b^{L_n}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}.$$

Se nelle (2) facciamo $k=2$, le S' diventano le H e si ha:

$$\frac{1}{3}\left[2^{n-1} + (-1)^n\right] = \sum_{j=0}^{j=E\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-j-2}{j} 2^j,$$

che ci rivela una notevole proprietà del simbolo combinatorio $\binom{n-j-2}{j}$, o se vuolsi, delle potenze intere e positive di 2.

Notevoli sono pure le relazioni tra le H ed i termini di alcune successioni note. Ad es. l'n^{mo} termine F_n della successione di Fermat è dato dalla formola

$$F_n = 2^n - 1.$$

epperò

$$3H_{n+1} = F_n \qquad \text{se } n \text{ è pari;}$$
$$3H_{n+1} = F_n + 2 \qquad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Meno semplici sono le relazioni tra le H e le u (termini della serie di Fibonacci). Per averle occorre supporre $k=2$ nelle (16), e sostituire le H alle S'.

D^r. Nicolò Traverso.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 638, 650, 651, 652 E 653

638. *Dimostrare che in un triangolo sferico si ha*

$$\sum \frac{\operatorname{sen}\beta \cos(s-b) - \operatorname{sen}\gamma \cos(s-c)}{1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = 0.$$

G. Pesci.

Risoluzione del sig. Gandini R. U. di Pavia.

Si ha

$$\cos(s-a) = \frac{1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{4\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

quindi risulta

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos(s-a) = \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

e allora il primo membro della (1) diventa

$$\sum\frac{(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma)-(1+\cos\gamma)(1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma(1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}=$$

$$=\sum\frac{(\cos\gamma-\cos\beta)(1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma(1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}=\sum\frac{\cos\gamma-\cos\beta}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}=0.$$

c. d. d.

650. *Calcolare l' integrale indefinito*

$$\int\frac{dx}{x\,\mathrm{sen}\log x^k}.$$

F. Sibirani.

Risoluzione della sig.na Beloch, R. U. di Roma, e dei sigg. Ascoli, R. U. di Pisa, Gandini R. U. di Pavia.

Sia V il suo valore; poniamo $y=\log x^k$, donde

$$kdx = xdy.$$

Avremo quindi:

$$\mathrm{V}=\frac{1}{k}\int\frac{dy}{\mathrm{sen}\,y}=-\frac{1}{k}\int\frac{d\cos y}{\mathrm{sen}^2 y}=-\frac{1}{k}\int\frac{d\cos y}{1-\cos^2 y}=$$

$$=-\frac{1}{2k}\int\frac{d\cos y}{1-\cos y}-\frac{1}{2k}\int\frac{d\cos y}{1+\cos y}=\frac{1}{2k}\log(1-\cos y)-\frac{1}{2k}\log(1+\cos y)+\mathrm{C},$$

e ponendo la costante C sotto la forma $\frac{1}{2k}\log n$, avremo

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2k}\log n\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=\frac{1}{2k}\log(n\tan^2\tfrac{1}{2}y)=\frac{1}{2k}\log(n\tan^2\tfrac{1}{2}\log x^k).$$

651. *L'inviluppo delle mediatrici delle corde focali di una conica è una quartica cuspidata, se la conica ha centro, ed è invece una parabola semi-cubica, se la conica è una parabola.*

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione dal sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia

$$(1-e^2)x^2+y^2-2pe^2x-p^2e^2=0 \tag{1}$$

l'equazione di una conica di eccentricità e e parametro p, avente un fuoco nell'origine degli assi; allora la retta

$$y=mx \tag{2}$$

passerà per un fuoco della (1).

Sieno: $\mathrm{A}=(x',y')$, $\mathrm{B}=(x'',y'')$ i punti d'incontro della (1) con la (2). Le coordinate del punto medio M di $\overline{\mathrm{AB}}$ saranno: $\frac{x'+x''}{2}$, $\frac{y'+y''}{2}$; infine l'equazione della retta perpendicolare in M alla (2) è data da

$$y=-\frac{1}{m}x+\frac{y'+y''}{2}+\frac{1}{m}\cdot\frac{x'+x''}{2}. \tag{3}$$

Si ha dalle (1), (2):

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{pe^2}{1 - e^2 + m^2}, \quad \frac{y' + y''}{2} = \frac{pme^2}{1 - e^2 + m^2};$$

perciò la (3) diventa:

$$\varphi\,(x, y, m) = ym^3 +)x - pe^2)\, m^2 + (1 - e^2)\, ym + (1 - e^2)\, x - pe^2 = 0\,. \qquad (4)$$

Eliminando la m tra la (4) e la $\frac{\partial \varphi\,(x, y, m)}{\partial m} = 0$, si ottiene il discriminante della (4), il quale è anche l'equazione dell'inviluppo richiesto. In generale il discriminante dell'equazione cubica

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_3x + a_3 = 0\,,$$

è dato da

$$4\,(3\,a_0a^2 - a_1^2)\,(3\,a_1a_3 - a_2^2) - (9\,a_0a_2 - a_1a_2)^2 = 0\,;$$

quindi, per la (4), l'inviluppo richiesto sarà la quartica

$$4\left\{3(1 - e^2)\,y^2 - (x - pe^2)^2\right\}.\left\{3(1 - e^2)\,(x - pe^2)\,x - 3\,pe^2\,(x - pe^2) - (1 - e^2)^2\,y^2\right\} -$$
$$- y^2\left\{9\,(1 - e^2)\,x - (1 - e^2)\,(x - pe^2) - 9\,pe^2\right\}^2 = 0\,. \qquad (5)$$

Tale curva è cuspidata nel punto $(pe^2, 0)$, dove ammette per tangente cuspidale l'asse delle x. Quando $e = 1$ la conica diventa una parabola, e la (5) si trasforma nella parabola semi-cubica

$$4\,(x - p)^3 = 27\,py^2\,.$$

652. *Dimostrare che*

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha - 1}}{1 + \cos\alpha}\, d\alpha = \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \tfrac{1}{2}\alpha} - \frac{\alpha}{4} \log \frac{2a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha + 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}{2a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha - 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}\,.$$

F. SIBIRANI.

Risoluzione dei sigg. Gandini R. U. di Pavia e Barisien.

Anzitutto si ha:

$$\frac{2a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha + 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}{2a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha - 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}} = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}{a + \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}\right)^{-2} =$$
$$= \frac{\left(a - \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}\right)^{-4}}{\operatorname{tag}^{-4} \frac{1}{2}\alpha}\,. \qquad (1)$$

Ora si ha:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha - 1}}{1 + \cos\alpha}\, d\alpha = \int \frac{\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}{2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha}\, d\alpha = \int \frac{\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}{\operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha}\, d \operatorname{tag} \tfrac{1}{2}\alpha =$$
$$= -\int \frac{\operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha\, d \operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}} + a^2 \int \frac{d \operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}} =$$
$$= \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \tfrac{1}{2}\alpha} + a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}\alpha}}{\operatorname{tag} \frac{1}{2}\alpha}$$

e per la (1) l'eguaglianza proposta resta dimostrata.

653. *Dimostrare che*

$$=\int\sqrt{\frac{a^2-1+t\,(a^2+1)}{(1-t^2)^2.\,(1+t)}}\,dt=\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}-$$

$$-\frac{a}{4}\log\frac{2a^2-1+t\,(1+2a^2)+2a\sqrt{(1+t)\,[a^2-1+t\,(a^2+1)]}}{2a^2-1+t\,(1+2a^2)-2a\sqrt{(1+t)\,[a^2-1+t\,(a^2+1)]}}.$$

F. SIBIRANI.

Risoluzione dei sigg. Gandini R. U. di Pavia e Barisien.

Si ha

$$\frac{2a^2-1+t\,(1+2a^2)+2a\sqrt{(1+t)\,[a^2-1+t\,(a^2+1)]}}{2a^2-1+t\,(1+2a^2)-2a\sqrt{(1+t)\,[a^2-1+t\,(a^2+1)]}}=$$

$$=\left(\frac{a-\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}{a+\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}\right)^{-2}=\left(\frac{a-\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}\right)^{-4}; \qquad (1)$$

inoltre

$$dt=-(1+t)\sqrt{1-t^2}\,d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}. \qquad (2)$$

Ciò posto abbiamo

$$-\int\sqrt{\frac{a^2-1+t\,(a^2+1)}{(1-t^2)^2\,(1+t)}}\,dt=-\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}{1-t^2}\,dt=$$

per la (2)

$$=\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}\,d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=$$

$$=a^2\int\frac{d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\cdot\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}-\int\frac{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}=$$

$$=a\log\frac{a-\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}+\sqrt{a^2-\frac{1-t}{1+t}}.$$

e per la (1) l'eguaglianza proposta resta dimostrata.

QUISTIONI PROPOSTE

662. Sopra una retta r sono dati due punti fissi A_1, A_2 ed un punto mobile M. Costruiti i circoli c_1, c_2 di diametri A_1M, MA_2 aventi per centri i punti C_1, C_2, si domanda:

1° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotti da A_1 a c_2 con le tangenti condotte da A_2 a c_1;

2° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da C_1 a c_2 colle tangenti condotte da C_2 a c_1;

3° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da A_1 al circolo di centro A_2 e raggio A_2M colle tangenti condotte da A_2 al circolo di centro A_1 e raggio A_1M.

Si faccia uno studio di queste curve.

FUMAGALLI.

663. Trovare l'area della curva luogo della proiezione del punto d'incontro delle tangenti nelle estremità di due diametri coniugati di una ellisse, sulla retta polare di quel punto rispetto all'ellisse.

664. Essendo dati due circoli c, c' ed un punto A in un piano, si trovi il luogo dei centri dei circoli c'' tangenti a c e tali che l'asse radicale di c' e c'' passi per A.

665. Il luogo del punto di mezzo delle corde di una cardioide che sono viste sotto un angolo costante dal punto di regresso è una quartica, della quale si domanda l'equazione e l'area. Nel caso in cui l'angolo costante è retto, la quartica suddetta diviene un circolo.

666. Essendo dati due circoli c, c' si consideri la parabola p di grandezza costante il cui vertice è situato su c e l'asse è tangente a c, e la parabola p' di grandezza costante il cui vertice è situato su c' e l'asse è tangente a c'.

1. Dimostrare che, se gli assi di p e p' sono perpendicolari, il luogo del centro del circolo che passa per i quattro punti comuni alle due parabole p, p' si compone di due conchiglie di Pascal.

2. Se gli assi di p e p' sono paralleli si trovi l'equazione del luogo del punto di mezzo dell'unica corda comune alle due parabole e si determini l'area limitata da tale curva.

E.-N. BARISIEN.

BIBLIOGRAFIA

Principii di Stereodinamica. — Corso sulla Formazione, l'Interpretazione e l'Integrazione delle equazioni del movimento dei solidi di G. A. Maggi, p. XI-262. Milano, editore Hoepli, 1903.

I principii di Stereodinamica trattano, da un punto di vista assai generale, le questioni più importanti della Dinamica dei sistemi solidi o corpi rigidi comunque vincolati.

Tali questioni, e nel loro ordine e sviluppo storico, e nel loro ordine logico, riguardano anzitutto la formazione delle equazioni del moto; la quale s'impernia nel teorema o principio di d'Alembert e nelle conseguenti equazioni di Lagrange. A questa è dedicata la prima parte del libro.

La trasformazione, le diverse interpretazioni della equazione fondamentale, i teoremi sulla minima azione e sull'azione stazionaria di Hamilton, quello sulla minima costrizione (sforzo) di Gauss, il principio di Maupertuis, in una parola tutto ciò che più specialmente riguarda la interpretazione delle equazioni dinamiche costituisce una seconda parte; la quale, perchè connessa e quasi aggirantesi intorno al principio di Hamilton, da questo prende nome.

La terza parte finalmente, d'indole più strettamente analitica, relativa a quanto di più generale ed importante si è fatto per la integrazione delle equazioni della Dinamica, s'intitola dal nome di Jacobi; perchè appunto il famoso teorema del sommo geometra ne è il punto di partenza non solo, ma anche il risultato più notevole.

L'indole di questo Periodico non consente una minuta analisi della nuova opera del chiaro professore: tanto più che, specie nella seconda parte, anche un solo cenno del modo con cui vengono presentati ed illustrati i varii principii, non sempre esposti in modo chiaro e rigoroso dai trattatisti, richiederebbe spiegazioni alquanto estese. L'A. pur restando nella massima generalità, con opportune definizioni, con una felice nomenclatura, riesce a porre in luce ogni argomento, di cui delinea ancora con pochi tratti la storia, conservando a tutta la trattazione un rigore che non nuoce alla chiarezza.

Questi principii di Stereodinamica sono anche una illustrazione ed una applicazione di altri principii sviluppati dall' A. nella sua *Teoria matematica del movimento dei corpi;* tuttavia egli ha cura di richiamare sin da principio le espressioni fondamentali sulla Dinamica dei sistemi rigidi, nonchè i concetti sui vincoli traducenti la rigidità. Ma volendo poscia considerare, nel caso più generale, un sistema di corpi rigidi comunque vincolati, si presenta subito la distinzione, nettamente e generalmente precisata, tra sistemi olonomi ed anolonomi. Sono olonomi ad esempio i sistemi costituiti da un corpo rigido, un punto o una retta determinata del quale possiede un moto prestabilito; mentre un corpo rigido vincolato a rotolare senza strisciare (moto di rotolamento puro) su di una superficie il cui moto è prestabilito, è un sistema anolonomo. I moti di rotolamento, oggetto di studî recentissimi dell'Appel, Hadamard, ecc., sono particolarmente considerati, perchè ad essi, com'è noto, non sono applicabili le equazioni dinamiche di Lagrange. L'A. partendo dalla formula di Hamilton, pone le equazioni dinamiche sotto una forma valida in ogni caso e dalla quale poi assai speditamente si trae quella dell'Appel relativa ai sistemi anolonomi.

Il libro abbonda di osservazioni ingegnose; di note storiche e critiche; perchè, è noto, l'A. si occupa con acume e profondità di dottrina, di quanto ha relazione coi principii fondamentali della Meccanica. Così egli ha mezzo di dare un cenno dei principii che informano la meccanica di Hertz; e critica il modo con cui, ad imitazione di d'Alembert, viene dai più dimostrato il famoso principio: che, al pari di molti altri della Meccanica classica, illustri scienziati, ritengono doversi addirittura assumere come postulato, ritenendo insufficienti le dimostrazioni con cui si è sin qui tentato di provarlo. Il Maggi non è invero così radicale, quantunque in fondo giri la difficoltà collo stabilire due postulati, di cui uno, quello delle pressioni vincolari, è sostanzialmente incluso nella dimostrazione classica. Nè si deve credere, dai pochi cenni fatti, che il libro altro non sia che un'arida e sterile esposizione di teorie; chè anzi le applicazioni importanti, svolte elegantemente, non mancano; esse trattano del moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso (moto polare); del giroscopio di Foucault; della bicicletta, ecc.

In sostanza adunque un libro bello, concettoso, utile specialmente presso di noi ove non certo abbondano libri buoni e moderni di Meccanica; e che, non ne dubitiamo, sarà accolto con vivo piacere da quanti si interessano di studii e di scienza.

ROBERTO MARCOLONGO.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 febbraio 1904.

CONTRIBUTO ALLA "GEOMETRIA RECENTE DEL TETRAEDRO"

In seguito ad un accurato studio della pregevole opera del Thiry dal titolo *Applications remarquables du théorème de Stewart et Théorie du barycentre,* mi venne l'idea di tentare se si potesse costruire per il tetraedro una geometria analoga alla recente geometria del triangolo. Veduto che il metodo da me seguito si prestava allo scopo, ho tratte alcune conseguenze che credo opportuno esporre ai lettori del Periodico. Tengo però a dichiarare che pubblicando la presente Nota non intendo di presentare un vero e proprio lavoro; ho cercato più che altro di invogliare qualche studioso a fissare la propria attenzione su questo argomento, che a me sembra fecondo di nuovi e importanti risultati.

---

1. Sia dato un tetraedro $A_1A_2A_3A_4$: indicheremo con a_i l'area della faccia opposta al vertice A_i e con (a_ia_h) la misura del diedro compreso dalle facce le cui aree sono a_i e a_h.

Porremo a fondamento di questa nota il

Teorema 1°. — *Una faccia di un tetraedro è uguale alla somma dei prodotti delle altre tre per i coseni degli angoli che esse formano con la prima.*

Omettiamo la dimostrazione essendo semplicissima. Applicando questo teorema a ciascuna delle quattro facce del tetraedro otteniamo un primo gruppo di formule:

$$(\mathrm{I})\quad\left|\begin{array}{l} a_1 = a_2\cos(a_2a_1) + a_3\cos(a_3a_1) + a_4\cos(a_4a_1) \\ a_2 = a_3\cos(a_3a_2) + a_4\cos(a_4a_2) + a_1\cos(a_1a_2) \\ a_3 = a_4\cos(a_4a_3) + a_1\cos(a_1a_3) + a_2\cos(a_2a_3) \\ a_4 = a_1\cos(a_1a_4) + a_2\cos(a_2a_4) + a_3\cos(a_3a_4). \end{array}\right.$$

Moltiplicando queste rispettivamente per a_1, a_2, $-a_3$ e $-a_4$ e sommando, scambiando poi circolarmente gli indici, abbiamo un secondo gruppo di formule:

$$(\mathrm{II})\quad\left|\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) = a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4\cos(a_3a_4) \\ a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos(a_2a_3) = a_1^2 + a_4^2 - 2a_1a_4\cos(a_1a_4) \\ a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3\cos(a_1a_3) = a_2^2 + a_4^2 - 2a_2a_4\cos(a_2a_4), \end{array}\right.$$

e quindi il corrispondente

Teorema 2°. — *In un tetraedro la somma dei quadrati di due* *facce diminuita del doppio prodotto di esse pel coseno dell'angolo compreso, è uguale alla somma dei quadrati delle altre due meno il doppio prodotto di queste pel coseno dell'angolo che esse comprendono.*

COROLLARIO. — *Se due diedri opposti di un tetraedro sono retti, la somma dei quadrati delle facce che comprendono l'uno è uguale alla somma dei quadrati di quelle che comprendono l'altro.*

Dalle (I), sommandole dopo averle moltiplicate rispettivamente per a_1, $-a_2$, $-a_3$, $-a_4$ e scambiando poi circolarmente gli indici otteniamo un terzo gruppo di formule:

$$(\mathrm{III}) \left| \begin{array}{l} a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_2a_3 \cos(a_2a_3) - 2a_3a_4 \cos(a_3a_4) - 2a_2a_4 \cos(a_2a_4) \\ a_2^2 = a_3^2 + a_4^2 + a_1^2 - 2a_3a_4 \cos(a_3a_4) - 2a_4a_1 \cos(a_4a_1) - 2a_3a_1 \cos(a_3a_1) \\ a_3^2 = a_4^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_4a_1 \cos(a_4a_1) - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2) - 2a_4a_2 \cos(a_4a_2) \\ a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2) - 2a_2a_3 \cos(a_2a_3) - 2a_1a_3 \cos(a_1a_3) \end{array} \right.$$

e il corrispondente

TEOREMA 3°. — *Il quadrato di una faccia di un tetraedro è uguale alla somma dei quadrati delle altre tre diminuita del doppio dei prodotti di esse due a due per i coseni degli angoli compresi.*

COROLLARIO. — *Se un triedro di un tetraedro è trirettangolo, il quadrato della faccia ad esso opposta è uguale alla somma dei quadrati delle altre tre.*

Risultato noto sotto il nome di *teorema di Gua de Malves.*

2. Detti A_i A_j A_h A_l i vertici del tetraedro, preso sullo spigolo A_iA_j un punto P_{ij} tale che sia

$$A_iP_{ij} : P_{ij}A_j = a_j^n : a_i^n, \qquad (\alpha)$$

consideriamo il piano che passa per il punto P_{ij} e per lo spigolo opposto A_hA_l e gli altri cinque ad esso analoghi. Dico che questi sei piani passano tutti per un medesimo punto.

Intanto, nella faccia $A_iA_hA_l$, le rette che dai vertici A_i, A_h, A_l, vanno rispettivamente ai punti P_{hl}, P_{il}, P_{ih} concorrono in un punto P_j essendo in virtù della posizione fatta, applicabile il teorema reciproco di quello di Ceva. Segue da questo che i tre piani passanti rispettivamente per P_{hl}, P_{il}, P_{ih} e per gli spigoli opposti si segano secondo la retta P_jA_j. Così pure i piani passanti per i punti P_{ij}, P_{ih}, P_{jh} e per gli spigoli A_hA_l, A_jA_l, A_iA_l passano per la retta A_lP_l che congiunge il vertice A_l col punto d'incontro delle tre ceviane A_hP_{ij}, A_jP_{ih}, A_iP_{jh}. Ora, tanto il piano contenente A_iA_h e P_jA_j come quello contenente A_iA_h e P_lA_l passano per P_{jl} e quindi coincidono; le A_jP_j e A_lP_l giacciono dunque in un piano e quindi s'incontrano. Le quattro rette A_iP_i, A_hP_h, A_jP_j, A_lP_l incontrandosi due a due e non potendo giacere nel medesimo piano, passano per un medesimo punto. Questo punto sarà costantemente indicato con K_n. (*)

(*) Se chiamiamo *sezioni isotomiche* quelle che escono da un medesimo spigolo e vanno a due punti dello spigolo opposto simmetrici rispetto al punto medio di esso, è subito visto che: "Sezioni

OSSERVAZIONE I. — I sei piani di cui abbiamo parlato sopra, tagliano il tetraedro secondo sei triangoli a cui daremo il nome di *sezioni ceviane di ordine* n. In particolare, per n uguale a zero avremo le sezioni di ordine zero o *sezioni mediane,* il cui punto d'incontro K_0 è il *baricentro* del tetraedro; per n eguale a uno, avremo le sezioni di primo ordine o *sezioni bisettrici* il cui punto K_1 è il *centro della sfera inscritta* nel tetraedro; per n eguale a due le sezioni di secondo'ordine o *sezioni simediane* il cui punto d'incontro K_2 è il *punto di Lemoine.*

OSSERVAZIONE II. — Chiamando h_j e h_i le distanze del punto P_{ij} dalle facce a_j e a_i e osservando che:

$$A_iP_{ij} : P_{ij}A_j = \text{tetr } P_{ij}A_iA_hA_l : \text{tetr } P_{ij}A_jA_hA_l ,$$

si ricava, tenendo conto della (α)

$$a_j^n : a_i^n = a_jh_j : a_ih_i$$

ovvero:

$$h_i : h_j = a_i^{n-1} : a_j^{n-1}.$$

Si ha così il

TEOREMA 4°. — *Se un punto divide lo spigolo di un tetraedro in parti proporzionali alle potenze ennesime delle facce adiacenti, le distanze di questo punto da dette facce sono proporzionali alle potenze* ($n - 1$)*-esime delle facce stesse.*

Questo teorema giustifica le denominazioni da noi date alle sezioni di ordine zero, uno, due.

3. Ci proponiamo ora di trovare una formula che permetta di calcolare l'area della sezione il cui piano passa per uno spigolo e divide lo spigolo opposto nel rapporto $m : n$.

Riferendoci al punto P_{12} dello spigolo A_1A_2, poniamo

$$\text{area } P_{12}A_3A_4 = p_{12}, \quad \text{area } P_{12}A_2A_3 = d_1, \quad \text{area } P_{12}A_1A_3 = d_2$$
$$\text{area } P_{12}A_2A_4 = c_1, \quad \text{area } P_{12}A_1A_4 = c_2 .$$

Applicando alle facce a_1 e a_2 dei due tetraedri $P_{12}A_2A_3A_4$ e $P_{12}A_1A_3A_4$ il teorema 3°, abbiamo:

$$a_1^2 = p_{12}^2 + c_1^2 + d_1^2 - 2\,[p_{12}c_1 \cos(p_{12}c_1) + p_{12}d_1 \cos(p_{12}d_1) + c_1d_1 \cos(c_1d_1)]$$
$$a_2^2 = p_{12}^2 + c_2^2 + d_2^2 - 2\,[p_{12}c_2 \cos(p_{12}c_2) + p_{12}d_2 \cos(p_{12}d_2) + c_2d_2 \cos(c_2d_2)].$$

Sommando queste due eguaglianze membro a membro dopo averle moltiplicate rispettivamente per c_2 e c_1 e osservando che è:

$$c_1 + c_2 = a_3 ,$$

isotomiche di ceviane concorrenti in un punto sono esse pure concorrenti in un punto „. Questi due punti si dicono *reciproci.*

Per quanto riguarda le *Sezioni isogonali* si veda il pregevole *Traité de Géométrie* dei Sigg: *Rouché et Comberousse.* Paris, 1900, seconda parte, il quale contiene una Nota sulla geometria recente del tetraedro.

si ottiene:

$$a_1^2c_2+a_2^2c_1=(p_{12}^2+c_1c_2)\,a_3+d_1^2c_2+d_2^2c_1-2p_{12}\,[c_2d_1\cos(p_{12}d_1)+$$
$$+c_1d_2\cos(p_{12}d_2)]-2[c_1c_2d_1\cos(c_1d_1)+c_1c_2d_2\cos(c_2d_2)].$$

Essendo ora:

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

i termini che si trovano dentro la prima parentesi si distruggono; mettendo poi d_1c_2 al posto di d_2c_1 la formula medesima prende l'aspetto:

$$(c_1c_2+p_{12}^2)\,a_3-2d_1c_2\,[c_1\cos(c_1d_1)+c_2\cos(c_2d_2)]=a_1^2c_2+a_2^2c_1\,.$$

E poichè l'espressione che figura dentro parentesi è uguale ad $a_3\cos(a_3a_4)$, otteniamo ancora:

$$a_3p_{12}^2+(cc_1+dd_1)\,c_2-2\,d_1c_2a_3\cos(a_3a_4)=a_1^2c_2+a_2^2c_1\,.$$

Quest'ultima può anche scriversi, dividendone ambo i membri per a_3:

$$p_{12}^2+\frac{c_2}{a_3}\left(a_3^2\frac{c_1}{a_3}+a_4^2\frac{d_1}{a_4}\right)-2a_3a_4\frac{d_1}{a_4}\cdot\frac{c_2}{a_3}=a_1^2\frac{c_2}{a_3}+a_2^2\frac{c_1}{a_3}\,.$$

Ponendo poi:

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{m}{n}\,,$$

coll'osservare che di qui segue:

$$\frac{d_1}{a_4}=\frac{c_1}{a_3}=\frac{m}{m+n}\,,\qquad \frac{d_2}{a_4}=\frac{c_2}{a_3}=\frac{n}{m+n}\,,$$

si ottiene:

$$p_{12}^2+\frac{mn}{(m+n)^2}\,[a_3^2+a_4^2-2a_3a_4\cos(a_3a_4)]=\frac{a_1^2n+a_2^2m}{m+n}\,,$$

ossia, per la prima delle (II)

$$p_{12}^2+\frac{mn}{(m+n)^2}\,[a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos(a_1a_2)]=\frac{a_1^2n+a_2^2m}{m+n}\,.$$

Da questa si ricava facilmente:

$$(\beta)\qquad (m+n)^2p_{12}^2=a_1^2n^2+a_2^2m^2+2mna_1a_2\cos(a_1a_2)$$

che è la formula che cercavamo.

4. Diamo qui qualche applicazione della formula (β) del paragrafo precedente.

1ª. Poniamo $m = n$; otterremo la formula

$$4m_{12}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(a_1a_2),$$

che ci fornisce l'area della sezione mediana uscente dallo spigolo comune alle facce a_1 e a_2.

Scambiando circolarmente gli indici 1, 2, 3 troviamo

$$4m_{23}^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3 \cos(a_2a_3)$$
$$4m_{13}^2 = a_1^2 + a_3^2 + 2a_1a_3 \cos(a_1a_3).$$

Sommando queste tre relazioni membro a membro tenendo presente la quarta delle (III), si ottiene

$$4(m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2) = 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - a_4^2,$$

e quindi il corrispondente

Teorema 5°. — *Il quadruplo della somma dei quadrati delle sezioni mediane uscenti da tre spigoli concorrenti in un vertice, è uguale al triplo della somma dei quadrati delle facce passanti pel medesimo vertice, diminuito del quadrato dell'altra faccia.*

Come conseguenza di questo, tenuto presente il corollario del teorema 3°, si ricava

Corollario. — *Se un tetraedro ha un triedro trirettangolo la somma dei quadrati delle sezioni mediane uscenti dagli spigoli di questo, è uguale alla metà del quadrato della faccia opposta.*

Applicando il teorema 5° alle tre facce uscenti da ciascun vertice, ricaviamo, sommando membro a membro le quattro eguaglianze che ne resultano:

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{14}^2 + m_{23}^2 + m_{24}^2 + m_{34}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2,$$

cioè il

Teorema 6°. — *La somma dei quadrati delle sezioni mediane di un tetraedro è uguale alla somma dei quadrati delle facce.*

Notiamo ancora riguardo alle sezioni mediane il

Teorema 7°. — *Il doppio della differenza dei quadrati delle sezioni mediane uscenti da due spigoli opposti, è uguale alla differenza tra le somme dei quadrati delle facce ad esse adiacenti.*

Esso risulta dalle formule

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2) = 2(a_1^2 + a_2^2) - 4m_{12}^2$$
$$a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4 \cos(a_3a_4) = 2(a_3^2 + a_4^2) - 4m_{34}^2,$$

osservando che i primi membri sono uguali in virtù della prima delle (II). In particolare

Teorema 8°. — *Se la somma dei quadrati di due facce è uguale alla somma dei quadrati delle altre due, le sezioni mediane uscenti dagli spigoli comuni sono equivalenti.*

2ª. Poniamo ora $m = a_2$ ed $n = a_1$: la sezione corrispondente è la bisettrice. Si trova facilmente

$$\beta_{12} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \cos\left(\frac{a_1a_2}{2}\right).$$

Da questa formula segue un teorema che è l'estensione di quello trovato dal Thiry. (*) Esso può enunciarsi così:

Teorema 9°. — *Se dal punto d' incontro* P_{12} *della sezione bisettrice collo spigolo opposto si eleva una perpendicolare al piano della sezione stessa ad incontrare la faccia* $A_2A_3A_4$ *nel punto* M, *il triangolo* A_3A_4M *è medio armonico tra le facce del tetraedro che comprendono la sezione bisettrice.*

3ª. Poniamo da ultimo $m = a_2^2$, $n = a_1^2$: la sezione corrispondente è la simediana. Si trova

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 s_{12}^2 = a_1^2a_2^2 [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(a_1a_2)].$$

Osservando poi che l'espressione tra parentesi nel secondo membro è il quadrato del doppio della sezione mediana uscente dal medesimo spigolo, troveremo la formula:

$$\frac{s_{12}}{m_{12}} = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2},$$

estensione di un altro teorema dovuto al Thiry. (**)

5. Vogliamo ancora dire qualche parola sulle sezioni perpendicolari, su quelle sezioni cioè che si ottengono con piani che escono da ciascuno spigolo perpendicolarmente allo spigolo opposto. Queste sezioni non esistendo se non quando i due spigoli in discorso sono fra loro perpendicolari, ci riferiremo senz'altro al tetraedro rettangolo; e poichè il calcolo di esse sfugge alla formula (β), procederemo nel modo seguente:

Indichiamo con h_{12} l'area della sezione perpendicolare uscente dallo spigolo A_3A_4 e con ω_1 e ω_2 le misure degli angoli formati dal piano di questa sezione con quelli delle facce a_1 e a_2 rispettivamente. Avremo:

$$\cos\omega_1 = \frac{h_{12}}{a_1}, \ \cos\omega_2 = \frac{h_{12}}{a_2}, \ \text{sen}\,\omega_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - h_{12}^2}}{a_1}, \ \text{sen}\,\omega_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 - h_{12}^2}}{a_2}$$

e quindi:

$$\cos(\omega_1 \pm \omega_2) = \cos(a_1a_2) = \frac{h_{12}^2 \mp \sqrt{a_1^2 - h_{12}^2}\,.\,\sqrt{a_2^2 - h_{12}^2}}{a_1a_2}$$

dalla quale dopo brevi calcoli si ricava:

$$h_{12}^2 = \frac{a_1^2a_2^2\,\text{sen}^2(a_1a_2)}{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2)}$$

(*) Thiry, *Applications remarquables du théorème de Stewart* etc. 1891, pag. 45.
(**) Thiry, Op. cit., pag. 14.

formula che esprime l'area della sezione perpendicolare in funzione delle facce adiacenti e dell'angolo da esse compreso.

In modo analogo si troverebbe:

$$h_{34}^2 = \frac{a_3^2 a_4^2 \operatorname{sen}^2(a_3 a_4)}{a_3^2 + a_4^2 - 2a_3 a_4 \cos(a_3 a_4)}.$$

Ne segue, avuto riguardo al teorema 2°, il

Teorema 10°. — *Le sezioni perpendicolari di un tetraedro rettangolo uscenti da due spigoli opposti, stanno fra loro come i prodotti delle facce adiacenti per il seno dell'angolo da esse compreso.*

Facciamo da ultimo osservare che la formula (β) trovata nel paragrafo terzo, e buona parte di quelle che da essa derivano, sono quelle stesse che si trovano in Geometria del triangolo, colla sola differenza che gli elementi lato ed angolo sono sostituiti cogli elementi faccia e angolo diedro. La diversità di alcuni risultati da quelli della geometria del triangolo, si può giustificare osservando che mentre nel triangolo si hanno tanti lati quanti angoli, nel tetraedro il numero delle facce è diverso da quello degli angoli diedri.

Enrico Piccioli.

Arpino, febbraio 1904.

SULL'UGUAGLIANZA DIRETTA ED INVERSA DELLE FIGURE

Nei migliori trattati moderni di geometria elementare si definisce l'uguaglianza delle figure geometriche come una corrispondenza che trasforma segmenti in segmenti uguali. Si ottengono così notevoli e indubbi vantaggi di rigore sopra l'antica definizione in cui si ricorreva al movimento rigido delle figure, ma si lascia generalmente da banda la distinzione fra figure uguali sovrapponibili e non sovrapponibili (uguali direttamente e inversamente), e dove pure di tal questione è fatto cenno, essa è ricondotta più o meno apertamente alle antiche considerazioni mediante osservazioni empiriche, ovvero la dimostrazione rigorosa delle proposizioni principali relative alla distinzione dei versi delle figure è appena adombrata, parendo inadeguata allo scopo la fatica che occorre a completarle nei loro minuti particolari.

Pare a me che tale andamento laborioso debba attribuirsi piuttosto al modo onde i versi medesimi son definiti, che all'essenza della cosa; e come effettivamente si possa riuscire allo scopo con una certa facilità mostreranno, spero, queste poche pagine.

L'obbligo che mi fanno le linee precedenti di essere quanto possibile completo, sarà causa di alcune ripetizioni di cose già troppo comuni; però, come già dissi, in generale incompletamente dimostrate.

1. È noto che i postulati dell'ordinamento dei punti sulla retta e nello spazio possono enunciarsi:

a) Due punti A, B *determinano sulla loro congiungente un verso* $\overrightarrow{AB}$ *secondo il quale i punti della retta si ordinano mediante le relazioni di precedere e seguire. Il verso* $\overrightarrow{BA}$ *si dice inverso di* $\overrightarrow{AB}$: *si passa dall'uno all'altro verso scambiando le parole precedere e seguire.*

b) Rispetto ad ogni piano α *i punti dello spazio si distribuiscono in due classi (bande) tali che ogni segmento che ha per estremi due punti della stessa classe non contiene punti di* α *e ogni segmento i cui estremi appartengono a classi diverse contengono punti di* α. *I punti di* α *si attribuiscono indifferentemente alle due classi.*

Nel postulato *b)* è involto il postulato analogo relativo alla divisione del piano in due bande rispetto ad ogni sua retta. Conseguenza di questo postulato è che *ogni retta del piano di un triangolo che passi per un punto di un suo lato (che non sia vertice) incontra uno degli altri due lati, e se incontra la retta del terzo lato, il punto d'intersezione non può però mai appartenere a questo lato (segmento) medesimo.*

Conformemente allo scopo di questo scritto, si tace delle proprietà fondamentali dell'ordinamento sulla retta e delle varie forme che si sogliono dare al postulato *b)* e delle sue conseguenze: importa invece di definire il verso nel fascio.

2. Essendo il fascio un sistema chiuso, si può bensì in esso definire, come sarà tosto precisato, un ordinamento per cui sia fissato quale di due raggi dati preceda e quale segua in esso; occorre però notare che le proprietà fondamentali delle relazioni di precedere e seguire si mutano alquanto: in particolare cessa d'esser vero che se a precede b e b precede c, a precede c, ciò che non sarà di alcun nocumento nel seguito.

In un fascio O si fissino due raggi non allineati a e b e sia AB una retta che li incontri nei punti A e B. *L'ordine di due raggi* m, n appartenenti alla stessa retta, *rispetto al verso* $\overrightarrow{ab}$ *e alla trasversale* AB sarà definito dalle convenzioni seguenti:

a) Se m incontra AB in un punto M, n precede o segue m secondochè sta rispetto alla retta di m dalla parte dei punti di AB che precedono o che seguono M nel verso $\overrightarrow{AB}$.

b) Se m non incontra AB e non le è parallelo, si troverà nelle condizioni di *a)* il raggio m' opposto ad m. Si dirà che n precede oppur segue m secondochè segue o procede m'.

c) Poichè, per ipotesi, m ed n non sono opposti è da escludersi che siano entrambi paralleli ad AB: se allora m è parallelo ad AB, si definirà l'ordine assumendo come raggio m di *a)* o di *b)* il raggio n e convenendo che *se* m *precede o segue* n, n *segue o precede* m. Che questa proposizione sia verificata dalle definizioni *a)*, *b)* quando nè m, nè n siano paralleli ad AB risulta immediato dalle osservazioni seguenti:

1°. Due raggi opposti stanno da bande opposte della retta d'ogni raggio m; quindi di essi l'uno precede; l'altro segue m.

2°. Se i raggi m ed n incontrano entrambi AB in M, N, M precede o segue N nel verso $\overrightarrow{AB}$ secondochè N segue o precede M nel verso medesimo.

Occorre ancora osservare che dal postulato 1 *b)* segue che di tre raggi dati ve n'è sempre due che sono da bande opposte della retta del terzo: se quindi due raggi p e q incontrano AB in P e Q e se un raggio r sta rispetto alla retta di p dalla banda di q e rispetto alla retta di q dalla banda di p, P e Q stanno da bande opposte della retta di r e questa retta incontra AB. Onde segue che se m è parallelo ad AB, i raggi che incontrano (o non incontrano) AB lasciano tutti m dalla stessa parte, e perciò precedono tutti o seguono tutti m. Unendo questa conclusione alla precedente si ottiene:

3°. Tutti i raggi che precedono o seguono uno stesso raggio m stanno dalla stessa banda della sua retta.

Risulta che la considerazione della retta AB è inutile nella determinazione dell'ordine di due raggi m, n tostochè si conosce in un modo qualunque un raggio precedente (o seguente) l'uno di essi, p. es. m.

Ciò posto se il raggio m incontra AB fra A e B, il raggio a precede m e b lo segue nel verso $\overrightarrow{ab}$ rispetto alla retta AB; ma in tale ipotesi ogni retta che incontri a e b in due punti A', B' è tagliata da m fra questi due punti: quindi l'ordine di questo raggio m e di un secondo raggio n qualunque è indipendente dalla scelta della retta AB, purchè essa tagli a e b. Ma allora lo stesso deve dirsi per l'ordine di due raggi qualunque n e p perchè, indipendentemente da tal scelta è fissato l'ordine di m e n. Quindi:

4°. Il verso $\overrightarrow{ab}$ non dipende dalla scelta della trasversale AB, delle rette a e b.

D'altra parte è evidente che se a', b' sono altri due raggi che incontrino AB e a' precede b', il verso $\overrightarrow{a'b'}$ non differisce dal verso $\overrightarrow{ab}$: e poichè date due rette qualunque r, s del piano si può determinare una terza retta t che le incontra entrambe e quindi due coppie di raggi l'una delle quali tagli r e t, l'altra t ed s, si avrà generalmente che:

Un verso è assegnato in un fascio quando di due raggi non allineati sia detto quale precede e quale segue, indipendentemente dalla scelta di questi raggi e dalla trasversale ausiliaria. In ogni trasversale, risulta determinato un verso; e se due di esse incontrano la retta di un raggio m *nei punti* M, M′ *i punti che nei versi rispettivi seguono* M *e* M′ *stanno dalla stessa banda o da bande opposte di quella retta secondochè* M *e* M′ *sono sullo stesso raggio o su raggi opposti.*

3. Le considerazioni precedenti si estendono immediatamente, sia per proiezione, sia per analogia a definire i versi in un fascio di piani: un verso $\overrightarrow{\alpha\beta}$ sarà cioè definito nel fascio quando siano fissati in esso due semipiani α, β non complanari e alla definizione servirà una retta ausiliaria che incontri i due semipiani medesimi.

4. *Dati in un piano due fasci di raggi* O, O′ *ed una retta* r *non passante per* O *nè per* O′ *si dicono concordi rispetto alla* r *due versi assegnati sui due fasci quando determinano sulla* r *versi uguali o opposti secondochè* r *non taglia o taglia il segmento* OO′. *Nell' inversa ipotesi si dicono discordi.*

Poichè una retta taglia due o nessun lato d'un triangolo si ha tosto che se *i versi di due fasci di raggi sono concordi o discordi al verso di un terzo fascio rispetto ad una stessa retta, son concordi fra loro rispetto ad essa.*

Se la retta r taglia la OO′ in un punto M fuori del segmento OO′, e se rispetto ad essa i due fasci sono concordi, i punti che seguono M nei versi determinati su r dai due fasci stanno dalla stessa banda della OO′: se un'altra retta r' incontra la OO′ in M′ ciascuno dei due fasci vi determina un verso in cui i punti seguenti M′ stanno da questa stessa banda se M e M′ appartengono allo stesso suo raggio, dalla banda opposta se appartengono a raggi opposti (n. 2, 4°). Segue che i due versi su r' saranno ancora concordi se r' non taglia il segmento OO′, discordi nel caso contrario: quindi i due fasci sono ancora concordi rispetto a r'.

Se la r o la r' non tagliano la retta OO′, si consideri un terzo fascio O″ tale che le rette OO″ e O′O″ incontrino r e r'': tenendo conto della precedente osservazione circa i versi di tre fasci, si potrà concludere in generale che

Il giudizio sulla concordia o discordia dei versi di due fasci di raggi è indipendente dalla retta ausiliaria.

5. Dati nello spazio due fasci di piani di assi σ, σ', e una retta r che non li incontri, e assegnati sui due assi due versi $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ e nei fasci due versi, si dicono questi due versi *concordi rispetto alla r e ai versi $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ quando, secondochè i due versi $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ determinano lo stesso verso o versi opposti nel fascio che ha per asse la retta* r, *essi determinano sulla* r *lo stesso verso o versi opposti*; nel caso contrario si dicono *discordi.*

Si conduca per la retta r un piano che incontri gli assi σ, σ' in due punti O, O′; esso segherà i due fasci di piani in due fasci di raggi nei quali saranno definiti i versi per sezione, dai versi assegnati nei fasci di piani. Tenendo conto dell'osservazione finale del n. 2 applicata (secondo è notato nel n. 3) al fascio di piani di asse r e della definizione del n. 4, si vede che se i fasci σ, σ' sono concordi rispetto alla retta r e ai versi $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$, i due fasci O, O′ risulteranno concordi o discordi rispetto alla r secondochè i punti che nei versi $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ seguono rispettivamente O, O′ stanno dalla stessa banda del piano o da bande opposte. Ma il giudizio sulla concordia o discordia dei versi nei fasci O, O′ è indipendente dalla scelta della retta r nel piano; quindi il giudizio sulla concordia o discordia dei versi nei fasci σ, σ', rispetto ai versi $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ è il medesimo rapporto alla retta r e ad ogni altra retta che stia con r in un piano che incontri i due assi.

Date due rette qualunque r, r' si può in infiniti modi determinare una terza retta r'' che coll'una e coll'altra sia in un piano che seghi σ e σ'; dunque in generale:

Il giudizio sulla concordia o discordia dei versi di due fasci di piani, rispetto a due versi assegnati rispettivamente sui loro assi, è indipendente dalla scelta della retta ausiliaria.

Risulta immediatamente dalla definizione che *se due versi assegnati in due fasci σ, σ' sono concordi rispetto a due versi assegnati sui loro assi, risultano discordi rispetto ad uno di questi versi e all'opposto dell'altro.* La relazione di concordia o discordia di due fasci è quindi inalterata se si mutano insieme il verso in uno dei fasci ed il verso sul suo asse; con un tal cambiamento si può sempre disporre in modo che per una data retta ausiliaria r, i versi sui due assi determinino lo stesso verso nel fascio di piani di asse r: i versi nei due fasci sono allora concordi quando sulla r determinano lo stesso verso. Dopo ciò è evidente che *se sugli assi* $\sigma, \sigma', \sigma''$ *di tre fasci sono assegnati rispettivamente i versi* $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}', \vec{\sigma}''$ *e se due versi assegnati nei fasci* σ' *e* σ'' *sono concordi o discordi od un verso dato in* σ *rapporto ai versi* $\vec{\sigma}'$ *e* $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}''$ *e* $\vec{\sigma}$, *quei due versi saranno concordi fra loro rispetto ai versi* $\vec{\sigma}'$ *e* $\vec{\sigma}''$.

6. Uguaglianza diretta e inversa delle figure. — Si dicono uguali due figure fra cui possa stabilirsi una corrispondenza *(corrispondenza d'eguaglianza)* per la quale ad ogni segmento corrisponda un segmento uguale. Si deduce notoriamente che la corrispondenza d'uguaglianza è ordinata e si può quindi parlare di versi omologhi su rette e fasci omologhi: sono i versi in cui si ordinano gli elementi corrispondenti. Onde tosto: se in una figura i versi di due fasci di piani sono concordi (o discordi) rispetto a dati versi sui loro assi, su una figura uguale i versi omologhi dei due fasci corrispondenti sono pure concordi (o discordi) rispetto ai versi omologhi ai versi dati sugli assi.

Nelle due figure uguali F ed F' si considerino i fasci o, p e i fasci corrispondenti o', p', e sugli assi si considerino i versi $\vec{o}, \vec{p}$ e gli omologhi $\vec{o}', \vec{p}'$ e parimenti nei fasci medesimi i versi omologhi: secondochè i versi dei fasci o e p sono concordi o discordi rispetto ai versi $\vec{o}$ e $\vec{p}$, saran dunque concordi o discordi rispetto a $\vec{o}'$ e $\vec{p}'$ i versi di o' e p', onde saranno fra loro concordi o discordi p e p' rispetto ai versi omologhi $\vec{p}$ e $\vec{p}'$ secondochè rispetto a $\vec{o}$ e $\vec{o}'$ sono concordi o discordi o ed o' (cfr. la fine del n. 5); vale a dire che *in figure uguali i versi omologhi in ogni coppia di fasci corrispondenti sono concordi o discordi secondochè tali sono i versi in una coppia di fasci corrispondenti qualunque.* Le due figure si dicono uguali *direttamente* nel primo caso, *inversamente* nel secondo.

7. Il criterio esposto si applica immediatamente a giudicare della natura delle trasformazioni elementari d'uguaglianza: traslazione, rotazione, simmetria. (Si noti che si parla qui delle trasformazioni geometriche, non di movimenti.)

Nella traslazione si mutano in se stessi i piani dei fasci il cui asse è parallelo alla direzione della traslazione; e un verso assegnato su una di queste rette ha per omologo il verso medesimo: per questi fasci avviene dunque che versi omologhi sono concordi. *Figure corrispondenti per una traslazione sono direttamente uguali.*

Nella rotazione si muta in se stesso il fascio avente per asse l'asse di rotazione, e un verso assegnato su quest'asse resta immutato mentre si muta in se stesso un verso assegnato nel fascio. I due fasci corrispondenti aventi quest'asse sono dunque concordi. *Figure corrispondenti per una rotazione sono direttamente uguali.*

Nella simmetria rispetto a un piano si trasformano in se stessi i piani di un fascio qualunque il cui asse sia perpendicolare al piano di simmetria, ma un verso assegnato su questo asse ha per omologo il verso contrario: i due fasci corrispondenti sono discordi. *Figure corrispondenti per una simmetria sono inversamente uguali.* (*)

8. Si dice che due figure finite uguali possono condursi l'una sull'altra con un movimento quando si può costruire una successione di figure uguali alle date di cui siano prima ed ultima figura le due date, per modo che la massima distanza fra due punti omologhi in figure successive non superi un segmento assegnabile ad arbitrio.

Se due figure possono condursi l'una sull'altra con un movimento, esse possono pure trasformarsi l'una nell'altra mediante una serie di traslazioni e di rotazioni e quindi sono direttamente uguali.

Occorre considerare figure non piane: per le figure piane la proposizione è illusoria poichè è noto che due figure piane simmetriche possono trasformarsi l'una nell'altra mediante una rotazione nello spazio.

Siano dunque F, F_1 due figure uguali non piane che si conducono l'una sull'altra mediante un movimento. Siano f, f' due figure consecutive della serie che, per ipotesi, si può interpolare fra F e F' e siano $abcd$, $a'b'c'd'$ due loro tetraedri omologhi. Si supponga che la distanza fra vertici omologhi dei due tetraedri sia $\leqslant \sigma$: sia ρ la distanza di b e c dalla mediana del triangolo abc uscente da a, δ la distanza di d dal piano abc, λ la lunghezza di ad.

Mediante una traslazione che porti a in a' si trasformi f in una nuova figura f'' in cui ad $abcd$ corrisponda $a'b''c''d''$. Le distanze dei vertici omologhi di $a'b'c'd'$ e di $a'b''c''d''$ saranno $\leqslant 2\sigma$. Mediante una rotazione intorno ad a' si muti f'' in f''' per modo che siano omologhi b'' e b', c'' e c'; $a'b''c''d''$ si trasformi così in $a'b'c'd'''$; l'asse di rotazione passerà per a' e la massima delle distanze di esso da b'' e b' e da c'' e c' sarà $\geqslant \rho$, e la sua distanza da d'' e $d''' \leqslant \lambda$. La distanza $d''d'''$ sarà quindi, da una semplice considerazione di similitudine, $\leqslant \frac{\lambda \cdot 2\sigma}{\rho}$ e quindi la distanza $d'd'''$ sarà $\leqslant 2\sigma\left(\frac{\lambda}{\rho}+1\right)$. I due tetraedri $a'b'c'd'''$, $a'b'c'd'$ avranno il piano unito $a'b'c'$; quindi d' e d''' coincidono o sono

(*) Tra altre applicazioni si può notare la seguente semplicissima: *triedri opposti al vertice sono inversamente uguali,* perchè la simmetria rispetto a un punto muta in se stessi i piani pel punto, ma inverte i versi sulle rette per esso.

simmetrici rispetto ad $a'b'c'$. Ma nella seconda ipotesi $d'd''=2\delta$; esse è dunque impossibile tosto che

$$2\delta > 2\sigma\left(\frac{\lambda}{\rho}+1\right) \qquad \text{ossia} \qquad \sigma < \frac{\delta\rho}{\lambda+\rho}.$$

Ora per ipotesi σ può rendersi piccolo a piacere, mentre δ, ρ, λ sono le lunghezze di segmenti fissi nella figura f o F. Dunque si esclude la 2ª ipotesi, e si può fra F e F_1 interpolare una successione di figure uguali, per modo che ciascuna si trasformi nella successiva mediante una traslazione e una rotazione. Per il n. 7 esse sono quindi direttamente eguali.

Reciprocamente *due figure direttamente uguali possono portarsi l'una sull'altra con un movimento.* Infatti a trasformare l'una nell'altra due figure uguali occorre al più una traslazione, una rotazione e una simmetria: ma l'ultima trasformazione non interviene se le due figure sono uguali direttamente; e ciascuna delle prime due può scomporsi in una successione rispettivamente di traslazioni e di rotazioni che spostino i punti delle figure considerate di tanto poco quanto si vuole.

BEPPO LEVI.

Piacenza, gennaio 1904.

SOPRA UNO DEI PRINCIPII INTORNO ALL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI (*)

1. Nella maggior parte dei trattati d'algebra elementare si riscontrano i seguenti fatti:

a) Si passa dall'equazione

$$ax+b=0$$

alla formola risolutiva

$$x=-\frac{b}{a},$$

escludendo l'ipotesi che a sia zero.

(*) La parte principale di quest'articolo (n.i 2 e 3) fu già da me pubblicata nel 1890, nell'opuscolo: *Esposizione di uno dei principii intorno all'equivalenza di due equazioni e considerazioni relative.* Correggio d'Emilia, tip. Palazzi. La ristampo ora qui, aggiungendovi maggiori considerazioni, affine d'insistere sopra una questione importantissima d'algebra, la quale, a mio avviso, si suole trattare ognora dai più non esattamente.

Siccome poi nel presente articolo sono considerate alcune forme singolari che assumono le espressioni algebriche, così credo bene di avvertire che nel citato mio opuscolo trovasi una trattazione elementarissima su tale argomento; la quale può essere intesa anche da chi ha appena cominciato lo studio dell'algebra.

b) Nella risoluzione dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si eccettua l'ipotesi che a sia zero.

c) Per risolvere il sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= c\,, \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

si suppone che il determinante dei coefficienti delle incognite sia diverso da zero.

Intanto si osserva che in ognuno di questi casi v'è una perfetta coincidenza fra ciò che esprimono le formole di risoluzione e ciò che avviene in effetto per le equazioni, o pel sistema, nelle ipotesi escluse. Ad esempio, considerando il sistema di due equazioni di primo grado, se $a = b = 0$ le formole risolutive assumono ciascuna la forma $\frac{m}{0}$, ed effettivamente le incognite non possono avere alcun valore finito.

Come si spiega tale coincidenza? Potrà dirsi che è fortuita, se è costante? Evidentemente la cosa non può che provenire da un falso modo d'intendere il principio relativo al moltiplicare o dividere i due membri d'un'equazione per un'espressione letterale indipendente dalle incognite; il qual principio è vero anche se la detta espressione acquista, per qualche ipotesi particolare, il valor zero. Ciò mi propongo di dimostrare più innanzi, esponendo il detto principio elementarmente in generale.

2. Anzitutto è necessario di chiarire bene che cosa deve intendersi per soluzione d'un'equazione.

Si sa che si chiamano soluzioni o radici d'un'equazione quei particolari valori, convenientemente scelti, attribuiti alle incognite, i quali, sostituiti alle medesime, la convertano in una identità. In base quindi a questa definizione, ogni soluzione d'un'equazione, contenente lettere indicanti numeri il cui valore può assegnarsi a piacimento, dovrà, sostituita alle incognite, trasformare quella in un'identità, indipendentemente da qualunque valore particolare che possa attribuirsi ad esse lettere. In tal caso, quando a queste si attribuiscano valori particolari, le soluzioni delle equazioni particolari che ne risulteranno, saranno i valori (finiti o infiniti) che vengono ad acquistare le soluzioni dell'equazione generale. (*)

(*) A proposito delle soluzioni infinite che può avere un'equazione, qualcuno è da me discorde, almeno nel modo di dire.

Si consideri, per esempio, l'equazione

$$ax - \frac{1}{a} - 1 = 0\,;$$

se per x si pone $\frac{a+1}{a^2}$ nel primo membro, si trova un'espressione che ha costantemente il valor zero per tutti i valori di a differenti da zero, e per $a = 0$ assume una forma indeterminata: non dovrà dunque dirsi che il valore di quell'espressione è anche zero in quest'ultima ipotesi? E se

Potrebbe avvenire che un' equazione particolare ottenuta, non avesse significato considerata da sola; come, per esempio, facendo $a=0$ nell' equazione

$$\frac{x^2}{a}-x-\frac{1}{a}+1=0,$$

si troverebbe

$$\frac{x^2}{0}-x-\frac{1}{0}+1=0;$$

la quale, considerata indipendentemente dalla prima, non ha senso; ma considerata come caso particolare di quella, ammette soluzioni, se essa equazione ne ammette. Come anche, se l' equazione data, ovvero un'altra ad essa equivalente, avesse un fattore letterale comune ai due membri, accadrà che, nelle ipotesi le quali rendono nullo il detto fattore, le equazioni particolari ammetteranno infinite altre soluzioni oltre quelle ricavate dalla formola generale di risoluzione; ma le dette soluzioni non dovranno riguardarsi come appartenenti a quelle equazioni, considerate come casi particolari dell' equazione generale; saranno soluzioni delle stesse, considerate da sole, cioè indipendentemente da quest' ultima equazione.

Per esempio l'equazione

$$ax+1=a+x$$

ammette l'unica soluzione $x=1$, perchè questo è evidentemente il solo valore che sostituito all'incognita la converta in un' identità, indipendentemente dal valore assegnato ad a; ora per $a=1$ essa diviene

$$x+1=1+x,$$

che è soddisfatta da qualunque valore assegnato ad x, considerata da sola; ma considerata come caso particolare dell'equazione data, ammette l'unica soluzione $x=1$. Si osservi che la prima equazione è equivalente a quest'altra

$$ax-x=a-1,$$

i cui membri hanno per fattore comune $a-1$; onde si comprende come, nell' ipotesi di $a=1$, l'equazione particolare, sia soddisfatta da qualunque valore assegnato ad x.

Il caso ultimo considerato è analogo a quello di un'espressione, che assume per un' ipotesi particolare la forma $\frac{0}{0}$, mentre poi il suo

---

ciò è, non dovrà dirsi che è soluzione di quell' equazione, nell' ipotesi di $a=0$, il valore (finito o infinito, determinato o no) che acquista la formola generale di risoluzione, facendo in essa la detta ipotesi?

Veggasi anche BALTZER, *Algebra*, trad. del Cremona, pag. 43.

Si può poi osservare che il ragionamento, precedente, sussistendo per ogni soluzione d'un'equazione, i cui coefficienti sieno letterali, costituisce in sostanza una dimostrazione a priori della coincidenza costante, cui ho accennato da principio, fra ciò che avviene per le equazioni e ciò che esprimono le corrispondenti formole generali risolutive.

valore è determinato; la forma indeterminata, considerata da sola, rappresenta qualunque numero; ma considerata come caso particolare del valore che assume quell'espressione, rappresenta un determinato numero.

È superfluo il dire che analoghe considerazioni si debbono fare relativamente alle soluzioni dei sistemi d'equazioni.

3. Siano ora le due equazioni

$$A = B, \qquad Am = Bm,$$

ovvero le due a queste equivalenti

$$A - B = 0, \quad (1) \qquad (A - B)\,m = 0, \quad (2)$$

in cui m può designare un numero determinato, ovvero un'espressione algebrica non contenente o contenente le incognite. Si vuole esaminare che cosa deve dirsi in ciascuno di questi casi relativamente all'equivalenza di quelle equazioni.

Prescindendo dal primo caso, pel quale le cose sono chiare, supponiamo che m sia un'espressione algebrica non contenente le incognite.

In tal caso, essendo soluzioni della (2) solo quei valori delle incognite che rendono nullo il suo primo membro, indipendentemente da qualunque valore particolare che possa assegnarsi ad m, ognuna di quelle soluzioni non può che rendere pur tale anche il primo membro della (1); perciò le due equazioni ammettono le stesse soluzioni e sono equivalenti.

Sia m un'espressione contenente le incognite, la quale per semplicità supporremo intera rispetto ad esse (il caso che fosse frazionaria potrà dedursi in seguito):

Se m è tale, la (2) sarà certamente conseguenza della (1). Affinchè poi questa sia conseguenza di quella, e sieno quindi equivalenti le due equazioni, è necessario che la (2) non sia soddisfatta da alcuna soluzione dell' equazione

$$m = 0\,; \quad (3)$$

perchè, se ciò fosse, supposto anche che quelle soluzioni appartengano alla (1), la (2) ammetterebbe sempre un numero di radici maggiore di quello che ammette la (1); essa avrebbe per soluzioni quelle della (1) e parte o tutte quelle della (3); l' operazione della moltiplicazione avrebbe, come si dice, introdotto delle radici *estranee,* appartenenti a quest' ultima equazione.

Vediamo ora quando la (2) può non essere soddisfatta da alcuna soluzione della (3).

Consideriamo una soluzione di quest' equazione: se essa fa acquistare un valore finito all'espressione A — B, farà certamente acquistare il valor zero al prodotto

$$(A - B)\,m,$$

e sarà soluzione della (2); ma se la detta soluzione facesse acquistare ad A — B un valore infinito, come potrebbe accadere se questa fosse un' espressione frazionaria rispetto alle incognite, allora il detto prodotto verrebbe ad assumere la forma indeterminata $\infty \times 0$, la quale, come si sa, può rappresentare un determinato numero qualunque, e si comprende che in tal caso quella soluzione potrebbe non soddisfare all'equazione (2); è chiaro anzi che avverrà allora in generale così.

Esempio. — Sieno le due equazioni

$$\frac{x}{x-1} = 0, \qquad \frac{x}{x-1}(x^2-1) = 0;$$

la seconda delle quali può scriversi

$$x(x+1) = 0.$$

L' equazione

$$x^2 - 1 = 0$$

ammette evidentemente le due soluzioni -1 e $+1$: la prima di queste, perchè fa acquistare il valor finito $\frac{1}{2}$ all' espressione

$$\frac{x}{x-1},$$

fa acquistare il valor zero al prodotto

$$\frac{x}{x-1}(x^2-1),$$

ed è soluzione della seconda equazione; la seconda invece fa acquistare a quell' espressione un valor infinito, e il prodotto ora considerato assume la forma $\infty \times 0$, la quale, come si vede, ha il valore 2; perciò essa non è radice della seconda equazione. Adunque le due equazioni date non sono equivalenti; la seconda ammette le soluzioni della prima e la radice $x = -1$ dell' equazione

$$x^2 - 1 = 0.$$

Riassumendo le cose precedenti si può enunciare il principio seguente:

Moltiplicando i due membri d' un' equazione per un numero determinato diverso da zero, si ottiene un' equazione equivalente alla data. Se il moltiplicatore è un' espressione algebrica non contenente le incognite, l' equazione ottenuta è sempre equivalente alla data. Se il moltiplicatore è un'espressione contenente le incognite, e intera rispetto a queste, l'equazione ottenuta è equivalente alla data, quand' essa non sia soddisfatta *per nessuno dei valori delle incognite, che sono soluzioni dell' equazione formata eguagliando a zero il moltiplicatore.*

Da questo principio se ne deduce subito un altro relativo alla divisione dei due membri d'un'equazione per un numero determinato o per un'espressione algebrica.

4. Si comprende ora come sia affatto naturale la coincidenza costante, di cui ho parlato antecedentemente, fra ciò che avviene per le equazioni, o pei sistemi, e ciò che esprimono le rispettive formole generali risolutive, nei casi che si sogliono comunemente eccettuare per giungere a queste formole.

A proposito di tale coincidenza considererò i due casi seguenti, i quali, nel campo dell'algebra che s'insegna nelle scuole medie, sono, parmi, i più degni di nota:

a) Per le equazioni di secondo grado equivalenti

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

se $a=0$, la formola generale di risoluzione dà

$$x'=\frac{-2b}{0}, \qquad x''=\tfrac{0}{0};$$

e deve dirsi che nella detta ipotesi le equazioni sono soddisfatte da un valore infinito di x e da un altro che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$. Quest'ultimo non può che essere uguale a $-\frac{c}{b}$, soluzione dell'equazione

$$bx+c=0,$$

perchè tale soluzione, rendendo nullo il termine ax^2, soddisfa alla prima delle due equazioni. Trasformando l'espressione che assume la forma $\frac{0}{0}$ in un'altra equivalente, si trova appunto il valore $-\frac{c}{b}$.

Si scorge da ciò quanto sia poco corretto il dire, come per solito si fa, che l'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

diviene, per $a=0$, l'equazione

$$bx+c=0.$$

Così dicendo, infatti, si viene in sostanza ad affermare che i due valori dell' incognita dell'equazione di secondo grado, per a tendente a zero, convergono verso lo stesso limite $-\frac{c}{b}$, contrariamente a quanto succede in effetto. (*)

(*) Si afferma da qualcuno che il concetto di grado d'un'equazione presuppone che non sia zero il coefficiente della potenza di massimo esponente dell'incognita, nel polinomio ordinato che costi-

b) Pel sistema

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c'$$

si trova che le formole generali risolutive divengono, se $a = a' = 0$,

$$x = \frac{cb' - c'b}{0}, \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Ora se a e a' sono solamente eguali, si ha, dicendo p il loro valore comune,

$$x = \frac{cb' - c'b}{p(b' - b)}, \qquad y = \frac{c' - c}{b' - b};$$

donde apparisce che nel caso di $a = a' = 0$ il sistema è soddisfatto da un valore infinito di x e dal soprascritto valore finito di y. Se fosse $b' = br$, $c' = cr$ i valori delle incognite diverrebbero

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{c}{b};$$

e all'incognita x si potrebbe effettivamente assegnare un valore finito qualunque.

Comunemente invece questo caso si suole trattare come segue:

“ Se $a = a' = 0$ il sistema diviene

$$by = c, \qquad b'y = c';$$

e tali equazioni sono fra loro incompatibili se non è $b' = br$, $c' = cr$ „.

Secondo me, tale modo di vedere le cose è inesatto; perchè, così dicendo, si viene in sostanza ad affermare che, nell'ipotesi di $a = a' = 0$, si può attribuire all'incognita x un valore finito qualunque; mentre ciò non è; poichè, per a e a' tendenti a zero, il valore assoluto della detta incognita cresce superando qualunque numero assegnato: inoltre, che cosa dovrà dirsi che significa il limite finito e determinato cui tende il valore di y? Evidentemente, solo quando si abbia ad un tempo $a = a' = 0$, $b' = br$, $c' = cr$, si può dire che il primo sistema diviene il secondo.

R. Grilli.

Treviso, febbraio 1904.

---

tuisce il suo primo membro e che quindi, nel caso dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, non si può supporre $a = 0$ senza abbassarla di grado. Se così non fosse, si aggiunge, ogni equazione algebrica sarebbe di quel grado elevato che si vuole.

Evidentemente le cose non stanno così. Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è di secondo grado per tutti i valori di a tendenti a zero, perchè non sarà dello stesso grado anche pel valore limite di a? Inoltre, non saranno soluzioni di quella equazione, nel caso del detto valor limite, i valori limiti che assumono le formole generali di risoluzione? — Quanto poi alla cosidetta confusione dei gradi sovraccennata, mi pare che non sia neanche il caso di parlarne.

SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

Triangolo delle differenze e relazioni fondamentali.

1. Si abbiano $m+1$ quantità affatto indipendenti l'una dall'altra:

$$a_0\,,\ a_1\,,\ldots,a_r\,,\ldots,a_{m-1}\,,\ a_m\,, \tag{1}$$

e si formino successivamente le differenze dei diversi ordini fino a $\Delta^m a_0$, disponendole per linea in modo che la serie

$$\Delta^0 a_0\,,\ \Delta' a_0\,,\ldots,\Delta^m a_0$$

si trovi per diagonale verso destra, e la serie

$$\Delta^0 a_m\,,\ \Delta' a_{m-1}\,,\ldots,\Delta^m a_0$$

si trovi per diagonale verso sinistra.

La diagonale verso destra o discendente è la serie delle differenze di a_0, e le tre serie

$$\begin{array}{l}
\Delta^0 a_0\,,\ \Delta^0 a_1\,,\ldots\ldots,\Delta^0 a_m\,,\\
\Delta^0 a_0\,,\ \Delta' a_0\,,\ldots\ldots,\Delta^m a^0\,,\\
\Delta^0 a_m\,,\ \Delta' a_{m-1}\,,\ldots,\Delta^m a_0\,,
\end{array}$$

insieme con tutti i termini fra esse compresi, costituiscono il triangolo delle differenze di a_0.

Questo triangolo può figurarsi col seguente schema:

$$\begin{array}{c}
\Delta^0 a_0\,,\ \Delta^0 a_1\,,\ldots,\Delta^0 a_r\,,\ldots,\Delta^0 a_{m-r}\,,\ldots,\Delta^0 a_{m-1}\,,\ \Delta^0 a_m\,,\\
\Delta' a_0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \Delta' a_{m-1}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\Delta^r a_0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \Delta^r a_{m-r}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\Delta^{m-r} a_0\,,\ \ldots,\ \Delta^{m-r} a_r\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\Delta^{m-1} a_0\,,\ \Delta^{m-1} a_0\,,\\
\Delta^m a_0\,,
\end{array} \tag{2}$$

essendo opportuna una doppia espressione del termine generale, secondo il progredire dall'un senso all'altro e potendo attribuirsi ad r tutti i valori, interi e positivi, da 0 ad m, $(0 \leq r \leq m)$.

2. Le seguenti tre formole fondamentali:

$$\Delta^r a_0 = (m-r)_0\,\Delta^r a_{m-r} - (m-r)_1\,\Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-r}(m-r)_{m-r}\,\Delta^m a_0 = \sum_{i=0}^{m-r}(-1)^i (m-r)_i\,\Delta^{r+i} a_{m-r-i}\,, \tag{3}$$

$$\Delta^r a_{m-r} = (m-r)_0\,\Delta^r a_0 + (m-r)_1\,\Delta^{r+1} a_0 + \dots$$
$$\dots + (m-r)_{m-r}\,\Delta^m a_0 = \sum_{i=0}^{m-r}(m-r)_i\,\Delta^{r+i} a_0\,, \tag{4}$$

$$\Delta^m a_0 = (m-r)_0\,\Delta^r a_{m-r} - (m-r)_1\,\Delta^r a_{m-r-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-r}(m-r)_{m-r}\,\Delta^r a_0 = \sum_{i=0}^{m-r}(-1)^i (m-r)_i\,\Delta^r a_{m-r-i}\,, \tag{5}$$

si dimostrano facilmente per mezzo della nota relazione fra i coefficienti binomiali:

$$(m-r-1)_i + (m-r-1)_{i-1} = (m-r)_i\,. \tag{α}$$

Esse sono intimamente legate fra di loro, così che la conoscenza di una qualunque implica la determinazione delle altre due e possono riguardarsi come la estensione dell'unica formula $b-a=c$, da cui deducesi $b-c=a$ e $a+c=b$, ed a questa effettivamente si riducono per $m-r=1$.

Per la legge di formazione delle differenze si ha:

$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_0\,,$$
$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_1 - \Delta^{r+1} a_0\,,$$
$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_2 - \Delta^{r+1} a_1 - (\Delta^{r+1} a_1 - \Delta^{r+2} a)_0 = \Delta^r a_2 - 2\Delta^{r+1} a_1 + \Delta^{r+2} a_0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$

ovvero:

$$\Delta^r a_{m-r} \;= \Delta^r a_{m-r}\,,$$
$$\Delta^r a_{m-r-1} = \Delta^r a_{m-r} - \Delta^{r+1} a_{m-r-1}\,,$$
$$\Delta^r a_{m-r-2} = \Delta^r a_{m-r} - \Delta^{r+1} a_{m-r-1} - (\Delta^{r+1} a_{m-r-1} - \Delta^{r+2} a_{m-r-2}) =$$
$$= \Delta^r a_{m-r} - 2\Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \Delta^{r+2} a_{m-r-2}\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$

ovvero:

$$\Delta^m a_0 \;= \Delta^m a_0\,,$$
$$\Delta^{m-1} a_0 = \Delta^{m-1} a_1 - \Delta^m a_0\,,$$
$$\Delta^{m-2} a_0 = \Delta^{m-2} a_2 - \Delta^{m-1} a_1 - (\Delta^{m-1} a_1 - \Delta^m a_0) = \Delta^{m-2} a_2 - 2\Delta^{m-1} a_1 + \Delta^m a_0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$

le quali relazioni si possono tutte ugualmente ricavare da (3), ponendo $m-r=0, 1, 2, \dots$.

Ammessa pertanto la formola (3) per $m-r-1$, si ottiene:

$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_1 - \Delta^{r+1} a_0 = (m-r-1)_0\,\Delta^r a_{m-r} - (m-r-1)_1\,\Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^i (m-r-1)_i\,\Delta^{r+i} a_{m-r-i} + \dots + (-1)^{m-r-1}(m-r-1)_{m-r-1}\,\Delta^{m-1} a_1 -$$
$$- (m-r-1)_0\,\Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \dots + (-1)^i (m-r-1)_{i-1}\,\Delta^{r+i} a_{m-r-i} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-r-1}(m-r-1)_{m-r-2}\,\Delta^{m-1} a_1 + (-1)^{m-r}(m-r-1)_{m-r-1}\,\Delta^m a_0\,,$$

cambiando il segno del sottraendo con aumentare di 1 l'esponente di -1; riducendo per colonna, la colonna $(i+1)^{ma}$ per la relazione (α) sarà:

$$(-1)^i (m-r)_i \, \Delta^{r+i} a_{m-r-i} ,$$

e variando i da 0 ad $m-r$ si ricava precisamente la formola (3).

Così pure per la stessa legge di formazione delle differenze, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r} , \\ \Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r-1} + \Delta^{r+1} a_{m-r-1} , \\ \Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r-2} + \Delta^{r+1} a_{m-r-2} + \Delta^{r+1} a_{m-r-2} + \Delta^{r+2} a_{m-r-2} = \\ &= \Delta^r a_{m-r-2} + 2\Delta^{r+1} a_{m-r-2} + \Delta^{r+2} a_{m-r-2} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \Delta^r a_0 &= \Delta^r a_0 , \\ \Delta^r a_1 &= \Delta^r a_0 + \Delta^{r+1} a_0 , \\ \Delta^r a_2 &= \Delta^r a_0 + \Delta^{r+1} a_0 + \Delta^{r+1} a_0 + \Delta^{r+2} a_0 = \Delta^r a_0 + 2\Delta^{r+1} a_0 + \Delta^{r+2} a_0 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \Delta^m a_0 &= \Delta^m a_0 , \\ \Delta^{m-1} a_1 &= \Delta^{m-1} a_0 + \Delta^m a_0 , \\ \Delta^{m-2} a_2 &= \Delta^{m-2} a_0 + \Delta^{m-1} a_0 + \Delta^{m-1} a_0 + \Delta^m a_0 = \Delta^{m-2} a_0 + 2\Delta^{m-1} a_0 + \Delta^m a_0 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}$$

le quali relazioni si possono tutte ugualmente ricavare da (4), ponendo $m-r=0, 1, 2, \ldots$.

Ammessa pertanto la formola (4) per $m-r-1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r-1} + \Delta^{r+1} a_{m-r-1} = (m-r-1)_0 \Delta^r a_0 + (m-r-1)_1 \Delta^{r+1} a_0 + \ldots \\ &\ldots + (m-r-1)_i \Delta^{r+i} a_0 + \ldots + (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^{m-1} a_0 + (m-r-1)_0 \Delta^{r+1} a_0 + \ldots \\ &\ldots + (m-r-1)_{i-1} \Delta^{r+i} a_0 + \ldots + (m-r-1)_{m-r-2} \Delta^{m-1} a_0 + (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^m a_0 ; \end{aligned}$$

riducendo per colonna, la colonna $(i+1)^{ma}$ per la relazione (α) sarà:

$$(m-r)_i \, \Delta^{r+i} a_0 ,$$

e variando i da 0 a $m-r$ si ricava precisamente la formola (4).

Così pure per la stessa legge di formazione delle differenze si ha:

$$\begin{aligned} \Delta^m a_0 &= \Delta^m a_0 , \\ \Delta^m a_0 &= \Delta^{m-1} a_1 - \Delta^{m-1} a_0 , \\ \Delta^m a_0 &= \Delta^{m-2} a_2 - \Delta^{m-2} a_1 - (\Delta^{m-2} a_1 - \Delta^{m-2} a_0) = \Delta^{m-2} a_2 - 2\Delta^{m-2} a_1 + \Delta^{m-2} a_0 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_0 &= \Delta^r a_0 , \\
\Delta^{r+1} a_0 &= \Delta^r a_1 - \Delta^r a_0 , \\
\Delta^{r+2} a_0 &= \Delta^r a_2 - \Delta^r a_1 - (\Delta^r a_1 - \Delta^r a_0) = \Delta^r a_2 - 2\Delta^r a_1 + \Delta^r a_0 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r} , \\
\Delta^{r+1} a_{m-r-1} &= \Delta^r a_{m-r} - \Delta^r a_{m-r-1} , \\
\Delta^{r+2} a_{m-r-2} &= \Delta^r a_{m-r} - \Delta^r a_{m-r-1} - (\Delta^r a_{m-r-1} - \Delta^r a_{m-r-2}) = \\
&= \Delta^r a_{m-r} - 2\Delta^r a_{m-r-1} + \Delta^r a_{m-r-2} , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

le quali relazioni si possono tutte ugualmente ricavare da (5) ponendo $m-r=0, 1, 2, \ldots .$

Ammessa pertanto la formola (5) per $m-r-1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta^m a_0 = \Delta^{m-1} a_1 - \Delta^{m-1} a_0 = (m-r-1)_0 \Delta^r a_{m-r} - (m-r-1)_1 \Delta^r a_{m-r-1} + \ldots \\
\ldots + (-1)^i (m-r-1)_i \Delta^r a_{m-r-i} + \ldots + (-1)^{m-r-1} (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^r a_1 - \\
- (m-r-1)_0 \Delta^r a_{m-r-1} + \ldots + (-1)^i (m-r-1)_{i-1} \Delta^r a_{m-r-i} + \ldots \\
\ldots + (-1)^{m-r-1} (m-r-1)_{m-r-2} \Delta^r a_1 + (-1)^{m-r} (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^r a_0 ,
\end{aligned}$$

cambiando il segno del sottraendo con aumentare di 1 l'esponente di -1; riducendo per colonna, la colonna $(i+1)^{ma}$ per la relazione (α) sarà:

$$(-1)^i (m-r)_i \Delta^r a_{m-r-i} ,$$

e variando i da 0 a $m-r$ si ricava precisamente la formola (5).

3. Sulla costituzione delle formole (3), (4) e (5) si può osservare:

α) esse sono polinomi di $m-r+1$ termini di cui nessun coefficiente può annullarsi;

β) esse dipendono da $m-r$ in quanto è differenza degl'indici sia delle a che delle Δ, e possono quindi riguardarsi come funzioni formali di tali indici;

γ) una qualunque di esse è necessaria e sufficiente a determinare tutti e solamente i termini del triangolo delle differenze, che sono in tutto $\binom{m-r+2}{2}$;

δ) perchè $m-r+1$ termini del triangolo delle differenze di $\Delta^r a_0$ possano determinare tutti gli altri, è necessario e sufficiente che siano consecutivi (contigui), sia per linea sia per diagonale, indipendenti l'uno dall'altro, e che ve ne sia almeno uno della prima linea Δ^r; in generale t termini $(t \leq m-r+1)$ determinano il triangolo che li inviluppa partendo dalla linea più in alto;

ε) la sostituzione dei valori ricavati da una delle tre formule in un'altra dà luogo, naturalmente, a delle identità; così ad esempio, sostituendo in (5) i valori ricavati da (4), il coefficiente di $\Delta^{r+i}a_0$ sarà:

$$(m-r)_0(m-r)_i-(m-r)_1(m-r-1)_{i-1}+\ldots+(-1)^i(m-r)_i(m-r-i)_0$$

che si annulla sempre per $i>0$, potendo scriversi:

$$(m-r)_i\,[(i)_i-(i)_{i-1}+\ldots+(-1)^i\,(i)_0]\,,$$

e per $i=0$, dovendo essere $m=r$, si ha $\Delta^m a_0=\Delta^m a_0$.

Differenze dei diversi ordini e delle diverse classi.

4. Le $m+1$ quantità affatto indipendenti l'una dall'altra (1):

$$a_0\,,\ a_1\,,\ldots,\,a_m\,,$$

si possono considerare come le differenze d'ordine zero di a_0 e si rappresentano coi simboli

$$\Delta_0^0\,,\ \Delta_0^1\,,\ldots,\,\Delta_0^m\,,$$

indicando con l'indice inferiore l'ordine e con l'indice superiore la classe.

L'ordinaria serie delle differenze di a_0 forma le differenze d'ordine uno di a_0, cioè

$$\Delta_1^0\,,\ \Delta_1^1\,,\ldots,\,\Delta_1^m.$$

Formando le differenze del primo termine Δ_1^0 di quest'ultima serie, si ottengono le differenze d'ordine due di a_0, cioè

$$\Delta_2^0\,,\ \Delta_2^1\,,\ldots,\,\Delta_2^m.$$

In generale la serie delle differenze del primo termine Δ_{p-1}^0 della serie delle differenze d'ordine $p-1$ di a_0 forma le differenze d'ordine p di a_0 cioè

$$\Delta_p^0,\ \Delta_p^1,\ldots,\,\Delta_p^m.$$

Con tale notazione le relazioni fondamentali (4) e (5), per $r=0$, si scrivono

$$\Delta_0^m=(m)_0\Delta_1^0+(m)_1\Delta_1^1+\ldots+(m)_m\Delta_1^m=[1+\Delta_1]^m,$$
$$\Delta_1^m=(m)_0(-1)^m\Delta_0^0+(m)_1(-1)^{m-1}\Delta_0^1+\ldots+(m)_m(-1)^0\Delta_0^m=[-1+\Delta_0]^m.$$

Si definisca la differenza di classe m e d'ordine -1 con la relazione:

$$\Delta_{-1}^m=(m)_0\Delta_0^0+(m)_1\Delta_0^1+\ldots+(m)_m\Delta_0^m=[1+\Delta_0]^m\,,$$

e, in generale, la differenza di classe m e d'ordine $-q$ con la relazione:

$$\Delta^m_{-q} = (m)_0\Delta^0_{-q+1} + (m)_1\Delta^1_{-q+1} + \ldots + (m)_m\Delta^m_{-q+1} = [1+\Delta_{-q+1}]^m.$$

Evidentemente le due indicate relazioni fondamentali fra le differenze d'ordine zero ed uno, sussistono fra due qualunque consecutivi ordini e quindi si ha sempre

$$\Delta^m_s = [1+\Delta_{s+1}]^m,$$
$$\Delta^m_{s+1} = [-1+\Delta_s]^m,$$

per tutt'i valori interi di s, positivi e negativi compreso lo zero; si deve osservare che 1 e -1 sono le differenze fra gl'indici inferiori delle Δ, essendo il sottraendo l'ordine che si vuol determinare.

Si possono dunque considerare le differenze di a_0 secondo i diversi ordini e secondo le diverse classi, cioè:

$$\begin{array}{c}
\Delta^0_{-q}, \ \Delta^1_{-q}, \ldots, \Delta^m_{-q}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^0_0; \ \Delta^1_0, \ldots, \Delta^m_0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^0_p, \ \Delta^1_p, \ldots, \Delta^m_p.
\end{array}$$

Tali differenze possono immaginarsi disposte a raggiera attorno al termine a_0, perchè:

$$\Delta^0_{-q} = \ldots = \Delta^0_{-1} = \Delta^0_0 = \Delta^0_1 = \ldots = \Delta^0_p = a_0.$$

5. Si può esprimere Δ^m_0 sia in funzione della serie delle differenze d'ordine p, sia in funzione della serie delle differenze d'ordine $-q$, e si può esprimere tanto Δ^m_p quanto Δ^m_{-q} in funzione della serie delle differenze d'ordine zero; più generalmente, data una serie di differenze di a_0 d'un qualunque ordine, si può determinare la differenza emmesima d'un qualunque ordine d'indice superiore o inferiore, per mezzo delle due seguenti formole simboliche

$$\Delta^m_{p+s} = [-p + \Delta_s]^m, \qquad (6)$$
$$\Delta^m_s = [p + \Delta_{p+s}]^m. \qquad (7)$$

Esse per $s=0$ e $p=1$ si riducono alle relazioni fondamentali (4) e (5); per $m=0$ si riducono a

$$\Delta^0_{p+s} = (0)_0 (-p)^0\Delta^0_s,$$
$$\Delta^0_s = (0)_0 (p)^0\Delta^0_{p+s},$$

cioè tutt'e due ad a_0 ch'è il centro della raggiera; nell'uno e nell'altro caso p è la differenza degli ordini.

Le formole (6) e (7) si possono direttamente verificare pei primi valori di p e di m; così per $p=0, 1, 2, 3, 4$ e $m=0, 1, 2, 3$, si può effettivamente, per mezzo della legge di formazione delle differenze, ottenere, il seguente quadro:

	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
Δ_0	a_0	a_1	a_2	a_3
Δ_1	a_0	$a_1 - 1.a_0$	$a_2 - 1\,2.a_1 + 1^2.a_0$	$a_3 - 1.3.a_2 + 1^2.3.a_1 - 1^3.a_0$
Δ_2	a_0	$a_1 - 2.a_0$	$a_2 - 2.2.a_1 + 2^2.a_0$	$a_3 - 2.3.a_2 + 2^2.3.a_1 - 2^3.a_0$
Δ_3	a_0	$a_1 - 3.a_0$	$a_2 - 3.2.a_1 + 3^2.a_0$	$a_3 - 3.3.a_2 + 3^2.3.a_1 - 3^3.a_0$
Δ_4	a_0	$a_1 - 4.a_0$	$a_2 - 4.2.a_1 + 4^2.a_0$	$a_3 - 4.3.a_2 + 4^2.3.a_1 - 4^3.a_0$

risultati uguali a quelli che si possono ricavare dalla formola (6), sostituendo per p ed m gli stessi valori.

Facendo per semplicità $s=0$, si ammetta pertanto

$$\Delta^m_{p-1} = [-(p-1) + \Delta_0]^m ,$$

e si sostituiscono i valori che se ne ricavano, nell'espressione di Δ^m_p in funzione di Δ_{p-1}, data dalla definizione; si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta^m_p &= (-1)^m(m)_0\Delta^0_{p-1} + \ldots + (-1)^{m-r}(m)_r\Delta^r_{p-1} + \ldots + (-1)^0(m)_m\Delta^m_{p-1} = \\ &= (-1)^m(m)_0\,[(0)_0(-p+1)^0\Delta^0_0] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (-1)^{m-r}(m)_r[(r)_0(-p+1)^r\Delta^0_0 + \ldots + (r)_r(-p+1)^0\Delta^r_0] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (-1)^0(m)_m[(m)_0(-p+1)^m\Delta^0_0 + \ldots + (m)_r(-p+1)^{m-r}\Delta^r_0 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (m)_m(-p+1)^0\Delta^m_0\,].\end{aligned}$$

Sommando per colonna, dopo avere sviluppato le parentesi quadre, la colonna $(r+1)^{ma}$ sarà:

$$\begin{aligned}&(-1)^{m-r}(m)_r(r)_r(-p+1)^0\Delta^r_0 + (-1)^{m-r-1}(m)_{r+1}(r+1)_r(-p+1)^1\Delta^r_0 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (-1)^0(m)_m(m)_r(-p+1)^{m-r}\Delta^r_0 ,\end{aligned}$$

e per la nota relazione fra i coefficienti binomiali:

$$(m)_{h+k}\,(h+k)_k = (m)_h\,(m-h)_k \qquad (\beta)$$

e riducendo

$$\begin{aligned}&(-1)^{m-r}(m)_r\Delta^r_0[(m-r)_0(p-1)^0 + (m-r)_1(p-1)^1 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (m-r)_{m-r}(p-1)^{m-r}],\end{aligned}$$

cioè:

$$(m)_r(-p)^{m-r}\Delta^r_0 ,$$

e variando r da 0 a m, si ottiene la somma di tutte le colonne e quindi

$$\begin{aligned}\Delta^m_p = (m)_0(-p)^m\Delta^0_0 + \ldots + (m)_r(-p)^{m-r}\Delta^r_0 + \ldots \\ + (m)_m(-p)^0\Delta^m_0 = [-p+\Delta_0]^m ,\end{aligned}$$

che è precisamente la formola (6) per $s=0$; e siccome dal paragone di questa formola con quella ammessa:

$$\Delta^m_{p-1} = [-(p-1)+\Delta_0]^m$$

risulta non altro cambiamento che le potenze di $p-1$ in quelle di p, rimanendo invariato l'indice inferiore delle Δ nello sviluppo, si conclude che la formola (6) dipende da p in quanto p è la differenza degli ordini, e quindi rimanendo costante tale differenza, s può essere qualunque intero, positivo o negativo.

Analogamente, facendo per semplicità $s=0$, si ammetta:

$$\Delta^m_0 = [(p-1)+\Delta_{p-1}]^m,$$

e si sostituiscano i valori che se ne ricavano, nell'espressione di Δ^m_{-1}, data dalla definizione; si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta^m_{-1} &= (m)_0\Delta^0_0+\ldots+(m)_r\Delta^r_0+\ldots+(m)_m\Delta^m_0 =\\ &= (m)_0[(0)_0(p-1)^0\Delta^0_{p-1}]+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(m)_r[(r)_0(p-1)^r\Delta^0_{p-1}+\ldots+(r)_r(p-1)^0\Delta^r_{p-1}]+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(m)_m[(m)_0(p-1)^m\Delta^0_{p-1}+\ldots+(m)_r(p-1)^{m-r}\Delta^r_{p-1}+\ldots\\ &\qquad\ldots+(m)_m(p-1)^0\Delta^m_{p-1}].\end{aligned}$$

Sommando per colonna, dopo avere sviluppato le parentesi quadre, la colonna $(r+1)^{ma}$ sarà:

$$(m)_r(r)_r(p-1)^0\Delta^r_{p-1}+(m)_{r+1}(r+1)_r(p-1)^1\Delta^r_{p-1}+\ldots$$
$$\ldots+(m)_m(m)_r(p-1)^{m-r}\Delta^r_{p-1},$$

e per la stessa relazione (β) e riducendo:

$$(m)_r\Delta^r_{p-1}[(m-r)_0(p-1)^0+(m-r)_1(p-1)^1+\ldots+(m-r)_{m-r}(p-1)^{m-r}],$$

cioè:

$$(m)_r\,p^{m-r}\Delta^r_{p-1},$$

e variando r da 0 ad m, si ottiene la somma di tutte le colonne e quindi:

$$\Delta^m_{-1} = (m)_0p^m\Delta^0_{p-1}+\ldots+(m)_rp^{m-r}\Delta^r_{p-1}+\ldots+(m)_mp^0\Delta^m_{p-1} = [p+\Delta_{p-1}]^m,$$

che è precisamente la formola (7) per $s=-1$; e siccome dal paragone di questa formola con quella ammessa:

$$\Delta^m_0 = [(p-1)+\Delta_{p-1}]^m$$

risulta non altro cambiamento che le potenze di $p-1$ in quelle di p, rimanendo invariato l'indice inferiore delle Δ nello sviluppo, si conclude che la formola (7) dipende da p in quanto p è la differenza degli ordini, e quindi, rimanendo costante tale differenza, s può essere qualunque intero, positivo o negativo.

6. Sostituendo in (7) i valori ricavati da (6), o in (6) i valori ricavati da (7), si ottengono delle identità.

Infatti nel primo caso si ha:

$$\Delta_s^m = (m)_0 p^m \Delta_{p+s}^0 + \ldots + (m)_r p^{m-r} \Delta_{p+s}^r + \ldots + (m)_m p^0 \Delta_{p+s}^m =$$
$$= \sum_{r=0}^{m} (m)_r p^{m-r} [(r)_0 (-p)^r \Delta_s^0 + \ldots + (r)_r (-p)^0 \Delta_s^r],$$

ed il coefficiente di Δ_s^r, dopo lo sviluppo, si può scrivere:

$$(m)_r p^{m-r} [(m-r)_0 - (m-r)_1 + \ldots + (-1)^{m-r} (m-r)_{m-r}],$$

e si vede che l'espressione dentro parentesi si annulla sempre, a meno che non sia $m - r = 0$, cioè $m = r$ e quindi:

$$\Delta_s^m = (m)_m p^0 \Delta_s^m = \Delta_s^m .$$

E nel secondo caso:

$$\Delta_{p+s}^m = (m)_0 (-p)^m \Delta_s^0 + \ldots + (m)_r (-p)^{m-r} \Delta_s^r + \ldots + (m)_m (-p)^0 \Delta_s^m =$$
$$= \sum_{r=0}^{m} (m)_r (-p)^{m-r} [(r)_0 p^r \Delta_{p+s}^0 + \ldots + (r)_r p^0 \Delta_{p+s}^r],$$

ed il coefficiente di Δ_{p+s}^r si può scrivere:

$$(m)_r (-p)^{m-r} [(m-r)_0 - (m-r)_1 + \ldots + (-1)^{m-r} (m-r)_{m-r}],$$

e si vede che l'espressione dentro parentesi si annulla sempre, a meno che non sia $m - r = 0$, cioè $m = r$ e quindi:

$$\Delta_{p+s}^m = (m)_m (-p)^0 \Delta_{p+s}^m = \Delta_{p+s}^m .$$

Il modo uniforme con cui si è potuto condurre la prova nei due casi, è una conferma dell'esattezza delle due formole (6) e (7) in tutta la loro generalità. Data perciò una serie di differenze di a_0 d'un qualunque ordine, con (6) si determina la differenza numerica d'un qualunque ordine d'indice superiore, e con (7) si determina la differenza emmesima d'un qualunque ordine d'indice inferiore, essendo sempre p la differenza fra i due ordini.

7. Sostituendo in (6) per m, successivamente, i valori 0, 1, 2, ... m, e addizionando i risultati ottenuti, si ha un'espressione per la somma della serie delle differenze d'ordine $p + s$ in funzione della serie delle differenze d'ordine s, cioè:

$$\sum_{m=0}^{m} \Delta_{p+s}^m = \sum_{r=0}^{m} \Delta_s^r [(r)_r (-p)^0 + (r+1)_r (-p)^1 + \ldots + (m)_r (-p)^{m-r}]; \quad (8)$$

e facendo la stessa sostituzione in (7), si ha un'espressione per la somma della serie delle differenze d'ordine s in funzione della serie delle differenze d'ordine $p+s$, cioè

$$\sum_{m=0}^{m} \Delta_s^m = \sum_{r=0}^{m} \Delta_{p+s}^r \left[(r)_r p^0 + (r+1)_r p^1 + \ldots + (m)_r p^{m-r}\right]. \tag{9}$$

8. La formola (6), facendo per semplicità $s=0$, giova a dimostrare un'altra notevole espressione di Δ_p^m.

Si ha:

$$\Delta_p^m = \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^{m-r+1} \Delta_0^{r-1} \times$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k (p-1)^k \left[(m-1-k)_{r-1}(p-1) + (m-k)_{r-1}\right]. \tag{10}$$

Infatti:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k (p-1)^k \left[(m-1-k)_{r-1}(p-1) + (m-k)_{r-1}\right] =$$
$$= (m-1)_0 (m-1)_{r-1} (p-1)^1 + (m-1)_0 (m)_{r-1} (p-1)^0 +$$
$$+ (m-1)_1 (m-2)_{r-1} (p-1)^2 + (m-1)_1 (m-1)_{r-1} (p-1)^1 +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (m-1)_{k-1} (m-k)_{r-1} (p-1)^k + (m-1)_{k-1} (m-k+1)_{r-1} (p-1)^{k-1} +$$
$$+ (m-1)_k (m-1-k)_{r-1} (p-1)^{k+1} + (m-1)_k (m-k)_{r-1} (p-1)^k +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (m-1)_{m-2} (1)_{r-1} (p-1)^{m-1} + (m-1)_{m-2} (2)_{r-1} (p-1)^{m-2} +$$
$$+ (m-1)_{m-1} (0)_{r-1} (p-1)^m + (m-1)_{m-1} (1)_{r-1} (p-1)^{m-1},$$

e tenuta presente la relazione (α) fra i coefficienti binomiali ed aggruppando secondo le potenze di $p-1$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k (p-1)^k \left[(m-1-k)_{r-1}(p-1) + (m-k)_{r-1}\right] =$$
$$= (m)_0 (m)_{r-1} (p-1)^0 + \ldots + (m)_k (m-k)_{r-1} (p-1)^k + \ldots + (m)_m (0)_{r-1} (p-1)^m,$$

or perchè $(m-k)_{r-1}$ non si annulli, dev'essere:

$$(m-k) \geq r-1,$$

quindi il più grande valore possibile di k è:

$$k = m - r + 1;$$

perciò, tenuta presente le relazione fra i coefficienti binomiali:

$$(m)_k (m-k)_{r-1} = (m-r+1)_k (m)_{r-1}$$

che può dedursi da (β) e che d'altronde si trasforma in identità sostituendo i fattoriali, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{m-1}(m-1)_k(p-1)^k[(m-1-k)_{r-1}(p-1)+(m-k)_{r-1}] =$$
$$=(m)_{r-1}[(m-r+1)_0(p-1)^0+\ldots+(m-r+1)_k(p-1)^k+\ldots$$
$$\ldots+(m-r+1)_{m-r+1}(p-1)^{m-r+1}]=(m)_{r-1}p^{m-r+1};$$

dunque:

$$\Delta_p^m=\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{m-r+1}\Delta_0^{r-1}\times\sum_{k=0}^{m-1}(m-1)_k(p-1)^k[(m-1-k)_{r-1}(p-1)+$$
$$+(m-k)_{r-1}]=$$
$$=\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{m-r+1}\Delta_0^{r-1}(m)_{r-1}\,p^{m-r+1}=$$
$$=\sum_{r=1}^{m+1}(m)_{r-1}(-p)^{m-r+1}\Delta_0^{r-1}=[-p+\Delta_0]^m,$$

che è precisamente la formola (6) per $s=0$.

VITO MELFI MOLÈ.

(Continua)

DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA GENERALE SULLE LINEE

Nel concetto intuitivo di *linea* si riconoscono questi caratteri:

I. Una linea è una serie di punti che soddisfa al postulato della continuità. (*)

II. Considerando un punto qualunque A di una linea, può sempre prendersi un punto B precedente o seguente ad A (oppure solo precedente o solo seguente se A è un estremo) tale che tutti i punti compresi fra A e B abbiano da A una distanza minore di un segmento dato qualunque.

Non vogliamo affermare qui che queste due proprietà bastino a caratterizzare il concetto di *linea*; ma neppure possiamo affermare che non bastino. Se bastassero a caratterizzare questo concetto, esse ci offrirebbero una *definizione di «linea»*. Nè sarebbe un ostacolo a ciò il dover parlare, nella definizione di *linea*, di relazioni fra segmenti, giacchè queste si possono già supporre note potendosi costruire tutta la Geometria elementare, come da alcuni è stato fatto, indipendentemente dal concetto generale di *linea*.

(*) Prenderemo il postulato della continuità sotto la ordinaria forma: Se su una linea si hanno due gruppi di punti Γ_1 e Γ_2 tali che ogni punto di Γ_1 preceda ogni punto di Γ_2, esiste sulla linea un punto che *separa* Γ_1 e Γ_2, punto che può essere anche o l'ultimo punto di Γ_1 o il primo punto di Γ_2.

In ogni modo è certo che le proprietà I e II permettono di dimostrare molte proprietà delle linee, alcune di intuizione evidente, ma alcune anche di intuizione difficile.

Fra le prime è questa, che ora dimostreremo: *Una linea piana* l *che congiunga due punti* A *e* B *da bande opposte di una retta* r *del piano, incontra certamente la retta* r *almeno in un punto.*

Indichiamo con (A) e (B) le regioni del piano (rispetto alla retta r) nelle quali si trovano i punti A e B; e consideriamo sulla linea l il senso AB.

Se X è un punto qualunque della l (escluso B), possono darsi due casi:

1° o tra i punti del tratto di linea XB (X escluso) ne esiste uno *non* appartenente alla regione (B), ossia esiste sulla l un punto seguente ad X ed appartenente alla regione A o alla retta r;

2° o tutti i punti del tratto XB (X escluso) si trovano nella regione (B).

Poniamo in un gruppo Γ_1 tutti i punti della l che si trovano nel primo caso, e in un gruppo Γ_2 tutti quelli che si trovano nel secondo caso.

È certo che i gruppi Γ_1 e Γ_2 esistono. Infatti, si consideri un cerchio con centro in A e la cui superficie appartenga tutta alla regione (A); se prendiamo sulla l un punto M la cui distanza da A sia minore del raggio del cerchio (prop. II), questo punto M sarà in (A), e tutti i punti del tratto AM (M escluso) apparterranno al gruppo Γ_1, essendo seguiti da un punto M non appartenente a (B). Così pure, se si considera un cerchio con centro in B e la cui superficie sia tutta in (B), ed N è un punto di l tale che tutti i punti del tratto NB abbiano da B una distanza minore del raggio del cerchio, allora il punto N è di Γ_2 perchè i punti che lo seguono appartengono tutti a (B).

Dimostrata la esistenza dei gruppi Γ_1 e Γ_2, osserviamo che ogni punto di Γ_1 precede ogni punto di Γ_2; infatti, se P è un punto di Γ_1, vuol dire che si può considerare un punto che segua P e *non* appartenga a (B), e allora tutti i punti che precedono P si trovano nelle medesime condizioni e appartengono al gruppo Γ_1. Onde nessun punto di Γ_2 può precedere un punto qualunque di Γ_1.

Ne segue, per il postulato della continuità, che esiste un punto H che separa i gruppi Γ_1 e Γ_2; e poichè i gruppi Γ_1 e Γ_2 esauriscono la linea (eccettuato B) ne viene che questo punto H non può essere altro che o l'ultimo punto di Γ_1 o il primo punto di Γ_2.

Ma nel gruppo Γ_1 non esiste un ultimo punto; infatti se P è un punto qualunque di Γ_1, ad esso segue un punto Q *non* appartenente a (B), e allora tutti i punti del tratto PQ (Q escluso) sono di Γ_1. Quindi H è il primo punto del gruppo Γ_2.

Il punto H non può trovarsi nella regione (A) perchè è facile vedere con le solite considerazioni che ad esso seguirebbero altri punti della regione (A) e quindi sarebbe un punto di Γ_1; e non può neanche trovarsi nella regione (B). Infatti, se H fosse in (B), descrivendo un cerchio con centro in H e la cui superficie appartenesse tutta a (B) e considerando un punto K precedente ad H tale che tutti punti del tratto HK avessero da H una distanza minore del raggio del cerchio, tutti i punti del tratto KB sarebbero nella regione (B) e quindi K sarebbe un punto di Γ_2, il che è assurdo essendo H il primo di tali punti.

Poichè dunque il punto H non è nè in (A) nè in (B) sarà sulla retta r, ossia la linea l incontra la retta r in un punto almeno, come si voleva dimostrare.

È evidente che la identica dimostrazione si può ripetere per questo teorema generale: *Se un ente qualunque* R *costituito di punti di un piano determina in qualsiasi modo una divisione del piano in due regioni tali che ogni punto che non sia di* R *appartenga ad una di queste regioni e che se* A *è un punto qualunque di una di queste regioni si possa considerare un cerchio con centro in* A *la cui superficie appartenga tutta a quella medesima regione, allora una linea qualunque che congiunge un punto dell'una regione con un punto dell'altra incontra necessariamente l'ente* R *almeno in un punto.*

Le dimostrazioni di questo teorema generale nei casi particolarissimi in cui l'ente R è una circonferenza e la linea è un segmento o un arco, già note, sono però più complicate della nostra dimostrazione generale, che abbiamo voluto fare su un caso semplice solo per maggiore evidenza.

La medesima dimostrazione si adatta molto facilmente anche al caso in cui l'ente R è nello spazio e determina una divisione dello spazio in due regioni tali che se un punto appartiene ad una di esse si possa sempre considerare una sfera con centro in quel punto il cui solido appartenga tutto alla medesima regione.

P. Benedetti.

Brescia, dicembre 1908.

A PROPOSITO

dell'inchiesta fatta dall'Associazione Mathesis sulla fusione della geometria piana colla solida

È stata sempre lamentata la facilità con cui in Italia si cambiano i programmi e i regolamenti delle nostre scuole, ed è stato detto e ripetuto che questa è una delle cause principali per le quali le scuole in generale non dànno quei risultati che le famiglie e la società avrebbero diritto di attendere da esse.

Anche nel III congresso dei professori di matematica delle scuole medie tenuto a Napoli nello scorso settembre, il prof. Nannei, incaricato di fare la relazione sul primo tema (studiare le cause del poco profitto che fanno nello studio della matematica i giovani delle scuole medie, e proporre i mezzi per ovviarvi), riconosceva solennemente questa verità colle parole seguenti: " Ci fu chi disse che " in Italia (e non soltanto in Italia) era necessaria una legge, la quale stabilisse

" che almeno per dieci anni nessuna legge, ormai esistente, si potesse modificare " o sopprimere. Senza trattenermi sulle ovvie considerazioni che spontaneamente " sorgono nella mente di chiunque, sul danno arrecato alle scuole dai facili cam- " biamenti e da successive contradditorie disposizioni, noterò solo che, per effetto " di tutto ciò, l'alunno si persuade che il passaggio da una classe all'altra non è " conseguenza del suo sapere, ma, almeno in gran parte, è effetto delle disposi- " zioni di un regolamento „. Ecc.

E per togliere questo grave inconveniente lo stesso prof. Nannei propone " che " le disposizioni scolastiche, una volta stabilite dopo ponderato studio e dopo ma- " turo esame, non siano facilmente mutabili „.

Queste considerazioni e questa proposta sono molto giuste, e tutti ne sono convinti, ma è ben difficile che un nuovo ministro della P. I. appena insediato alla Minerva, non senta il bisogno di buttare all'aria l'opera dei predecessori e di *descriver fondo a tutto l' Universo,* convinto, convintissimo di avere così detta l'ultima parola sull'argomento, di aver sanato tutte le piaghe, in modo che nulla resti da fare al successore. Ma la vita dei ministri è breve, e (specialmente nelle scuole classiche) la ridda dei cambiamenti nei programmi e nei regolamenti, continua eternamente fantasmagoricamente, ma con una monotonia desolante.

Poco più di tre anni or sono un ministro sapiente, si permise di fare una novità. Ordinariamente i programmi o le modificazioni di essi, erano manipolati da alti papaveri burocratici, che non avevano mai visto la scuola da vicino, o l'avevano vista in tempi preistorici; si era dato persino il caso che qualche parte del programma era stata soppressa perchè qualche figlio di papà aveva preso una solenne bocciatura in quel punto. Quel ministro invece volle ascoltare la voce degli unici veramente competenti, e fece formulare, per i Licei e i Ginnasi, dei programmi di matematica, fisica e chimica che furono pubblicati con decreto 14 ottobre 1900, da persone competentissime che colle scuole stesse erano in continuo contatto, tenendo conto di quanto nell'ultimo decennio era stato detto nei congressi e pubblicato in riviste dagli insegnanti dei Licei; e, caso assolutamente nuovo nella storia delle nostre scuole, nella relazione a S. M. il Re, che accompagna i programmi, era stampato questo periodo: " Di queste e simili osser- " vazioni sono stati organi autorevoli l'Associazione Mathesis tra gl' insegnanti di " matematica nelle scuole secondarie, e la Società Italiana di Fisica, con forma " misurata ma precisa „.

La maggiore e più importante innovazione introdotta in questi programmi, fu il dividere l'insegnamento della geometria nei vari anni di corso in guisa che fosse possibile agli insegnanti di scegliere fra il metodo tradizionale della separazione della planimetria dalla stereometria e quello della fusione dei due insegnamenti.

Una tale disposizione, per chi consideri la cosa in modo del tutto obiettivo e spassionato, era l'unica logica e ragionevole. Infatti lo stato delle cose nel 1900 era questo.

Ormai era stato riconosciuto universalmente che i classici *Elementi di Euclide,* sebbene fossero opera magistrale ed immortale, non si addicevano più ai nostri tempi; che dopo duemila anni non solo avevano progredito e fatto passi giganteschi gli studi della geometria superiore, ma per riflesso anche nei metodi elementari un po' di cammino si era necessariamente dovuto fare; che perciò non era giusto d' infliggere ai giovani il tormento di studiare la geometria come si studiava duemila anni prima; e già era stato tolto l'obbligo, imposto nel 1867, di adottare gli Elementi di Euclide come libro di testo.

Tale obbligo fu provvidenziale per spazzar via tutti i libri mal pensati e peggio scritti che infestavano il nostro paese, nei quali l'antica purezza della geometria era perduta. Ma fu provvidenziale a patto che fosse un provvedimento transitorio.

E infatti essendo stati intanto pubblicati dei nuovi libri, nei quali si conservava tutto quello che di buono era negli " Elementi „ modernizzandoli, la draconiana disposizione era già stata tolta da un pezzo.

Ma non basta, c'era stato anche chi aveva osato affermare che persino la classica e secolare separazione della geometria piana dalla solida non aveva ragione di esistere, e che per molte ragioni (che non è qui il caso di ripetere perchè ci proponiamo di fare uno studio puramente obiettivo) era più opportuno unire i due insegnamenti. L'audace iniziativa era stata sulle prime accolta con gran diffidenza, e i sostenitori di essa furono trattati poco meno che di mattoidi; i più gridarono alla profanazione, al sacrilegio, all'arca santa violata; ci fu anche chi credè di demolire l'audace riforma con un giuoco di parole: " la fusione è la confusione della geometria „.

Ma dopo vari anni di lotte e di controversie, molti si accorsero che l'idea era meno strampalata di quel che pareva in principio; tutti, anche i più fieri avversari, riconobbero che essa meritava per lo meno di essere presa in considerazione e discussa. E nel 1900 si può affermare che (lasciando da parte la massa inerte che lega l'asino dove vuole il padrone) i professori si erano schierati in due campi quasi eguali *pro-fusione* e *contro la fusione.*

Ed il ministro fece l'unica cosa che poteva fare una persona di senno, disporre cioè i programmi in modo che ogni professore fosse libero di scegliere fra i due metodi, e lasciare poi che il tempo e l'esperienza permettessero di dire l'ultima definitiva parola sull'argomento.

Di ciò fu giustamente data lode al Ministro, e l'Ass. Mathesis si ritenne orgogliosa di avere raggiunto questo risultato.

Nell'interesse del vero, per il bene delle nostre scuole, sarebbe stato opportuno lasciare ormai per qualche tempo in pace la controversa quistione e non parlarne più; questo, credo, era il desiderio della gran maggioranza dei fusionisti (che erano soddisfatti della parziale vittoria ottenuta e che in omaggio alla libertà desideravano persuadere, ma non imporre le loro idee ad alcuno) non già degli avversari che non potevano tollerare in pace di vedere i fusionisti considerati come persone ragionevoli quanto loro, e non come reprobi dannosi alla società.

E nel Congresso di Napoli il presidente dell'Associazione Mathesis si prestò gentilmente a leggere una comunicazione del prof. Angeleri, accanito antifusionista, intitolata: *La fusione della planimetria colla stereometria, nella scuola, è utile o no?*, nella quale dopo alcune considerazioni, che fra poco prenderemo in esame, proponeva d'interpellare i colleghi sul quesito che formava il titolo della comunicazione. Mi si assicura che un altro collega presente al congresso voleva fare un'altra comunicazione in senso fusionista, ma il presidente del congresso, che naturalmente era lo stesso presidente dell'Associazione, poichè, inconsultamente, era stato dato l'ostracismo dall'Ufficio di presidenza del Congresso ai professori universitari, glielo impedì.

Comunque sia il referendum è stato accettato a maggioranza di voti dal comitato direttivo dell'Associazione, il quale, novello Saturno, ha mostrato gran desiderio di mangiare i propri figliuoli, i programmi del 1900, e di sostituire alle idee larghe di libertà accolte in quelli, delle idee più ristrette ed unilaterali.

Nel n. 4 del Bollettino dell'Associazione testè pubblicato, si trova una relazione sul resultato del referendum, la quale lascia trasparire le tendenze antifusioniste dell'anonimo relatore.

Esaminiamo rapidamente i risultati. Le risposte sono state pochine e di queste, 28 favorevoli e 33 contrarie alla fusione. Il risultato numerico proverebbe dunque che i professori delle scuole italiane sull'argomento in questione si dividono, ora come nel 1900, in due campi presso a poco uguali con leggiera prevalenza per gli antifusionisti. E questa prevalenza si riduce ancora, se si considera che fra coloro che si sono schierati contro la fusione si trovano anche dei professori, illustri sì, ma che non avendo mai insegnato nelle scuole secondarie, non hanno sufficiente competenza a giudicare sopra una quistione che è eminentemente didattica.

I favorevoli alla fusione hanno inviato il loro *sì* con pochi commenti, forse perchè pensavano (e non avevano torto) che la quistione è stata oramai già trattata così ampiamente, che non valeva la pena di tornare da capo e ripetere cose dette e ridette. I contrari sono stati più eloquenti ed hanno creduto necessario di spiegare il loro *no*.

Anzitutto la relazione riporta quasi interamente la comunicazione del professore Angeleri, quantunque già pubblicata negli *Atti del Congresso*. Questa comunicazione comincia col far sapere che Tizio, Caio e Sempronio, si son dichiarati contrari alla fusione, e che persino i più caldi fusionisti come il De-Amicis e l'umile sottoscritto hanno mostrato qualche volta di non esser persuasi di quel che dicevano. Ecco la parte che mi riguarda personalmente:

„ Gli stessi Lazzeri e Bassani nella compilazione dei loro Elementi di Geo„ metria „ (e qui due o tre frasi cortesi per la modesta opera nostra, delle quali lo ringrazio) „ colla nitidezza delle figure solide sembra che *essi stessi* (sic) ammet„ tano una difficoltà maggiore nella Stereometria che nella Planimetria „!

Ma come! L'aver cercato che le figure del nostro libro fossero più nitide e chiare che fosse possibile, deve essere preso come argomento contro di noi? E si può dire sul serio che l'ottimo Giusti facendo un'edizione accurata ha congiurato contro le nostre idee? Spero, caro prof. Angeleri, che lo dica per burla!

E dopo aver detto che „ con la fusione si farà perdere ai giovani quel po' „ d'amore che ancora hanno, se pure lo hanno, per la geometria „ ed avere attribuito al Retali l'ormai storico bisticcio „ fusione-confusione „ l'Angeleri aggiunge:

„ Questo allo stato delle cose attuali; da qui a cinquanta anni, quando i gio„ vani del Ginnasio saranno bene addentro nei misteri della geometria, allora, ma „ soltanto allora, si potrà adottare la fusione nelle scuole; per ora, no „.

Confesso candidamente che in questo periodo ci ho capito poco. Vuole forse il prof. Angeleri lasciare gli attuali studentelli al Ginnasio per 50 anni, affinchè abbiano agio di penetrare i misteri della geometria, e mandarli vecchi e canuti al Liceo, ad apprendere la fusione (o confusione, come più gli aggrada) delle due geometrie?

Oppure intende semplicemente di rimandare *ai posteri l'ardua sentenza?* In tal caso però mi permetto di osservare che con molta probabilità gli studenti di ginnasio del 1954 in media varranno intellettualmente presso a poco quanto quelli del 1904, e niente ci autorizza a ritenere che quelli, meglio di questi, arriveranno a penetrare nei sacri misteri della geometria! Sicchè non vedo la convenienza di rimandare ai posteri la risoluzione di una quistione che oramai è sul tappeto e possiamo benissimo risolvere da noi.

Ma lasciando da parte l'Angeleri ed altri, sono rimasto particolarmente impressionato dalla carica a fondo che contro la fusione e contro il sottoscritto fa il prof. Murer, il quale fu uno dei primi ad accogliere favorevolmente l'idea della fusione, e l'esperimentò due volte in scuola. Egli dice di non essere soddisfatto dei risultati e conclude: colla frase seguente stampata in corsivo " La mia esperienza " adunque, continuata e ripetuta con costanza degna di miglior esito, è completa- " mente sfavorevole alla fusione; almeno alla fusione secondo il sistema Lazzeri ".

Questo giudizio così reciso è assai sconfortante pei fusionisti e più specialmente per me, ma un po' più avanti esso viene attenuato dalle seguenti frasi.

" Dunque che penso riguardo all'utilità di adottare il metodo della fusione " nelle scuole? ".

" Ecco: da quanto dissi si capisce che io non credo di schierarmi, in tesi gene- " rale, contro di essa; anzi ammetto di buon grado che con nuovi testi e con nuovi " programmi abbia anche a riuscire utile ".

In conclusione dunque la risposta del prof. Murer, che a prima giunta sembra una fiera condanna del metodo, è in realtà una condanna all'ostracismo dei libri esistenti e più particolarmente del mio. E ciò colpisce il mio amor proprio di autore, ma almeno lascia intatto il principio per il quale combatto da molti anni; — e ne sono lieto. —

Poichè spero che tutti quanti hanno tenuto dietro alla povera opera mia su questo argomento dovranno rendermi giustizia, e riconoscere che essa si è limitata a questo: essendo profondamente convinto dell'utilità della fusione delle due geometrie, ho procurato d'infondere questa persuasione negli altri, ma non ho mai battuta la gran cassa per i miei *Elementi*, non ho mai detto che essi fossero il migliore dei libri di geometria nel migliore dei mondi possibili, non ho mai detto che soltanto seguendo me in tutti i particolari si ottiene la salvazione.

Certe affermazioni le lascio al prof. Andriani, il quale, secondo la relazione che stiamo esaminando, dichiara candidamente. " Sì, la fusione è utile se adottate " il mio libro; no, se vi ostinate ad imitare il De Paolis e Lazzeri e Bassani "!

Considerando dunque la quistione dall'alto, e all'infuori della convenienza e della vanità personale, mi compiaccio di constatare che la risposta del Murer che, è la più fiera di tutte, colpisce me personalmente; ma non intacca il principio.

E per attenuare il dispiacere che mi reca questo giudizio, mi valgo della consolazione dei disperati " mal comune mezzo gaudio ". Infatti il Murer, dopo avere esposto il suo reciso giudizio sopra citato contro il sistema Lazzeri dichiara che di questo soltanto si è occupato, " perchè chi dice fusione dice Lazzeri; e vice- " versa " (è troppo onore! e l'Andriani, il Reggio, l'Ingrami e tanti altri hanno diritto di protestare, e protesto anch'io, specialmente contro il viceversa!) " nè io " credo che esista altro libro che possa adattarsi alle scuole più di questo, mal- " grado ecc.... Non conto il De Paolis, primo tentativo, glorioso sì, ma alquanto " incerto che non ha saputo reggersi; e nemmeno il Veronese, abbenchè abbia " introdotto concetti scientificamente incensurabili e aperta la via a qualche utile " innovazione anche nell'insegnamento; in quantochè egli " (il libro o l'autore?) " mi sembra nel suo complesso qualche cosa di *paradossale e niente affatto educativo* " per la gioventù ecc. ".

In confronto delle sassate che il prof. Murer scaglia contro l'opera di due giganti come il compianto De Paolis, e il prof. Veronese, elevato in questi giorni per i suoi meriti scientifici alla dignità senatoriale, i sassolini che egli scaglia contro l'opera dell'umile sottoscritto sono confetti!

Dicendo che egli non conosce altro libro che possa adattarsi alle scuole più del mio, il Murer esprime un giudizio benevolo di cui gli sono grato. E siccome egli non ha peli sulla lingua, quel giudizio è indubbiamente sincero; e mi credo in dovere di dirgli quale ne è probabilmente la ragione.

Quando, moltissimi anni fa, ai primordi della mia carriera, mi accinsi a scrivere i primi abbozzi dei miei Elementi, non pensavo per nulla a stamparli e a farne un libro di testo; li scrissi unicamente per i miei scolari dell'Accademia Navale, ai quali dovevo insegnare la geometria in un anno, perchè mi piaceva svolgere l'insegnamento secondo le mie idee senza seguire la falsariga di nessuno; perciò riuscirono un libro sincero e spontaneo. Non mi sarei sognato davvero allora che quegli appunti litografati avrebbero avuto l'effetto di tener viva una quistione importantissima che accalora così insolitamente i matematici anche dopo tanto tempo. E siccome non faccio quistione di bottega, esprimo il voto che anche qualche insegnante di liceo o d'istituto tecnico faccia come me; si prepari un testo secondo il metodo della fusione più adatto del mio alle esigenze delle scuole secondarie; ed io mi contenterò della gloria di avere mantenuta viva la quistione e di avere spinto altri a fare meglio di me.

In conclusione io ritengo:

1° che il risultato del referendum sulla fusione delle due geometrie, abbia poco valore, perchè troppo pochi insegnanti hanno espresso il loro parere e perchè il referendum è stato proposto solamente ai professori di matematica dei Licei, escludendo così in particolare quelli degl'istituti tecnici, ma dovendo far presto e bene, la fusione è anche più specialmente indicata;

2° che se si deve tener conto del risultato, i fusionisti debbano in fondo essere soddisfatti che quasi un 50 % di coloro che hanno risposto, si siano dichiarati favorevoli, perchè non è facile sradicare le vecchie abitudini, e la quistione della fusione si prende sul serio da appena una diecina d'anni, mentre il metodo della separazione ne conta ben 2000 di incontrastato dominio e non si vuole arrendere senza vivace resistenza;

3° che il comitato direttivo dell'Associazione Mathesis ha avuto troppa fretta nel promuovere il referendum in parola.

Forse l'essere stato riconosciuto ufficialmente come *autorevole interpetre* delle opinioni degli insegnanti ha lusingato un po' troppo l'amor proprio del comitato suddetto, e lo ha invogliato a imitare i Ministri in ciò in cui sono meno imitabili, nella facilità cioè di mutare programmi e ordinamenti.

Non potendo dunque approvare l'opera del consiglio (col quale mi trovavo già poco d'accordo per altre ragioni) e non essendo disposto a sottomettermi mi sono affrettato a dimettermi dal medesimo.

Non posso chiudere queste poche osservazioni senza far rilevare che mentre l'Associazione Mathesis accenna a tornare sui propri passi e fa iniziare all'associazione un cammino a ritroso, fuori d'Italia comincia ad espandersi il moto fusionista in modo notevolissimo.

Nel N. 4 Anno V (1901) del Bollettino dell'Associazione Mathesis si trova un articolo intitolato: " La fusione della planimetria e stereometria in Francia " nel quale è esposta la storia della fusione in Francia. Ad esso rimandiamo i nostri lettori, non consentendoci lo spazio di riprodurlo per intero, ma ne riporto alcuni brani per rammentare le notizie più interessanti:

Fino dal 1898 il sig. Laisant accennava all'utilità della fusione (*Mathématique, Philosophie, Enseignement*, pag. 238).

Nel n. 1, anno I (pag. 159 anno 1899) dell'*Enseignement mathématique* il sig. Ri-

PERT pubblicava un'ampia e diligente recensione degli *Elementi di Geometria* dei proff. LAZZERI e BASSANI, e dopo aver dato lode all'opera, chiudeva colle seguenti parole:

" Il principio della fusione delle due geometrie, considerato ieri come un'utopia, " oggi divenuto un'idea di cui s'impone lo studio, è destinato forse a trasformarsi, " in un prossimo avvenire, in metodo classico per l'insegnamento della geometria " elementare, attendendo la sua adozione in tutti i rami della geometria. A questo " progresso, se si realizzerà, avrà potentemente contribuito il libro dei professori " dell'Accademia Navale Italiana, già suffragato da vari anni d'insegnamento ".

Nell'anno I, dello stesso giornale veniva publicato un notevole articolo del prof. G. Candido, socio della *Mathesis*, in cui si esponeva la storia della fusione della geometria in Italia. Tale articolo deve senza dubbio avere contribuito a risuscitare la questione in Francia e a divulgarla altrove.

Recentemente infine sono comparsi a prò della *fusione* due notevoli articoli che varrebbe la pena di riprodurre per intero, se la tirannia dello spazio lo consentisse.

L'uno è del prof. CHAILAN col titolo: *Un progrès mathématique à réaliser*, pubblicato nell'*Enseignement Chrétien* del 1° marzo: l'altro del LAISANT, nel n. 2, anno III (15 marzo) col titolo: *Une exhumation géométrique* . . . .

. . . .

Dopo avere esposto le ragioni che militano a favore della fusione, il Chailan aggiungeva.

" L'idea della fusione non è nuova; già Gergonne (*Annales*, t. XVI, p. 209) " dubitava che il nostro modo di dividere la geometria in geometria piana e geo- " metria dello spazio non sia così naturale e così esattamente rispondente all'essenza " delle cose, come venti secoli d'abitudine hanno potuto insinuarci.

" Essa è studiata dappertutto. In Italia è quasi trionfante ".

E dopo avere accennato all'opera dell'Associazione *Mathesis*, del prof. G. LORIA " il più ardente propugnatore della fusione " e del *Periodico di Matematica*, parla dei trattati di DE PAOLIS, di ANDRIANI, di LAZZERI e BASSANI, di VERONESE e di REGGIO, soffermandosi più lungamente su quello di Lazzeri e Bassani, del quale dice: " è un eccellente libro classico che ha fatto le sue prove ".

E continua: " In Germania la questione è stata argomento di un rapporto " presentato alla riunione dei filologi e dei professori tedeschi tenuta a Dresda " nel 1897. . . . . "

" *Posso affermare che in Francia un grande movimento si prepara in favore della* " *fusione*. Ma io non conosco che due libri che potrebbero servire di base ad un " insegnamento fusionista. L'uno è divenuto rarissimo, l'altro tende a diventarlo ".

Questi due libri sono: le *Analogies de la Géométrie élémentaire*, pubblicate da A. MAHISTRE nel 1844 e i *Nouveaux Éléments de Géométrie*, pubblicati da C. MERAY nel 1874.

In quest'ultimo libro " la fusione fra le due geometrie è completa. Il paralle- " lismo, la perpendicolarità, la comparazione degli angoli, si fanno simultanea- " mente per il piano e per la spazio ".

. . . .

L'articolo del sig. Laisant, *une exhumation géométrique* è dedicato interamente all'opera del Meray, che il Loria aveva già segnalato ai lettori del " Periodico " fino dal 1898 (Anno XIV, pag. 26).

" Si danno continuamente nella vita delle sorprese ", così comincia l'articolo. " Quella di cui voglio parlare oggi non è delle minori ".

La sorpresa cui si allude è poi il fatto che, mentre era ben conosciuto in Francia il *movimento degnissimo d'interesse e d'attenzione* verificatosi da qualche anno in Italia a prò della fusione, mentre egli stesso, il LAISANT, aveva additato il Mahistre come un precursore di tale idea, ignorava affatto l'esistenza del libro del Meray, pur conoscendo di nome e per i suoi lavori il valente professore dell'Università di Digione.

. . . .

Non è quindi da meravigliarsi se il libro del Meray era assolutamente ignorato in Italia anche dai più ferventi sostenitori della fusione, se i libri di De Paolis, di Andriani, di Lazzeri e Bassani ecc. sono venuti alla luce senza che gli autori avessero conoscenza di quanto aveva fatto il Meray.

Il fatto che l'idea della fusione in Germania, in Francia, in Italia, si affacciò alla mente di parecchi valenti cultori della Geometria, ciascuno dei quali ignorava i tentativi fatti da altri, è prova della bontà dell'idea. Al nostro paese, e in particolare alla nostra Associazione *Mathesis* resterà sempre il vanto di aver per la prima volta portato dal campo della teoria a quello della pratica una buona riforma dei metodi per l'insegnamento della geometria elementare.

Questo stampava il Bollettino dell'Associazione Mathesis nel 1901. L'articolo poi si chiudeva con le interessanti relazioni dei prof. CHANCENOTTE, BILLIET e MIRONNEAU sugli esperimenti fatti alla scuola Normale di Auxerre del libro del Meray, assolutamente entusiastiche per i risultati ottenuti, e con una esortazione del Laisant perchè il metodo venisse adottato su larga scala.

Siamo oggi in grado di aggiungere a queste, delle notizie più fresche.

Nel N.° di Marzo dell'ottima rivista " L'enseignement mathématique „ il professor Meray in un articolo di 35 pagine intitolato " Justification des procédés et de l'ordonnance des nouveaux éléments de géométrie „ espone ampiamente i concetti a cui s'informa la seconda edizione del suo libro esumato dopo quasi 30 anni di oblio.

Senza entrare nell'esame del libro e dell'articolo, ci piace riportarne il seguente brano:

" Nel momento in cui scrivo queste linee, la mia opera ha l'onore di essere " insegnata testualmente o quasi in una trentina di corsi di scuole normali e di " scuole primarie superiori, ed anche, per la prima volta in una classe di Baccellierato scientifico. Io non nasconderò la mia gioia vivissima di vedere, di più " in più accentuata presso tutti i professori, ed anche presso i loro allievi, così " essi mi dicono, la soddisfazione di cui mi vengon prodigate le prove . . . . . . " Io non ne concludo che il mio lavoro è senza difetti, che uno più abile non " saprà far meglio. Mi sento soltanto autorizzato a credere che gli elementi classici hanno fatto il loro tempo, come avevo pensato, e che i rimpiazzanti futuri " si troveranno sulla via sulla quale io mi sono incamminato „.

Siccome il movimento fusionista in Francia è assai di fresca data, ci sembra che i risultati sopra esposti siano assai notevoli e soddisfacenti.

In Ispagna pure per le notizie, che ho da vari amici e corrispondenti, il movimento fusionista sta notevolmente accentuandosi.

E di fronte a questi risultati si dilegua in me l'impressione prodotta dal nuovo atteggiamento assunto dalla presidenza dell'Associazione Mathesis, si rinnovella e si riconferma invece la fede che l'avvenire è per noi fusionisti.

GIULIO LAZZERI.

PICCOLE NOTE

I. — Nota relativa a quella del Dott. Giulio Cardoso-Laynes, "Sopra una trasformazione delle curve piane„. (*) — **1.** In tutte le trasformazioni geometriche piane, nelle quali ad un punto M corrisponde un punto M', a una curva (C), descritta da M, corrisponde una curva (C'), descritta dal punto corrispondente M'.

Oltre alle applicazioni particolari, è interessante occuparsi dei principî generali, perchè questi essendo conosciuti, potranno essere applicati a tutte le curve (C) e (C').

Per citare alcuni di questi principî generali ai quali facciamo allusione, richiamiamo l'attenzione sui fatti seguenti:

1°. Formola di trasformazione; essa permette di scrivere l'equazione della trasformata (C') quando si conosca quella di (C) e, come corollario, di dedurre l'ordine di (C'), conoscendo quello di (C).

2°. Essendo dati l'ordine e la classe di (C), trovare l'ordine e la classe di (C'). In particolare, studiare la trasformazione dei punti singolari di (C), cioè, trovare ciò che divengono in (C') i punti di flesso, i punti multipli di (C), ecc.

3°. Risolvere il problema della tangente, cioè *essendo dato il punto* M *di* (C), *trovare la tangente a* (C') *nel punto corrispondente* M', ecc. perchè vi sarebbero evidentemente molte altre cose da considerare.

Voglio solamente, a proposito dell'articolo citato, completare, per quanto riguarda la costruzione della tangente alla trasformata, l'interessante nota del Dott. G. Cardoso-Laynes.

2. Troverò occasione di applicare, ancora una volta, il principio che io ho chiamato *principio delle trasversali reciproche,* il qual principio a più riprese, e da ben quarant'anni, ho mostrato quanto sia semplice e fecondo.

Prendiamo, come propone il sig. Cardoso-Laynes, due assi rettangolari OX e OY; sia (C) la curva che si vuol trasformare mediante la costruzione geometrica proposta; nel punto M, preso ad arbitrio su (C), tracciamo la tangente che incontri OX in A e OY in B. Sia M' il punto di mezzo di AB; M' è nella trasformazione del sig. Cardoso-Laynes, il corrispondente di M. Supponendo M mobile su (C), M' descrive la corrispondente curva (C'); io mi propongo di risolvere il problema: *essendo dati gli assi* OX, OY *la curva* (C) *ed il punto* M, *trovare la tangente in* M' *alla trasformata* (C').

3. Indicherò la soluzione di un problema elementarissimo, al quale ricondurrò quello che mi sono proposto:

Essendo dato un triangolo ABC, *da un punto* P *della retta* BC, *condurre una trasversale* PB'C', *tale che si abbia*

$$\frac{BB'}{CC'}=\frac{p}{q},$$

essendo p *e* q *due lunghezze date.*

Suppongo il problema risoluto, e sia PB'C' la trasversale richiesta. Se B'', C'' sono rispettivamente i punti *isotomici* (**) di B' e C' sui lati AB ed AC, la retta B''C'' sarà la trasversale reciproca (***) di B'C', che andrà ad incontrare la BC in un punto P', isotomico di P. Questo punto P' è dunque conosciuto.

Prendiamo $AI = p$, $AK = q$ e dal punto P' conduciamo la parallela a IK; la trasversale reciproca di questa parallela è la retta cercata.

4. Consideriamo, col sig. Cardoso-Laynes, due rette OX, OY ed una curva (C). Tracciamo le due tangenti PQ e RS, infinitamente vicine, e sia M il loro punto d'incontro. Consideriamo il triangolo formato dalle due tangenti e da uno degli assi, per es. OX. Avendo fatto QP' = QP' = MP, e SR' = SR'' = MR, osserveremo che PR e P'R' sono trasversali reciproche nel triangolo MQS e quindi O' è l'isotomico di O su QS.

(*) "Periodico di Matematica„. Ottobre 1903, pag. 81.

(**) Credo che questo termine sia ben noto; due punti sono *isotomici* sopra un segmento dato, quando sono simmetrici rispetto al punto medio del segmento stesso.

(***) Suppongo conosciuto il *principio delle trasversali reciproche,* che io feci conoscere nel 1866 ("Annales scientifique de l'École normale supérieure„) e che dipoi ho applicato in numerose memorie. Tale principio può enunciarsi così: *quando tre punti sono in linea retta sui lati di un triangolo, anche i loro isotomici sono in linea retta.*

Ma d'altra parte, per il teorema di Menelao, si ha

$$\frac{KS}{KQ}=\frac{MP''}{P''Q}\cdot\frac{R''S}{MR''} \tag{1}$$

e anche

$$\frac{IR'}{IP'}=\frac{MP''}{P''P'}\cdot\frac{R''R'}{MR''}. \tag{2}$$

Ma, osservando che è

$$P''P'=2P''Q \qquad e \qquad R''R'=2R''S,$$

si conclude dalle (1) (2)

$$\frac{KS}{KQ}=\frac{IR'}{IP'} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{KS}{SQ}=\frac{IR'}{P'R'}. \tag{3}$$

Infine, indicando rispettivamente con ρ e ρ' i raggi dei cerchi circoscritti ai triangoli MQS e MP'R', si ha

$$\frac{QS}{P'R'}=\frac{\rho}{\rho'}$$

e l'eguaglianza (3) si può scrivere

$$\frac{KS}{IR'}=\frac{\rho}{\rho'} \tag{4}$$

5. Ciò premesso, arriviamo facilmente alla costruzione che ci eravamo proposti; infatti, passando al limite, supponendo cioè che la tangente PQ si confonda con la RS, otteniamo alcune relazioni geometriche che metteremo in evidenza:

1°. Il punto M diviene il punto di contatto μ della tangente RS e noi prendiamo $R'S=R''S=R\mu$.

2°. Il punto O', che è l'isotomico di O su QS, diviene il simmetrico di O rispetto a S.

3°. I cerchi circoscritti ai triangoli MQS e MP'R' divengono: il primo, il cerchio passante per μ e per S, tangenzialmente a OX, ed il secondo il cerchio passante per μ e per R', tangenzialmente a O'R'.

Indicheremo con r ed r' i raggi di questi cerchi; r ed r' sono lunghezze conosciute, facili a costruirsi; sono i limiti delle lunghezze ρ e ρ'.

4°. La retta P''R'', al limite, è divenuta una retta passante per R'' e che determina, per la (3), sui lati del triangolo O'R'S, due segmenti KS e IR', tali che si abbia

$$\frac{KS}{IR'}=\frac{r}{r'}.$$

Potremo perciò tracciare questa retta R''KI, applicando la costruzione indicata nel § 3 di questa nota.

Conclusione. — Possiamo osservare che il punto medio A di RS coincide col punto medio di MR''. Analogamente A', punto medio di PQ è anche punto medio di MP'', quindi AA' è parallela a P''R'' e per avere la tangente in A alla curva (C') luogo di questo punto A, basterà condurre per A la parallela alla retta R''KI, dopo avere costruito tale retta nel modo indicato.

Questa osservazione completa, sotto un certo aspetto, l'interessante nota del sig. Cardoso-Laynes. Sarei lieto che questi vi trovasse interesse e facesse conoscere ai giovani geometri italiani il metodo delle trasversali reciproche, del quale ho mostrato in tante occasioni, come ho già detto, la meravigliosa semplicità.

Parigi, novembre 1903. G. De Longchamps.

II. — **Un teorema sui limiti.** — *Se una successione*

$$K_1, K_2, K_3, \ldots K_n, \ldots K_p, \ldots K_{p+s}, \ldots K_r \ldots \tag{1}$$

ammette un limite L, *anche la successione*

$$K_1, \ldots K_n, \ldots K_p, K_{p+1}, \ldots K_{p+s}, K_r, \ldots \tag{2}$$

ottenuta prendendo dalla (1) *un numero illimitato di quali si vogliono termini, ammette lo stesso limite* L.

Dimostrazione. — Infatti, poichè la (1) ammette per limite L, potremo trovare in essa un termine K_p, appartenente pure alla (2), tale che, indicando ε un numero piccolo quanto si voglia, si verifichino le disuguaglianze:

$$|L - K_p| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$
$$|K_p - K_{p+1}| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$
$$|K_{p+1} - K_{p+2}| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|K_{p+s-1} - K_{p+s}| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$

dalle quali

$$|L - K_{p+s}| < \varepsilon .$$

Analogamente

$$|L - K_r| < \varepsilon ; \dots$$

quindi, ricordando che una successione tende al limite L se è possibile determinare nella successione un termine a_n, a partire dal quale le differenze fra L ed i termini che seguono siano in valore assoluto minore di ε, indicando ε un numero piccolo quanto si voglia, potremmo dire che la (2) tende al limite L, come appunto si voleva dimostrare.

Osservazione. — Applicando questo teorema si potrà spesso semplificare di molto la ricerca del limite di una successione. Così per esempio si viene a semplificare la ricerca del limite della successione formata dai valori approssimati a meno di

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

di un numero decimale periodico.

Pier Andrea Fontebasso.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 639 e 655

639. *Fra* m *persone delle quali* m_1 *parlano solo il francese,* m_2 *solo l'inglese e le altre tanto il francese quanto l'inglese, se ne vogliono scegliere* n *in modo che* n_1 *di queste parlino almeno il francese e le altre almeno l'inglese; in quante maniere si potrà fare la scelta?*

G. Pesci.

Risoluzione.

Se delle n_1 persone che devono parlare francese se ne scelgono $n_1 - r$ fra le m_1 che parlano solo francese, se ne dovranno poi scegliere r fra le $m - m_1 - m_2$ che parlano tanto il francese che l'inglese; e ciò si potrà fare in

$$\binom{m_1}{n_1 - r}\binom{m - m_1 - m_2}{r} \quad \text{maniere.}$$

Se, corrispondentemente, delle $n-n_1$ persone che devono parlare inglese se ne scelgono $n-n_1-s$ fra le m_2 che parlano solo inglese, se ne dovranno poi scegliere s fra le $m-m_1-m_2-r$ che parlano tanto il francese che l'inglese e che sono rimaste dopo la scelta precedente; e ciò si potrà fare in

$$\binom{m_2}{n-n_1-s}\binom{m-m_1-m_2-r}{s} \quad \text{maniere.}$$

Per cui, se delle n_1 persone che devono parlare francese se ne scelgono n_1-r fra le m_1 che parlano solo francese, questa scelta si potrà fare in

$$\binom{m_1}{n_1-r}\binom{m-m_1-m_2}{r}\sum_{s=0}^{s=n-n_1}\binom{m_2}{n-n_1-s}\binom{m-m_1-m_2-r}{s}.$$

Facendo variare r da 0 a n_1, si conclude che il numero cercato è

$$\sum_{r=0}^{r=n_1}\left\{\binom{m_1}{n_1-r}\binom{m-m_1-m_2}{r}\sum_{s=0}^{s=n-n_1}\binom{m_2}{n-n_1-s}\binom{m-m_1-m_2-r}{r}\right\}.$$

Una soluzione analoga a questa fu mandata dal sig. **Gandini, R. U. di Pavia.**

G. Pesci.

655. *Se* ABC, A'B'C' *sono due triangoli omologici l'uno inscritto nell'altro, e* P *è un punto qualunque del loro piano, le coniche* ABCA'P, ABCB'P, ABCC'P *incontrano i lati* B'C', C'A', A'B' *in tre punti* X, Y, Z *d'una retta* r, *e le loro tangenti in* A, B, C *concorrono in un punto* Q. *Se* P *è nella conica circoscritta ad* ABC *ed inscritta in* A'B'C', *la retta* r *tocca questa conica nel punto* P, *e* Q *è nell'asse d'omologia dei due triangoli.*

G. Biasi.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia:

$$\alpha \equiv (AA', BC),\ \beta \equiv (BB', AC),\ \gamma \equiv (CC', AB),\ D \equiv (RC, B'C');$$

pel teorema di Ceva avremo:

$$\frac{C'A}{B'A}\cdot\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{B'C}{A'C}=-1, \qquad (1) \qquad\qquad \frac{B\alpha}{C\alpha}\cdot\frac{C\beta}{A\beta}\cdot\frac{A\gamma}{B\gamma}=-1. \qquad (2)$$

Indichiamo con i la retta $\overline{PI}$ con $(I = A, B, C, A', B', C')$. Ciò posto premetto e dimostro la seguente eguaglianza:

$$(abcc')(bcaa')(cabb')=1. \qquad (3)$$

Si ha:

$$(abcc')=\frac{\operatorname{sen}(ac)\operatorname{sen}(bc')}{\operatorname{sen}(bc)\operatorname{sen}(ac')}, \qquad (4) \qquad\qquad (bcaa')=\frac{\operatorname{sen}(ba)\operatorname{sen}(ca')}{\operatorname{sen}(ca)\operatorname{sen}(ba')}, \qquad (5)$$

$$(cabb')=\frac{\operatorname{sen}(cb)\operatorname{sen}(ab')}{\operatorname{sen}(ab)\operatorname{sen}(cb')}, \qquad (6)$$

inoltre:

$$\frac{\operatorname{sen}(ab')}{\operatorname{sen}(ac')}=\frac{PC'}{PB'}\cdot\frac{B'A}{C'A}, \qquad (7) \qquad\qquad \frac{\operatorname{sen}(bc')}{\operatorname{sen}(ba')}=\frac{PA'}{PC'}\cdot\frac{C'B}{A'B}, \qquad (8)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(ca')}{\operatorname{sen}(cb')}=\frac{PB'}{PA'}\cdot\frac{A'C}{B'C}. \qquad (9)$$

1°. Tagliando il fascio X (BCAA') con $\overline{BC}$ e proiettando la punteggiata ottenuta da A' su $\overline{B'C'}$ otterremo la punteggiata

$$(C'B'DX) = -(C'B'AX).$$

Inoltre si sa che:

$$X(BCAA') \barwedge P(BCAA'),$$

quindi avremo:

$$-(\mathrm{C'B'AX}) = (bcaa'),$$

e analogamente

$$-(\mathrm{A'C'BY}) = (cabb'), \qquad -(\mathrm{B'A'CZ}) = (abcc').$$

Moltiplicando membro a membro queste ultime tre eguaglianze, e tenendo conto delle (3), (1) risulta:

$$\frac{\mathrm{C'X}}{\mathrm{B'X}} \cdot \frac{\mathrm{A'Y}}{\mathrm{C'Y}} \cdot \frac{\mathrm{B'Z}}{\mathrm{A'Z}} = 1,$$

quindi pel teorema di Menelao i punti X, Y, Z appartengono ad una retta r. c. d. d.

2°. Siano A_1, B_1, C_1 i punti d'incontro di $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ rispettivamente con le tangenti in A, B, C alle tre coniche del problema. Tagliando il fascio $A(BCAA')$ con $\overline{BC}$ otteniamo la punteggiata $(BCA_1\,\alpha)$; inoltre:

$$A\,(BCAA') \barwedge P\,(BCAA')$$

e quindi

$$(BCA_1\,\alpha) = (bcaa'),$$

e analogamente:

$$(CAB_1\,\beta) = (cabb'), \quad (ABC_1'\gamma) = (abcc').$$

Moltiplicando queste ultime tre eguaglianze membro a membro e tenendo conto delle (3), (2) risulta:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = -1$$

e per il teorema di Ceva le rette $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ passeranno per uno stesso punto Q. c. d. d.

3°. Il puto P si trovi sulla conica circoscritta ad ABC ed inscritta in A′B′C′. Per P conduciamo la tangente a questa conica e chiamiamo X, Y, Z rispettivamente i punti in cui questa tangente incontra i lati B′C′, C′A′, A′B′. Basterà dimostrare ad esempio che i punti A, B, C, A′, P, X sono su una stessa conica.

Si sa che: *in un quadrilatero semplice circoscritto a una conica, le congiungenti i punti di contatto dei lati opposti e le diagonali concorrono in uno stesso punto;* dunque, ad esempio, le rette AB, CP, B′Y passano per uno stesso punto H. Consideriamo l'esagono ABA′CPX. I punti $H \equiv (AB, CP)$, $Y \equiv (BA', PX)$, $B' \equiv (A'C, XA)$ sono allineati; quindi ABA′CPX è un esagono di Pascal e come tale è inscrittibile in una conica. Analogamente si dimostra che i gruppi di punti

$$A, B, C, B'\,P, Y; \qquad A, B, C, C', P, Z;$$

appartengono ad altre due coniche.

4°. Sia: $D \equiv (BC, B'C')$, $E \equiv (AC, A'C')$, $F \equiv (AB, A'B')$. La $\overline{DEF}$ sarà l'asse d'omologia dei due triangoli ABC, A′B′C′. Siano: Q_1, Q_2, Q_3 i punti d'incontro dell'asse d'omologia rispettivamente con le tangenti in A, B, C alle tre coniche in quistione. Avremo:

$$P\,(ABCX) \barwedge A\,(Q_1BCX), \quad P\,(BAYC) \barwedge B\,(Q_2AYC), \quad P\,(CZAB) \barwedge C\,(Q_3ZAB).$$

I punti X, Y, Z sono allineati con P dunque i tre fasci di centro P hanno egual rapporto armonico, quindi avranno pure egual rapporto armonico anche i fasci di centri A, B, C. Segando questi tre fasci con l'asse d'omologia DEF otterremo le punteggiate:

$$(Q_1FED) = (Q_2FED) = (Q_3FED)$$

e quindi i punti Q_1, Q_2, Q_3 dovranno coincidere in un sol punto Q c. d. d.

QUISTIONI PROPOSTE

667. Sieno ABC, A'B'C' due triangoli omologici, l'uno inscritto nell'altro e si congiunga un punto Q del loro asse di omologia coi vertici A'B'C' del secondo; i punti nei quali le congiungenti incontrano i lati opposti dello stesso triangolo sono in una conica circoscritta ad ABC e tangente all'asse d'omologia nel punto Q.

668. Esistono sei coniche (tre ellissi e tre iperbole) concentriche a due a due (un'ellisse con una iperbole), circoscritte a un triangolo ABC e tali, che se le ceviane di un loro punto incontrano i lati corrispondenti in D, E, F e il circolo DEF taglia per la seconda volta gli stessi lati in D', E', F', le rette AD', BE', CF' s'incontrino in un punto della stessa conica. I centri delle sei coniche sono i punti medii dei lati del triangolo, e ciascuna conica contiene due punti del gruppo di Gergonne; le sei coniche s'incontrano per conseguenza a tre a tre in questi quattro punti.

Le sei coniche sono rispettivamente tangenti nei vertici del triangolo alle bisettrici degli angoli interni ed esterni, le quali bisettrici sono i luoghi dei centri dei circoli che passano per i piedi delle ceviane dei punti appartenenti alle coniche ad esse tangenti.

G. Biasi.

BIBLIOGRAFIA

Dr. F. Gomes Teixeira. — *Obras sobre mathematica, publicada por ordem do Governo português.* Volume primeiro.

Il Governo portoghese, colla deliberazione presa di pubblicare riunite in volumi le numerose memorie dell'illustre professore Gomes Teixeira sparse nei principali giornali del mondo, si è reso benemerito della scienza. Gli studiosi di tutti i paesi gli debbono vera e sincera riconoscenza, poichè una tale pubblicazione li libera dalle fatiche non sempre lievi di ricerche qualche volta penose da farsi fra una moltitudine di riviste che si pubblicano in tutto il mondo civile.

Il primo volume di circa 400 pagine in grande formato, testè pubblicato, contiene le seguenti quattordici memorie:

I. *Sobre o desenvolvimento des funções em serie.* Questo lavoro, già premiato e pubblicato nel 1897, dalla Reale Accademia di Madrid, tratta della serie di *Taylor* nel caso delle variabili reali e delle variabili complesse, con esposizione particolareggiata dei metodi di *Cauchy* e di *Riemann*. Passando poi a trattare anche della serie di *Laurent*, espone i metodi di *Weierstrasse* e *Mittag-Leffler*, terminando con lo studio delle serie di *Lagrange* e di *Bürmann*, della quale ultima espone altresì una notevole generalizzazione.

II. *Sur les développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable* (" Giornale di Crelle ", 1896). L'Autore comincia collo studio delle curve rappresentate dall'equazione

$$|\operatorname{sen} z| = c,$$

essendo c una costante reale positiva e z una variabile complessa $x_1 + iy_1$. Nel caso di $c \leqq 1$, quell'equazione rappresenta un'infinità di ovali; e se la funzione $f(x)$ è olomorfa entro una di queste, è suscettibile dello sviluppo:

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n \operatorname{sen}^n x,$$

dove i coefficienti A_n sono determinabili con metodo notevole per la sua semplicità. Per $c > 1$, quell'equazione rappresenta una curva composta di due rami, che si estendono all'infinito; e se la funzione $f(x)$ è olomorfa nello spazio compreso fra i due rami, è sviluppabile sotto la forma:

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n \operatorname{sen}^n x + \cos x \,.\, \sum_0^\infty B_n \operatorname{sen}^n x,$$

dove i coefficienti A_n, B_n sono calcolabili con apposite formole.

Si considera poi il caso particolare in cui $f(x)$ ammette il periodo reale o immaginario 2ω, applicando i risultati ottenuti alla funzione ellittica $\operatorname{sn} x$.

III. *Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée* (" Giornale di Crelle ", 1890).

In questa memoria si dimostra che essendo data una funzione olomorfa nella corona compresa fra due circonferenze non concentriche, o nell'area limitata da rette, o da rette e da archi circolari, si possono determinare a e b in modo che la funzione, entro l'area considerata, sia sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $\dfrac{x-a}{x-b}$.

Dopo avere esposto un metodo per costruire delle funzioni olomorfe nell'interno di uno spazio compreso da rette, che non possono essere continuate all'esterno, si passa allo sviluppo di una funzione secondo le potenze di $\operatorname{sen} x$ o di $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$. Infine si dà una nuova dimostrazione della formola di *Fourier* pel caso di variabili complesse periodiche, e un'estensione di tale formula al caso in cui la funzione non è periodica.

IV. *Extrait d'une lettre adressé a M. Hermite* (" Bulletin des Sciences Mathématiques ", 1890).

È relativa allo sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le potenze di $\operatorname{sen}(x-a)$ e $\cos(x-a)$.

V. *Sur les courbes parallèles à l'ellipse.* (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique, 1898.)

Dopo avere esposte molte ed interessanti proprietà delle curve *toroidi*, si studiano le loro podarie, che appartengono alla famiglia delle curve cicliche, deducendo molte eleganti proprietà delle lemniscate elittiche ed iperboliche.

VI. *Sur les dérivées d'ordre quelconque* (" Giornale di Battaglini ", 1880).

Dopo aver dato l'espressione analitica della derivata d'ordine n rispetto ad x della funzione $u = f(y)$, essendo $y = \varphi(x)$, si fa l'applicazione delle formole ottenute al caso delle funzioni semplici.

Si considera poi la funzione $y = f(u_1, u_2, \dots u_l)$, essendo $u_k = \varphi_k(x)$, e infine la funzione implicita della x definita dall'equazione

$$f(x, y) = 0.$$

VII. *Sur le développement des fonctions implicites en série* (" Journal de Liouville „ 1881).

VIII. *Sur le développement des fonctions implicites* (" Journal de Liouville „ 1889).

Nella prima nota si dimostra una formula per lo sviluppo in serie, ordinata secondo le potenze di x, di una funzione u definita dalle equazioni:

$$u = f(z), \qquad z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^\lambda \varphi_\lambda(z).$$

Nella seconda si determina quale valore di u deve essere considerato come rappresentato dalla serie data, e si determinano le condizioni di convergenza di questa serie.

IX. *Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique* (" Giornale de Crelle „ 1903).

Applicando la teoria dei residui, l'Autore estende uno sviluppo ottenuto in un caso particolare da *Briot* e *Bouquet* nella loro opera *Théorie des fonctions elliptiques*.

X. *Apontamentos biographicos sobre Daniel Augusto Da Silva* (" Boletin da Direcção Geral de Instrucção Publica „. Lisboa. 1902).

XI. *Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*. (" Bulletin de la Société Mathématique de France, 1881).

L'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

è trasformabile in un'equazione lineare quando se ne conosce un integrale primitivo particolare, con tre costanti arbitrarie; e quest'equazione si semplifica considerevolmente quando questo integrale soddisfa a uno o a due sistemi di equazioni della caratteristica, ai quali *Monge* ed *Ampère* hanno ridotto il problema dell'integrazione dell'equazione precedente. L'Autore dimostra che si ottengono i medesimi risultati ai quali conduce la teoria di *Ampère*, con delle considerazioni dirette.

XII. *Diversos artigos sobre geometria analytica plana*. Contiene dieci note di geometria analitica pubblicate dal 1898 al 1902 in vari periodici (" Archiv der Mathematik und Physik „, " El Progreso Matematico „, " Revista trimestral de matematica „, " Mathésis „, " Intermédiaire des mathématiciens „).

XIII. *Sur la convergence des formules d'interpolations de Lagrange, Gauss*, etc. (" Giornale di Crelle „. 1903).

Quando sono noti i valori che una funzione $f(x)$ prende per i valori $a_1, a_2, \ldots a_m$ di x, la formola d'interpolazione di *Lagrange* serve a costruire una funzione intera di x che abbia questi medesimi valori nei punti $a_1, a_2 \ldots a_m$. Nella prima parte della memoria, l'Autore studia le condizioni perchè questa funzione tenda verso $f(x)$ quando m aumenta indefinitamente. Nella seconda parte si studiano le formole d'interpolazione trigonometriche, e specialmente una formola di *Gauss* e un'altra di *Hermite*.

Si considerano in particolare le funzioni periodiche, supponendo dapprima che $a_1, a_2, a_3 \ldots$ siano numeri reali arbitrari, e poscia che essi siano radici dell'equazione $\cos(nx) = 0$, o $\operatorname{sen}(nx) = 0$.

XIV. *Diversos artigos sobre Analyse infinitesimal*. Contiene sei note di analisi pubblicate dal 1885 al 1896 in varie riviste (" Monatshefte für Mathematik und Physik „, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, " N. Annales de Mathématiques „).

G. Pirondini.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 21 aprile 1904.

SULLE OPERAZIONI

FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI

e, in particolare,

sul calcolo delle parti proporzionali

nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche

Per il calcolo delle parti proporzionali nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche non si stabilisce, che noi sappiamo, alcuna norma ben determinata, e crediamo che solo nell'*Appendice* alla prima edizione del nostro *Trattato elementare di Trigonometria* (*) si diano, per ciò, opportune regole pratiche, deducendole da uno studio abbastanza esteso dalla questione. Siccome però quelle regole sono date per le tavole del CAILLET (**), le quali non si usano che per i calcoli nautici, siccome inoltre le considerazioni generali, dalle quali esse sono dedotte, possono essere note a pochi studiosi (perchè la maggior parte della materia contenuta in quell'*Appendice* non è esplicitamente richiesta da nessun programma scolastico), crediamo far cosa utile ripubblicandole qui, opportunamente modificate e molto semplificate.

Le considerazioni sulle quali esse sono basate consistono nella risoluzione di un problema generale relativo alle approssimazioni numeriche: cominceremo quindi, anche qui, dal risolvere questo problema, e saremo così condotti a stabilire dei procedimenti generali, per l'esecuzione dei calcoli fra numeri decimali approssimati; i quali non solo serviranno allo scopo che qui ci siamo prefisso, ma potranno essere utili nella maggior parte dei calcoli pratici. Fra questi cre-

---

(*) Ed. Giusti, Livorno, 1895.

(**) *Tables des logarithmes* (Ed. Lafolye. — Vannes, 1890).

diamo nuovo e notevole quello, che ora diamo, per la divisione; esso è semplice e di facile applicazione, benchè basato sopra considerazioni non molto facili e alquanto minuziose.

E divideremo il nostro studio in quattro capitoli: nel primo daremo i procedimenti generali ora accennati; nel secondo studieremo gli errori cui essi possono dar luogo; nel terzo applicheremo i procedimenti stessi al caso particolare del calcolo delle parti proporzionali nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche; nel quarto finalmente (come nel secondo) studieremo gli errori ai quali essi possono dar luogo nello stesso caso particolare.

Avvertiamo però che la conoscenza del secondo capitolo non è necessaria allo studio del terzo, e che anche il quarto capitolo può essere tralasciato da chi voglia limitarsi ad apprendere le regole da seguirsi nel caso particolare accennato. Avvertiamo inoltre che nel quarto capitolo siamo stati, incidentalmente, condotti a parlare di tutti gli errori prodotti dalla interpolazione semplice nelle tavole logaritmo-trigonometriche, e che abbiamo creduto non inutile raccogliere e completare i risultati delle nostre ricerche su questa laboriosa e importante questione, perchè fin'ora essa non era mai stata risolta completamente.

CAPITOLO PRIMO

LE PRIME QUATTRO OPERAZIONI FRA NUMERI APPROSSIMATI.

§ 1. I problemi, che costituiscono la *Teoria delle approssimazioni numeriche*, sono, com'è noto, i due seguenti:

1° *determinare l'approssimazione colla quale si può ottenere il risultato di un determinato calcolo numerico, conoscendo le approssimazioni dei dati;*

2° *eseguire un determinato calcolo numerico in modo che il risultato abbia una approssimazione prestabilita.*

E la loro risoluzione è ampiamente sviluppata in molti trattati di *Aritmetica* (*) e in molte pubblicazioni speciali (**).

(*) Veggasi, per es., G. BERTRAND. *Trattato di Aritmetica*. (Traduzione del NOVI). Ed. Le Monnier, Firenze, 1862, pag. 412; — J. A. SERRET, *Traité d'Arithmétique*. Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1875, pag. 168; — R. BALTZER. *Die Elemente der Matematik*. Ed. Hirzel, Lipsia, 1875, I Vol. pag. 50.

(**) Veggasi, per es., M. J. VIEILLE. *Théorie générale des approximations numérique*. Ed. Mallet-Bachelie, Parigi, 1854; — J. GREISSE. *Approximations numériques*. Ed. Nony, Parigi, 1898; — M. GUYOU. *Note sur les approximations numériques*. Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1891.

A noi pare però che, in pratica, si debba ordinariamente presentare un altro problema, cui (secondo noi, a gran torto) non si dà nessuna importanza:

3° *in che maniera si deve eseguire un determinato calcolo fra numeri decimali approssimati, affinchè nel risultato non compaiano cifre inutili, le quali cioè, non possono, generalmente, essere esatte?*

$$\begin{array}{r} 3{,}21 \\ 213{,}112 \\ \hline 642 \\ 321 \\ 321 \\ 963 \\ 321 \\ 642 \\ \hline 684{,}08952 \end{array}$$

E per spiegare meglio la ragion d'essere di questo problema, daremo due esempi.

I. Si debba moltiplicare 3,21 per 213,112 e si sappia che ciascuno di questi due numeri può essere errato, per eccesso o per difetto, di mezza unità dell'ultimo ordine. Eseguendo l'operazione nel modo ordinario (e la trascriviamo completamente qui accanto, per maggior chiarezza di quanto seguirà), si trova per prodotto 684,08952; ma questo può, secondo l'ipotesi, essere affetto da un errore eguale a

$$3{,}215 \times 213{,}1125 - 3{,}21 \times 213{,}112 = 1{,}0671675\,,$$

che è maggiore di una unità, quindi le cifre che nel prodotto stesso seguono la cifra delle unità sono inutili, perchè non danno che una approssimazione certamente illusoria.

II. Si debba dividere 72,575822 per 3,4 ed anche qui si sappia che ciascuno di questi due numeri può essere errato, per eccesso o per difetto, di mezza unità dell'ultimo ordine. Eseguendo l'operazione nel modo ordinario (e questa pure, per la stessa ragione, la trascriviamo qui accanto completamente, anche coi successivi prodotti parziali) si trova per quoziente 21,34583; ma questo può, secondo l'ipotesi, essere affetto da un errore eguale a

$$\begin{array}{l|l} 72{,}575822 & 3{,}4 \\ \cline{2-2} 68 & 21{,}34583 \\ \hline 45 & \\ 34 & \\ 117 & \\ 102 & \\ 155 & \\ 136 & \\ 198 & \\ 170 & \\ 282 & \\ 272 & \\ 102 & \\ 102 & \end{array}$$

$$\frac{72{,}5758225}{3{,}35} - \frac{72{,}575822}{3{,}4} = 0{,}31874\ldots$$

che è maggiore di 3 decimi, quindi le cifre che nel quoziente stesso seguono la cifra dei decimi sono inutili, perchè non danno che una approssimazione certamente illusoria.

In ciascuna di queste due operazioni più della metà del lavoro che si è fatto è dunque inutile; ed evidentemente, molto di più sarebbe il lavoro inutile che si farebbe, se, sempre partendo da numeri approssimati, si eseguissero coi procedimenti ordinarî più operazioni successive. Di qui ci pare quindi risultare chiaramente l'utilità e l'importanza del nostro problema.

Osservazione. — In alcune delle opere a noi note questo terzo problema s'intende compreso nel primo; ma poi vi è risolto in parte soltanto, e ciò mediante le operazioni abbreviate, le quali, essendo alquanto artifiziose, non sono generalmente in uso.

§ **2.** Stabiliremo prima di tutto le seguenti convenzioni.

I. *Il numero d'ordine delle cifre di un numero decimale si conti sempre a partire dalla cifra delle unità, questa esclusa, e si prenda* *positivo o negativo secondochè, per giungere alla cifra che si considera, si va verso sinistra o verso destra.*

Dietro tale convenzione, nel numero decimale 354,6879 le successive cifre

$$3, \quad 5, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 7, \quad 9$$

sono rispettivamente degli ordini

$$+2, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad -4.$$

Questa convenzione, che noi stessi altra volta raccomandammo (*), è (come vedremo in seguito) opportunissima per lo studio delle approssimazioni numeriche; perchè, evidentemente, per passare dal valore *assoluto* (nel senso dell'*Aritmetica elementare*) al valor *relativo* di una cifra di un numero decimale, basta moltiplicare la prima per una potenza di 10 avente per esponente l'ordine della cifra stessa. Ed è molto utile anche in pratica; un esempio si ha in questa regola: *la caratteristica del logaritmo di un numero decimale qualunque* (supposto di prendere sempre i logaritmi colla mantissa positiva) *è sempre uguale all'ordine della prima cifra significativa di questo numero;* ed altri esempî notevoli troveremo in seguito (v. § 7 e Oss. I del § 10).

II. *Un numero esatto si consideri come un numero avente infinite cifre decimali.*

Questa convenzione, che forse non occorrerebbe porre esplicitamente, è necessaria per la generalità dei procedimenti che indicheremo in seguito.

III. *Se in un numero decimale si devono trascurare alcune cifre, si aumenti di una unità l'ultima cifra che resta, quando quella che seguiva era uguale o superiore a 5.*

Dietro tale convenzione, avendo i numeri

$$0{,}7286, \quad 0{,}0304, \quad 0{,}121999, \quad 43{,}392499, \quad 3{,}27350,$$

e volendo tener conto solo di tre cifre decimali, i numeri da sostituire sono rispettivamente

$$0{,}729, \quad 0{,}030, \quad 0{,}122, \quad 43{,}392, \quad 3{,}274.$$

Con questa convenzione, notissima a tutti i calcolatori, l'errore che si commette è al più eguale a 5 decimi dell'unità dell'ultimo ordine se è per eccesso (v. il quinto esempio), ed è minore dello stesso numero, ma può però differirne poco finchè si vuole, se è per difetto (v. il quarto esempio); o, in altre parole, 5 decimi dell'unità dell'ultimo ordine è un *massimo* dell'errore nel primo caso, ne è invece un *limite superiore inabbassabile* nel secondo. Mentre che, tralasciando, senz'altro, le cifre di cui non si vuol tener conto, si potrebbe commettere un errore che ha per *limite superiore inabbassabile* una unità dell'ultimo ordine (v. il terzo esempio, nel quale, se si prendesse 0,121 senz'altro,

(*) V. *Periodico di Matematica,* anno X (1895), fasc. I.

si commetterebbe un errore che, considerando come cifra dell'unità l'ultima cifra rimasta, sarebbe eguale a 0,999).

IV. *Per prima cifra di un numero decimale si intenda la prima cifra* significativa *a sinistra, e per ultima cifra s'intenda l'ultima cifra,* significativa o no, *a destra.*

Dietro tale convenzione, per avere il numero delle cifre di un numero decimale approssimato qualunque, si prescinde dalla virgola e si trascurano gli zeri che precedono la prima cifra significativa, ma non da quelli che segnano l'ultima cifra significativa. E anche questa convenzione è necessaria, perchè, se si vuole tener conto di tutte le cifre che non rappresentano una approssimazione illusoria, non si può, per es., a 3,250 sostituire 3,25; come a 0,46996 (quando non si voglia tener conto della quinta cifra decimale) non si deve sostituire 0,47, ma 0,4700 (*).

Ciò posto e supponendo (quando non si avverta esplicitamente il contrario) che nei numeri approssimati, che considereremo, l'errore sia soltanto quello cui dà luogo la convenzione III del § prec., passiamo a risolvere il nostro problema, limitandoci alle prime quattro operazioni dell'*Aritmetica.*

§ 3. **Addizione.** — *Si trascurino le cifre che sporgono (a destra) della colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra dell'addendo meno approssimato, e si proceda nel modo ordinario, tralasciando nel risultato la prima cifra che si ottiene.*

I) Dati	Addizione
12,4535	12,454
4,509601	4,510
0,00052	0,001
0,04651	0,047
0,00048	. . . . . .
18,53	18,53
0,344499	0,344
	35,89

Così: dovendosi sommare i sette numeri posti qui accanto, si è osservato che l'addendo meno approssimato è il sesto, la cui ultima cifra è d'ordine — 2; si sono quindi trascurate in tutti gli altri addendi le cifre di ordine inferiore a — 3 e, siccome la prima colonna a destra ha per somma 16, si è tralasciato il 6 e alla colonna precedente si è aggiunto 2 invece di 1 (§ 2, III).

§ 4. Il procedimento indicato si giustifica facilmente, se si fa osservare che le cifre trascurate, non possono essere esatte, perchè dipendono tutte, cominciando dalla prima di esse, da cifre che in uno almeno degli addendi sono completamente sconosciute; e che può essere inesatta anche l'ultima cifra del risultato, e ciò per l'errore che affetta l'addendo meno approssimato

Si è poi tenuta una cifra di più dell'addendo meno approssimato, perchè la somma dell'ultima colonna a destra, per quanto ignota nella cifra delle unità, può dar luogo a delle diecine (come nell'esempio), che si devono portare nella colonna precedente.

Osservazione I. — Il procedimento stabilito suppone che gli addendi, escluso quello che è meno approssimato, non siano più di dieci;

(*) *Die Nullen am Ende sind in diesen Falle nicht ohne Bedeutung,* dice precisamente il Baltzer (l. c., pag. 51).

se fossero più di dieci (non però più di cento) converrebbe conservare negli addendi una cifra di più, perchè le centinaia della somma dell' ultima colonna (se ce ne fossero) sarebbero unità dell' ultimo ordine del risultato.

Osservazione II. — Se gli addendi sono due soli, invece di trascurare nel risultato la prima cifra che si ottiene, si può (chè, evidentemente, è lo stesso) trascurare una cifra di più nell' addendo più approssimato; ossia *si possono trascurare tutte le cifre che l'addendo più approssimato ha di più dell'altro* (s'intende a destra, e si suppongono i due numeri in colonna), *ed eseguire l'addizione nel modo ordinario.*

Osservazione III. — Nel caso in cui un addendo sia esatto e la sua ultima cifra sia di ordine algebricamente superiore a quello dell'ultima cifra dell'addendo meno approssimato, è necessario rammentare la convenzione II del § 2.

II) Dati	Addizione
7,8346	7,835
0,05	0,05
0,567	0,567
0,54998	0,550
	9,00

Osservazione IV. — Per quanto si osservò a proposito della convenzione IV (§ 2) non si può, in un numero approssimato, sopprimere gli zeri che (dopo la virgola) seguono l'ultima cifra significativa; se quindi la somma ottenuta col procedimento indicato finisce con uno o più zeri, questi zeri devono essere conservati. Veggasi l'esempio II.

12,45
4,51
.....
0,05
.....
18,53
0,34
35,88

Osservazione V. — Per calcoli in cui non si richieda una grande approssimazione, o in cui i dati possano essere errati di più di mezza unità dell'ultimo ordine, si suole operare come s'è detto nella precedente Oss. II, anche se gli addendi sono parecchi. Nel I esempio si avrebbe così per risultato 35,88.

§ 5. Sottrazione. — *In quello dei due termini che è più approssimato, si trascurino le cifre che sporgono dalla colonna in cui si trova l'ultima cifra dell'altro termine, e si proceda nel modo ordinario.* Veggasi l'esempio I.

I) Dati	Sottrazione
27,34	27,34
7,20568	7,21
	20,13

§ 6. Il procedimento precedente si giustifica come quello indicato per l'addizione nel caso di due addendi soli (§ 4, Oss. II).

Osservazioni. — Analoghe alle osservazioni III e IV del § 4; e, a proposito della IV, veggasi l'es. II.

II) Dati	Sottrazione
3,279854	3,280
1,200	1,200
	2,080

§ 7. Moltiplicazione. — *Si prenda per moltiplicando quello dei due fattori che ha meno cifre; poscia si formino i successivi prodotti parziali, cominciando dalla prima cifra del moltiplicatore, scrivendoli l'uno sotto l'altro, coll'ultima cifra successivamente spostata di un posto verso destra, e arrestandosi quando si vede che il prodotto parziale seguente uscirebbe tutto dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale. Nel fare poi l'addizione si trascurino nella somma tutte le cifre che escono dalla colonna nella quale si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale, e si ponga la virgola nello* *stesso posto che essa occupa nel primo prodotto parziale, avvertendo che in questo l'ordine dell'ultima cifra deve essere uguale all'ordine dell'ultima cifra del moltiplicando più l'ordine dell'ultima cifra del moltiplicatore* (§ 2, I).

Nel I es. dovendosi moltiplicare 6,83 per 57,896784, si è preso per moltiplicando il primo; poscia si sono formati i successivi prodotti parziali di 6,83 per 5, per 7, per 8, per 9, per 6, scrivendoli come è indicato qui accanto, e arrestandosi all'ultimo prodotto così ottenuto, perchè è chiaro che il seguente (avendo lo stesso numero di cifre) uscirebbe tutto dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra (5) del primo prodotto. Nel fare poi l'addizione si è seguito il procedimento stabilito nel § 3, e si è posta la virgola fra l'ultima e la penultima cifra del risultato così ottenuto, perchè l'ordine della prima cifra (5) del moltiplicatore è $+1$, l'ordine dell'ultima cifra (3) del moltiplicando è -2, e quindi l'ordine dell'ultima cifra (5) del primo prodotto parziale è $+1-2=-1$.

Nel II esempio, procedendo nello stesso modo si è trovato un prodotto la cui ultima cifra è la cifra delle unità, come precisamente doveva essere per quanto si è osservato (a proposito dello stesso esempio) nel § 1.

Nel III esempio i prodotti non si sono arrestati a quello che corrisponde alla cifra 1 del moltiplicatore, perchè il prodotto seguente (quello che corrisponde alla cifra 7) ha, evidentemente, una cifra di più.

Nel IV esempio il secondo e il terzo dei prodotti parziali sono stati spostati di tre e di due posti (invece che di uno solo) per gli zeri che si trovano nel moltiplicatore (*).

I)
```
      6,83
   57,89 6784
   ----------
  341 5
   47 81
    5 46|4
      61|47
       4|098
  -------
  395,4
```

II)
```
      3,2 1
    213,1 12
    --------
    642
      32 1
       9 6|3
         3|21
    ------
    684
```

III)
```
  0,0374
  0,568173 9
  ----------
  0,01870
      2244
       299|2
         3|74
         2|618
  --------
  0,02125
```

IV)
```
     0,037245
  2004,05654
  ----------
    74 490
       148980
         186225
          223470
    ------
    74,631
```

§ **8.** Per giustificare questo procedimento, basta far osservare che nell'addizione finale, l'addendo meno approssimato è il primo prodotto parziale, e che quindi (§ 4) si possono trascurare tutti quei prodotti parziali che escono dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra di quel prodotto. È dunque chiaro che tutte le cifre del prodotto, che, seguendo il procedimento indicato, si tralasciano, non possono essere esatte, e che può essere inesatta anche l'ultima cifra del prodotto stesso.

E pure facilmente si giustifica la scelta per moltiplicatore di quello dei due fattori che ha più cifre. Infatti, senza entrare in considerazioni generali (che non sarebbero difficili), esaminando il primo degli esempî precedenti, si vede che collo scambio dei due fattori (com'è indicato qui accanto)

```
    57,896785
      6,83
  -----------
  347380710
    46 3174280
      1 73690355
  -----
  395,4
```

(*) Applicando agli esempî precedenti il solito procedimento dell'*Aritmetica elementare*, si rilevano subito i vantaggi del procedimento qui indicato. Ed è strano che quest'ultimo, in generale, sembri completamente nuovo ai giovani uscenti dalle scuole secondarie, mentre (almeno nella disposizione dei successivi prodotti parziali) essi stessi (come vedremo) lo hanno continuamente applicato nei calcoli logaritmici.

si risparmierebbe bensì qualche prodotto parziale, ma fin dal principio si terrebbero parecchie cifre inutili, e inoltre, nel fare l'addizione finale, bisognerebbe ricordare che, essendo il prodotto parziale successivo completamente incognito, basterebbe cominciare l'addizione stessa dalla colonna che contiene la seconda cifra dell'ultimo prodotto parziale (tenendo però conto delle decine fornite dalla colonna seguente). Dunque l'operazione sarebbe generalmente più lunga e la regola sarebbe sempre meno semplice ad applicarsi e meno facile a ricordarsi.

Osservazione I. — Per collocare la virgola, nel risultato, non si può, evidentemente seguire la regola data dall'*Aritmetica elementare;* ma dalla convenzione stabilita al § 2 (I) deriva, come s'è visto, una regola semplicissima che vale in tutti i casi.

Osservazione II. — Se uno dei due fattori è esatto, è sempre questo che deve essere preso come moltiplicatore, anche se ha meno cifre dell'altro fattore; e ciò per la convenzione II del § 2. Così, dovendosi moltiplicare il numero 3,241 approssimato per il numero 2,5 esatto, si disporrà l'operazione come qui accanto e si avrà per risultato 8,103; procedendo invece come se anche 2,5 fosse approssimato, si avrebbe solo 8,1. E le due cifre di più ottenute (03) non rappresentano affatto una approssimazione illusoria, giacchè, dietro l'ipotesi, il prodotto cercato può avere per limite inferiore inabbassabile 8,10125 e può avere per massimo 8,10375.

V)

$$\begin{array}{l}
3{,}241 \\
2{,}5 \\
\hline
6\,482 \\
1\,6205 \\
\hline
8{,}103
\end{array}$$

Osservazione III. — Corrispondentemente alla Osservazione IV del § 4, si noti che, se il prodotto ottenuto col procedimento indicato finisce con uno o più zeri (dopo la virgola), questi zeri devono essere conservati. Veggasi l'esempio VI.

VI)

$$\begin{array}{r|l}
15{,}678 & \\
1{,}4861 & 589 \\
\hline
15\,678 & \\
6\,2712 & \\
1\,2542 & 4 \\
940 & 68 \\
15 & 678 \\
7 & 8390 \\
1 & 25404 \\
\hline
23{,}300 &
\end{array}$$

Osservazione IV. — Come non si possono sopprimere gli zeri ora accennati, neppure si possono far seguire degli zeri all'ultima cifra (di qualunque ordine sia) di un numero approssimato. Ne deriva che, se l'ordine dell'ultima cifra di un risultato deve essere maggiore di zero, bisogna ricorrere a qualche convenzione, anzichè aggiungere degli zeri che rappresenterebbero una approssimazione illusoria. Per maggior chiarezza, si consideri un esempio particolare, e si abbiano da moltiplicare i due numeri approssimati 1,9 e 5756,89. La parte intera del prodotto deve avere cinque cifre; eseguendo, invece la moltiplicazione col procedimento indicato, si ottengono di questo solo le prime tre, che sono 1, 0, 9. E allora per scrivere questo prodotto, si scriverà (*)

$$\text{o} \qquad 109_{00} \qquad \text{o} \qquad 10{,}9 \text{ migliaia } (^{**})$$

Però nelle applicazioni raramente si ricorre a questa convenzione,

---

(*) V. Baltzer. l. c., pag. 53 e 54.

(**) Eseguendo la moltiplicazione nel modo ordinario, si troverebbe per prodotto 10938,091, e le ultime due cifre (38) della parte intera rappresenterebbero certamente una approssimazione illusoria, perchè il prodotto cercato ha per massimo 11225,04525 ed ha per limite inferiore inabbassabile 10650,23725.

e si preferisce cambiare unità. Così, se il moltiplicando rappresentasse dei *metri*, si potrebbe dire che il prodotto è uguale a 10,9 *chilometri* (*).

Osservazione V. — Per calcoli in cui non si richieda una grande approssimazione, o in cui i dati possano essere errati di più di mezza unità dell'ultimo ordine, si suole scrivere un prodotto parziale di meno, ossia si suole arrestare l'operazione quando si vede che il prodotto parziale seguente uscirebbe tutto dalla colonna in cui si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale; l'addizione si eseguisce poi come s'è indicato nel procedimento generale. Così facendo, nel terzo degli esempi precedenti si avrebbe per risultato 0,02124 (invece di 0,02125).

```
0,0374
0,5681739
---------
0,01870
   2244
    299|2
---------
0,02124
```

§ 9. **Divisione.** — *Si proceda nel modo ordinario, arrestando l'operazione quando il quoziente ha una cifra di più di quello dei due numeri su cui si opera, che ne ha meno* (§ 2, VI), *coll'avvertenza di aumentare di una unità l'ultima cifra così ottenuta, se si vede che la seguente non sarebbe minore di 5. In quanto alla virgola poi, si applichino le ordinarie regole dell'*Aritmetica.

Nel I esempio il dividendo ha sette cifre e il divisore ne ha tre, quindi si è calcolato il quoziente con quattro cifre.

Analogamente nel II esempio, nel quale si è ottenuto un quoziente la cui ultima cifra è quella dei decimi; come precisamente doveva essere, per quanto si è osservato (a proposito dello stesso esem.) nel § 1.

Analogamente anche nel III esempio, dove l'ultima cifra del quoziente è stata aumentata di una unità, perchè la seguente sarebbe maggiore di 5.

Nel IV esempio il dividendo ha due cifre e il divisore ne ha cinque, quindi si è calcolato il quoziente con tre cifre.

Analogamente nel V esempio, dove l'ultima cifra è stata aumentata di una unità per la solita ragione.

Nel VI e nel VII esempio il dividendo e il divisore hanno lo stesso numero di cifre, cinque nel primo e tre nel secondo, quindi il quoziente è stato calcolato con sei e con quattro cifre rispettivamente.

```
I)
4,210598 | 275
275      | 0,01531
----
1460
1375
----
  855
  825
  ---
   309
   275
   ---
    34

II)
72,575822 | 3,4
68        | 21,3
--
 45
 34
 ---
 117
 102
 ---
  15

III)
1251,233 | 0,936
 936     | 1337
 ----
 3152
 2808
 ----
  3443
  2808
  ----
   6353
   5616
   ----
    737

IV)
3,3      | 23,667
23667    | 0,139
-----
 93330
 71001
 ------
 223290
 213003
 ------
  10287
```

§ 10. Per giustificare questo procedimento basta far vedere che la cifra del quoziente, successiva a

(*) A tale convenzione si ricorre nell'*Astronomia*, dove per unità di lunghezza si piglia il diametro della Terra, il diametro dell'orbita terrestre, il cammino percorso dalla luce in un anno; e questo si fa principalmente per potersi formare un'idea della grandezza di certe distanze, che, pure espresse in miriametri (che è la massima delle unità lineari comuni) non sarebbero concepibili, ma anche perchè, servendosi di questa unità, si otterrebbero dei numeri spinti a una approssimazione addirittura irrisoria.

quella a cui la divisione si è arrestata, non può esser nota, perchè si ricaverebbe da un numero completamente sconosciuto (dividendo questo numero per il divisore), e che questa è la prima cifra per la quale ciò necessariamente accade. E, a tale scopo, basta far vedere che quel numero esce tutto

dalla colonna in cui si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale, quando il dividendo sporge a destra rispetto a questo primo prodotto, ossia quando l'ordine dell'ultima cifra del dividendo è algebricamente (§ 1, I) minore dell'ordine dell'ultima cifra di quel primo prodotto (Es. I, II e III),

dalla colonna in cui trova l'ultima cifra del dividendo, quando il dividendo stesso non sporge a destra rispetto al primo prodotto parziale, ossia quando l'ordine dell'ultima cifra del dividendo è algebricamente maggiore dell'ordine dell'ultima cifra di quel primo prodotto (Es. IV, V e VII), od è uguale a questo ordine (Es. VI);

perchè allora tutte le sue cifre derivano, per successive sottrazioni da cifre una delle quali, almeno, è completamente incognita; e poi far vedere che altrettanto non accade necessariamente per il numero dal quale deriva la cifra a cui il quoziente si è arrestato.

```
V)
346         | 45,683
319781      | 7,574
 262190
 228415
  337750
  319781
   179690
   137049
    42641

VI)
576,18      | 2,88 05
576 10      | 2 00,028
    80000
    57610
    223900
    201635
     22265

VII)
0,924       | 9 35
  8415      | 0,0009882
  8250
  7480
   7700
   7480
    2200
    1870
     330
```

Così, nel II Es., la prima cifra (1) dell'ultimo resto parziale (15) deriva per sottrazione, dalla terza cifra (5) del dividendo e dalla cifra dello stesso ordine del primo prodotto parziale, e questa è completamente sconosciuta; e la seconda cifra (5) dello stesso resto deriva, per sottrazioni, dalla quarta cifra (7) del dividendo e dalle cifre dello stesso ordine del primo e del secondo prodotto parziale, e queste due cifre sono completamente sconosciute. Invece la prima cifra (1) del numero (117), dal quale è ricavata l'ultima cifra (3) del quoziente, non deriva da nessuna cifra completamente sconosciuta.

Si indichino con A il dividendo e con B il divisore; con a e con b rispettivamente, il numero delle loro cifre; si indichino inoltre con A′ e con B′ i numeri a cui si riducono A e B, quando si trasporti la virgola fra la prima e la seconda cifra, onde l'ordine dell'ultima cifra sarà $1-a$ per A′ e $1-b$ per B′.

Ciò posto, basta evidentemente giustificare il nostro procedimento nella ipotesi che la divisione si faccia fra i numeri A′ e B′, perchè, qualunque sia il posto che occupa la virgola in ciascuno dei numeri A e B, il calcolo numerico che si fa quando si divide A per B differisce da quello che si fa quando si divide A′ per B′ solo per il numero d'ordine delle colonne in cui si trovano le cifre del dividendo e dei successivi prodotti e resti parziali. Per ciò distingueremo quattro casi: secondochè si ha

1.° $a>b$, $A'>B'$; 2.° $a>b$, $A'<B'$; 3.° $a\leqq b$, $A'>B'$; 4.° $a\leqq b$, $A'<B'$.

Nel primo caso [Es. I. II. (*)], siccome il primo prodotto parziale ha l'ultima cifra di ordine $-b+1$ (perchè la prima cifra del quoziente è di ordine zero, e l'ultima cifra del divisore è sempre di ordine $-b+1$), basta dimostrare che quel numero, che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente, deve avere la sua prima cifra di ordine $-b$ o $-(b+1)$. Infatti quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(b+1)$ (perchè il quoziente ha $b+1$ cifre e la prima cifra è di ordine zero), quindi il prodotto parziale del valor relativo di questa cifra per B' avrebbe la sua ultima cifra di ordine

$$-(b+1)+(1-b)=-2b,$$

e di quest'ordine sarebbe pure l'ultima cifra dell'accennato numero (dal quale quel prodotto dovrebbe essere sottratto, se si volesse continuare ancora la divisione); ma questo numero è di $b+1$ cifre (155 nel II Es.) o di b cifre (348 nel I Es.), quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-2b+b=-b, \qquad \text{oppure} \qquad -2b+(b-1)=-(b+1).$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che il numero dal quale deriva la cifra a cui si è arrestata la divisione (117 nel II Es. e 309 nel I Es.) ha la sua prima cifra di ordine

$$-b+1, \qquad \text{oppure} \qquad -b,$$

e che quindi questa può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (Es. II).

Nel secondo caso (Es. III), siccome il primo prodotto parziale ha l'ultima cifra di ordine $-b$ (perchè la prima cifra del quoziente è di ordine -1), basta dimostrare che quel numero che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente deve avere la sua prima cifra di ordine $-(b+1)$ o $-(b+2)$. Infatti quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(b+2)$, quindi l'ultima cifra dell'accennato numero sarebbe dell'ordine

$$-(b+2)+(1-b)=-(2b+1);$$

ma questo numero è di $b+1$ cifre (7370 nel III Es.) o di b cifre, quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-(2b+1)+b=-(b+1), \text{ oppure } -(2b+1)+b-1)=-(b+2).$$

E come nel caso precedente, si vede subito che la prima cifra del numero dal quale deriva la cifra a cui si è arrestata la divisione (6353 nel III Es.) può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (v. lo stesso Es. III).

Nel terzo caso (Es. IV e VI), siccome il dividendo ha sempre l'ultima cifra di ordine $-a+1$, basta dimostrare che quel numero che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente, deve avere la sua prima cifra di ordine $-a$ o $-(a+1)$. Infatti (essendo la prima cifra del quoziente di ordine zero ed avendo quel quoziente $a+1$ cifre)

(*) Perchè si possa seguire meglio il ragionamento, citiamo esempi relativi ad ogni caso, supponendo in ciascuno di essi il dividendo A e il dividendo B ridotti alla forma A' e B'.

quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(a+1)$, quindi l'ultima cifra dell'accennato numero sarebbe dell'ordine

$$-(a+1)+(1-b)=-(a+b);$$

ma questo numero è di $b+1$ cifre (102870 nel IV Es., 222650 nel VI Es.) o di b cifre, quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-(a+b)+b=-a, \quad \text{oppure} \quad -(a+b)+(b-1)=-(a+1).$$

E anche qui si vede subito che la prima cifra del numero dal quale deriva la cifra a cui si è arrestata la divisione (223290 nel IV Es. e 223900 nel VI) può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (v. ambedue gli stessi Es. IV e VI).

Nel quarto caso, finalmente, (Es. V e VII), la prima cifra del numero che diviso per B′ darebbe un'altra cifra del quoziente, invece di essere dell'ordine $-a$ o $-(a+1)$, come nel terzo caso, è dell'ordine $-(a+1)$ o $-(a+2)$. Infatti (essendo la prima cifra del quoziente di ordine -1) quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(a+2)$, quindi l'ultima cifra dell'accennato numero sarebbe dell'ordine

$$-(a+2)+(1-b)=-(a+b+1);$$

ma questo numero è, al solito, di $b+1$ cifre (426410 nel V Es. e 3300 nel VII Es.) o di b cifre, quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-(a+b+1)+b=-(a+1), \quad \text{oppure} \quad -(a+b+1)+(b-1)=-(a+2).$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che l'ultima cifra del quoziente deriva da un numero (179690 nel V Es. e 2200 nel VII Es.) la cui prima cifra ha per ordine $-a$ o $-(a+1)$ e la penultima da un numero (337750 nel V Es. e 7700 nel VII Es.) la cui prima cifra ha per ordine $-a+1$ o $-a$; per cui anche l'ultima cifra del quoziente si ricava sempre da un numero tutto incognito, ed è solo la penultima che si ricava da un numero la cui prima cifra può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (v. ambedue gli Es. V e VII). Ne viene che in questo quarto caso il nostro procedimento dà una cifra di troppo, ossia una cifra che è certamente illusoria, ma abbiamo preferito questo inconveniente all'altro di stabilire un procedimento non generale, che, per essere applicato, avrebbe sempre richiesto che si esaminasse se si era o no in questo caso. Questa osservazione avrà molta importanza in seguito (§ 18).

OSSERVAZIONE I. — Per collocare la virgola si è detto di seguire le ordinarie regole dell'*Aritmetica;* ma, dietro la solita convenzione I del § 2, basta osservare che l'ordine della prima cifra del quoziente più l'ordine dell'ultima cifra del divisore deve essere uguale all'ordine dell'ultima cifra del primo prodotto parziale, e che quest'ordine è noto, perchè è quello della cifra del dividendo da cui quell'ultima cifra va sottratta (*).

VIII)

```
51       | 0,986
4930     |------
----     | 51,72
 1700
  986
 ----
  7140
  6902
  ----
   2380
   1972
   ----
    408
```

OSSERVAZIONE II. — Se uno dei due numeri su cui si

(*) Supposto che si conoscano gli elementi dell'*Algebra*, la regola che deriva da questa osservazione semplifica notevolmente la ordinaria regola per la divisione fra numeri decimali.

opera è esatto, bisogna tener presente la convenzione II del § 2. Così nell'VIII Es., dove si suppone il dividendo esatto, si è calcolato il quoziente con tante cifre quante ne ha il divisore più una; e nel IX Es., dove si suppone esatto il divisore, si è calcolato il quoziente con tante cifre quante ne ha il dividendo più una. Quest'ultimo caso rientra nel quarto dei casi precedentemente esaminati, e quindi l'ultima cifra, che è stata aumentata di una unità per la solita ragione, rappresenta una approssimazione illusoria.

Osservazione III. — Per la solita ragione (§ 8, Oss. III), se il quoziente che si ottiene col procedimento indicato finisce con uno o più zeri, questi non devono essere trascurati. Così: nel X e nell'XI Es. il quoziente finisce, rispettivamente, con uno e con due zeri; nel XII finirebbe con tre zeri, ma invece dell'ultimo, si è posta una unità, perchè la cifra seguente, essendo data dal quoziente di 1040000 per 131158, sarebbe maggiore di 5. Questi tre esempî assieme al XIII, rientrano nei quattro casi precedentemente esaminati, e, a proposito dell'ultimo, si deve notare anche qui che l'ultimo zero rappresenta una approssimazione illusoria.

Osservazione IV. — Si noti il caso in cui, non solo sia zero l'ultimo resto parziale, ma siano eguali a zero anche tutte le cifre da abbassare: anche allora si segue il procedimento generale indicato (Es. XIV e XVI).

Ed è notevole che in questo caso particolare, come in quello considerato nella Oss. prec., il ragionamento fatto per giustificare il nostro procedimento sussiste sempre (*).

Osservazione V. — Corrispondentemente alla Osserv. V del § 8, si noti ora che se l'ordine dell'ultima cifra del quoziente deve essere maggiore di zero, bisogna ricorrere a qualcuna delle convenzioni allora accennate. Così: dovendosi dividere 4865 per 0,00271, la parte intera del quoziente deve avere *sette* cifre: invece eseguendo la divisione col procedimento indicato si ottengono, di questo quoziente, solo le prime quattro cifre, che sono 1795; e allora per scrivere questo quoziente si scriverà

$$1795_{000} \quad \text{o} \quad 1795 \text{ migliaia } (^{**}).$$

E, se, in pratica, il dividendo rappresentasse, p. es., dei decimetri cubi, si potrebbe dire che il quoziente è uguale a 1795 metri cubi.

IX)

103	1,1
99	93,64
40	
33	
70	
66	
40	
33	
7	

X)

9539,9835	37,47
7494	25,460
2045 9	
1873 5	
172 48	
149 88	
22 603	
22 482	
1215	

XI)

1,59592171	0,371
1 484	4,301
1113	
1113	
021	

XII)

1574	1311,58
131158	1,2001
262420	
262316	
104000	

XIII)

1,94	3,464161
1,7320805	0,5600
20791950	
20784966	
698400	

XIV)

5,1	9,375
4 6875	0,544
41250	
37500	
37500	
37500	

XV)

274,9992	375,6
262 92	0,73 200
12 079	
11 268	
7512	
7512	

(*) Invece del procedimento indicato, si potrebbe, per la divisione, seguire un procedimento analogo a quello indicato per la moltiplicazione (v. § 7), ma allora non si avrebbe più un procedimento generale. Così facemmo nell'*Appendice* più volte citata, dove per i casi particolari ora accennati dovemmo indicare dei procedimenti speciali.

(**) Eseguendo la divisione nel modo ordinario, si troverebbe per parte intera del quoziente 1795202, e le ultime tre cifre (202) rappresenterebbero certamente una approssimazione illusoria, perchè la parte intera del quoziente cercato ha per minimo 1791712 ed ha per massimo 1798706.

CAPITOLO SECONDO

STUDIO DEGLI ERRORI

PRODOTTI DAI PROCEDIMENTI DEL CAPITOLO PRECEDENTE.

§ **11.** Eseguendo le quattro operazioni fondamentali dell'*Aritmetica* coi procedimenti indicati nel capitolo precedente, si introduce nel risultato un nuovo errore; per cui, se m è questo nuovo errore ed l è l'errore che, necessariamente, affetterebbe il risultato quando si eseguisse l'operazione nel modo ordinario, si viene così a commettere un errore complessivo eguale ad $l+m$.

Ci proponiamo di cercare un massimo, o un limite superiore inabbassabile, tanto di m che di l (sempre, per questo, nella ipotesi stabilita alla fine del § 2, che cioè i numeri approssimati sui quali si opera siano affetti solo dall'errore cui dà luogo la convenzione III dello stesso § 2, ossia, come si suol dire, solo dall'*arrotondamento* dell'ultima cifra); confronteremo poscia fra loro questi massimi o limiti superiori inabbassabili, che indicheremo, rispettivamente, con μ e con λ; e vedremo così nuovamente giustificati i nostri procedimenti.

A questo proposito osserviamo intanto che, calcolando il risultato con una cifra di meno o una cifra di più di quelle stabilite, μ viene rispettivamente moltiplicato o diviso per 10. E osserviamo inoltre che il valore più piccolo che si può avere per λ è quello che si ottiene supponendo che dei due numeri, sui quali si opera, uno solo sia approssimato.

Ciò posto, per dimostrare che coi nostri procedimenti non si trascura nessuna cifra che possa ritenersi esatta, basta far vedere che μ non supera il valore ora accennato di λ altro che in circostanze particolarissime e solo per pochi decimi dell'unità dell'ultimo ordine; perchè allora, calcolando il risultato con una cifra di più, non si farebbe che diminuire μ (riducendosi questo limite a un decimo di quel che era prima), mentre, generalmente, esso è già non maggiore del più piccolo valore di λ (ossia del più piccolo valore che si può ottenere per il massimo, o per il limite superiore inabbassabile, dell'errore che inevitabilmente affetta il risultato).

Per dimostrare poi che neppure si hanno delle cifre necessariamente illusorie, basta far vedere che, se è necessariamente μ minore del più piccolo valore di λ, non è però necessariamente μ minore di un decimo di questo valore; perchè allora, non essendo 10μ necessariamente minore di λ, ne verrà che, se si calcolasse una cifra di meno (nel qual caso, appunto, il valore di μ si decuplerebbe) non si potrebbe asserire di non aver trascurato nessuna cifra che possa ritenersi esatta.

§ **12.** Per la ricerca che stiamo per intraprendere, sarà opportuno ricordare che, se α e β sono (in valore assoluto) i massimi o dei limiti superiori inabbassabili degli errori di cui sono affetti A e B, rispettivamente,

$$\begin{array}{llll} \text{per} & A \pm B & \text{si ha} & \lambda = \alpha + \beta, \\ " & A \times B & " \; " & \lambda = A\beta + B\alpha + \alpha\beta, \\ " & A : B & " \; " & \lambda = \dfrac{A\beta + B\alpha}{B(B-\beta)}. \end{array}$$

E sarà anche utile indicare con p e con p_1 gli ordini della prima e dell'ultima cifra di A, e con q e con q_1 gli ordini delle stesse cifre di B; onde sarà evidentemente (§ 11)

$$(1) \qquad p = p_1 + a - 1 \quad , \quad q = q_1 + b - 1 .$$

Osservazione. — Dietro l'ipotesi fatta qui, relativamente agli errori α e β (ch'essi cioè derivino solo dall'arrotondamento dell'ultima cifra), per l'addizione e per la moltiplicazione il valore di λ qui indicato è un massimo, mentre che per la sottrazione e per la divisione è invece un limite superiore inabbassabile. E questo si vede subito, se si osserva che gli errori di A e di B, affinchè l'errore del risultato sia massimo, devono essere di segno eguale nel primo caso e di segno contrario nel secondo; e che quindi, in quest'ultimo caso, uno di essi può essere uguale a una mezza unità dell'ultimo ordine, ma l'altro può solo differirne poco finchè si vuole (§ 2, III).

§ **13. Addizione.** — Sia A l'addendo meno approssimato ed n il numero totale degli addendi. Siccome in $n-1$ di questi addendi si trascurano le cifre che seguono quella di ordine $p_1 - 1$ (§ 3), ciascuno di questi addendi sarà, al più, errato di $0{,}5 \times 10^{p_1-1}$, e quindi la loro somma sarà, al più, errata di

$$(n-1) \times 0{,}5 \times 10^{p_1-1};$$

siccome poi si tralascia la prima cifra (d'ordine p_1-1) che si ottiene nel fare l'addizione, all'errore precedente se ne aggiunge un altro che, al più, è uguale a $0{,}5 \times 10^{p_1}$. Sarà dunque

$$\mu = (n-1) \times 0{,}5 \times 10^{p_1-1} + 0{,}5 \times 10^{p_1},$$

da cui

$$(2) \qquad \mu = (n \times 0{,}05 + 0{,}45)\, 10^{p_1};$$

e questo è il massimo errore che può produrre nel risultato l'indicato procedimento.

In quanto a λ, *se tutti gli altri addendi fossero esatti* (§ 11), avrebbe un valor massimo dato da (§ 12)

$$(3) \qquad \lambda = 0{,}5 \times 10^{p_1}.$$

Ed ora, confrontando μ con λ, si vede che, essendo

$$\mu - \lambda = (n-1) \times 0{,}05 \times 10^{p_1},$$

solo se il numero degli addendi fosse eguale a 11, μ supererebbe λ di mezza unità dell'ultimo ordine. Però ambedue le condizioni accennate, in generale non si verificheranno (perchè nei calcoli ordinari, λ sarà in generale maggiore del valore dato dalla (3), ed n sarà minore di 11), quindi si conclude che nel totale non manca, in generale, nessuna cifra che possa ritenersi esatta.

Osservazione I. — Nel caso di due addendi soli (§ 4, Oss. II) le due parti che costituiscono l'errore μ si riducono alla prima soltanto, avendo già trascurate nell'addendo più approssimato tutte le cifre successive a quelle di ordine p_1; si ha quindi

$$(2)' \qquad \mu = 0{,}5 \times 10^{p_1}.$$

In quanto a λ esso sarà anche ora quello dato dalla (3), nella ipotesi che uno dei due addendi sia esatto. In questo caso quindi μ sarà uguale a λ.

Osservazione II. — È chiaro che, quando si segua il procedimento accennato nella Oss. V al § 4, invece della (2) si ha

$$(2)'' \qquad \mu = n \times 0{,}5 \times 10^{p_1}.$$

Osservazione III. — Se gli addendi fossero più di 11, ma non più di 101, è facile vedere, con un ragionamento analogo, che si arriverebbe alla stessa conclusione tenendo negli addendi una cifra di più (§ 4, Oss. I). Ma crediamo che per la pratica questa osservazione non abbia importanza, perchè, come s'è detto, n sarà in generale minore di 11.

§ 14. Sottrazione. — Da quanto si è detto nella Oss. I al § prec. risulta immediatamente che nella sottrazione (§ 5) μ è uguale a λ.

Osservazione. — Solo si può notare che, mentre nell'addizione una unità dell'ultimo ordine è (in valore assoluto) il massimo della somma $l + m$ nella sottrazione è invece un limite superiore inabbassabile (§ 12, Oss.).

§ 15. Moltiplicazione. — Sia A quello dei due fattori che ha meno cifre, sarà allora A il moltiplicando e B il moltiplicatore; suppongasi inoltre, per facilitare il ragionamento, che questi due numeri siano ridotti alla forma A' e B' (§ 10).

In tali ipotesi, il primo prodotto parziale ha, evidentemente, l'ultima cifra di ordine $-a+1$, quindi i prodotti parziali che si trascurano sono quelli che escono dalla colonna di ordine $-a$. Ora il primo di questi prodotti parziali ha per limite superiore inabbassabile una unità dell'ordine $-a$, ossia 10^{-a}, e questo è evidente; in quanto agli altri prodotti parziali tralasciati, si osservi che ciascuno di essi ha al più $a+1$ cifre, perchè è il prodotto di una cifra di B' (la quale è al più 9) per A' (che ha per limite superiore inabbassabile 10), ma il primo ha la prima cifra di ordine $-(a+1)$ al più, dunque tutti questi prodotti hanno successivamente per limite superiore inabbassabile $0{,}9 \times 10^{-a}$, $0{,}09 \times 10^{-a}, \ldots$ Ne viene intanto che l'errore prodotto nel risultato finale, tralasciando i prodotti parziali accennati, ha per limite superiore inabbassabile

$$(1 + 0{,}9 + 0{,}09 + \ldots)\, 10^{-a}, \qquad \text{ossia} \qquad 2 \times 10^{-a}.$$

Ma a questo se ne deve aggiungere un altro: quello che si commette tralasciando la prima cifra che si ottiene nell'addizione finale, e che ha per massimo 5×10^{-a}. Sarà dunque

$$\mu = 0{,}7 \times 10^{-a+1}\,, \tag{4}$$

ossia μ sarà uguale a 7 decimi dell'unità dell'ultimo ordine del prodotto.

In quanto a λ, *se il moltiplicatore* B′ (che è quello che ha più cifre) *fosse esatto* (§ 11) esso si ridurrebbe a $B'\alpha$ (§ 12), *se inoltre il moltiplicatore stesso differisse poco finchè si vuole dal suo limite inferiore* 1, essendo il massimo, o il limite superiore inabbassabile, di α uguale a $0{,}5 \times 10^{-a+1}$, si avrebbe

$$\lambda = 0{,}5 \times 10^{-a+1}\,. \tag{5}$$

Ed ora, confrontando μ con λ, si vede che solo in tutte le ipotesi fatte sopra per ricavare ambedue questi valori, il primo supera il secondo di due decimi dell'unità dell'ultimo ordine del prodotto. Siccome però in generale tutte le ipotesi accennate non si verificheranno (perchè, in generale, i prodotti parziali trascurati non avranno tutto il limite superiore inabbassabile indicato, nè la cifra tralasciata nel risultato sarà precisamente uguale a 5; e perchè, in generale, non sarà B′ esatto, nè sarà vicinissimo all'unità), si conclude che nel prodotto non manca, in generale, nessuna cifra che possa ritenersi esatta.

Si è supposto che i numeri A e B fossero ridotti alla forma A′ e B′, ma è chiaro che la conclusione precedente sussiste anche prescindendo da questa ipotesi.

Osservazione I. — L'ipotesi fatta per attribuire a λ il valore più piccolo, coincide precisamente col caso particolare considerato nella Oss. II del § 8; la nostra conclusione sussiste dunque anche in questo caso particolare.

Osservazione II. — È facile vedere che il più grande valore della somma dei prodotti parziali trascurati si ottiene supponendo il moltiplicando A′ prossimo a 10 e le successive cifre corrispondenti (del moltiplicatore B′) eguali a 1, 9, 9, 9, ... Infatti, affinchè il prodotto di un numero di una cifra per A′ sia uguale a $0{,}8999\ldots \times 10^{-a}$ e abbia una cifra di più di A′, bisogna che A′ sia uguale a $9{,}999\ldots$ e che quel numero sia uguale a $9 \times 10^{-(a+2)}$ (e questo si vede facilmente esaminando i nove quozienti di 0,8999 per 1, 2, ... 8, 9); e allora, affinchè il primo prodotto parziale trascurato sia uguale a $0{,}9999 \times 10^{-a}$, non può essere che il prodotto di A′ per $1 \times 10^{-(a+1)}$. Veggasi l'esempio accanto, nel quale i prodotti parziali tralasciati sono precisamente $0{,}999 \times 10^{-3}$, $0{,}8991 \times 10^{-3}$, $0{,}08991 \times 10^{-3}, \ldots$ In questo stesso esempio, come verificazione della (4), si può anche osservare che si avrebbe $m = 0{,}688\ldots \times 10^{-2}$.

$$\begin{array}{l}
\;\;9{,}99\\
\;\;2{,}5111999\\
\hline
1998\\
\;\;4995\\
\;\;\;\;\;999\\
\;\;\;\;\;\;\;999\\
\hline
25{,}08
\end{array}$$

Osservazione III. — Supponendo sempre che A sia il fattore meno approssimato, è chiaro che nel prodotto di A′ per B′ la prima cifra è di ordine 0 o $+1$, secondochè il prodotto della parte intera di B′ per A′ ha a od $a+1$ cifre. Ma (§ 12)

$$A = A' \times 10^{p} \quad , \qquad B = B' \times 10^{q}\,,$$

da cui

$$A \times B = A' \times B' \times 10^{p+q},$$

quindi *la prima cifra del prodotto di* A *per* B *è dell'ordine* $p + q$ (§ 7, Es. II e IV), *o dell'ordine* $p + q + 1$ (§ 7, Es. I e III), *secondochè il prodotto della prima cifra di* B *per* A *ha tante cifre quante ne ha* A, *o una di più.*

Ed è pure chiaro che, *corrispondentemente, il prodotto* (ottenuto col procedimento indicato) *ha* a *od* $a + 1$ *cifre, e che quindi l'ultima sua cifra è sempre dell'ordine* $p + q - a + 1$, *che per la* (1) *è anche uguale a* $p_1 + q_1 + b - 1$.

A tutti questi risultati si può anche giungere subito, direttamente.

Osservazione IV. — È anche facile vedere che, quando si segua il procedimento indicato nella Oss. V al § 8, invece della (4) si ha

$$(4)' \qquad \mu = 2{,}5 \times 10^{-a+1}.$$

Così: dovendosi moltiplicare 9,99 per 2,511999, se si segue quel procedimento, si ha per prodotto 25,07, ed m è uguale a $2{,}487 \ldots \times 10^{-2}$.

Osservazione V. — Nella giustificazione del procedimento indicato (§ 8) si è fatto osservare che, non prendendo per moltiplicando quello dei due fattori che ha meno cifre si presenterebbero due inconvenienti, uno dei quali sarebbe quello di dover scrivere un maggior numero di cifre inutili. Possiamo ora aggiungere, più precisamente, in proposito che, seguendo quella regola, il massimo numero di tutte le cifre dei successivi prodotti parziali è al più $(a+1)(a+2)$ (§ 7, Es. I), mentre che, se si scambiano i due fattori, quel numero è compreso fra ab e $a(b+1)$, gli estremi inclusi; ma le due disuguaglianze

$$(a+1)(a+2) < ab \qquad (a+1)(a+2) < a(b+1),$$

equivalgono, rispettivamente, alle due

$$3 + \frac{2}{a} < b - a \qquad 2 + \frac{2}{a} < b - a,$$

quindi l'inconveniente accennato (supposto che le cifre dei due fattori siano tutte significative) si presenta sempre per $b - a$ maggiore di 3, e generalmente anche per $b - a$ maggiore di 2 soltanto.

§ 16. **Divisione.** — Per questa operazione si può dimostrare che, seguendo il procedimento da noi indicato nel § 9, μ risulta sempre minore di λ.

Suppongasi anche ora (§ 15) che A e B siano ridotti alla forma A' e B'. Dal procedimento accennato risulta immediatamente che nei quattro casi considerati nel § 10 si ha rispettivamente,

$$(6) \quad \mu = 0{,}5 \times 10^{-b}, \quad \mu = 0{,}5 \times 10^{-(b+1)}, \quad \mu = 0{,}5 \times 10^{-a}, \quad \mu = 0{,}5 \times 10^{-(a+1)}.$$

Ora, se nei primi due casi il dividendo (che ha più cifre del divisore) fosse un numero esatto, ossia se fosse $\alpha = 0$, sarebbe (§ 12)

$$\lambda = \frac{A'\beta}{B'(B' - \beta)}, \quad \text{da cui} \quad \lambda > \frac{A'\beta}{B'^2};$$

ma

$$\beta = 0{,}5 \times 10^{-b+1}, \qquad \text{onde} \qquad \lambda > \frac{A'}{B'^2} \times 0{,}5 \times 10^{-b+1},$$

per cui, per dimostrare che μ è minore di λ, nel primo caso, basta osservare che, essendo per ipotesi A' maggiore di B', sarà

$$\lambda > \frac{1}{B'} \times 0{,}5 \times 10^{-b+1},$$

e che, essendo B' compreso fra 1 e 10 (gli estremi esclusi), sarà anche

$$(7) \qquad \lambda > 0{,}5 \times 10^{-b};$$

e nel secondo caso basta osservare che, essendo anche A' compreso fra 1 e 10 (gli estremi esclusi), sarà

$$(8) \qquad \lambda > \frac{1}{100} \times 0{,}5 \times 10^{-b+1}, \quad \text{da cui} \quad \lambda > 0{,}5 \times 10^{-(b+1)}.$$

Se poi nel terzo e nel quarto caso il divisore (che ha più cifre del dividendo) fosse un numero esatto, ossia se fosse $\beta = 0$, sarebbe (§ 11)

$$\lambda = \frac{B'\alpha}{B'(B'-\beta)}, \quad \text{da cui} \quad \lambda > \frac{\alpha}{B'};$$

ma

$$\alpha = 0{,}5 \times 10^{-a+1}, \qquad \text{onde} \qquad \lambda > \frac{1}{B'} \times 0{,}5 \times 10^{-a+1};$$

per cui per dimostrare che μ è minore di λ, basta, nel terzo e quarto caso, osservare che, essendo sempre B' compreso fra 1 e 10 (gli estremi esclusi), sarà

$$(9) \qquad \lambda > 0{,}5 \times 10^{-a}.$$

Il quoto non contiene dunque nessuna cifra di meno, ma, essendo sempre μ minore di λ, potrebbe sorgere il dubbio che ne contenesse di più, ossia che contenesse delle cifre illusorie. Per togliere questo dubbio basterebbe (come si disse nel § 11) far vedere che, se μ è minore di λ, non è però necessariamente μ minore di $\lambda : 10$. Ora, si vede facilmente che, perchè questa condizione si verifichi nei quattro casi considerati, deve essere rispettivamente

$$(10) \quad B'(B'-\beta) < A', \quad B'(B'-\beta) < 10\,A', \quad B'-\beta < 1, \quad B'-\beta < 10,$$

ed è chiaro che le prime tre non si verificano *necessariamente*, mentre la quarta è vera sempre. Nel quarto caso, e in questo soltanto, basterebbe dunque calcolare il quoziente con una cifra di meno di quelle stabilite, ma, per le ragioni accennate nel § 10, si è preferito indicare un procedimento che valesse per tutti i casi.

Ed è chiaro anche qui che le precedenti conclusioni non cambiano se si prescinde dalla ipotesi che A e B siano ridotti alla forma A' e B'.

Osservazione I. — Anche qui, le ipotesi fatte per attribuire a λ il valore più piccolo coincidono precisamente coi casi particolari considerati nella Oss. II del § 10: la nostra conclusione sussiste dunque anche in questi casi particolari.

Osservazione II. — Nel quoziente di A' per B' la prima cifra è di ordine 0 o di ordine -1, secondochè A' non è minore o è minore di B'; ma (§ 12)

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \times 10^{p-q},$$

quindi,

secondochè A′ *non è minore o è minore di* B′, *la prima cifra del quoziente di* A *per* B *è di ordine* p — q *o di ordine* p — q — 1 *rispettivamente* (*).

E così si ha un altro criterio (§ 10, Oss. I) per collocare la virgola nel quoziente.

Dal teorema stesso poi deriva, come corollario, che

se, essendo A′ *non minore di* B′, *si ha* p *non minore di* q — 1, *o se, essendo* A′ *minore di* B′, *si ha* p *non minore di* q, *la parte intera del quoziente di* A *per* B *ha, corrispondentemente,* p — q + 1 *o* p — q *cifre.*

E, come caso particolare del precedente corollario, si ha anche che,

se A *e* B *sono due numeri interi e se* A *è maggiore di* B, (essendo allora $p = a - 1$ e $q = b - 1$), *la parte intera del quoziente di* A *per* B *ha* a — b + 1 *o* a — b *cifre secondochè* A′ *non è minore o è minore di* B′ (**).

G. Pesci.

(Continua)

SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

(Continuazione v. fasc. precedente)

Differenza m^{esima} del prodotto di due o più funzioni.

9. Sia

$$\varphi_1(x)$$

quella funzione che per gli $m + 1$ valori distinti della variabile x

$$x_0\,,\ x_1\,.\,.\,.\,,\ x_r\,.\,.\,.\,,\ x_{m-1}\,,\ x_m$$

assume, rispettivamente, i valori (1):

$$a_0\,,\ a_1\,.\,.\,.\,,\ a_r\,.\,.\,.\,,\ a_{m-1}\,a_m\,,$$

e sia

$$\varphi_2(x)$$

la funzione che per gli stessi valori della variabile stessa x assume, rispettivamente, i valori indipendenti l'uno dall'altro:

$$b_0\,,\ b_1\,.\,.\,.\,,\ b_r\,.\,.\,.\,,\ b_{m-1}\,,\ b_m\,,$$

e si voglia determinare la differenza m-esima del prodotto delle due funzioni relativamente al termine

$$a_0 b_0 = \varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)$$

in funzione delle differenze di $\varphi_1(x)$ e di $\varphi_2(x)$.

(*) Teorema dello Stolz (v. *Period. di Matem.*, anno XIII (1898), fasc. III).
(**) Altro teorema dello Stolz (l. c.).

Si ha

$$\begin{aligned}\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^0[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^0[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]\\ &= \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^0\varphi_2(x_1) - \Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0); \qquad (\gamma)\end{aligned}$$

ora per definizione è

$$\begin{aligned}\Delta^0\varphi_1(x_1) &= \Delta^0\varphi_1(x_0) + \Delta^1\varphi_1(x_0),\\ \Delta^0\varphi_2(x_1) &= \Delta^0\varphi_2(x_0) + \Delta^1\varphi_2(x_0),\end{aligned}$$

e nel minuendo dell'espressione (γ) si può sostituire uno solo di tali valori o tutt'e due, dando luogo a due risultati distinti.

10. Sostituendo nel secondo fattore del minuendo, si ha

$$\begin{aligned}\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \qquad\qquad & \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) +\\ + \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^0\varphi_2(x_0) \qquad\qquad & - \Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0),\end{aligned}$$

e riducendo per linea:

$$\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^0\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0).$$

Così pure:

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^1[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =\\ &= \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_1) + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_1) -\\ &- \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) - \Delta^0\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0);\end{aligned}$$

ma:

$$\begin{aligned}\Delta^1\varphi_2(x_1) &= \Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0),\\ \Delta^1\varphi_1(x_1) &= \Delta^1\varphi_1(x_0) + \Delta^2\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

quindi, sostituendo nei secondi fattori del minuendo

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \qquad\qquad & \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) +\\ + \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_0) \qquad\qquad & - \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) +\\ & + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) +\\ + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_0) \qquad\qquad & - \Delta^0\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

e riducendo per linea

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) +\\ &+ \Delta^1\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^1\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0).\end{aligned}$$

Così pure:

$$\begin{aligned}\Delta^3[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^2[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =\\ &= \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_1) + \Delta^0\varphi_2(x_2)\Delta^2\varphi_1(x_1) +\\ &+ \Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_1) + \Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_1) -\\ &- \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) - \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) -\\ &- \Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) - \Delta^1\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0);\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}\Delta^2\varphi_2(x_1) &= \Delta^2\varphi_2(x_0) + \Delta^3\varphi_2(x_0),\\ \Delta^2\varphi_1(x_1) &= \Delta^2\varphi_1(x_0) + \Delta^3\varphi_1(x_0),\\ \Delta^1\varphi_2(x_1) &= \Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0),\\ \Delta^1\varphi_1(x_1) &= \Delta^1\varphi_1(x_0) + \Delta^2\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

quindi, sostituendo nei secondi fattori del minuendo:

$$\begin{aligned}\Delta^3[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \qquad\qquad\qquad \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^3\varphi_2(x_0)+\\ & + \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0)-\Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0)+\\ & + \Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_0) \qquad\qquad -\Delta^1\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\\ & \qquad\qquad +\Delta^1\varphi_2(x_2)\Delta^3\varphi_1(x_0)+\\ & + \Delta^0\varphi_2(x_2)\Delta^2\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0)-\Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0)+\\ & + \Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_0) \qquad\qquad -\Delta^1\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

e riducendo per linea

$$\begin{aligned}\Delta^3[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^3\varphi_2(x_0) + \Delta^0\varphi_2(x_2)\Delta^3\varphi_1(x_0) +\\ & + 2\Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0)+\\ & + \Delta^2\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0).\end{aligned}$$

Messe così in chiaro le diverse leggi di formazione, si può stabilire la formola per la differenza m-esima del prodotto di due funzioni, e si ha

$$\tag{10}\begin{aligned}\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & (m-1)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^m\varphi_2(x_0)+(m-1)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^m\varphi_1(x_0)+\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & +(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)+\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & +(m-1)_{m-1}\Delta^{m-1}\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0)+(m-1)_{m-1}\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0)=\\ = & \sum_{r=0}^{m-1}[(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)].\end{aligned}$$

Infatti, se si ammette per $m-1$, si ha

$$\begin{aligned}\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^{m-1}[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^{m-1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =\\ = & (m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^{m-1}\varphi_2(x_1) + (m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_1)+\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & +(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_1)+(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_1)-\\ & -(m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0)-(m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0)-\\ & - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots - \\ & -(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0)-(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0);\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}\Delta^{m-1}\varphi_2(x_1) &= \Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) + \Delta^m\varphi_2(x_0),\\ \Delta^{m-1}\varphi_1(x_1) &= \Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) + \Delta^m\varphi_1(x_0),\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta^1\varphi_2(x_1) &= \Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0),\\ \Delta^1\varphi_1(x_1) &= \Delta^1\varphi_1(x_0) + \Delta^2\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

quindi, sostituendo prima nei secondi fattori dei primi termini del minuendo e poscia nei secondi fattori dei secondi termini dello stesso minuendo, ed aggruppando separatamente coi primi e coi secondi fattori del sottraendo

$$\begin{array}{llll}
\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & & (m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^m\varphi_2(x_0) + & \\
+ (m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) & + (m-2)_1\Delta^1\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) & - (m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) + \\
+ (m-2)_1\Delta^1\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0) & + \dots\dots\dots & - (m-2)_1\Delta^1\varphi_1(x_{m-3})\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0) + \\
+ \dots\dots\dots & + \dots\dots\dots & - \dots\dots\dots + \\
+ (m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_0) & + (m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) & - (m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_0) + \\
+ (m-2)_{m-3}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_3)\Delta^1\varphi_2(x_0) & & - (m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \\
& + (m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^m\varphi_1(x_0) + & \\
+ (m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) & + (m-2)_1\Delta^1\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) & - (m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) + \\
+ (m-2)_1\Delta^1\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-2}\varphi_1(x_0) & + \dots\dots\dots & - (m-2)_1\Delta^1\varphi_2(x_{m-3})\Delta^{m-2}\varphi_1(x_0) + \\
+ \dots\dots\dots & + \dots\dots\dots & - \dots\dots\dots + \\
+ (m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_2(x_2)\Delta^2\varphi_1(x_0) & + (m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(\mathrm{x}_0) & - (m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) + \\
+ (m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_0) & & - (m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0),
\end{array}$$

e riducendo per linea, prima i due termini estremi e poscia i risultati coi termini medi, si ha sempre

$$(m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_1(x_{m-r+1})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0) + (m-2)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0) - (m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0) =$$
$$= (m-2)_{r-1}\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0) + (m-2)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0) = (m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)$$

e

$$(m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_2(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) + (m-2)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) - (m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) =$$
$$= (m-2)_{r-1}\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) + (m-2)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) = (m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0),$$

e perciò disponendo i risultati in due colonne secondo le loro analogie, si ottiene

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m-1}[(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0) + (m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)],$$

che è precisamente la formola (10), la quale è così dimostrata per ogni valore di m intero e positivo, dappoichè per $m=1, 2, 3$ si riduce alle espressioni ottenute direttamente.

Questa formola che potrebbe simbolicamente rappresentarsi come un doppio sviluppo binomiale delle Δ, non è simmetrica rispetto alle differenze dei due fattori; quindi per la legge commutativa del prodotto deve pure essere

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}[(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)], \quad (11)$$

e si sarebbe ottenuto tal risultato se invece che nei secondi fattori del minuendo, la sostituzione fosse stata fatta nei primi.

Se $\varphi_1(x)=1$

$$\Delta^m\varphi_2(x_0)=(m-1)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^m\varphi_2(x_0)=\Delta^m\varphi_2(x_0),$$

annullandosi tutti gli altri termini.

Se $\varphi_2(x)=1$

$$\Delta^m\varphi_1(x_0)=(m-1)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^m\varphi_1(x_0)=\Delta^m\varphi_1(x_0),$$

annullandosi tutti gli altri termini.

Se $\varphi_1=\varphi_2$, si ha la formola per la differenza m-esima del quadrato d'una funzione, che può scriversi:

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)]^2=\sum_{r=0}^{m-1}(m-1)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)[\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})+\Delta^r\varphi_1(x_{m-r-1})].$$

11. Sostituendo invece nei due fattori del minuendo dell'espressione (γ), si ha

$$\begin{aligned}\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^0\varphi_2(x_1)-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)=\\ &=[\Delta^0\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)][\Delta^0\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0)]-\\ &-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)=\\ &=\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(\varphi_0)+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)-\\ &\qquad-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)=\\ &=\Delta^1\varphi_1(x_0)[\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_0)[\Delta^1\varphi_2(x_0)].\end{aligned}$$

Così pure

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^1[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)]-\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]=\\ &=\Delta^1\varphi_1(x_1)[\Delta^1\varphi_2(x_1)+\Delta^0\varphi_2(x_1)]+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_1)[\Delta^1\varphi_2(x_1)]-\\ &-\Delta^1\varphi_1(x_0)[\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]-\\ &-\Delta^0\varphi_1(x_0)[\Delta^1\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}\Delta^0\varphi_1(x_1)&=\Delta^0\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0),\\ \Delta^0\varphi_2(x_1)&=\Delta^0\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0),\\ \Delta^1\varphi_1(x_1)&=\Delta^1\varphi_1(x_0)+\Delta^2\varphi_1(x_0),\\ \Delta^1\varphi_2(x_1)&=\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^2\varphi_2(x_0),\end{aligned}$$

e percio, sostituendo nel minuendo

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= [\Delta^2\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)]\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ &+[\Delta^1\varphi_1(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0)]\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0)-\\ &-\Delta^1\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]-\\ &-\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

e sviluppando:

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^2\varphi_1(x_0)\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^2\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^2\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)+\\ &+2\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^2\varphi_2(x_0)+(1+2)\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)-\\ &-\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)-\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)-\\ &-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0);\end{aligned}$$

e riducendo

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^2\varphi_1(x_0)\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ &+2\Delta^1\varphi_1(x_0)\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0)]+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)].\end{aligned}$$

Messe così in chiaro le diverse leggi di formazione, si può stabilire la formola per la differenza m-esima, e si ha:

$$\begin{aligned}\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= (m)_0\Delta^m\varphi_1(x_0)[(m)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots\\ &\qquad\ldots+(m)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)+\ldots+(m)_m\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)]+ \qquad (12)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(m)_m\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[(0)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)]=\\ &=\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)].\end{aligned}$$

Infatti, se si ammette per m, si ha

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^m[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)]-\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]=\\ &=\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_1)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_1)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_1)]-\\ &-\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

ma

$$\Delta^0\varphi_1(x_1)=\Delta^1\varphi_1(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0);\quad \Delta^0\varphi_2(x_1)=\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^m\varphi_1(x_1)=\Delta^{m+1}\varphi_1(x_0)+\Delta^m\varphi_1(x_0);\quad \Delta^m\varphi_2(x_1)=\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\Delta^m\varphi_2(x_0);$$

quindi, sostituendo nel minuendo

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \sum_{r=0}^{m}(m)_r[\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)+\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)]\\ [(m-r)_0(\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)&+\Delta^m\varphi_2(x_0))+\ldots+(m-r)_{m-r}(\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)+\Delta^r\varphi_2(x_0))]-\\ &-\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

e riducendo

$$\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =$$

$$= \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)]\,;$$

addizionando i primi due sviluppi, la somma dei termini di posto $r+1$ sarà

$$(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+(m-r)_1\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\ldots$$
$$\ldots+(m-r)_s\Delta^{m-s+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)]+$$
$$+(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)[(m-r)_0\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{s-1}\Delta^{m-s+1}\varphi_2(x_0)+\ldots$$
$$\ldots+(m-r)_{m-r-1}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)+(m-r)_{m-r}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)],$$

e per la relazione (α) fra i coefficienti binomiali

$$(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+(m-r+1)_1\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\ldots$$
$$\ldots+(m-r+1)_s\Delta^{m-s+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)]\,;$$

quindi

$$\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =$$

$$=\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)]+$$

$$+\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)]\,;$$

addizionando il termine di posto $r+1$ del primo sviluppo col termine di posto r del secondo, lasciando le parentesi quadre inalterate, si ottengono evidentemente $m+2$ termini di cui quello di posto $r+1$ sarà

$$[(m)_r+(m)_{r-1}]\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots$$
$$\ldots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)]\,;$$

cioè

$$(m+1)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)],$$

e quindi

$$\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m+1}(m+1)_r\Delta^{m+1-r}\varphi_1(x_0)[(m+1-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\ldots$$
$$\ldots+(m+1-r)_{m+1-r}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)]$$

che è la stessa formola (12), cambiando m in $m+1$, e che è perciò dimostrata per ogni valore di m, intero e positivo, dappoichè per $m=1, 2$, si riduce alle espressioni ottenute direttamente.

VITO MELFI MOLÈ.

(Continua)

NOTA SULL'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI FAGNANO

agli archi della lumaca di Pascal e della sinussoide

Quando lo sviluppo dell'arco di una curva sia esprimibile mediante un integrale ellittico di seconda specie, alle proprietà degli archi di ellisse corrispondono evidentemente proprietà degli archi della curva considerata. Vogliamo vedere in quanto segue quali sono le proprietà che corrispondono al *teorema di Fagnano* nel caso della *lumaca di Pascal* e della *sinussoide*.

1. È noto che l'equazione della *lumaca di Pascal*, in coordinate polari, è

$$\rho = a \cos\theta \pm h$$

e che lo sviluppo dei suoi archi è dato dalla formola

$$s = (a+h) \int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4\,ah}{(a+h)^2} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta} \,.\, d\theta \,,$$

quando $h \gtrless a$, o, ponendo $\theta = 2\varphi$,

$$s = 2(a+h) \int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{4\,ah}{(a+h)^2} \operatorname{sen}^2 \varphi} \,.\, d\varphi$$

ossia

$$s = 2(a+h) \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \,.\, d\varphi = 2(a+h)\,\mathrm{E}(k, \varphi) \,,$$

per cui

$$k = \frac{4\,ah}{(a+h)^2} \,.$$

Ciò posto, applichiamo alla curva considerata la formola

$$\mathrm{E}(k, \varphi_1) + \mathrm{E}(k, \varphi_2) - \mathrm{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \,.$$

che si verifica quando φ_1 e φ_2 soddisfano alla relazione

$$\tan\varphi_1 \tan \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \,,$$

ed alle diseguaglianze

$$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} \,, \qquad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} \,.$$

Rappresentando con V l'angolo fatto dalla tangente nel punto corrispondente a φ col vettore di questo punto, notando che

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = - \frac{a \cos\theta + h}{a \operatorname{sen}\theta} \,,$$

e facendo

$$\cos V = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{(a+h)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} = \frac{2a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{(a+h)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \,.$$

possiamo scrivere,

$$E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2(a+h)}{2a}\cos V.$$

Ma d'altro lato se A e B sono i punti della curva pei quali φ assume i valori 0 e $\frac{\pi}{2}$, e se M, M' sono punti pei quali φ piglia i valori φ_1, φ_2, abbiamo,

$$arco\, AM = 2(a+h) E(k, \varphi_1), \qquad arco\, AM' = 2(a+h) E(k, \varphi_1),$$

$$arco\, AB = 2(a+h) E\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Quindi,

$$arco\, AM - arco\, BM' = \frac{k^2(a+h)^2}{a}\cos V_1 = 4h\cos V_1,$$

ponendo,

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{a+h}{a-h}.$$

Si può poi costruire la differenza degli archi AM e BM' della lumaca di Pascal pigliando sul vettore del punto M un segmento eguale a $4h$ e proiettando sulla tangente alla curva in questo punto.

2. Consideriamo ora la *sinussoide*, la cui equazione è

$$y = a \operatorname{sen}\frac{x}{m}.$$

Abbiamo,

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{a^2+m^2-y^2}{a^2-y^2}}\,.\,dy,$$

o, facendo

$$y = a\operatorname{sen}\varphi, \qquad k = \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}},$$

$$s = \sqrt{a^2+m^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,.\,d\varphi.$$

Applichiamo anche adesso all'integrale che entra in questa formola la relazione

$$E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) - \left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}},$$

che ha luogo facendo

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2},$$

e notiamo che è

$$\frac{k^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{\sqrt{a^2+m^2}\sqrt{a^2+m^2-y^2}},$$

$$T = y\sqrt{\frac{m^2+a^2-y^2}{a^2-y^2}},$$

rappresentando con T la lunghezza della tangente alla curva nel punto (x, y).

Si ottiene così l'eguaglianza,

$$E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{y_1^2}{T_1\sqrt{a^2+m^2}},$$

ove y_1 rappresenta l'ordinata del punto della curva corrispondente a $\varphi = \varphi_1$ e T_1 la lunghezza della tangente alla curva nello stesso punto.

Ma d'altra parte, se O rappresenta il punto della curva che coincide coll'origine delle coordinate, A il punto che corrisponde a $x = \frac{1}{2} m\pi$; M e M' i punti che corrispondono a $\varphi = \varphi_1$ e $\varphi = \varphi_2$, S ed N i punti nei quali la tangente e la normale alla curva in M incontrano l'asse delle ascisse, Q la proiezione di M su quest'asse ed L il punto in cui la perpendicolare ad MN condotta per Q incontra questa retta, abbiamo,

$$arco\, \mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + m^2}\, \mathrm{E}(k, \varphi_1), \qquad arco\, \mathrm{OM'} = \sqrt{a^2 + m^2}\, \mathrm{E}(k, \varphi_2),$$

$$arco\, \mathrm{OA} = \sqrt{a^2 + m^2}\, \mathrm{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y_1 = \mathrm{MQ} = \mathrm{T}_1 \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{MSO}}, \qquad \mathrm{QL} = y_1 \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{MSO}};$$

dunque,

$$arco\, \mathrm{OM} - arco\, \mathrm{AM'} = \mathrm{QL},$$

quando

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{\sqrt{a^2 + m^2}}{m}.$$

F. Gomes Teixeira.

PICCOLE NOTE

Nota sulla trasformazione quadratica del piano del signor Paolo Cattaneo. (*) — **1.** Ho indicato, (**) a proposito della trasformazione proposta, a pag. 81 del n. citato, dal sig. Cardoso-Laynes, come si potesse applicare il principio delle trasversali reciproche alla costruzione delle tangenti di una curva trasformata col sistema ch'egli indica. Questo principio può venire applicato alla trasformazione del sig. Paolo Cattaneo.

Consideriamo quindi una retta Δ ed un punto O, i quali costituiscono la figura fondamentale di questa trasformazione. Al punto P, scelto arbitrariamente, vi corrisponde un punto P', ottenuto, come indica la figura, conducendo per P la parallela a Δ, e, per il punto nel quale OP incontra Δ, la perpendicolare a questa retta Δ. Il problema che può chiamarsi *problema della tangente* si definisce così, in tutti i metodi di trasformazione puntale:

Data la tangente alla curva (C), *descritta dal punto* P *della figura che si trasforma, trovare la tangente alla curva* (C'), *descritta dal punto* P' *corrispondente del punto* P.

2. Per risolvere questo problema, occorre considerare due punti vicini P, Q su (C); i corrispondenti P', Q' su (C') e, conoscendo il limite della posizione occupata da PQ, allorchè il punto Q viene a coincidere con P, trovare la posizione limite di P' Q'.

Ecco come, nel caso particolare della trasformazione del sig. Paolo Cattaneo, può risolversi questo problema.

(*) *Periodico* (settembre-ottobre 1903; pag. 92).

(**) V. n. 1.

Consideriamo il triangolo OAB, e sui lati OA, OB, gli isotomici P″, Q″ dei punti P, Q. Le rette PQ, P″Q″ incontrano AB in due punti R, R′, isotomici sopra AB (principio delle trasversali reciproche). Se si chiama α l'angolo che fa P′Q′ con Δ, angolo che vogliamo determinare, al limite; mentre Q′ si confonde con P′, si ha

$$P'A - Q'B = AB \operatorname{tg} \alpha .$$

L'eguaglianza dei triangoli AP′P, OP″K, da un lato; quella dei triangoli BQQ′, OQ″J, dall'altra (*d*, K rappresentando le proiezioni dei punti Q″ P″ sulla perpendicolare Δ' a Δ, condotta per O) dimostrano che $JK = P'A - Q'B$. Si ottiene quindi

$$JK = AB \operatorname{tg} \alpha .$$

Ma chiamando C l'angolo acuto formato da P″Q″ con la retta Δ, si ha pure

$$JK = P''Q'' \cos C .$$

quindi

$$AB \operatorname{tg} \alpha = P''Q'' \cos C . \tag{1}$$

Ciò posto, consideriamo la circonferenza circoscritta ai triangoli AOB, P″OQ″; chiamiamo R ed R′ i loro respettivi raggi; ed otteniamo

$$\frac{AB}{R} = \frac{P''Q''}{R'} . \tag{2}$$

Comparando (1) e (2) si ottiene

$$R \operatorname{tg} \alpha = R' \cos C . \tag{3}$$

3. Passiamo ora alla posizione limite, supponendo che Q si avvicini, sulla curva (C), indefinitamente a P. Sulla figura ottenuta possiamo fare le seguenti osservazioni:

1°. PQ ha per posizione limite una retta ben determinata, la tangente di (C) al punto P; indichiamo con r il punto in cui incontra Δ.

2°. La trasversale reciproca di PQ, cioè la retta P″Q″ ha una posizione ben determinata, essa pure; passa infatti per P″, punto isotomico di P′ sopra OA e per il punto r', simmetrico di r rispetto al punto A.

3°. Le circonferenze che abbiamo più sopra considerate; quelle circoscritte respettivamente ai triangoli AOB, P″OQ″; divengono due circonferenze ben determinate, cioè: La circonferenza che passa per O ed A, tangenzialmente a Δ; e la circonferenza passante per O e P″ tangenzialmente alla retta P″ r', che è ben determinata, come abbiamo osservato.

Indicando con ρ, e ρ' i respettivi raggi di queste circonferenze, l'uguaglianza (3) diviene

$$\rho \operatorname{tg} \alpha = \rho' \cos C .$$

In tale uguaglianza α è l'angolo incognito che, al limite, la retta P′Q′ fa con Δ; essa permette di costruire $\operatorname{tg} \alpha$ e, quindi, di risolvere, nella trasformazione osservata, il problema della tangente.

Elevando, in O, la perpendicolare a P P″, essa viene incontrata: in I, dal prolungamento di P′A; in J, dalla perpendicolare elevata a P″ r nel punto P″. Allora, $AI = 2\rho$ e $P''J = 2\rho'$. La formula (4) dà finalmente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P''J \cos C}{AI} ,$$

P″J cos C essendo la proiezione di P″J sopra Δ. Costruendo un triangolo rettangolo uno dei cui lati sia AI, l'altro lato essendo uguale a questa proiezione, si otterrà l'angolo α. Si può disporre tale triangolo in modo che la sua ipotenusa sia parallela alla tangente cercata.

G. De Longchamps.

LIBRO II. — *Elementi di analisi infinitesimale.*

LIBRO III. — *Teoria delle equazioni Trigonometriche.* Contiene la trigonometria piana, e le applicazioni alla risoluzione delle equazioni binomiali, e di quelle di 3° e 4° grado e la formula fondamentale di trigonometria sferica.

Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle scuole medie italiane promosso dall'Associazione Mathesis tenuto in Napoli nei giorni 14, 15, 16 e 17 settembre 1903. Torino, tipografia degli Artigianelli 1904.

È un volume di pag. 121 dal quale apparisce che 89 furono gli aderenti, 46 i presenti dei quali circa 20 residenti a Napoli o dintorni.

Furono trattati i seguenti temi.

I. — Studiare le cause del poco profitto che fanno nello studio delle matematiche i giovani delle nostre scuole medie e proporre i mezzi per ovviarvi. (Relatore Nannei).

II. — Estensione e limiti dell'insegnamento della matematica in ciascuno dei due gradi, inferiore e superiore, delle scuole medie (Relatore Palatini).

III. — Sulla convenienza di rendere non obbligatoria la laurea in matematica a chi vuol conseguire il diploma di magistero per le scuole medie. (Relatore Costanzi).

Il volume contiene anche i discorsi fatti nella seduta inaugurale e alcune comunicazioni dei proff. Gallucci, Candido, Angeleri, Bustelli, Frattini, Biasi.

GUICHARD. — *Traité de géométrie (2me partie). Compléments.* Paris, Mary et C.ie, 1903.

In questi complementi che fanno seguito al Traité de Géométrie dello stesso Autore sono trattati gli argomenti che da poco sono stati introdotti nell'insegnamento in Francia, cioè la proiezione ortogonale di un cerchio e i teoremi di Daudelin sulle sezioni del cavo rotondo; la teoria dei vettori; le proiezioni centrali e la generazione delle coniche per fasci omografici.

Oltre a questi argomenti l'A. ha esposto le nozioni fondamentali della geometria proiettiva e molte teorie complementari interessanti come quella dell'inversione degli assi radicali simili.

Vi si trovano pure anche interessanti problemi oramai celebri, come il circolo dei nuovi punti, la retta di Simson, circolo tangente a tre circoli, sfera tangente a tre sfere ecc.

Un'ultima lezione è destinata alle aree dei poligoni e volume dei poliedri, alla rappresentazione conforme di un poliedro sopra un piano al teorema d'Eulero e conseguenze.

MINEO CHINI. — *Corso speciale di Matematiche con numerose applicazioni ad uso principalmente dei Chimici e dei Naturalisti.* Un vol. di pagine x-259. Livorno, R. Giusti, 1904.

È ormai generalmente noto come il meraviglioso sviluppo che in questi ultimi tempi ebbero la Chimica e le Scienze Naturali, rende necessaria, a chi voglia dedicarsi con profitto allo studio di questi rami dello scibile, la conoscenza d'una parte considerevole delle Matematiche Superiori, cioè degli Elementi d'una parte dell'Algebra Complementare, della Geometria Analitica, del Calcolo Infinitesimale oltre che di alcune nozioni di Meccanica Razionale e di Termodinamica. Appunto la constatazione di tale necessità diede luogo da un lato all'istituzione, sì nelle Università nostre, come in quelle d'altri paesi, di Corsi Speciali di Matematica per gli studenti di Chimica e Scienze Naturali, dall'altro alla pubblicazione di Trattati, dedicati all'esposizione di quelle parti delle Matematiche che sono indispensabili a chi si occupa delle accennate Scienze sperimentali. Fra questi trattati merita, sotto ogni rapporto, d'essere segnalato all'attenzione degli studiosi, pure quello che pubblicò testè il chiarissimo prof. Chini.

Il libro in parola è modellato sulle lezioni che l'A. tenne nelle RR. Università di Pavia e di Genova. Esso contiene, si può dire, tutto ciò che è assolutamente indispensabile a chi voglia acquistare perfetta conoscenza delle più moderne teorie, delle quali s'andarono arricchendo la Chimica e le Scienze Naturali: ed in pari tempo furono in esse lasciate da parte tutte quelle questioni di dettaglio, la cui trattazione sarebbe superflua all'intento prefissosi dall'A.

Molto opportunamente il chiar.^{mo} prof. Chini incominciò il suo trattato col richiamare la teoria delle progressioni e dei logaritmi, il cui uso è di tanta importanza ed arreca tanti vantaggi nei calcoli numerici che si presentano nelle Scienze applicate. Seguono quindi alcune nozioni d'Algebra Complementare, quali gli elementi del Calcolo Combinatorio e della Teoria dei Determinanti con relativa applicazione alla risoluzione dei sistemi d'Equazioni Lineari. Tutto ciò costituisce la prima parte del libro. Merita qui d'essere particolarmente segnalato il modo semplice e chiaro con cui l'A. espone le nozioni relative ai determinanti, incominciando a parlare di quelli del secondo e terzo ordine e passando successivamente a considerare quelli d'ordine qualunque. Così il lettore si trova condotto ad esaminare tali determinanti, senza sforzo, per via naturale. La seconda parte del trattato è dedicata agli Elementi della Geometria Analitica. Una terza parte tratta degli Elementi del Calcolo Differenziale e comprende altresì un capitolo dedicato agli Elementi della Teoria degli Errori. Nella parte quarta sono esposte le Nozioni fondamentali del Calcolo Integrale e con queste termina il libro.

Una delle difficoltà maggiori che si presentano nella redazione d'un Corso di Matematiche dedicato a coloro per i quali lo studio di queste è mezzo, non fine, consiste nell'eliminazione di quelle quistioni che appartengono alla così detta " Matematica di Precisione „ senza che venga mai sagrificato il rigore col quale deve essere esposta la materia. Tale difficoltà fu egregiamente superata dall'A. Per convincersene basta invero dare uno sguardo ai capitoli del trattato del Chini, nei quali sono esposti gli elementi delle teorie dei limiti delle successioni e delle funzioni, delle serie e degli sviluppi in serie delle funzioni, come pure al capitolo dedicato agli Integrali definiti. L'A. lascia da parte tutte quelle sottili questioni che presentano precipuo interesse soltanto per chi voglia addentrarsi nello studio delle Matematiche: ed in pari tempo dà tutte le nozioni necessarie e sufficienti allo studio, fatto in modo pienamente rigoroso, delle questioni che si presentano nelle scienze sperimentali.

All'esposizione di ciascuna teoria matematica seguono sempre opportune applicazioni a questioni di Chimica e di Fisica, le quali ne mettono in luce la portata.

Così ad es. della teoria delle progressioni è data un'applicazione al calcolo del numero di atomi di carbonio, contenuti nelle molecole d'una serie di idrocarburi: della teoria dei determinanti è indicata la recente applicazione dovuta al prof. Volterra, al calcolo del numero dei composti indipendenti d'un sistema nella regola delle fasi.

Nella Geometria Analitica, allo studio dei più importanti luoghi geometrici (nel piano) seguono esempi di fenomeni ai quali corrispondono diagrammi dati appunto dalle curve ogni volta considerate. Oltre a ciò sono esposti anche criteri generali per stabilire a quali curve siano ricondotti i diagrammi relativi a date categorie di fenomeni. Notevoli pure sono le applicazioni della Geometria Analitica dello Spazio alla rappresentazione di leggi relative a fenomeni nei quali si hanno due variabili indipendenti.

Nel Calcolo Differenziale (v. Cap. V) è chiaramente esposta l'interpretazione sperimentale del concetto di derivata, come misura d'una velocità ed in generale come misura del limite del rapporto della variazione d'una funzione a quella della variabile indipendente. Qui l'A. si vale acconciamente anche della rappresentazione geometrica. Così pure opportuni esempi, tratti in particolare dalla Termodinamica, servono ad illustrare il concetto di Differenziale d'una funzione.

La breve esposizione della Teoria degli Errori, con la quale si chiudono gli Elementi di Calcolo Differenziale, oltre che contenere i cenni relativi ai criteri per la valutazione degli errori sperimentali, è illustrata ottimamente dall'esempio fornito dalla determinazione del peso specifico d'un solido colla bilancia idrostatica. Nel Calcolo Integrale l'A. indica opportuni ed eleganti artifici, mercè i quali il lettore può agevolmente procedere al calcolo degli integrali sì indefiniti che definiti, i quali più di frequente si presentano nelle quistioni sperimentali. In tal guisa l'A. raggiunge completamente l'intento, al quale deve essere informata una esposizione dei principii del Calcolo Integrale destinata a coloro che debbono essere posti in grado di calcolare speditamente e nel modo più rapido possibile anche integrali non del tutto semplici, girando le difficoltà che in tali calcoli si presentano, piuttosto che affrontandole direttamente. Non mancano qui pure acconci esempi ed applicazioni. Così ad es. troviamo il calcolo del lavoro di dilatazione d'un gas a temperatura costante: poi più innanzi dallo studio dell'inversione dello zucchero e della dissociazione dell'Acido iodidrico, l'A. trae due esempi di Equazioni differenziali ordinarie di primo ordine.

Finalmente lo studio dell'Equazione differenziale di 2° ordine, relativa ad un problema meccanico, chiude l'ottimo libro del prof. Chini. Così mi sembra che questo libro possa essere con somma utilità consultato da chi debba impartire l'insegnamento della Matematica agli Studenti di Chimica e di Scienze Naturali ed al tempo stesso possa servire di ottima guida agli studenti di tali scienze; poichè l'A. raggiunge splendidamente, sotto ogni rapporto, l'intento che si prefisse.

Adolfo Viterbi.

R. Marcolongo. — *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici*, Milano, Ulrico Hoepli, 1904.

La varietà degli argomenti, che apparisce dall'indice di questo volumetto, invoglia a esaminarlo. Si incomincia a leggere e l'interesse cresce, bene avvertendosi che vien fatto di assimilare in modo preciso nozioni attraenti e di una indiscutibile importanza.

Questa la impressione sintetica, che del libro riporterà il lettore, assai più eloquente di qualsiasi elogio.

Mi si consenta soltanto di mettere in vista uno tra i molti pregi; quello, che a mio avviso, più rende simpatico un buon trattato e ne assicura il successo: voglio dire la certezza di non essere arrestati da piccoli dubbi o difficoltà di dettaglio, imputabili a incompleta elaborazione da parte dell'autore.

Nessuno ignora che una esposizione scientifica perfetta, difficilmente si raggiunge di primo acchito. Anche autori eminenti, i quali pur scrivono con semplicità suggestiva, quando non si dànno la briga di ben disciplinare la materia, curando i particolari, finiscono col lasciare qualche cosa nell'ombra, e ciò disturba lo studioso, il quale, per colmare le lacune, si trova costretto a dispendi di energia, non desiderati, nè desiderabili.

Un simile inconveniente non si incontrerà certo nell'opera del Marcolongo, che ispira a priori e merita effettivamente fiducia incondizionata. Essa è frutto di amorevoli cure e di meditazioni coscenziose; sorta dalla scuola, è già passata sotto il cribro sottile della lezione orale, più efficace di qualsiasi critica.

Eccone l'orditura generale.

I due primi capitoli fanno conoscere quei potenti mezzi analitici, concepiti nelle linee essenziali da Gauss, Green, Riemann e Dirichlet, che sono indispensabile strumento in tutti, si può dire, i campi delle matematiche applicate. L'A. tien conto dei perfezionamenti più recenti e riesce a presentare un quadro eccezionalmente compendioso e felice, che si presta bene ad un primo studio, e sarà pur visto con piacere e profitto, da chi già siasi addestrato in argomento.

Nel terzo capitolo, ancora introduttivo, sono esposti i principi della meccanica dei sistemi continui.

Dopo tali premesse si entra veramente nella teoria matematica dell'elasticità, della quale sono bene rappresentati e fusi con logica armonia i tre aspetti salienti: il fisico, l'analitico ed il tecnico.

Si incomincia, come è naturale, dal primo, per ricavarne le basi dell'intero edifizio.

Quanto mai commendevole è il criterio dell'A. di non limitarsi ad un arido elenco di postulati, ma di vivificare la trattazione, facendo largo posto ai diversi punti di vista (estensione della legge di Hooke; teorie molecolari; energetica), da cui possono essere ricavate le equazioni fondamentali.

Egli ha così occasione di riassumere la interessante controversia relativa al valore del rapporto di Poisson, e le ricerche di Voigt (semplificate e, per così dire, invertite da Somigliana) sulle forma del potenziale elastico nei mezzi cristallini.

Il lato analitico della statica dei corpi elastici è, come ebbe a dire il Klein, parlando dei matematici italiani, un problema nazionale.

Tanto più volontieri vi si intrattiene perciò il Marcolongo, svolgendo ampiamente i contributi fondamentali di Betti, Cerruti, Somigliana e i risultati successivi, ispirantisi all'uno o all'altro di quegli indirizzi, che si debbono allo stesso autore, a Lauricella, Almansi, Tedone, Gebbia ecc. Pur preponderando gli italiani, non si poteva passare sotto silenzio la parte spettante agli stranieri, e l'A. ricorda infatti con grande onore i lavori di Boussinesq, quelli più recenti dei fratelli Cosserat, e la importante quanto difficile questione risoluta dallo svedese Fredholm.

Seguono due capitoli, dedicati alle applicazioni tecniche, o meglio al substrato concettuale di tali applicazioni, in cui campeggia il problema di Saint-Venant, mirabile esempio di associazione feconda fra lo spirito pratico, l'intuito fisico e la speculazione matematica.

Il volume si chiude rendendo conto di quanto, per opera principalmente di Voigt, è stato fatto sul comportamento elastico dei cristalli. La estensione dei metodi di Saint-Venant ha, tra altro, resa possibile la determinazione effettiva delle costanti elastiche di alcuni corpi cristallini ed ha fornito la spiegazione dei fenomeni piezo-elettrici.

Il compito del recensore è finito; al pieno e schietto suo plauso sia pari la diffusione del libro, come lo sarà, si può starne garanti, la soddisfazione di ogni intelligente lettore.

Prof. TULLIO LEVI-CIVITA.

JENGO ADOLFO. — *La Telefonia.* Con 101 fig. nel testo. N. XVIII dei " Manuali Giusti ". Livorno, R. Giusti, 1904.

In questo manuale l'A. si propone di esporre concisamente tutte le cognizioni riguardanti la *Telefonia* procedendo, secondo l'ordine cronologico, dai primitivi apparecchi telefonici fino alla descrizione dei modernissimi sistemi per impianti di vaste reti per la trasmissione telefonica a grandi distanze.

L'egregio A., che dimostra di avere studiato con amore e con coscienza l'importante argomento, premette alla parte tecnica un capitolo introduttivo nel quale espone brevemente quei principi di fisica generale che servono per le applicazioni alla Telefonia. Data la piccola mole del libro e la vastità della materia da trattare l'A. non ha potuto troppo indugiarsi in queste nozioni e per conseguenza questo primo capitolo, a causa appunto della troppa concisione, non è certo encomiabile per quanto riguarda la chiarezza. Menda del resto abbastanza lieve, quando si pensi che l'A. avrebbe potuto benissimo presupporre nel lettore le cognizioni di fisica sufficienti all'interpetrazione del testo.

È invece condotto abbastanza bene il cap. successivo in cui l'A. descrive il primo telefono magnetico e merita un particolare elogio l'A. per non aver dimenticato, in questo capitolo, di rivendicare all'*italiano Meucci* la gloria della scoperta del telefono magnetico.

Nel cap. III l'A. tratta dei telefoni a pila ed in ispecial modo del microfono, e nel cap. IV descrive con precisione i vari sistemi di telefonia e termina con un cenno, veramente troppo breve, dell'applicazione fatta dall'inglese *Preece* alla telefonia senza filo. Un altro elogio va pure tributato all'A. per non avere omesso l'importante applicazione del telefono come rivelatore delle onde Hertziane per mezzo del *detector magneticum* del nostro *Marconi.*

Dopo un rapido cenno sulle pile e sugli accumulatori l'A. passa alle linee telefoniche per venire poi a trattare di tutta la parte tecnica riguardante gli accessori e l'impianti telefonici. Nella trattazione di questa parte l'A. va innanzi sicurissimo e si rivela ingegnere tecnico provetto e coscienzioso: per coloro cui il libro è destinato, è senza dubbio questa la parte più importante ed è quindi un pregio notevole del libro che sia questa la più diffusa e la più egregiamente trattata.

Nel capo IX ed ultimo l'A. parla della parte pratica dell'ultima applicazione fatta dal *Van Rysselberghe* e dagli italiani *Brunè* e *Turchi* per la telefonia e la telegrafia sullo stesso filo, riservandosi a fare un'esposizione teorica di questo sistema nella parte seconda dell'appendice: la parte prima della detta appendice è invece riservata all'esposizione della teoria della trasmissione telefonica a grande distanza.

L'A. ha necessariamente dovuto mettere in appendice queste due ultime parti perchè per l'esposizione delle medesime, ha dovuto, per forza, ricorrere a cognizioni matematiche che non sono alla portata di tutti.

In complesso questo manuale è un lavoro che si legge volentieri e che può riuscire utilissimo a tutti coloro che hanno bisogno di acquistare presto cognizioni sufficienti intorno alla tecnica e alla pratica della telefonia.

AROLDO MARTINI ZUCCAGNI.

Note all'inchiesta sulla fusione della geometria piana e solida.

Dopo la pubblicazione del precedente fascicolo io sottoscritto, direttore del « Periodico di Matematica » ho avuto acerbi rimproveri per avere accolto in questo giornale l'articolo del prof. Lazzeri *a proposito dell'inchiesta fatta dall' « Associazione Mathesis » sulla fusione della geometria piana e solida;* e siccome rifuggo dalle polemiche ed ho (è inutile negarlo) molta amicizia e simpatia per il prof. Lazzeri, ne sono rimasto molto dispiacente.

Le più gravi lagnanze mi sono state rivolte dal prof. Angeleri, il quale m'inviò una risposta al citato articolo, accompagnata dalla lettera che qui riproduco testualmente.

Ivrea, 15 maggio 1904.

Illustriss. Sig. Direttore

Nell'ultimo numero del « Periodico di Matematica » vi (*sic!*) è inserito un articolo del prof. Lazzeri sulla Fusione, e che in parte mi riguarda. Siccome in detto articolo vi (*sic!*) sono cose che offendono il mio amor proprio, ed è già la seconda volta che il sig. Lazzeri scrive in tal modo contro di me, così mi rimetto alla lealtà di V. S., perchè nel prossimo numero del suo « Periodico » inserisca questa mia risposta. Certo il sig. Lazzeri non si opporrà.

Dev.mo
FR. ANGELERI.

Naturalmente, mi sono affrettato a chiamare alla mia presenza il Prof. Lazzeri, gli ho comunicato l'articolo dell'Angeleri, e gli ho fatto un patetico discorso per dimostrargli che la sua condotta è stata altamente biasimevole, e per sentire se aveva qualche cosa da dire a sua giustificazione!

Ma egli ha ascoltata la mia predica senza scomporsi, ha mostrato di non essere impensierito gran che delle gravi accuse dell'Angeleri; ed ha avuto il coraggio, per non usare una parola più grave, di dirmi: « anche in Corte d'Assise l'ultima parola spetta alla difesa. Io non mi occupavo più da un pezzo della vecchia quistione; sono stato accusato, e mi son difeso; il prof. Angeleri, pubblico ministero, e la parte civile, vogliono replicare io non mi oppongo, purchè mi sia concesso di rispondere alla replica.

Sono stato costretto a riconoscere che il ragionamento era giusto, e per finirla, con quella imparzialità che mi distingue, ho convenuto di pubblicare la risposta dell'Angeleri con la controreplica del Lazzeri, che si è impegnato di esser breve e concettoso per non tediare i lettori.

Ecco la replica dell'Angeleri:

Ancora sulla fusione delle due Geometrie.

I colleghi che mi conoscono sanno quanto io mi occupi delle scuole, e il prof. Lazzeri, col suo « Periodico » e sopratutto col « Supplemento » non dovrebbe esserne ignaro. È in conseguenza di questo mio amore, *niente per altro*, indipendentemente da qualunque persona e da qualunque libro, che io proposi di interrogare i colleghi riguardo alla ormai famosa fusione della Planimetria colla Stereometria.

Il prof. Lazzeri fa altrettanto? Quantunque nel suo articolo (V. « Periodico di Matematica, » Fasc. V, 1904), egli dichiari di parlare oggettivamente, è già la seconda volta che si occupa della mia povera persona e con una certa acrimonia che, anche senza volerlo, fa pensare essere egli a corto di argomenti.

Che non sia proprio possibile fra insegnanti di Matematica il trattarsi con rispetto reciproco e mantenersi nella serenità della discussione!

La prima volta mi sono accontentato di scrivere al sig. Lazzeri una lettera gentilissima in mia difesa, e speravo che ne facesse almeno un cenno nel numero successivo del suo « Periodico, » dove si era parlato di me, ma m'ingannai. Questa volta ricorro alla lealtà del Direttore.

La quistione che io sto facendo da anni, si riduce a questo; *Allo stato attuale delle cose* (spero che il sig. Lazzeri capirà), *per i giovani di 1ª Liceale è più facile la Planimetria o la Stereometria?* Il prof. Lazzeri veramente non ha ancora dato una risposta esplicita a questo, ma coi suoi scritti viene ad asserire che l'una e l'altra presentano eguali difficoltà. Io e moltissimi altri (informino il *referendum* e le varie adunanze, specie l'ultima di Bologna), ci permettiamo di credere che la Stereometria sia più difficile. E il sig. Lazzeri (lo prego a non tenermi il broncio) a parole è contrario, ma nel fatto è di questo parere. Perchè infatti nel suo « Supplemento, » non mette mai a concorso quistioni di geometria solida?

Provi qualche volta a proporne, e staremo a vedere insieme quanti sono i solutori.

Io spero che il sig. Lazzeri non avrà più ad occuparsi di me, ma se mai lo prego, che citando i miei scritti non ometta a bella posta delle parole. Nel periodo: « Ma come! L'aver procurato che le figure del nostro libro fossero più nitide e chiare che fosse (anche egli, una ripetizione! Orrore!) possibile etc., » dopo la parola figure, aggiunga *solide* come ho scritto io, e vedrà, caro sig. Lazzeri che tutto corre benissimo. Da bravo! di questi scherzi non ne faccia più. Vedi poi combinazione! Nel mentre il sig. Lazzeri s'impanca a maestro di bello scrivere, non pensando alla grave responsabilità che si assume, proprio nello stesso periodo, anzi nella stessa riga, dove fa osservare a me un errore di ripetizione. *(Quam parva sapientia....!)* egli scrive queste parole, che io regalo al paziente lettore come saggio di bello stile: « e qui due o tre frasi cortesi per la modesta opera nostra, delle quali lo ringrazio ». E ciò fia suggel.

FR. ANGELERI.

Ed ecco le risposte del Lazzeri ridotte ai minimi termini.

a) Il « Supplemento » entra assai indirettamente nella quistione, ma se vogliamo tirarlo in ballo è da osservarsi che esso per vivere deve avere il favore dei fusionisti e dei non fusionisti, ed è quindi naturale che fra le quistioni da risolvere siano più numerose quelle di planimetria che quelle di stereometria. Pure, sfogliando la raccolta, è facile vedere che venne proposto, a concorso o no, anche un discreto numero di quistioni stereometriche. Qualche volta è accaduto che i giovani abbian fatto spontaneamente l'estensione allo spazio di una quistione planimetrica (esempio la quistione 53 a concorso).

Il numero dei risolutori di quistioni stereometriche non è in generale più scarso di quello dei risolutori di quistioni planimetriche.

b) Quando il prof. Angeleri afferma che il Lazzeri ha citato i suoi scritti, *omettendo a bella posta delle parole,* dice una ... cosa non esatta (il Lazzeri qui adoperò un'altra parola che ho creduto conveniente sopprimere).

Nessuno ha il diritto di contestare a chicchessia di pensarla come gli pare non solo sulla fusione, ma anche su qualsiasi più grave argomento; ma nessuno ha il diritto di far dire o far pensare ad altri quello che non si sono mai sognati di dire o di pensare.

L'Angeleri scrisse che gli stessi Lazzeri e Bassani « colla nitidezza delle *figure solide* sembra che essi stessi ammettano una difficoltà maggiore nella Stereometria che nella Planimetria »; e le sue parole furono *testualmente riprodotte* nell'articolo incriminato. Siccome però una eguale identica cura era stata posta nel disegnare le figure di geometria piana e solida annesse al trattato di geometria dei citati autori, il Lazzeri aveva il diritto di rispondere che trarre argomento dalla *nitidezza delle figure* (piane o solide poco importa) per affermare che esiste contradizione fra le parole ed il pensiero dei suddetti autori è una cosa ... abbastanza curiosa, per non dir peggio.

c) Il Lazzeri è rimasto assai addolorato nel sentirsi dire che *s'impanca a maestro di bello scrivere,* e mi ha giurato che non ha mai avuto una idea così immodesta: soltanto mi ha detto che quando s'imbatte in uno sproposito da pigliarsi colle molle, non può fare a meno di prendere le sullodate molle ed esporlo all'ammirazione del colto pubblico.

Quanto alla frase che il prof. Angeleri regala all'ammirazione del paziente lettore, il prof. Lazzeri ed io siamo corsi a farla leggere ad alcuni amici professori di lettere; i quali, (poveretti! sono forse più ciuchi di noi!) non hanno saputo trovarci spropositi.

d) Circa l'accusa di essere a corto di argomenti il Lazzeri, per non tediare i lettori, si riferisce a quanto ha scritto nella prefazione dei suoi *Elementi* e ai numerosi articoli pubblicati in questo « Periodico » nel corso di vari anni.

Volendo qualche cosa di più fresco, il prof. Angeleri può leggere il risultato dell'inchiesta sull'uso dei *Nouveaux éleménts de géométrie* di Meray nelle scuole francesi, pubblicato recentemente dal prof. Duport nella « Revue Bourguignonne » (T, XIV - 1904).

***

Dopo di che il prof. Lazzeri ha preso in esame le *rettifiche* al suo articolo fatte solennemente dal prof. Bettazzi in nome del Comitato dell' « Associazione Mathesis » (V. « Bollettino, » An. VIII, N. 5), ed ha osservato che esse non rettifican molto. Il N. 2 riguarda principalmente il prof. De Amicis, che risponderà dove e quando crederà.

Al N. 2 *d)* il Bettazzi dice: « Non *inconsultamente* si esclusero dalla Presidenza del Congresso i professori universitari, ma dopo regolare discussione in seno al Comitato direttivo ecc. »

Ed il Lazzeri non nega ciò, ma osserva che egli disse unicamente che tale deliberazione sarà magari stata eccellente, ma a lui parve cattiva e perciò la qualificò *inconsulta*.

Nei N. 4 e 5 il Bettazzi dice che il *referendum* fu rivolto *solo* ai professori di Liceo; e allora perchè ha pubblicato il parere di persone che al Liceo non hanno mai insegnato?

***

Infine il prof. Lazzeri desidera che sia pubblicata la seguente lettera del prof. Andriani, che egli ringrazia per la forma cortese della sua risposta, facendogli osservare solamente che nei libri del De Paolis e di Lazzeri e Bassani, non si può dire che si sia fatto solo un'*alternazione* delle due geometrie, poichè spesso si fa uso di proprietà stereometriche per semplificare le dimostrazioni di altre proprietà planimetriche.

Bari, 10 maggio, 1904.

Distinto Professore,

Mi permetta almeno quest'unica volta che pubblichi nel suo " Periodico di Matematica „ qualche cosa che mi riguarda in ordine alla dibattuta quistione della fusione della geometria piana colla solida. Veramente dopo quello ch'Ella ha scritto in sua difesa è ozioso scrivere altro intorno allo stesso argomento. Ma avendomi Ella accordato l'onore di nominarmi parecchie fiate, sento il bisogno di scagionarmi subito dall'accusa fattami, cioè che io pretenda che s'insegni nelle scuole solamente la mia geometria. Se male mi espressi nel *referendum* alla " Mathesis „ chieggo venia. Il mio pensiero era ed è che la fusione non debba confondersi coll'alternazione. Essa dev'essere intima, applicando quanto più è possibile il principio di dualità. Non avendo quindi finora veduto nessun libro che tratti la fusione col tenere presente il principio di dualità, mi permisi di additare il mio libro come quello che segna il primo tentativo, bene o male, per eccitare i valorosi matematici a ribattere la via da me percorsa e raddrizzarla verso la meta cui la scienza aspira, e che il compianto Cremona additò.

Se l'alternazione in geometria è un bene, io non trovo altro libro migliore del suo che possa dar buon frutto alla scuola, e se non avessi il mio libro insegnerei il suo, come quello che mantiene viva l'agitazione in favore della fusione. Opino però che la scienza non deve arrestarsi all'alternazione, ma alla vera fusione. E fo voto che i più volenterosi studino con amore i due metodi, o meglio, i due modi d'interpretare la fusione; quello che propugna Lei e quello che propugno io. Non