Indice Articoli Anno 1902

Sulla ricerca del " logaritmoseno " e del " logaritmotangente "

DEGLI ARCHI PICCOLI

§ 1. — Siccome per questa ricerca si danno nelle *Tavole logaritmo-trigonometriche* e nei trattati di *Trigonometria* parecchi metodi diversi, ci è parso utile confrontare fra loro questi metodi, studiando l'approssimazione che con ognuno di essi si raggiunge. L'indagine è stata lunga e minuziosa, ma crediamo che i risultati da noi ottenuti possano utilmente servire, sia per introdurre qualche opportuna modificazione in parecchie delle tavole più comuni, sia per rendere più completo o più esatto quanto in proposito si suol dire in molti degli ordinarî trattati.

§ 2. — Sia $f(x)$ una funzione, la quale, in tutti gli intervallî nei quali occorrerà di considerarla, abbia la derivata seconda finita e diversa da zero: indicando con x_1 e x_2 due valori arbitrarî della variabile e con x un valore fra questi compreso, dalla teoria delle funzioni interpolari (¹) si ha

$$(1) \quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\left\{\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}\right\} + (x - x_1)(x - x_2)\frac{f''(u)}{2},$$

dove u rappresenta un valore, generalmente incognito, pure compreso fra x_1 e x_2; e da questa, ponendo

$$x - x_1 = \delta x \qquad \text{e} \qquad x_2 - x_1 = \Delta x$$

e indicando con θ un numero compreso fra 0 e 1, si ricava

$$(2) \quad f(x) = f(x_1) + \frac{\delta x}{\Delta x}\left\{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)\right\} -$$

$$- \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2} f''(x_1 + \theta \Delta x).$$

(¹) V. PEANO, — *Calcolo Differenziale*, § 88 — (Ed. Bocca, Torino 1884).

Ciò posto, se nel calcolo di $f(x)$ si ammette il principio delle parti proporzionali, ossia se si ammette che sia

$$f(x)=f(x_1)+\frac{\delta x}{\Delta x}\left\{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\right\}, \tag{3}$$

e si indica con k_1 l'errore da cui risulta così affetto $f(x)$, sarà evidentemente

$$k_1=-\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}f''(x_1+\theta\,\Delta x). \tag{4}$$

Osservazione. — Non ci occuperemo degli errori che si commettono nella ricerca inversa, perchè i varî procedimenti che si seguono per risolvere il nostro problema hanno, generalmente, per iscopo di rendere trascurabile solo l'errore k_1, che si commette nella ricerca diretta: gli errori relativi alla ricerca inversa sono quindi, generalmente, subordinati al procedimento stabilito per la ricerca diretta.

§ 3. — È noto che a questo errore k_1 se ne aggiunge un altro, generalmente maggiore: quello che deriva dall'essere i valori di $f(x_1)$ e di $f(x_1+\Delta x)$, dati dalla tavola, approssimati a meno di una mezza unità dell'ultimo ordine, e dal ritenere per $f(x)$ solo tante cifre decimali quante ne hanno ciascuno dei due valori precedenti.

Questo errore, che indicheremo con l, non dipende nè da Δx nè dalla forma di $f(x)$, e, supposto che la moltiplicazione di $f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$ per $\dfrac{\delta x}{\Delta x}$ si eseguisca nel modo ordinario (e non con metodi abbreviati), il suo valore assoluto $|l|$ ha per massimo una unità dell'ultimo ordine, come si può dimostrare col seguente ragionamento. Indicando con e, e_1, e_2 gli errori da cui sono rispettivamente affetti $f(x), f(x_1)$ ed $f(x_1+\Delta x)$ per l'accennata ragione, dalla (3) si ha

$$l=e+e_1+\frac{\delta x}{\Delta x}(e_2-e_1), \tag{5}$$

ossia

$$l=e+e_1\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)+e_2\frac{\delta x}{\Delta x}; \tag{5'}$$

ma ognuno degli errori e, e_1, e_2, considerando come cifra delle unità l'ultima cifra decimale di $f(x)$, ha per *massimo* 0,5 se è per eccesso, ed ha invece per *limite superiore* 0,5 (in valore assoluto) se è per difetto, quindi sarà evidentemente

$$|l|\leqq 0{,}5+0{,}5\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)+0{,}5\,\frac{\delta x}{\Delta x},$$

da cui

$$|l| \leqq 1. \tag{6}$$

Così, se fosse

$$f(x_1) = 2{,}325 \qquad \text{ed} \qquad f(x_1 + \Delta x) = 6{,}455,$$

dalla (3) risulterebbe

$$f(x_1 + 0{,}5) = 4{,}390:$$

mentre che, tenendo due cifre decimali solamente, si avrebbe

$$f(x_1) = 2{,}33 \qquad \text{ed} \qquad f(x_1 + \Delta x) = 6{,}46$$

e quindi

$$f(x_1 + 0{,}5) = 4{,}40.$$

Osservazione. — È utile, per il seguito, tener presente che l'errore l consta di due parti (ognuna delle quali ha per massimo 0,5): quella che deriva dagli errori e_1 ed e_2, e quella che deriva dalle cifre che si trascurano nel risultato finale e che abbiamo indicato con e.

§ 4. — Supponiamo ora che, indicando con *log* il logaritmo volgare, sia

$$f(x) = \log \operatorname{sen} x \qquad \text{ed} \qquad f(x) = \log \tan x:$$

se g_1 e g'_1 sono i corrispondenti errori k_1, siccome, indicando con M il modulo dei logaritmi volgari, si ha rispettivamente

$$f''(x) = -\mathrm{M}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{ed} \qquad f''(x) = -4\,\mathrm{M}\frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x},$$

dove

$$\mathrm{M} = 0,43429\ 44819\ 03251\ldots\ldots,$$

dalla (4) si avrà

$$g_1 = +\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}\,\mathrm{M}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_1 + \theta\,\Delta x)} \tag{7}$$

e

$$g'_1 = +\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right)\overline{\Delta x}^2\,2\,\mathrm{M}\frac{\operatorname{ctn} 2(x_1 + \theta_1\,\Delta x)}{\operatorname{sen} 2(x_1 + \theta_1\,\Delta x)}, \tag{8}$$

e quindi g_1 sarà sempre per difetto e g'_1 sarà per difetto o per eccesso secondochè $x_1 + \theta_1\,\Delta x$ sarà minore o maggiore di 45°.

Da queste formule poi, osservando che il massimo valore del prodotto

$$\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)$$

si ha per $\frac{\delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$ e supponendo, ora e in seguito, $x_1+\Delta x$ minore di 45^0, si avrà rispettivamente

$$(9)\qquad g_1<\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1}\qquad \text{e}\qquad (10)\quad g'_1<\frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\frac{\operatorname{ctn}2x_1}{\operatorname{sen}2x_1}$$

Osservazione I. — Un limite inferiore per g_1 e per g'_1 si ottiene facilmente, osservando che per $\frac{\delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$ si ha

$$(11)\quad g_1>\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_1+\Delta x)}\quad \text{e}\quad (12)\ g'_1>\frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\frac{\operatorname{ctn}2(x_1+\Delta x)}{\operatorname{sen}2(x_1+\Delta x)}$$

Osservazione II. — L'errore g_1, nella nostra ipotesi, è sempre maggiore di g'_1. Per dimostrarlo basterà osservare che, ponendo nella (4)

$$f(x)=\log\operatorname{sen}x-\log\tan x$$

e, servendosi delle notazioni precedenti, si ha

$$g_1-g'_1=\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}\,M\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_1+\theta\Delta x)}-4\frac{\operatorname{ctn}2(x_1+\theta\Delta x)}{\operatorname{sen}2(x_1+\theta\Delta x)}\right],$$

e che, qualunque sia x, si ha sempre

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}>4\frac{\operatorname{ctn}2x}{\operatorname{sen}2x}.$$

Osservazione III. — Supponendo $x_1=\Delta x$, il secondo membro della (11) si riduce a

$$\frac{M}{8}\frac{\overline{\Delta x}^2}{\operatorname{sen}^2\Delta x}=\frac{M}{32}\left(\frac{2\Delta x}{\operatorname{sen}2\Delta x}\right)^2,$$

per cui, qualunque sia Δx e qualunque sia il numero delle cifre decimali, per $x_1=\Delta x$ e $\frac{\delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$ si avrà sempre

$$g_1>\frac{M}{32}\qquad \text{e quindi}\qquad g_1>0,01357\ldots.$$

Osservazione IV. — Collo stesso procedimento, se

$$f(x) = \log x \quad , \quad f(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad f(x) = \tan x$$

e se g_2, g_3 e g'_3 sono gli errori k_1 corrispondenti, si trova

$$(13) \quad g_2 < \frac{M\,\overline{\Delta x}^2}{8}\,\frac{1}{x^2}, \qquad (14) \quad g_3 < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}\,\operatorname{sen}(x - \Delta x),$$

$$(15) \quad |g'_3| < \frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\,\frac{\tan(x_1 + \Delta x)}{\cos^2(x_1 + \Delta x)}$$

(dove, essendo g'_3 negativo, se n'è indicato con $|g'_3|$ il valore asseluto); e, supposto $\frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}$,

$$(16) \quad g_2 > \frac{M\,\overline{\Delta x}^2}{8}\,\frac{1}{(x_1 + \Delta x)^2}, \qquad (17) \quad g_3 > \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}\,\operatorname{sen} x_1,$$

$$(18) \quad |g'_3| > \frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\,\frac{\tan x_1}{\cos^2 x_1};$$

risultati che ci saranno utili in seguito (1). E, con un procedimento analogo a quello tenuto nelle prec. Oss. II, si trova pure che $|g'_3|$ è sempre maggiore di g_3.

§ 5. — Dalla (7) e dalla (8) si deduce che g_1 e g_1' crescono ambedue al calare di $x_1 + \theta\,\Delta x$ e di $x_1 + \theta_1\,\Delta x$ rispettivamente e che per x_1 molto piccolo possono assumere valori molto grandi, tanto da alterare fino la *seconda* cifra decimale (Oss. IV al § prec.).

Di quì deriva che, qualunque sia Δx, per archi vicini a zero il principio delle parti proporzionali non è più applicabile nella ricerca in questione, e che quindi è necessario stabilire per x_1 un limite inferiore sotto il quale bisogna ricorrere ad altro procedimento. E siccome il valore di $f(x)$ dato dalla (3) è sempre affetto dall'errore l (§ 3), che, come s'è detto, ha per massimo una unità dell'ultimo ordine, questo limite si fissa generalmente (tanto nelle *Tavole logaritmo-trigonometriche* quanto nei trattati di *Trigonometria*) in modo che g_1 e g'_1 non superino una unità, o, almeno, una mezza unità dell'ultimo ordine; così l'errore complessivo $k_1 + l$ risulterà certamente minore di 2 o di 1,5 rispettivamente.

Servendoci della (9), ricordando l'Oss. II al § prec. e indi-

(1) Tutti i limiti dati dalle (9), (10),... (17), (18) sono più ristretti di quelli ordinariamente noti, e, meno quello dato dalla (13) (che si trova nel § 88 del *Calcolo Differenziale* del PEANO, già citato), furono pubblicati per la prima volta, assieme ad altri analoghi, da noi stessi nella nota: « *Errori prodotti dalla interpolazione nell'uso delle Tavole logaritmo-trigonometriche* » (Supplemento al fascicolo del Luglio 1895 della *Rivista Marittima*).

cando con n l'ordine dell'ultima cifra decimale, si trova subito che (tanto per la ricerce di logseno quanto per la ricerca di log tangente) per ciò basta che sia

$$(19)\ \operatorname{sen} x_1 > \frac{\Delta x}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{M}\,10^n}{2}} \quad \text{o} \quad (20)\ \operatorname{sen} x_1 > \frac{\Delta x}{2}\sqrt{\mathrm{M}\,10^n},$$

secondochè si vuole che g_1 e g_1' non superino una unità o una mezza unità dell'ultimo ordine.

Così, p. es:, se $\Delta x = 1'$ ed $n = 5$, essendo

$$\text{arc. } 1' = 0{,}00019\ 08882\ 08665\ldots,$$

affinchè g_1 e g_1' siano ambedue minori di una mezza unità dell'ultimo ordine, basterà che sia

$$\operatorname{sen} x_1 > 0,\ 02143\ 2323$$

e quindi [1]

$$x_1 \geqq 1^\circ\, 14'. \tag{21}$$

Osservazione. — Dalla (9) e dalla (11), prendendo per cifra delle unità la quinta cifra decimale [2], per $x = 1^\circ\, 13'\, 30''$ si ha

$$0,\ 9914 < g_1 < 1,\ 0190,$$

e per $x = 1^\circ\, 14'\, 30''$ si ha

$$0{,}9651 < g_1 < 0,\ 9916:$$

i limiti dati dalle nostre due formule sono dunque in questo caso molto ristretti. Se poi si confrontano i valori trovati per logsen $1^\circ\, 13'\, 30''$ e per logsen $1^\circ\, 14'\, 30''$ supponendo $\Delta x = 1'$ ed $n = 5$ con quelli che si hanno supponendo $\Delta x = 1''$ ed $n = 10$ [3], si trova

$$g_1 = 1,\ 0050\ldots \quad \text{e} \quad g_1 = 0,\ 9782\ldots$$

rispettivamente; questi risultati sono effettivamente compresi fra i corrispondenti di limiti or ora trovati, e il primo dimostra che

---

(1) Per l'uso dei valori naturali avvertiamo una volta per sempre che, se dovremo considerare solo dei seni e dei coseni, ci serviremo della tavola che trovasi (dalla pag. 256 alla pag. 273) nelle

Mathematical tables, edite dallo CHAMBERS (Edimburgo, 1963).

e che da i seni da 0° a 90° di 1′ in 1′ con *sette* cifre decimali; e che, se dovremo considerare anche delle tangenti o delle cotangenti, ci serviremo della tavola aggiunta al secondo volume del

Cours de Mathématiques di DE COMBEROUSSE (Ed. Gauthier-Villars, — Parigi 1893).

e che, da 0° a 90° e di 1′ in 1′, dà anche le tangenti o le contangenti, ma con *cinque* cifre decimali solamente.

(2) Converremo, pure una volta per sempre, che nei valori di k_1 e di l e di tutti gli altri errori che studieremo in seguito si debba considerare per cifra delle unità l'ultima cifra decimale dei numeri corrispondenti. E la stessa convenzione faremo per le differenze tavolari che occorrerà di considerare.

(3) Come nella Tavola II del *Thesaurus logarithmorum* di VEGA (In libraria Weidmannia, — Lipsia, 1794). Da questa tavola intenderemo sempre ricavati i valori a dieci cifre decimali, che adopreremo in seguito.

il limite dato dalla (21), essendo $\Delta x = 1'$, *non può in nessun modo essere abbassato.*

§ 6. — Abbiamo applicati la (19) e la (20) ai casi in cui sia

$$\Delta x = 1' \quad , \quad 15'' \quad , \quad 10'' \quad , \quad 1''$$

ed

$$n = 5 \quad , \quad 6 \quad , \quad 7 \quad , \quad 10,$$

e i corrispondenti limiti superiori di x_1, così trovati, sono racchiusi nelle seguenti due tabelle

$g_1 < \frac{1}{10^n}$

Δx \ n	5	6	7	10
1′	1° 14′	3° 54′	12° 23′	»
15″	18′ 30″	58′ 30″	3° 04′ 30″	»
10″	12′ 20″	39′ 00″	2° 02′ 50″	»
1″	1′ 14″	3′ 53″	12′ 17″	6° 29′ 10″

$g_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$

Δx \ n	5	6	7	10
1′	1° 45′	5° 31′	17° 39′	»
15″	26′ 15″	1° 22′ 30″	4° 20′ 45″	»
10″	17′ 30″	55′ 00″	2° 53′ 50″	»
1″	1′ 44″	5′ 30″	17′ 22″	9° 11′ 33″

Osservazione I. — Per ognuno di questi limiti si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte nella Oss. al § prec.

Osservazione II. — Per $n = 10$ e $\Delta x = 10''$, $15''$, $1'$, g_1 può sempre essere maggiore di una unità dell'ultimo ordine.

§ 7. — Che il principio delle parti proporzionali non si possa, per la ricerca in questione, rigorosamente ammettere si dice in quasi tutti i trattati di *Trigonometria;* non sempre però si osserva che l'errore corrispondente può diventare molto grande, anzi in alcuni si asserisce che, in pratica, esso è trascurabile. Così, limitandoci a uno solo dei parecchi esempî che potremmo citare, il LE COINTE nel suo esteso e notevole trattato [1] dice in proposito « Questo principio non è perfettamente esatto; ma, « come si può far vedere mediante l'*Analisi Infinitesimale*, esso « conduce in pratica a una approssimazione sufficiente ».

In tutte le tavole poi, come nella maggior parte dei buoni trattati, si stabilisce un limite di x_1, sotto il quale quel principio non si deve ritenere applicabile: ma, dietro quanto abbiamo dimostrato nei paragrafi precedenti, sui varî valori assunti per questo limite possiamo fare le seguenti importanti osservazioni, limitandoci però alle tavole e ai trattati più comunemente noti.

§ 8. — Per $n = 7$ e $\Delta x = 10''$ il BRUHNS [2] stabilisce per limite inferiore di x_1 6°; il CALLET [3] e il BREMIKER [4] stabiliscono 5°: lo SCHRÖN [5] 3.° Ma, come risulta dalla seconda delle tavole del § 6, per avere un errore minore di mezza unità dell'ultimo ordine basta che x_1 non sia maggiore di 2° 53′ 50″, quindi tutti questi limiti sono elevati sufficientemente e i primi due potrebbero essere notevolmente abbassati.

Il BRUHNS giustifica il suo limite solo col dire (Prefazione, pag. III) che, servendosi per archi inferiori a 6° di un'altra tavola, in cui invece di $\Delta x = 10''$ si ha $\Delta x = 1''$, si risparmiano lunghe e ardue interpolazioni; e, se non si considerano frazioni di secondo, questo è vero.

Il limite stabilito dal CALLET e dal BREMIKER e adottato da moltissimi autori di trattati (SERRET [6], GUYOU [7], VACQUANT [8], LALBALETTRIER [9], KLEYER [10], F. I. [11], TODHUNTER [12], ...) è giustificata dal SERRET (l. c., pag. 76 e 77) col dire che, avendosi

$$g_1 < \frac{M\,(\text{arc } 10'')^2}{2 \operatorname{sen}^2 x_1},$$

questo errore g_1 è sempre minore di una unità del settimo ordine, se x_1 sorpassa un certo limite inferiore a 5.° E infatti si verifica facilmente che, affinchè il secondo membro della precedente diseguaglianza sia minore di una tale unità, basta che x_1 non sia minore di 4° 05′ 40″. Ma, usando la (9), si può asserire che, per x_1 maggiore di 5°, g_1 è minore non solo di 1, ma anche di 0,168.

Il limite stabilito nella tavola dello SCHRÖN e adottato poi da diversi

---

(1) LE COINTE. — *Leçons sur la theorie des fonctions circulaires et la Trigonométrie*, pag. 94 (Ed. Mallet — Bachelier, Parigi 1858).

(2) BRUHNS, *Nuovo manuale logaritmico-trigonometrico*, Tav. III (Ed. Tauchnitz, Lipsia 1889).

(3) CALLET, *Tables portatives des logarithmes*, pag. 390 e seg. (Ed. Firmin Didot, Parigi, 1864). Queste tavole occupano un grosso volume di 800 pagine in un ottavo grande: furono però chiamate *portatili* in confronto alle antiche tavole del GARDINER (1770) che sono in un quarto molto grande e che il CALLET volle sostituire perchè di uso molto incomodo, specialmente nei calcoli nautici.

(4) VEGA, *Manuale logaritmico-trigonometrico*, Tav. III. (Ed Weidmann, Berlino, 1872).

(5) SCHRÖN, *Tables de logarithmes*, Tav. II. (Ed Gauthier-Villars, Parigi 1894).

(6) SERRET, *Traité de Trigonométrie* (Ed Gauthier-Villars, Parigi 1888).

(7) GUYOU, *Traité de Trigonométrie* (Ed. Berger-Levrault, Parigi 1891). — È questo il trattato più originale fra tutti quelli che noi conosciamo.

(8) VACQUANT, *Cours de Trigonométrie* (Ed. Masson, Parigi 1894).

(9) LALBALETTRIER, *Trigonométrie rectiligne, suive des principes de la nouvelle Geométrie du triangle* (Lib. *Croville-Morant*, Parigi, 1889).

(10) KLEYER, *Lehrbuch der Logaritmen* (Ed Mejer, Stuttgarda 1884).

(11) F. I., *Compléments de Trigonometrie et méthodes pour la resolution des problémes* (Ed. Poussielgue, Parigi 1886).

(12) TODHUNTER, *Trigonometria piana*, Versione del Prof. Vito pag. 152 (Ed Pellerano, Napoli 1875).

autori (De Comberousse, già citato; Rebière [1], ...) non è giustificato che dalle seguenti parole (poste dall'Houel nella prefazione, pag. VII) « Da « 0° a 3° le differenze dei logaritmi dei seni, delle tantenti e delle co- « tangenti variano troppo rapidamente, perchè si possa interpolare con « sufficiente esattezza col metodo delle parti proporzionali » E, servendoci delle solite (9), noi possiamo aggiungere che per x_1 non minore di 3° è certamente g_1 minore di 0, 466.

Solo nel trattatto dello Chauvenet [2] troviamo incidentalmente indicato un limite che può portare un errore g_1 non precisamente minore di una unità: infatti questo limite è 2° e per $x = 2° 00' 05''$ dalla (9) e dalla (11) risulta che g_1 è compreso fra 1,04 e 1,05.

Osservazione. — Alle tavole del Bremiker e a quelle del Callet, suaccennate, dobbiamo però fare la seguente osservazione. Fin dal principio di queste tavole si trovano indicate le differenze tavolari per 10'', mentre che l'uso di queste differenze potrebbe portare, come già sappiamo (§ 7, Oss. III), ad errori tali da alterare fin la seconda cifra decimale; sarebbe quindi opportuno sopprimere le differenze stesse per x_1 minore di 3° (come giustamente fa lo Schrön), chè per x_1 non minore di 3° è certamente g_1 minore di 0,5.

§ 9. — Per $n = 7$ e $\Delta x = 1'$ il Reynaud [3] stabilisce per limite inferiore di x_1 12°; il Köhler [4] 9°; lo Chambers (già citato) 2°; e oltre queste tavole citeremo anche la notissima e autorevole raccolta di esercizî del Reidt [5] dove, nelle stesse ipotesi, si è preso per limite 6°. Tutti questi limiti sono inferiore a quello indicato nella prima delle due tabelle del § 6, cioè 12° 23'; e mediante la (11) si può verificare che nessuno di essi è sufficientemente alto.

Il Reynaud (nella prefazione alle tavole del Lalande, pag. XXIX), dopo aver detto che « nella ricerca dei logaritmi delle linee trigonome- « triche si è costantemente proceduto in modo da ottenere questi loga- « ritmi a meno di una unità del settimo ordine », giustifica il limite 12° dicendo che prima di 12° la differenza fra due differenze tavolari non è sempre minore di 8: vedremo in seguito (§ 38, Oss.) su quale ragionamento sia basata questa conclusione, per ora possiamo verificare che, per quanto il limite in questione differisca di poco da quello da noi indicato, tuttavia esso non è, a rigore, sufficientemente alto, perchè, dalla (11), per $x = 12° 00' 30''$ si ha g_1 maggiore di 1,059.

Lo Chambers e il Reidt giustificano il loro limite adducendo, in sostanza, la stessa ragione: giacchè il primo dice (pag. XVIII) che sotto 2° le differenze non si possono più ritenere costanti) e il secondo (pag. 41) che per archi minori di 6° le variazioni dei logseni e dei logtangenti non sono proporzionali alle variazioni dell'arco. Ma colla solita formula (11) si vede subito che per $x = 6° 00' 30''$ e per $x = 2° 00' 30''$ si ha, rispettivamente g_1 maggiore di 4,18 e di 37,04, e di questi due errori neppure il primo può ritenersi trascurabile.

---

(1) Rebière, *Cours de Trigonométrie Élémentaire* (Lib. Germer-Baillière, Parigi).

(2) Chauvenet, *A Treatise on plane and spherical Trigonometry*, pag. 56 (Ed. Lippincott, Filadelfia 1891). In questo bellissimo trattato è molto notevole il Cap. VII, della Parte II, nel quale si dà la soluzione di un triangolo sferico qualunque (non supponendo cioè i lati e gli angoli minori di π).

(3) Lalande, *Tables de logarithmes étendues a sept decimales* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi 1890).

(4) Köhler, *Manuale logaritmico-trigonometrico* (Ed. Tauchnitz, Lipsia 1878). Queste tavole sono molto usate nelle nostre scuole.

(5) Reidt, *Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie;* I Theil Ed. Teubner, Lipsia, 1877.

Osservazione. — Sulla tavola dello CHAMBERS si deve fare una osservazione analoga a quella fatta alla fine del § prec., e concludere che, per la stessa ragione, sarebbe opportuno sopprimere le differenze tavolari per x_1 minore di 18° o di 13°, secondochè si vuole che g_1 risulti minore di 1 o di 0,5.

§ 10. — Il KÖHLER assume per limite, come s'è detto, 9°, mentre che per x eguale, p. es., a 9° 00′ 30″ si commette un errore maggiore di 1,87 (e questo, al solito, risulta dalla (11)). Egli però da $x_1 = 9°$ in poi dà per 1″ delle differenze diverse da quelle che si ricaverebbero dalla tavola stessa (così per $x_1 = 9° 59'$ la differenza per 1″ ricavata dalla tavola è precisamente $7170 : 60 = 119{,}50$, e invece nella tavola stessa si trova segnato 119,53); e, in proposito, dice semplicemente questo: (Prefazione, pag. XXVIII) « Le differenze non sono esattamente $\frac{1}{60}$ della « differenza che passa fra due logaritmi successivi i di cui due angoli « differiscono proprio di un minuto. I logaritmi trigonometrici procedono « secondo una progressione di ordine elevato, mentre gli angoli corri- « spondenti non procedono che secondo una progressione aritmetica di « primo ordine, il che porta seco sempre un errore, quando si vuole in- « terpolare una parte proporzionale; non resta altro da farsi che vedere « di rendere questo errore il minimo possibile, ciò che si ottiene per « mezzo della ivi aggiunta differenza 1″ ». — Si presentano quindi tre questioni:

1.° come sono calcolate quelle differenze?

2.° portano esse effettivamente un errore minore di quello che porterebbero le differenze ricavate dalle tavole stesse?

3.° questo errore è minore di una unità per x maggiore di 9°?

Servendoci delle tavole del VEGA a dieci cifre decimali, (già citate), abbiamo potuto verificare che le differenze date dal KÖHLER, invece di essere uguali a

$$\frac{1}{60}\left\{ \log \operatorname{sen}(x_1 + 60'') - \log \operatorname{sen} x_1 \right\},$$

sono eguali a

$$\frac{1}{10}\left\{ \log \operatorname{sen}(x_1 + 30'') - \log \operatorname{sen}(x_1 + 20'') \right\},$$

e questa è la risposta alla prima questione.

Passiamo ora alla seconda e dimostriamo che la risposta è affermativa: ossia che, chiamando g_k l'errore che si commette nella ricerca di logseno quando si usino le accennate differenze, il massimo valore assoluto di g_k è minore del massimo valore di g_1. Perciò cominciamo dall'osservare che, essendo

$$g_k = \left\{ \log \operatorname{sen}(x_1 + \delta x) - \log \operatorname{sen} x_1 \right\} -$$
$$- \frac{\delta x}{10}\left\{ \log \operatorname{sen}(x_1 + 30'') - \log \operatorname{sen}(x_1 + 20'') \right\},$$

questo errore, nullo per $\delta x = 0$, cresce al crescere di δx fino a raggiungere il suo massimo per il valore di δx, compreso fra 20″ e 30″, che si ricava dalla equazione

$$(22)\qquad \tan(x_1 + \delta x) = \frac{M \operatorname{arc} 10''}{\log \operatorname{sen}(x_1 + 30'') - \log \operatorname{sen}(x_1 + 20'')},$$

poi decresce sempre e per $\delta x = 60''$ è negativo: basterà dunque dimostrare che si ha sempre

$$(23)\qquad g_1 - g_k > 0$$

e che il valore assoluto di g_k corrispondente a $\delta x = 60''$ è minore del massimo valore di g_1. Infatti, siccome

$$g_1 = \left\{\log \operatorname{sen}(x_1 + \delta x) - \log \operatorname{sen} x_1\right\} - \frac{\delta x}{60}\left\{\log \operatorname{sen}(x_1 + 60'') - \log \operatorname{sen} x_1\right\},$$

sarà

$$(24)\quad g_1 - g_k = \frac{\delta x}{60}\Big[6\left\{\log \operatorname{sen}(x_1 + 30'') - \log \operatorname{sen}(x_1 + 20'')\right\} -$$

$$- \left\{\log \operatorname{sen}(x_1 + 60'') - \log \operatorname{sen} x_1\right\}\Big];$$

ma, indicando con B la quantità posta fra le parentesi quadre e sviluppando $\log \operatorname{sen}(x_1 + 20'')$, $\log \operatorname{sen}(x_1 + 30'')$ e $\log \operatorname{sen}(x_1 + 60'')$ colla formula di TAYLOR arrestata al terzo termine, si ha

$$B = \frac{M(\operatorname{arc} 60'')^2}{12}\left\{\frac{4}{\operatorname{sen}^2(x_1 + \theta_1 20'')} + \frac{6}{\operatorname{sen}^2(x_1 + \theta_2 60'')} - \frac{9}{\operatorname{sen}^2(x_1 + \theta_3 30'')}\right\}$$

(dove θ_1, θ_2 e θ_3 hanno il solito significato), da cui

$$B > \frac{M(\operatorname{arc} 60'')^2}{12}\left\{\frac{10}{\operatorname{sen}^2(x_1 + 60'')} - \frac{9}{\operatorname{sen}^2 x_1}\right\}$$

e, nel nostro caso, è certamente

$$10 \operatorname{sen}^2 x_1 > 9 \operatorname{sen}^2(x_1 + 60''),$$

dunque la (23) è dimostrata. Per dimostrare anche l'altra parte osserviamo che per $\delta x = 60''$ si ha $-g_k = B$, dovrà dunque essere B minore del massimo valore di g_1; e infatti, sostituendo a B il valore dato dalla (24) e a g_1 il valore dato dalla (11), si vede che per ciò basterà che sia

$$21 \operatorname{sen}^2 x_1 > 20 \operatorname{sen}^2(x_1 + 60''),$$

e anche questa nel nostro caso è sempre vera.

Non è però affermativa la risposta alla terza questione, giacchè g_k può essere maggiore di una unità. Per dimostrarlo bisognerebbe trovare un limite inferiore del massimo valore di g_k, ma, per brevità, tralascieremo qui questa ricerca alquanto laboriosa e ci limiteremo a far notare che per $x = 9^\circ\,00'\,25''$ (valore dedotto dalla (22) ponendo $x_1 = 9^\circ$ e trascurando le frazioni di secondo) si ha certamente g_k maggiore di 1,298: come si vede servendosi della tavola (a dieci cifre) del VEGA, confrontando il valore cui si giunge seguendo il procedimento del KÖHLER col valore che si ottiene dalla tavola stessa (col metodo del § 34), e sapendo che quest' ultimo valore è certamente approssimato a meno di due unità dell' ultimo ordine.

Se dunque si vuole che l' errore prodotto dalla interpolazione sia minore di una unità, il limite (9°) stabilito dal Köhler è troppo piccolo, anche servendosi delle indicate differenze per un secondo.

Ma un' altra importante osservazione dobbiamo fare, ed è che, usando queste differenze, l' errore l (§ 3), che ora indicheremo con l_k, diventa maggiore dell' unità ed ha per limite superiore, inabbassabile, 1,3. Infatti, se e_k è l' errore da cui è affetta la differenza per un secondo data dal Köhler, si ha

$$l_k = e + e_1 + \delta x \, e_k \tag{25}$$

e siccome quella differenza è data con due cifre decimali, ossia a meno di 0,005, e δx ha per limite 60, l_k potrà, per δx tendente a 60, tendere a 1,3.

Ne deriva che, quando la differenza fra il massimo valore di g_1 e il massimo valore assoluto di g_k è minore di 0,3 (e questo avviene; p. es., per $x_1 = 14^\circ\, 00'$, perchè da $14^\circ\, 00'$ a $14^\circ\, 01'$ g_1 è certamente minore di 0,79 mentre g_k può essere maggiore di 0,51, come si vede servendosi anche qui della tavola del Vega a dieci cifre) l' errore che si commette col procedimento indicato dal Köhler può essere maggiore di quello che si commetterebbe seguendo il procedimento ordinario (servendosi cioè delle differenze tavolari *effettive*).

§ 11. — Per $n = 6$ e $\Delta x = 10''$ il Bremiker (1) suggerisce di non seguire l' ordinaria interpolazione quando x sia minore di 5°: come risulta dalle due solite tabelle, questo limite è molto alto, e forse fu così scelto perchè solo da 5° in poi hanno potuto trovar posto quasi tutte, e da $7^\circ\, 20'$ in poi tutte, le tavolette delle parti proporzionali.

Osservazione. — Dobbiamo qui ripetere una osservazione analoga a quella fatta al § 8, perchè in questa tavola si trovano segnate le differenze tavolari da $40''$ in poi. In questo caso, per evitare l' errore grandissimo (maggiore di 2171) in cui potrebbe cadere chi credesse di potersi servire di tali differenze, sarebbe opportuno sopprimere le differenze stesse fino a 1°, perchè per x maggiore di 1° g_1 è certamente minore di 0,5.

§ 12. — Per $n = 6$ e $\Delta x = 15''$ l' Inman stabilisce per limite inferiore di x_1 $50'$ e il Caillet 4° (2).

Il primo giustifica il suo limite dicendo che per archi piccoli i logseni e i logtangenti crescono « non solo rapidamente ma anche irregolarmente » (3). Questo limite è certo sufficiente per l' uso al quale la tavola è destinata, sarebbe però opportuno alzarlo fino a 1°, perchè allora g_1 sarebbe certamente minore di 1, mentre che per $x = 50'\, 07'', 5$ si ha g_1 maggiore di 1,34.

---

(1) Bremiker, — *Logarithmisch-trigonometriche Tafeln mit sechs Decimalstellen* (Ed. Nicolaische — Berlino 1890).

(2) Inman, *Nautical Tables* (Ed. Trübner, Londra);
Caillet *Tables des logarithmes et co-logarithmes....* (Ed. La Folye, Vannes 1897).
Le prime di queste tavole sono usate dalla marina inglese, le seconde dalle marine francese e italiana. La scelta dell'intervallo di 15'' è giustificata dal fatto che quindici secondi di arco equivalgono a un secondo di tempo.

(3) Veggasi in proposito: Goodwin, *Plane and sphericals Trigonometry*, pag. 78. (Ed Longmans, Londra 1891).

Il secondo dice (pag. VIII) che « i logseni e i logtangenti degli « archi piccoli variano troppo rapidamente; dimodochè, visti gli er- « rori da cui sono necessariamente affette le osservazioni, le ultime cifre « decimali non aggiungono nulla all' esatezza della operazione. Perciò nelle « prime pagine della tavola queste ultime cifre sono staccate dalle altre « e le parti proporzionali poste eccanto suppongono che non se ne tenga « conto ». Relativamente al numero di queste cifre dobbiamo fare le seguenti osservazioni, ma diciamo fin d'ora che, per il caso in cui, essendo x minore di 5°, si volessero sei cifre decimali, il Caillet stesso propone il metodo che esporremo al § 39. — Per x_1 maggiore di 4° non si trova nessuna cifra staccata e per x_1 conpreso fra 1° e 4° se ne trova una sola; quindi il logseno e il logtangente si hanno con sei cifre decimali nel primo caso e con cinque nel secondo. Queste cifre sarebbero esatte se l'interpolazione fosse fatta nel modo ordinario (poichè g_1 è certamente minore di una mezza unità del sesto ordine se x è maggiore di 1° 22′ 30″, ed è certamente minore di una mezza unità del quinto ordine se x è maggiore di 26′ 15″, come resulta dalla seconda delle due solite tabelle); ma usando le tavolette proposte dal Caillet, che sono calcolate sulla differenza media fra quindici differenze tavolari successive, l'errore aumenta, e, con un procedimento in altra occasione indicato [1] si vede facilmente che per δx tendente a 15″ esso può essere maggiore di 3,26 nel primo caso o di 4,67 nel secondo. — Per x compreso fra 15′ e 1° si trovano due cifre staccate, e colla ordinaria interpolazione si hanno infatti quattro cifre certamente esatte (perchè per x maggiore di 15′ si ha g_1 minore di 0,15, presa, si intende, per cifra delle unità la quarta cifra decimale); ma usando le tavolette proposte, per la ragione suindicata, si trova che l'errore può essere maggiore di 5,40. — Per x minore di 15′ si hanno ancora quattro cifre staccate, ma non son più date le tavolette per le parti proporzionali, e si trovano solo le differenze per 10″ a partire da 1′ 15″: qui però l'errore di interpolazione può essere sensibilissimo, e servendosi, p: es:, della prima differenza segnata [2], esso può essere maggiore di 10,07. — E termineremo coll'osservare che, usando le tavolette da Caillet proposte, anche il limite dell'errore l aumenta, ed aumenta precisamente di 0, 655..., come altra volta dimostrammo [3].

§ 13. — Per $n = 5$ si ha generalmente $\Delta x = 1'$; in questo caso i varî limiti stabiliti per x_1 sono quasi sempre molto maggiori di quelli dati dalle due solite tabelle (1° 14′ e 1° 15′ secondochè si vuole che g_1 sia minore di una unità o di una mezza unità), e potrebbero quindi essere molto abbassati.

Il Dupuis [4] assume per limite 2° 12′, perchè (pag. 172 e 173) « per archi maggiori l'applicazione del principio delle parti proporzionali porta un errore minore di una unità del quinto ordine.

L'Albrecht [5] e l'Houel [6], assumono 3°, « perchè, dice il secondo « (pag. XV), il principio delle parti proporzionali cessa di essere appli-

---

(1) Veggasi il § 10 della nostra nota, già citata, « *Errori prodotti dalla interpolazione...* »

(2) Notiamo, incidentalmente, che la seconda delle differenze segnate deve essere 446 e non 447.

(3) Veggasi i §§ 27 e 29 dell'*Appendice* al nostro *Trattato elementare di Trigonometria* (Ed. Giusti, Livorno 1895).

(4) Dupuis, *Tables de logarithmes a cinq décimales* (Lib. Hachette, Parigi 1878).

(5) Albrecht. *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen* (Ed. Stankiewicz, Berlino 1884).

(6) Houel. *Tables de logarithmes a cinq décimales.* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi 1868).

« cabile verso i due estremi del quadrante e per archi minori di 3° o « maggibri di 87° è preferibile ricorrere ad un altro procedimento; » ma cominciano ambedue da 2° a dare le tavolette delle parti proporzionali.

E fra le tavole a cinque decimali citeremo anche quella del BREMIKER (1), nella quale le suddivisioni dell'arco (sessagesimale) seguono il sistema decimale: in questa tavola si propone il metodo che esporremo al § 39 per x maggiore di 4° (però le tavolette delle parti proporzionali si danno da 3° in poi), e anche questo limite è più che sufficientemente alto, essendo Δx eguale a un centesimo di grado.

§ 14. — Passando ora ad alcuni trattati, noteremo che l'HAMMER (2) assume per limite 6°; l'HEIS (3) 4°; il GELIN (4), il REIDT (già citato) e il KLEYER (già citato) 2°; l'F. I. (già citato) e il BRIOT (5) 1° 30'. — L'altezza esagerata del secondo limite non è in nessun modo giustificato; e quella, ancora più esagerata del primo è giustificata dall'A. dimostrando (con un ragionamento non esatto, e lo vedremo al § 26) che fino a 6° si può usare il metodo che esporremo al § 24. — Nell'ultimo poi di questi trattati è aggiunto

che per x compreso fra 1° e 1° 30' l'errore non sorpassa una unità, e questo non è vero perchè per $x = 1° 01' 30''$ g_1 è maggiore di 1,4;

e che per x compreso fra 45' e 1° l'errore non sorpassa due unità, e neppur questo è vero, perchè per $x = 45' 30''$ g_1 è maggiore di 2,56.

Osservazione I. — Per tutte le quattro tavole accennate dobbiamo ripetere la solita osservazione (§§ 8, 9) e concludere che sarebbe opportuno sopprimere le differenze tavolari per x minore di 2°.

Osservazione II. — Relativamente alle tavole dell'HOUEL dobbiamo fare un'altra osservazione ed è che le tavolette ausiliarie (per il calcolo delle parti proporzionali) non danno le cifre decimali dei successivi prodotti parziali (come tutte le tavole del secolo decimottavo); e quindi, usando questa tavola, il limite dell'errore l (§ 3) può aumentare e può aumentare precisamente di 0,555... come altra volta dimostrammo (6).

---

(1) BREMIKER. — *Tavole logaritmico-trigonometriche con cinque decimali* (Ed. Hoepli, — Milano, 1887).

Nella prefazione a queste tavole (a pag. VIII) l'A., dopo aver fatto notare l'inutilità di una tavola d'antilogaritmi, aggiunge: « Così pure deve essere biasimata l'inutile aggiunta dei « *senoversi* e *cosenoversi* come complemento decadico dei logaritmi dei coseni e dei seni, poichè « il sottrarre un logaritmo non è di maggior fatica che l'aggiungerlo »; qui evidentemente si tratta di un errore di stampa, e invece di *senoversi* e *cosenoversi* deve leggersi *logaritmi secanti* e *logaritmi cosecanti*.

Poi aggiunge: « Collo stesso diritto si potrebbe anche domandare una tavola dei comple- « menti decadici dei logaritmi dei numeri, il che per fortuna non è ancora venuto in mente « ad alcuno ». Facemo notare che non sono di questo parere nè l'HOUEL (l. c. pag. V) nè l'ALBRECHT, nè tutti coloro, e sono molti, che negli ordinari calcoli nautici si servono delle tavole del CAILLET (dove sono sempre dati i cologaritmi, ossia i complementi a zero, tanto dei logaritmi dei numeri quanto dei logaritmi delle funzioni tirgonometriche); del resto, per la medesima ragione non avrebbe dovuto il BREMIKER stesso sopprimere nella sua tavola i *logaritmicotangenti*?

E nella Introduzione (pag. XXI): « per angoli piccoli, dove i *seni* e le *tangenti* non cre- « scono più uniformemente all'arco, si prende.... »: invece è noto che, più l'arco è piccolo, più uniformemente crescono tanto il seno che la tangente: anche qui dunque si tratta evidentemente di un errore di stampa, e, invece di *seni* e *tangenti* deve leggersi *logaritmi seni* e *logaritmi tangenti*.

(2) HAMMER, *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*, pag. 36 e 99. — (Ed. Metzler, — Stuttgarda 1885).

(3) HEIS, — *Lehrbuch der Geometrie*, — *Dritter Teil*, pag. 48. — (Ed. Du Mont-Schauberg, — Colonia 1888).

(4) GELIN, *Éléments de Trigonométrie*, pag. 75. — (Libr. Wesmael-Charlier, Namur 1888).

(5) BRIOT et BOUQUET, *Leçons de Trigonométrie*, pag. 58. — (Libr. Delagrave, Parigi 1887).

(6) Veggasi il § 23 della nostra *Appendice*, già citata.

§ 15. — I metodi proposti per evitare o diminuire gli errori in questione, g_1 e g_1', quando questi supererebbero una unità, o almeno una mezza unità dell'ultimo ordine, sono, che noi sappiamo, *otto*: ci proponiamo di confrontarli fra loro, esaminando l'errore a ciascuno di essi corrispondente.

Primo metodo. — Questo metodo consiste nel diminuire il passo Δx della variabile ed è quello che più naturalmente si presenta: esso però non è sufficiente, perchè, per quanto piccolo si prenda il passo costante Δx, per x molto piccolo g_1 e g_1' potranno sempre avere dei valori grandissimi (§ 4. Oss. III). — In un caso solo esso sarebbe sufficiente: quando si mettesse come condizione di non considerare frazioni di x inferiori al Δx stabilito.

§ 16. — Nel caso di $n = 7$ si trova una tavola con $\Delta x = 1''$ nel Bruhns (Tav. II) fino a 6°, nel Vega (Tav. II) e nel Callet (da pag. 290 a pag. 389) fino a 5°.

Nella prefazione (del Bremiker) alle tavole del Vega (pag. XIX) è detto che per archi inferiori a 30' l'uso della II tavola in discorso « è *incomodo* nei calcoli geodetici tanto per le grandi moltiplicazioni e divisioni richieste dal calcolo delle parti proporzionali, quanto perchè si « deve aver riguardo alle differenze seconde » (veggasi in seguito § 34) « laonde è *da preferirsi* l'uso della tavola I » (veggasi in seguito § 41). Ma, per quanto abbiamo detto, l'uso di questa II tavola è da evitarsi per archi molto piccoli, inferiori p. es.: a 20' (veggasi la seconda delle due solite tabelle), non perchè sia *incomodo*, ma perchè potrebbe portare ad errori troppo grandi (anche tenendo conto delle differenze seconde, § 36).

Osservazione analoga, ma con maggior ragione dobbiamo fare alla tavola II del Bruhns, nella quale si danno anche le tavolette delle parti proporzionali, meno che da 10' a 1° 20' per mancanza di posto (Prefazione pag. VI e VII). Ebbene: usando quelle tavolette per x minore di 1' si può commettere un errore maggiore di 150,7. Questo grave difetto potrebbe essere tolto dalle belle tavole del Bruhns, sopprimendo le tavolette delle parti proporzionali anche per x minore di 10', ma bisognerebbe pure sopprimere tutte le differenze tavolari per x minore di 18' perchè l'uso di queste differenze, anche per $x_1 = 17' 21''$, può portare un errore maggiore di 0,5.

Solo il Callet, fra quelli citati, non ammette che per frazioni di 1'' si possa applicare il principio delle parti proporzionali (nell'uso della tavola in discorso), e indica invece (*Avvertissement*, pag. 35) un metodo, che, essendo proposto anche in parecchi trattati, sarà da noi completamente studiato in seguito (§ 32).

Il Köhler poi nella sua tavola pone $\Delta x = 10''$ fino a 9°; abbiamo già visto (§ 10) che questo limite non è sufficientemente alto: osserviamo ora che questa parte della tavola contiene tutte le differenze tavolari effettive (che fino, p. es., a 3° dovrebbero, per la solita ragione, essere soppresse); e che in essa non è stabilito un limite sotto il quale l'interpolazione ordinaria non sia permessa. Per x minore di 3° è però proposto un altro metodo (quello del § 39, al solito), ma, pare, solo per maggiore comodità di calcolo (Prefazione, pag. XXX).

§ 17. — Nel caso di $n = 6$ e $\Delta x = 10''$ il Bremiker dà una tavola (la II) con $\Delta x = 1''$ fino a 5°, ma non dà le differenze tavolari e indica un metodo (che, al § 43, dimostreremo essere in parte errato) per evitare l'interpolazione ordinaria in tutta la tavola.

L'Inman dà una tavola con $\Delta x = 1''$ fino a 50': abbiamo già osservato (§ 12) che questo limite potrebbe opportunamente essere elevato a 1°; in quanto alla interpolazione l'A. non vi accenna neppure, e, per il genere di calcoli cui quelle tavole son destinate, essa certo non occorre.

Alle tavole del Caillet l'editore ha aggiunto [1] una tavola a *sette* cifre decimali e con $\Delta x = 1''$ fino a 5°: per l'uso al quale quelle tavole devono servire, ci pare che il numero delle cifre sia inutilmente aumentato e che il limite di 5° sia esageratissimo.

§ 18. — Nel caso di $n = 5$ l'Albrecht dà una tavola (la II) con $\Delta x = 1''$ fino a 3°; le differenze tavolari non sono segnate, però, al solito, l'A. non indica un limite sotto il quale l'interpolazione non sia permessa e questo era necessario, perchè nella introduzione (pag. XII) si danno esempî in cui, considerandosi delle frazioni di 1'', questa interpolazione effettivamente si eseguisce.

§ 19. — In quanto ai trattati, citati fin qui, ci limiteremo ad osservare che il Vacquant (pag. 104), il Briot (pag. 65), l'F. I. (pag. 172) e il Todhunter (pag. 153) dichiarano esplicitamente che, se $\Delta x = 1''$, « non « usandosi allora l'interpolazione altro che per frazioni di 1'', essa non « può produrre che errori trascurabili »; e questo, ripetiamolo, non è vero.

Osservazione. — Il Prof. Ricordi nella sua nota « *Sull'approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche* [2], dopo aver osservato che, tenendo un procedimento indicato nella prefazione alle tavole dello Schrön, si può fare in modo che l'errore l risulti, in valore assoluto, minore di 0,75, aggiunge che, affinchè g_1 risulti minore di 0,25 (ossia affinchè $l + g_1$ risulti sempre minore di una unità) si *dovrebbe* usare una tavola

di	1''	in	1''	da 1°	a	6° 00' 30''	}	per $n = 7$
»	10''	»	10''	» 6° 00' 30''	»	45°		
di	10''	in	10''	da 1°	a	4°	}	per $n = 5$.
»	1'	»	1'	» 4°	»	45°		

(1) Per la prima volta nella ristampa del 1890.

(2) *Periodico di matematica* Fascic. IV e V. 1888.

In questo pregevole lavoro l'A. fa per i logaritmi delle funzioni trigonometriche uno studio elementare e molto accurato, analogo a quello che il Prof. Besso (*Elementi di Trigonometria piana*. Ed. Loescher, Roma 1880), fece per i valori naturali delle funzioni stesse. Tale studio è fatto anche nel trattato del Todhunter, ma in esso l'A. si limita a far vedere che gli errori in discorso sono piccoli, senza darne mai dei limiti superiori.

G. Pesci.

(Continua)

SAGGIO DI UNA TEORIA

sull'approssimazione naturale o variabile delle radici quadrate

"Misurare è sapere."
KEPLER.

Da un teorema precedente sull'approssimazione delle radici quadrate degl'interi, (*) ora generalizzato ai numeri misti ed alle frazioni, potei in seguito dedurne altri, successivi perfezionamenti del primo o di taluni già noti, offrendo così sull'argomento, saggio di una teoria, che a' vantaggi della maggiore estensione e dell'accresciuta esattezza, unisce anche quello della facilità nelle applicazioni. Ed ove, sopratutto, si addimostra *come, in generale, non convenga considerar sempre la medesima approssimazione costante per un numero qualsivoglia,* indipendentemente dalla sua grandezza; mentre è più razionale desumerla dal valore della sua radice a meno di una unità per difetto e da quello del resto: elementi che risultando spontanei dal procedimento stesso dell'operazione, ne stabiliscono *a priori* il grado necessariamente *variabile.* D'onde il titolo del lavoro, nel corso del quale sarà manifesto che, senza spingere oltre i calcoli per l'estrazione di radice, ma arrestandoli bensì laddove vi determina p. es. $\sqrt{1\frac{49}{50}} = \sqrt{1{,}98}$ soltanto a meno di $\frac{1}{10}$, si può, molto meglio, ottenerne il valore più esatto a meno di $\frac{1}{8120}$. Chè se poi risaputi artifici si combinano ai metodi proposti si ha, considerando però la forma equivalente $\frac{1}{50}\sqrt{4950}$, l'approssimazione ancora più spinta a meno di $\frac{1}{39480}$.

Ma ecco il primo degli accennati teoremi

Teorema I. — *Se di un numero qualsivoglia* N *(intero, misto o frazionario) è* $\sqrt{N} = n$, *a meno di un'unità per difetto col resto* r, *saranno* $n + \frac{r}{2n+1}$ *ed* $n + \frac{r+1}{2n+1}$ *due altri valori di* $\sqrt{N}$, *più approssimati del primo perchè rispettivamente a meno di* $\frac{1}{2n+1}$ *per difetto o per eccesso: risultandone così* $\sqrt{N}$ *definito dalla limitazione*

$$n + \frac{r}{2n+1} < \sqrt{N} < n + \frac{r+1}{2n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

E sarà, pertanto, facile il mostrare:

1°. Che, non necessitando la condizione di r intero, è giustificata la estensione del teorema anche al caso de' numeri misti o frazionarii (intendo riferirmi alla già citata nota, ove peraltro il teorema non era esplicitamente enunciato).

(*) *Periodico di Matematica*, Vol. XIII, 1898, Livorno.

2°. Che scegliendo altrimenti il limite superiore della (1) si può conseguire un'approssimazione molto più esatta di quella indicata dal suddetto Teor. I, come risulterà dai teoremi che seguono.

3°. Infine che le applicazioni di tali teoremi si possano anche vantaggiosamente estendere alla ben nota approssimazione decimale, che costringono a maggiore esattezza.

Assegnando infatti, come limite superiore del valore di $\sqrt{N}$, quello approssimato per eccesso $n+\frac{r}{2n}$ (che per la $r \leqq 2n$ è più piccolo, in generale, del precedente $\frac{r+1}{2n+1}$) si perviene a quest'altra limitazione:

$$n+\frac{r}{2n+1} < \sqrt{N} < n+\frac{r}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

la quale definisce ancor più esattamente che la (1) il valore di $\sqrt{N}$, giacchè permette ora di esprimerlo a meno di $\frac{r}{2n(2n+1)}$: frazione sempre minore, eccetto che per $r=2n$, dell'altra $\frac{1}{2n+1}$, che dà l'approssimazione consentita dal Teor. I. D'onde il seguente

Teorema II. — *Se di un numero intero o misto* (*) N *qualsivoglia è, a meno di una unità per difetto col resto* r, $\sqrt{\mathrm{N}}=\mathrm{n}$: *saranno, rispettivamente, a meno di* $\frac{\mathrm{r}}{2\mathrm{n}(2\mathrm{n}+1)}$ *per difetto e per eccesso,* $\mathrm{n}+\frac{\mathrm{r}}{2\mathrm{n}+1}$ *ed* $\mathrm{n}+\frac{\mathrm{r}}{2\mathrm{n}}$ *due altri valori di* $\sqrt{\mathrm{N}}$, *più approssimati del primo.*

Infatti quadrando separatamente le due diseguaglianze, nelle quali si può scindere la limitazione (2), si ha

$$\left(n+\frac{r}{2n+1}\right)^2 = n^2+\frac{2nr}{2n+1}+\left(\frac{r}{2n+1}\right)^2;$$

d'onde, siccome

$$\frac{2nr}{2n+1}+\frac{r}{2n+1}=r, \quad \text{e inoltre} \quad \left(\frac{r}{2n+1}\right)^2 < \frac{r}{2n+1},$$

viene

$$n+\frac{r}{2n+1} < \sqrt{N};$$

e dalla

$$\left(n+\frac{r}{2n}\right)^2 = N+\left(\frac{r}{2n}\right)^2 \text{ similmente si ricava } \sqrt{N} < n+\frac{r}{2n}.$$

È così verificata l'esattezza della (2), ed *a fortiori* quella della (1); e dimostrati quindi i precedenti teoremi I e II.

Ed ora applicando direttamente il Teor. I ad una frazione qualsivoglia $\frac{a}{b}<1$, se ne otterrà il valore della radice approssimato soltanto

(*) Malgrado il Teor. II, per cui ne ho ristretto l'enunciato, non sia direttamente applicabile alle frazioni minori dell'unità (giacchè se $n=0$ la formula dell'approssimazione cade in difetto) è, però con noti artifizi, sempre possibile servirsene vantaggiosamente anche in tal caso: analoga osservazione pel successivo Teor. III.

a meno di una unità: poichè, essendo $n=0$, e quindi r eguale alla frazione stessa, si avrà $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{a}{b}+1$; ma siccome è d'altronde $\sqrt{\frac{a}{b}}<1$, consegue infine che, a meno di $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$, sarà $\frac{a}{b}<\sqrt{\frac{a}{b}}<1$, e si ha il seguente

Teorema. — *Il valore della radice quadrata a meno di* $\frac{b-a}{b}$ *di una frazione* $\frac{a}{b}<1$, *è compreso fra quello della frazione stessa e l'unità.*

Esempio. — A meno di 0.1 : 0.01 : 0,001 .... rispettivamente per difetto si ha

$$\sqrt{0,9}=0,9\,,\quad \sqrt{0,99}=0,99\,,\quad \sqrt{0,999}=0,999\ldots.$$

e, in generale, a meno di $\frac{1}{n}$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\frac{n-1}{n}.$$

Inoltre, l'approssimazione a meno di $\frac{1}{2}$ unità può facilmente dedursi dal Teor. II, ottenendone così un enunciato più generale del risaputo, cioè:

Teorema. — *Se di un numero intero o misto* N *qualsivoglia è, a meno di una unità per difetto,* $\sqrt{N}=n$, *saranno rispettivamente a meno di* $\frac{1}{2}$ *per difetto o per eccesso* n *ed* $n+1$ *due altri valori di* $\sqrt{N}$, *secondo che il resto non superi o superi* n. In altre parole: *Di un numero intero o misto* N. *la radice quadrata a meno di* $\frac{1}{2}$ *è, per difetto, eguale ad* n, *se* $n^2<N\leq n^2+n$: *mentre è, invece, per eccesso, eguale ad* $n+1$, *se* $n^2+n<N<n^2+2n+1$.

Dal Teor. II, infatti, si ha, pel massimo n^2+n, e pel minimo n^2+n+1 de' numeri rispettivamente eguali o compresi fra i primi, o fra gli ultimi de' $2n$ interi fra n^2 ed $(n+1)^2$, le seguenti limitazioni

$$n+\frac{n}{2n+1}<\sqrt{n^2+n}<n+\frac{n}{2n}$$

ed

$$n+\frac{n+1}{2n+1}<\sqrt{n^2+n+1}<n+\frac{n+1}{2n}:$$

quindi *a fortiori*

$$n<\sqrt{n^2+n}<n+\frac{1}{2}\ \text{ ed }\ n+\frac{1}{2}<\sqrt{n^2+n+1}<n+1\quad \text{c. d. d.}$$

Ma l'approssimazione consentita dal Teor. II può, a sua volta, esser perfezionata; giacchè in modo simile a quello per cui si deduce dall'approssimazione a meno di una unità, l'altra a meno di $\frac{1}{2}$, si può, dalla sola ispezione del resto, determinare *a priori*, quale delle due radici approssimate a meno di $\frac{r}{2n(2n+1)}$ sia più esatta, se, cioè, quella per difetto o quella per eccesso: d'onde la miglior approssimazione a meno di $\frac{1}{2} \times \frac{r}{2n(2n+1)}$ stabilita dal seguente

Teorema III. — *Se di un numero qualsivoglia* N, *intero o misto, è, a meno di una unità per difetto col resto* r, $\sqrt{N} = n$; *sarà a meno di* $\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2n(2n+1)}$, *per* N *intero*, $\sqrt{N}$ *compreso fra* $n + \frac{r}{2n+1}$ *ed* $n - \frac{r}{2n+1} \times \frac{4n+1}{4n}$ (*), *se* $r \geqq n$, *o fra questo valore ed* $n + \frac{r}{2n}$ *se* $r < n$; *mentre, per* N *misto, è invece* $\sqrt{N}$ *compreso fra i primi o fra gli ultimi de' suindicati limiti, od esattamente eguale ad* $n + \frac{2n}{4n+1}$, *secondo che* $r \gtreqqless n \frac{(4n+1)^2 - 1}{(4n+1)^2}$. *Sarà quindi, per* N *intero (misto), più esatto il valore* per difetto *di* $\sqrt{N}$, *se* $r \geqq n \left(r > n \frac{(4n+1)^2 - 1}{(4n+1)^2}\right)$; *o quello, invece,* per eccesso, *se* $r < n \left(r < n \frac{(4n+1)^2 - 1}{(4n+1)^2}\right)$.

Se infatti, come si asserisce per $r < n$, sussiste la limitazione

$$n + \frac{r}{2n+1} \times \frac{4n+1}{4n} < \sqrt{N} < n + \frac{r}{2n},$$

sarà N $(= n^2 + r)$, compreso fra i quadrati de' limiti sudetti, e perciò dovrà aversi

$$\left(n + \frac{r}{2n+1} \times \frac{4n+1}{4n}\right)^2 < n^2 + r;$$

da cui semplificando

$$r < n \frac{(4n+1)^2 - 1}{(4n+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Se è, invece, $r \geqq n$, consegue similmente che il presumere sia

$$n + \frac{r}{2n+1} < \sqrt{n^2 + r} < n + \frac{r}{2n+1} \times \frac{4n+1}{4n}$$

equivale a dimostrare la diseguaglianza inversa della sudetta (a): a dimostrare, cioè, che sia $r > n \frac{(4n+1)^2 - 1}{(4n+1)^2}$. La quale è evidente per $r = n$, ed *a fortiori* se $r > n$.

Ma ora sembrami opportuno giustificare perchè si sia preferito distinguere e non sostituire gli uni agli altri i teoremi anzidetti I, II e III, malgrado, dei due ultimi, ciascuno assegni limiti più precisi che il precedente. E ciò non solo per la maggiore evidenza de' perfezionamenti successivi dell'approssimazione proposta, che così naturalmente si collegano a quanto prima era già noto: ma anche perchè l'accresciuta esattezza, che gradualmente si consegue con essi, può

(*) Proviene dalla $n + \frac{r}{2n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{r}{2n(2n+1)}$, ottenuta aggiungendo al limite inferiore metà della differenza de' due limiti, di cui al Teor. II.

talvolta non giudicarsi opportuna. Nè si tien conto delle restrizioni, per altro apparenti, relative agli ultimi due teoremi per le frazioni minori dell'unità (V. la precedente nota al Teor. II).

È chiaro, infatti, come de' due noti teoremi che dànno le radici coll'approssimazione costante a meno di una o di $\frac{1}{2}$ unità, possa intendersi il secondo quale perfezionamento del primo; e quali perfezionamenti successivi del secondo suddetto e di ciascuno dei precedenti, i teoremi già segnati I, II e III, i quali dànno l'approssimazione sempre migliore, l'uno a meno di $\frac{1}{2n+1}$, variabile con n; e gli altri, rispettivamente quelle a meno di $\frac{r}{2n\,(2n+1)}$ ed $\frac{1}{2} \times \frac{r}{2n\,(2n+1)}$, variabili con n e con r.

Ma rispetto al Teor. III. è da notare inoltre che, mentre i primi due dànno, ciascuno, due limiti soltanto, esso stabilisce invece, l'una o l'altra di due distinte limitazioni e quindi (poichè queste hanno un limite comune) tre differenti limiti, che potrebbero rispettivamente denominarsi: limite *inferiore, medio* o *superiore;* e i valori delle corrispondenti radici: *valore per difetto* $\begin{matrix}\textit{minimo}\\ \textit{medio}\end{matrix}$, e valore *per eccesso,* $\begin{matrix}\textit{massimo}\\ \textit{medio}\end{matrix}$. Risultando evidente dal teorema sudetto che il limite medio, cioè $n + \frac{r}{2n+1} \times \frac{4n+1}{4n}$, va considerato come superiore o inferiore, secondo che sia, per N intero, $r \geqq n$ od $r < n$; e, per N misto,

$$r \gtrless n\,\frac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}.$$

Esempi:

1°. Si tratti del calcolo approssimato di $\sqrt{10}$; siccome è, a meno di 1 per difetto, col resto 1, $\sqrt{10}=3$, e quindi $n=3$ e $2n+1=7$, si ha successivamente pel Teor. I, II e III.

pel Teor. I.	pel Teor. II.	pel Teor. III.
$\sqrt{10}\begin{matrix}> 3\,{}^1/_7\\ < 3\,{}^2/_7\end{matrix}$ a meno di $\frac{1}{7}$	$\sqrt{10}\begin{matrix}> 3\,{}^1/_7\\ < 3\,{}^1/_6\end{matrix}$ a meno di $\frac{1}{6\times 7}=\frac{1}{42}$, ovvero	$\sqrt{10}\begin{matrix}> 3+\frac{1}{7}\times\frac{13}{12}\\ < 3+\frac{1}{6}\end{matrix}$
ovvero		ossia
$\sqrt{10}\begin{matrix}> 3+\frac{12}{84}\\ < 3+\frac{24}{84}\end{matrix}$ a meno di $\frac{12}{84}$	$\sqrt{10}\begin{matrix}> 3+\frac{12}{84}\\ < 3+\frac{14}{84}{}^{*}\end{matrix}$ a meno di $\frac{2}{84}$	$\sqrt{10}\begin{matrix}> 3+\frac{13}{84}\\ < 3+\frac{14}{84}\end{matrix}$ a meno di $\frac{1}{84}$.

E poichè il resto $r(=1) < n(=3)$, dei due valori dati dal precedente Teor. II, è, pel Teor. III, più esatto quello per eccesso $3+\frac{1}{6}=$ $=3+\frac{14}{84}$. Si segnerà quindi, d'ora innanzi, tal valore più esatto (che può essere tanto per difetto che per eccesso) con un asterisco *; osservando che simile scelta non si è però autorizzati a fare tra i valori più approssimati che dà il Teor. III, sino a che non si sia determinata l'approssimazione, ancora più spinta, a meno di $\frac{1}{4}\cdot\frac{r}{2n\,(2n+1)}$.

Risultati analoghi si hanno pel calcolo di $\sqrt{11}$; giacchè anche ora il resto $r(=2)$ è minore di $n(=3)$, ossia: i valori di $\sqrt{10}$ e di $\sqrt{11}$, rispettivamente a meno di $\frac{1}{84}$ e $\frac{2}{84}$ debbono esser compresi fra i limiti inferiore medio o superiore massimo, e saranno più esatte le loro radici *per eccesso;* mentre pei numeri successivi 12, 13, 14 e 15, i cui resti sono rispettivamente 3, 4, 5 e 6, e pei quali si ha $r \geqq n$, saranno invece più esatti i valori per difetto delle loro radici approssimate a meno di $\frac{3}{84}, \frac{4}{84}, \frac{5}{84}, \frac{6}{86}$ perchè, cioè, compresi tra i limiti inferiore minimo e superiore medio. Si avrà p. es.

$$\sqrt{13}\begin{matrix} > 3+\frac{4}{7} \\ < 3+\frac{4}{7}\times\frac{13}{12} \end{matrix} \quad \text{ovvero} \quad \sqrt{13}\begin{matrix} > 3+4\times\frac{12}{84} \\ < 3+4\times\frac{13}{84} \end{matrix}$$

a meno di $\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$. Ma, ancora meglio, ecco un quadro comparativo, nel quale si contengono, rispetto ai numeri suddetti, le loro radici approssimate per difetto e per eccesso a meno di 1 o di $\frac{1}{2}$; di $\frac{1}{2n+1}$ o di $\frac{r}{2n(2n+1)}$; ed, infine, a meno di $\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2n(2n+1)}$ per difetto minimo o medio, o per eccesso medio o massimo.

$n=3$, $2n+1=7$ NUMERI $2n(2n+1)=6\times7$, $2\times2n(2n+1)=2\times6\times7$		10	11	12	13	14	15
Resti delle radici quadrate a meno di uno per difetto		1	2	3	4	5	6
Valori delle radici quadrate con approssimazione costante: a meno di una unità.	per *difetto* / " *eccesso*	valor comune	valor comune	valor comune $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ valor comune			
a m. di $\frac{1}{2}$ unità	per *difetto*	3	3	3			
	" *eccesso*				4	4	4
variabile con n: a m. di $\frac{1}{2n+1}$ cioè $\frac{1}{7}$.	per *difetto*	$3\frac{1}{7}$	$3\frac{2}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$3\frac{4}{7}$	$3\frac{5}{6}$	$3\frac{6}{7}$
	" *eccesso*	$3\frac{2}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$3\frac{4}{7}$	$3\frac{5}{7}$	$3\frac{6}{7}$	4
variabile con n ed r: a m. di $\frac{r}{2n(2n+1)}$ cioè	per *difetto*	$3\frac{1}{7}$	$3\frac{2}{7}$	$3\frac{3}{7}$ *	$3\frac{4}{7}$ *	$3\frac{5}{7}$ *	$3\frac{6}{7}$ *
	a meno di	$\frac{1}{6\,.\,7}$	$\frac{2}{6\,.\,7}$	$\frac{3}{6\,.\,7}$	$\frac{4}{6\,.\,7}$	$\frac{5}{6\,.\,7}$	$\frac{6}{6\,.\,7}=\frac{1}{7}$
	per *eccesso*	$3\frac{1}{6}$ *	$3\frac{2}{6}$ *	$3\frac{3}{6}$	$3\frac{4}{6}$	$3\frac{5}{6}$	4
a meno di $\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2n(2n+1)}$	per difetto minimo			$3\frac{3}{7}$	$3\frac{4}{7}$	$3\frac{5}{7}$	$3\frac{6}{7}$
	" " medio	$3\frac{1}{7}\cdot\frac{13}{12}$	$3\frac{2}{7}\cdot\frac{13}{12}$				
	cioè a meno di	$\frac{1}{2\,.\,6\,.\,7}$	$\frac{2}{2\,.\,6\,.\,7}$	$\frac{3}{2\,.\,6\,.\,7}$	$\frac{4}{2\,.\,6\,.\,7}$	$\frac{5}{2\,.\,6\,.\,7}$	$\frac{6}{2\,.\,6\,.\,7}=\frac{1}{2.7}$
	per eccesso medio			$3\frac{3}{7}\cdot\frac{13}{12}$	$3\frac{3}{7}\cdot\frac{13}{12}$	$3\frac{5}{7}\cdot\frac{13}{12}$	$3\frac{6}{7}\cdot\frac{13}{12}$
	" " massimo	$3\frac{1}{6}$	$3\frac{2}{6}$				

Nè, infine, sfugga di notare che, se la completa applicazione del Teor. III, del calcolo, cioè, di due dei tre valori ch'esso può dare, non è così semplice come quella dei teoremi precedenti I e II, basta però e conviene sempre consultarlo, almeno per la scelta del più esatto dei due valori che dà il Teor. II; occorrendo all'uopo raddoppiare soltanto il denominatore dato da quest'ultimo.

2°. Si debba calcolare la radice approssimata di una frazione minore dell'unità, per es. di $\frac{2}{5}$. Si avrà successivamente

a) pel Teor. I, che è nel caso l'unico applicabile direttamente,

$$\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{array}{l} > \frac{2}{5} \\ < 1 \end{array} \quad \text{a meno di } 1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5};$$

ma è preferibile porre $\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$, giacchè si ottiene così un risultato molto più esatto: infatti

$$\frac{1}{5}\sqrt{10}\begin{array}{l} > \frac{3}{5}+\frac{1}{35} \\ < \frac{3}{5}+\frac{2}{35} \end{array} \quad \text{a meno di } \frac{1}{35}$$

b) pel Teor. II:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{10}\begin{array}{l} > \frac{3}{5}+\frac{1}{35} \\ < \frac{3}{5}+\frac{1}{30} \end{array} \quad \text{a meno di } \frac{5}{30\times 35}=\frac{1}{210}$$

c) pel Teor. III:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{10}\begin{array}{l} > \frac{3}{5}+\frac{1}{35}\times\frac{13}{12} \\ < \frac{3}{5}+\frac{1}{30} \end{array}$$

ossia

$$\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{array}{l} > \frac{3}{5}+\frac{13}{420} \\ < \frac{3}{5}+\frac{14}{420} \end{array} \quad \text{a meno di } \frac{1}{420}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{210}.$$

Ma volendo arrestarsi ai valori dati dal precedente Teor. II bastava osservare, in virtù dell'attuale Teor. III, che essendo $r(=1)<n(=3)$, dei due primi valori è più conveniente, perchè più esatto, quello per eccesso, cioè $\frac{3}{5}+\frac{1}{30}=\frac{3}{5}+\frac{14^*}{420}$.

3°. Nel caso di una frazione maggiore dell'unità o numero misto, per es. $\sqrt{\frac{48}{25}}=\sqrt{1\frac{23}{25}}$ essendo $n=1$ ed $r=\frac{23}{25}$, si avrà successivamente

a) col Teor. I: i due valori rispettivamente per difetto e per eccesso, a meno di $\frac{48-23}{75}=\frac{1}{3}$, cioè

$$1+\frac{23}{25}:3=1+\frac{23}{75} \quad \text{ed} \quad 1+\left(\frac{23}{25}+1\right):3=1+\frac{48}{75}$$

b) col Teor. II.

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{matrix} >1+\dfrac{\left(\frac{23}{25}\right)}{3} \\ <1+\dfrac{\left(\frac{23}{25}\right)}{2} \end{matrix} \quad \text{ossia} \quad \sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{matrix} >1+\frac{23}{75} \\ <1+\frac{23}{50} \end{matrix} \quad \text{a meno di} \quad \frac{23}{150}$$

c) col Teor. III infine, poichè per $n=1$ il valore $r=\dfrac{23}{25}$ risponde alla già indicata formola di $r<n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$ $\left(\text{infatti si ha } \dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}=\dfrac{24}{25}\right)$ ne viene che i limiti fra i quali è compresa la richiesta radice, sono l'inferiore medio ed il superiore massimo e di due valori che dà il Teor. II è però più esatto quello per eccesso cioè $1+\dfrac{23^*}{50}$: epperò, applicando direttamente il Teor. III

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{matrix} >1+\dfrac{\left(\frac{23}{25}\right)}{3}\times\dfrac{5}{4} \\ <1+\dfrac{\left(\frac{23}{25}\right)}{2} \end{matrix} \quad \text{ossia} \quad \sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{matrix} >1+\frac{23}{60} \\ <1+\frac{23}{50} \end{matrix}$$

a meno di

$$\frac{23}{300}, \text{ cioè di } \frac{1}{13} \text{ circa.}$$

Nel caso, invece, di $r>n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$, per esempio di $\sqrt{1\frac{49}{50}}$, essendo $n=1$ ed $r=\dfrac{49}{50}$ $\left(\text{epperò } \dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}=\dfrac{24}{25}=\dfrac{48}{50}, \text{ evidentemente minore di } \dfrac{49}{50}\right)$ la radice richiesta sarà ora compresa fra i limiti inferiore minimo e superiore medio: e sarà quindi più esatto, quello per difetto, dei due valori assegnati dal suddetto Teor. II, che coincide per altro col valore minimo dato dal Teor. III: si avrà cioè

$$\sqrt{1\tfrac{49}{50}}\begin{matrix} >1+\dfrac{\left(\frac{49}{50}\right)}{3} \\ <1+\dfrac{\left(\frac{49}{50}\right)}{3}\times\dfrac{5}{4} \end{matrix} \quad \text{ossia} \quad \sqrt{1\tfrac{49}{50}}\begin{matrix} >1+\frac{49}{150} \\ <1+\frac{49}{120} \end{matrix}$$

a meno di $\dfrac{(150-120)\times 49}{120\times 150}=\dfrac{49}{600}$, cioè, con un limite di errore, poco al disotto di $\dfrac{1}{12}$.

Ma nel caso, ora considerato, di numeri misti o frazioni maggiori dell'unità, il miglior modo di servirsi con vantaggio de' suddetti teoremi non è, certamente, quello seguito, malgrado esso ne indichi la più diretta applicazione: giacchè conviene invece, riunire anzitutto la parte frazionaria alla intera del numero misto dato, riconducendosi così al caso precedente delle frazioni minori di 1; che, col noto artifizio di moltiplicarne ambo i termini pel denominatore, è per altro, lo stesso di quello degl'interi: al quale perciò può dirsi che si riportano tutti i casi.

Esempi. — Per un miglior confronto coi precedenti, calcolo di nuovo col metodo sudetto taluni degli esempi già trattati, per es. $\sqrt{1\frac{23}{25}}$ o $\sqrt{1\frac{49}{50}}$

col Teor. I.

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}=\sqrt{\frac{48}{25}}=\frac{1}{25}\sqrt{1200}$$

cioè

$$\frac{1}{25}\sqrt{1200}\begin{array}{l} >\frac{1}{35}\left(34+\frac{44}{69}\right) \\ <\frac{1}{25}\left(34+\frac{45}{69}\right)\end{array}$$

ossia

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{array}{l} >1{,}36+\frac{176}{6900} \\ <1{,}36+\frac{180}{6900}\end{array}$$

a meno di

$$\frac{4}{6900}=\frac{1}{1725}$$

col Teor. II.

$$\frac{1}{25}\sqrt{1200}\begin{array}{l} >\frac{1}{25}\left(34+\frac{44}{69}\right) \\ <\frac{1}{25}\left(34-\frac{44}{68}\right)\end{array}$$

ossia

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{array}{l} >1{,}36+\frac{176}{6900} \\ <1{,}36+\frac{176}{6800}\end{array}$$

a meno di

$$\frac{176}{68\times 6900}=\frac{11}{17}\times\frac{1}{1725}$$

ossia a meno circa di

$$\frac{1}{2666}$$

col Teor. III.

poichè a meno di 1 per difetto è $\sqrt{1200}=34$ minore del resto 44, sarà

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{array}{l} >\frac{1}{25}\left(34+\frac{44}{69}\right) \\ <\frac{1}{25}\left(34+\frac{44}{69}\cdot\frac{4\,.\,34-1}{4\times 34}\right)\end{array}$$

ossia

$$\sqrt{1\tfrac{23}{25}}\begin{array}{l} >1{,}36+\frac{176}{6900} \\ <1{,}36+\frac{1597}{58650}\end{array}$$

a meno circa di

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2666}.$$

Similmente, calcolando col Teor. III per es. $\sqrt{1\frac{49}{50}}=\sqrt{\frac{99}{50}}=\frac{1}{50}\sqrt{4950}$ si ha che, poichè a meno di 1 per difetto $\sqrt{4950}=70$ col resto $50<70$, quel valore sarà compreso fra i limiti inferiori medio e superiore massimo: epperò de' due valori dati dal Teor. II sarà più esatto quello per eccesso: si avrà

$$\frac{1}{50}\sqrt{4950}\begin{array}{l} >\frac{1}{50}\left(70+\frac{50}{141}\cdot\frac{281}{280}\right) \\ <\frac{1}{50}\left(70+\frac{50}{140}\right)^{*}\end{array}$$

ossia, per eccesso,

$$\sqrt{1\tfrac{49}{50}}=\frac{1}{50}\left(70+\frac{50}{140}\right)=1+\frac{57}{140}$$

a meno di

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50}\cdot\frac{50}{140\,.\,141}=\frac{1}{39480}$$

risultato incomparabilmente più esatto di quello altrove ottenuto mediante l'applicazione diretta dal teorema, cioè del valore $1+\frac{49}{600}$, approssimato soltanto a meno di $\frac{1}{12}$ circa.

4°. Si voglia, infine, calcolare con la consueta approssimazione decimale, il valore di $\sqrt{2}$, per es. a meno di 0,1. Pongasi $\sqrt{2}=\frac{1}{10}\sqrt{200}$, si avrà a meno di 0,1 per difetto $\sqrt{2}=1{,}4$; mentre col Teor. III si ottiene a meno di $\frac{1}{406}$ per eccesso $\sqrt{200}=14+\frac{58}{406}$, e quindi

$\sqrt{2} = 1,4 + \frac{58}{3060}$ a meno di $\frac{1}{4060}$ per eccesso, essendo il limite dell'errore ancora più piccolo di $\frac{1}{4}$ di millesimo, cioè di 0,00025; e siccome $\frac{58}{4060} = 0,01428...$, ne viene che tutte le cifre decimali sino alla 3ª inclusa, del valore di $\sqrt{2} = 1,414...$ ottenuto aggiungendo la suddetta frazione al valore 1,4 non potranno in alcun modo venir modificate e risulteranno perciò sicuramente esatte. Il calcolo diretto dà infatti $\sqrt{2} = 1,4142..$,

Ma qualora si trattasse di frazioni o di numeri misti esattamente convertibili in decimali, è ovvio comprendere come l'approssimazione decimale sia la più propria a calcolare le loro radici: così, per es. nel caso, già considerato, di $\sqrt{1\frac{49}{50}} = \sqrt{1,98} = \frac{1}{10}\sqrt{198}$, il Teor. III dà il valore $1,4 + \frac{2}{280}$, approssimato per eccesso a meno di $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{28 . 29} = \frac{1}{8120}$ con un errore, cioè, più piccolo di $\frac{1}{8}$ di 0,0001 ossia di 0,000125: osservando, inoltre, che la periodica 0,00 [714285] $\left(\text{proveniente dalla conversione in decimali di } \frac{2}{280}\right)$ deve necessariamente dare esatte le prime tre cifre, si può quindi porre senz'altro $\sqrt{1\frac{49}{50}} = 1,407$. Giacchè il valore trovato essendo per eccesso, e l'errore minore di 0,000125, quand'anche questo si sottraesse totalmente da $1,4 + \frac{2}{280} = 1,40714285...$ le prime tre cifre della differenza non potrebbero esser diverse da quelle indicate. Il calcolo diretto dà, infatti, *1, 407* 1247....

Ed ora, infine, riassumendo, segue da quanto si è detto che l'approssimazione nel calcolo delle radici quadrate è:

1°. Pei numeri interi o misti (cioè frazioni maggiori dell'unità) *naturalmente* tanto più vantaggiosa, quanto più grande è il numero di cui vuolsi la radice: o, più esattamente, quanto più grande è il valore n della sua radice a meno di una unità per difetto. Ed è inoltre, per n costante (cioè per tutti gl'interi o misti compresi tra n^2 ed $(n+1)^2$) tanto maggiore, quanto più piccolo è il resto della radice a meno di 1 per difetto; giacchè, per tale ipotesi, essendo il valore della frazione $\frac{r}{2n(2n+1)}$ (indice dell'approssimazione) direttamente proporzionale a quello del suo numeratore, quel valore varierà quindi in ragione inversa dei termini crescenti della serie naturale da 1 a $2n$: dei resti, cioè, delle radici ecc.... dei $2n$ interi fra n^2 ed $(n+1)^2$.

2°. Per le frazioni $\frac{a}{b} < 1$, deducesi da un teorema precedente (che ne fa conoscere la radice approssimata a meno di $\frac{b-a}{b}$) come l'approssimazione sia tanto maggiore, quanto più grande è il denominatore, e quanto più piccola ne è la differenza col numeratore, o, in altri termini: quanto più il valore della frazione si accosta all'unità, e quanto più grandi sono i suoi termini. L'importanza delle quali condizioni risulta evidente applicando i teoremi II e III: ed è, in fondo, identica a quella relativa alla maggior grandezza dei numeri (interi) rispetto alla migliore approssimazione delle loro radici; epperò ne deriva la convenienza della trasformazione equivalente delle frazioni minori dell'unità in altre con termini che sieno grandi quanto più è possibile.

Ma ecco, in ultimo, un breve accenno a taluni notevoli casi particolari.

a) È ovvio intendere la precedente relazione (a) e la sua inversa, ossia riunendole: $r \gtrless n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$, come quella che stabilisce pe' numeri misti, i limiti di r, affinchè dei due valori approssimati della radice, risulti più esatto quello per difetto o quello per eccesso. Ed è, inoltre, ben facile assicurarsi che la particolare ipotesi di $r = n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$ mostra che il dato numero misto è un quadrato perfetto, e che ne è, quindi, esattamente assegnabile la sua radice quadrata; mentre verrebbesi a commettere lo stesso errore di $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2(2n+1)}\cdot\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$ (*) qualora, impropriamente, si adottasse, vuoi il valore per eccesso, che quello per difetto, altrove definiti pel caso di $r<n$. I quali riescirebbero perciò egualmente lontani dal vero, l'uno in più e l'altro in meno. Infatti, siccome or si ha $N=n^2+n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$, e ciò non contrastando con la relazione $r<n$, ma bensì con l'altra $r>n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$, è naturale che sia da preferire (Teor. III) pel calcolo di $\sqrt{N}$ la formula che dà il valore, per eccesso (ma per eccesso *medio* e non *massimo*): valore che risulterà, ora, non più approssimato, ma invece esattamente definito. Si avrà pertanto, com'è facile verificare,

$$\sqrt{n^2+n\frac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}}=n+\frac{n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}}{2n+1}\times\frac{4n+1}{4n}=n+\frac{2n}{4n+1};$$

d'onde il corollario:

L'espressione $n^2+n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$ (*) *è un quadrato perfetto, qualunque sia* n *(intero, misto o frazionario) e la radice quadrata ne è, esattamente, uguale ad* $n+\dfrac{2n}{4n+1}$.

b) Se due numeri interi o misti qualsivoglia, però compresi fra gli stessi quadrati consecutivi interi n^2 ed $(n+1)^2$, ne sono inoltre equidistanti, consegue: 1° Che tanto le loro radici a meno di $\dfrac{1}{2n+1}$ per difetto, che i resti relativi di quelle a meno 1 per difetto, sono

(*) È metà della differenza dei due limiti che dà il Teor. II, cioè $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r}{2n(2n+1)}$, quando vi si ponga $r=n\dfrac{(4n+1)^2-1}{(4n+1)^2}$, ossia: quanto la differenza tra i limiti medio e minimo, o massimo e medio, di cui al successivo Teor. III.

fra loro rispettivamente complementari di $2n-1$: 2° Che tali numeri superano egualmente di $\frac{r(2n+1-r)}{(2n+1)^2}$ ... (b) i quadrati delle loro radici a meno di $\frac{1}{2n+1}$ per difetto: proprietà (quella dei resti è da per sè stessa evidente) che risultano subito dalla espressione delle loro radici.

Si ha infatti

$$\sqrt{n^2+r}=n+\frac{r}{2n-1} \quad \text{ed} \quad \sqrt{n^2+(2n+1-r)}=n+1-\frac{r}{2n+1};$$

ed è ovvio che aggiungendo, sia all'uno che all'altro de' quadrati di tali valori, la frazione (b) $\left(\text{meglio sotto la forma } \frac{r}{2n-1}-\frac{r^2}{(2n+1)^2}\right)$ si ha rispettivamente:

$$\left(n+\frac{r}{2n+1}\right)^2+\frac{r}{2n+1}-\frac{r^2}{(2n+1)^2}=n^2+r$$

ed

$$\left[(n+1)-\frac{r}{2n+1}\right]^2+\frac{r}{2n+1}-\frac{r^2}{(2n+1)^2}=(n+1)^2-r \quad \text{c. d. d.}$$

Esempi.

1°. Pei due interi 6 e 7 equidistanti da $2^2=4$ e da $3^2=9$, si ha, (poichè $n=2$; $2n+1=5$ ed r eguale rispettivamente a 2 o 3) a meno di $\frac{1}{5}$ per difetto, $\sqrt{6}=2+\frac{2}{5}$ e $\sqrt{7}=2-\frac{3}{5}$; e la (b) dà rispettivamente, sotto le forme equivalenti $\frac{2\times 3}{5^2}$ o $\frac{3\times 2}{5^2}$, lo stesso valore $\frac{9}{25}$, comune alle due differenze $6-\left(2\frac{2}{5}\right)^2$ e $7-\left(2\frac{3}{5}\right)$.

2°. Similmente pei due numeri misti

$$10\tfrac{3}{4}=9+1\tfrac{1}{4} \text{ e } 14\tfrac{1}{4}=16-1\tfrac{3}{4},$$

equidistanti dai quadrati consecutivi 9 e 16, fra i quali sono compresi, si ha: $n=3$; $2n+1=7$ ed r rispettivamente uguale ad $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ o $5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$, e quindi a meno di $\frac{1}{7}$ per difetto

$$\sqrt{10\tfrac{3}{4}}=3+\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \sqrt{14\tfrac{1}{4}}=3+\frac{3}{4}.$$

e la (b) dà, ne' due casi, i risultati equivalenti $\frac{\frac{7}{4}\left(7-\frac{7}{4}\right)}{7\times 7}$ e $\frac{\frac{21}{4}\times\frac{7}{4}}{7\times 7}$, il cui valor comune $\frac{3}{16}$ indica quello delle due eguali differenze

$$10\tfrac{3}{4}-\left(3\tfrac{1}{4}\right)^2 \text{ e } 14\tfrac{1}{4}-\left(3\tfrac{3}{4}\right)^2.$$

c) Ne' casi particolari di $r=n$ od $r=n+1$, pei quali verificandosi la $r \gtreqless n$, convengono (Teor. III) i valori per difetto delle radici, la formula (b) dà: $\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}$; e, nel caso di $r=n$, può esser utile osservare che, se n è piuttosto grande, anche il corrispondente valore della radice approssimata per eccesso medio è abbastanza conveniente: il suo quadrato superando N soltanto di $\frac{1}{[4(2n+1)]^2}$. Si ha, allora, infatti

$$\sqrt{N}\begin{array}{l} > n+\dfrac{n}{2n+1} \\ < n+\dfrac{n}{2n+1}\cdot\dfrac{4n+1}{4n} \quad \text{ossia} \quad < n+\dfrac{4n+1}{4(2n+1)}. \end{array}$$

e, dopo facili riduzioni,

$$\left[n+\frac{4n+1}{4(2n+1)}\right]^2=n^2+\frac{n(4n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(4n+1)^2}{16(2n+1)^2}=n^2+n+\frac{1}{[4(2n+1)]^2}.$$

Esempi. — Per $n=1, 2, 3\ldots$ cioè, pei numeri $2=1^2+1$; $6=2^2+2$; $12=3^2+3\ldots n^2+n$: pei quali è, rispettivamente, $2n+1=3, 5, 7\ldots$; $4n=4, 8, 12\ldots$; $4n+1=5, 9, 13\ldots$ si avrà (Teor. III) che i valori per difetto (*minimo*) e per eccesso (*medio*) delle loro radici, approssimate a meno di $\frac{1}{4(2n+1)}$, saranno ordinatamente

$$\sqrt{2}\begin{array}{l} > 1\frac{1}{3} \\ < 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4} \end{array} \ldots\ldots \text{ ossia a meno di } \frac{1}{12} \ldots\ldots\ldots \sqrt{2}\begin{array}{l} > 1+\frac{4}{12} \\ < 1+\frac{5}{12} \end{array}$$

$$\sqrt{6}\begin{array}{l} > 2\frac{2}{5} \\ < 2+\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{8} \end{array} \ldots\ldots \quad " \quad " \quad " \ \frac{1}{20} \ldots\ldots\ldots \sqrt{6}\begin{array}{l} > 2+\frac{8}{20} \\ < 2+\frac{9}{20} \end{array}$$

$$\sqrt{12}\begin{array}{l} > 3\frac{3}{7} \\ < 3+\frac{3}{7}\cdot\frac{9}{8} \end{array} \ldots\ldots \quad " \quad " \quad " \ \frac{1}{28} \ldots\ldots\ldots \sqrt{12}\begin{array}{l} > 3+\frac{12}{28} \\ < 3+\frac{13}{28} \end{array}$$

$$\sqrt{20}\begin{array}{l} > 4\frac{4}{9} \\ < 4+\frac{4}{9}\cdot\frac{17}{16} \end{array} \ldots\ldots \quad " \quad " \quad " \ \frac{1}{36} \ldots\ldots\ldots \sqrt{20}\begin{array}{l} > 4+\frac{16}{36} \\ < 4+\frac{17}{36} \end{array}$$

. . . .

$$\sqrt{n^2+n}\begin{array}{l} > n+\frac{n}{2n+1} \\ < n+\frac{n}{2n+1}\times\frac{4n+1}{4n} \end{array} \quad " \quad " \quad " \ \frac{1}{4(2n+1)} \ldots \sqrt{n^2+n}\begin{array}{l} > n+\frac{4n}{4(2n+1)} \\ < n+\frac{4n+1}{4(2n+1)} \end{array}$$

Osservando, infine, come i precedenti risultati confermano il teorema concernente l'approssimazione delle radici quadrate a meno di $\frac{1}{2}$, pel caso di $N=n^2+n$, giacchè è $n+\frac{4n+1}{4(2n+1)}<n+\frac{1}{2}$; e che, per essere inoltre $n^2+n=n(n+1)$, indicano una facile e conveniente approssimazione per tutti quei numeri che sono eguali al prodotto di due interi consecutivi (vedi *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno III, fasc. III, quistione 215).

F. P. PATERNÒ.

LA RADIALE DI UNA CURVA ALGEBRICA

DI

GINO LORIA

Se da un punto fisso O del piano di una curva Γ si conducono i segmenti equipollenti ai raggi di curvatura di questa si ottiene una nuova curva Γ_0 la quale porta il nome di *radiale* della curva data. È evidente che variando il punto O, la curva Γ_0 conserva la propria forma, la propria grandezza e la propria orientazione, subendo soltanto uno spostamento nel piano in cui si trova. (*)

Supponiamo che Γ sia una curva algebrica dell'ordine n avente per equazione razionale

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

onde f sarà un polinomio intero in x, y del grado n, del quale indicheremo con $f_1, f_2, f_{11}, f_{12} = f_{21}, f_{22}$ le derivate parziali del I e II ordine rispetto a x, y. Da formule note (**) risulta che le proiezioni sopra gli assi coordinati del segmento che va dal punto P (x, y) della curva Γ al corrispondente centro di curvatura C (x_1, y_1), cioè le quantità $x_1 - x$ e $y_1 - y$, sono espresse dai prodotti di f_1 e f_2 per la frazione

$$(f^2_1 + f^2_2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_1 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ora, chiamando (α, β) le coordinate del punto fisso O e (x_0, y_0) quelle del punto P_0 che corrisponde sopra Γ_0 al punto P, si ha evidentemente $x_0 - \alpha = x_1 - x$, $y_0 - \beta = y_1 - y$, quindi, in forza di ciò che precede,

$$(2) \quad x_0 = \alpha + (f^2_1 + f^2_2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad y_0 = \beta + (f^2_1 + f^2_2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_1 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Per ogni coppia di valori di x, y soddisfacenti l'equazione (1) queste equazioni dànno le coordinate del corrispondente punto della radiale, onde eliminando x e y fra le tre equazioni (1) e (2) si giungerebbe all'equazione di questa curva. Tale eliminazione non si è in grado di effettuare in generale; ma, anche senza eseguirla, si può trovare quale

---

(*) Questa circostanza venne utilizzata nella mia nota *Intorno alle radiali delle curve piane* presentata al Circolo matematico di Palermo nella seduta del 9 giugno u. s.; nel presente scritto non se ne fece uso, perchè essa, da un lato avrebbe recato semplicazioni insignificanti e d'altronde avrebbe reso meno limpide certe argomentazioni.

(**) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven* (Leipzig, 1873) p. 100.

sia il grado del risultante, cioè l'ordine della radiale Γ_0. Si consideri infatti una retta arbitraria r del piano, p. es. quella di equazione

$$Ax + By + C = 0;$$

se r contiene il punto P_0, le cui coordinate sono date dalla (2), si avrà

$$(3) \qquad (A\alpha + B\beta + C)\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} + (Af_1 + Bf_2)(f^2_1 + f^2_2) = 0.$$

È questa l'equazione di una curva Δ in generale dell'ordine $3(n-1)$ la quale taglia la curva data Γ in $3n(n-1)$ punti tali che i loro corrispondenti sulla radiale sono gli unici che cadono sopra la retta r considerata. Ciò autorizza a concludere che *la radiale di una curva algebrica dell'ordine* n *è una curva algebrica in generale dell'ordine* $3n(n-1)$. Per es. la radiale di una conica è in generale una curva del 6° ordine, risultato noto, e la radiale di una cubica è in generale del 18° ordine, mentre era stato ammesso potesse salire al 128°. (*)

Il numero $3n(n-1)$, esprimente l'ordine di Γ_0, soffre notevoli riduzioni per la presenza di punti multipli nella data curva Γ. Per dimostrare e valutare l'influenza sull'ordine di Γ_0 di un punto multiplo, supporremo che questo abbia la molteplicità p e cada nell'origine; in tal caso si potrà scrivere

$$(4) \qquad f(x, y) = f^{(p)} + f^{(p+1)} + \ldots + f^{(n)},$$

essendo $p > 1$ e $f^{(k)} (k = p, p+1, \ldots, n)$ una forma binaria di grado p in x, y; in tali ipotesi $f^{(p)} = 0$ rappresenta il gruppo delle tangenti alla curva Γ nell'origine. Sostituendo nella (3) questo valore di f ed ordinando secondo le potenze ascendenti di x, y si vede che il gruppo di termini di grado minimo è dato da

$$(A\alpha + B\beta + C)\begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & f_1^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & f_2^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ora, applicando il teorema di Eulero sopra le funzioni omogenee ed operando ovvie trasformazioni sul determinante precedente, quest'espressione può trasformarsi successivamente come segue:

$$\frac{A\alpha + B\beta + C}{p-1}\begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & x f_{11}^{(p)} + y f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & x f_{21}^{(p)} + y f_{22}^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{A\alpha + B\beta + C}{p-1}\begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & 0 \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & 0 \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & -(x f_1^{(p)} + y f_2^{(p)}) \end{vmatrix} = -\frac{p}{p-1}(A\alpha + B\beta + C) f^{(p)} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} \end{vmatrix}$$

(*) R. TUCKER, *On radial curves* (Proc. of the Lond. math. Soc., T. I, 1865).

Emerge di quest'espressione che l'origine è in generale per la curva ausiliare Δ un punto di molteplicità $p+2(p-2)=3p-4$ e che ivi le tangenti a tale curva sono: 1° le p tangenti in quel punto alla data curva, 2° le rette costituenti l'Hessiano del gruppo da esse costituito. Nel caso generale in cui tutte le tangenti a Γ nell'origine siano rette distinte, in quel punto sono riunite $p(3p-4)+p=3p(p-1)$ intersezioni delle due curve Γ e Δ, quindi *ogni punto* p-*plo a tangenti distinte della curva data produce un abbassamento di* 3p (p — 1) *unità nell'ordine della radiale* (*). Più considerevole è la diminuzione prodotta quando si rimuova l'ipotesi che le tangenti siano tutte distinte: per determinarlo in ogni caso basta adoperare il metodo che serve a scoprire il contegno dell'Hessiana in un punto multiplo della curva fondamentale, cioè ricordare: 1° che un elemento s-plo ($s<p$) di un gruppo appartenente ad una forma di 1ª specie e grado p è multiplo secondo $2(s-1)$ per l'Hessiano del gruppo, 2° che se gli elementi di un gruppo coincidono, il corrispondente Hessiano è indeterminato.

Applicando il risultato precedente nell'ipotesi $p=2$ si conclude che *ogni punto doppio a tangenti distinte produce nella radiale un abbassamento di sei unità*. Conceda il lettore che segnaliamo una verificazione di questo risultato. Si consideri una curva Γ composta di μ curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_\mu$ degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_\mu$ ed esenti da punti multipli; Γ è dunque una curva dell'ordine $n=n_1+n_2+\dots+n_\mu$ con $\sum\limits_{ik} n_i n_k$ $(i, k=1, 2, \dots \mu)$ punti doppi; in virtù del teorema precedente la radiale di Γ sarà dell'ordine

$$\begin{aligned} & 3(n_1+n_2+\dots+n_\mu)(n_1+n_2\dots+n_\mu-1)-6\sum_{ik} n_i n_k = \\ & =3(n_1+n_2+\dots+n_\mu)^2-3(n_1+n_2+\dots+n_\mu)-6\sum_{ik} n_i n_k = \\ & =3(n_1^2+n_2^2+\dots+n_\mu^2)-3(n_1+n_2+\dots+n_\mu)=\sum_i 3n_i(n_i-1); \end{aligned}$$

è quello che doveva accadere, perchè la radiale di Γ non è che l'insieme delle radiali di $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mu$.

Se la curva Γ è razionale ed ha i punti singolari ordinari di molteplicità $p_1, p_2, \dots$; si avrà

$$\sum_i \frac{p_i(p_i-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

e l'ordine della radiale di Γ sarà:

$$3n(n-1)-\sum_i 3p_i(p_i-1)=3n(n-1)-3(n-1)(n-2)=6(n-1);$$

dunque *la radiale di una curva razionale d'ordine* n *è in generale dell'ordine* 6 $(n-1)$. Questo numero subisce ulteriori riduzioni quando la curva data abbia relazioni speciali con la retta all'infinito; basti a provarlo l'esempio della parabola, la cui radiale non è che del terz' ordine.

(*) Notisi che quest'espressione è vera anche per $p=1$, caso sinora escluso.

Osserviamo finendo che, introducendo per l'omogeneità delle formole una terza coordinata z, l'equazione (3) diviene: (*)

$$\text{(5)} \qquad \frac{Hz^3}{(n-1)^2}(A\alpha + B\beta + C) + (Af_1 + Bf_2)(f_1^2 + f_2^2) = 0,$$

H essendo l'Hessiana della forma f. Se in particolare, supponiamo $A = 0, B = 0$, cioè consideriamo come retta r la retta all'infinito del piano, la (5) si decompone nelle due $H = 0, z = 0$: i *punti dell'infinito della radiale corrispondono quindi ai flessi ed ai punti all'infinito della curva primitiva*, cosa che d'altronde potevasi prevedere.

Genova, luglio 1901.

Sopra una speciale trasformazione cubica del piano

NOTA DEL DOTT. GIULIO CARDOSO-LAYNES.

1. Consideriamo due piani sovrapposti π e π', una retta doppia r ed un punto O determinato di essa; ad ogni punto P del piano π facciamo corrispondere nel piano π' la sua proiezione ortogonale sulla retta simmetrica della OP rispetto alla r. Inversamente ad un punto P' di π' corrisponderà nel piano π il punto d'incontro della retta simmetrica della OP', rispetto alla r, con la perpendicolare condotta da P' alla OP'. In tal modo si ha una corrispondenza biunivoca fra i due piani.

Facendo uso di coordinate polari, essendo O il polo ed r l'asse polare, posto che sia $P \equiv (\rho, \theta)$, $P' \equiv (\rho', \theta')$, si hanno facilmente le formule

$$\text{(1)} \qquad \theta' = -\theta \quad , \quad \rho' = \rho \cos 2\theta,$$

da cui per le corrispondenti coordinate cartesiane ortogonali (origine O, asse delle ascisse r), supposto che sia $P \equiv (x, y)$, $P' \equiv (x', y')$, si ha

$$\text{(2)} \qquad x = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'^2 - y'^2} \quad , \quad y = \frac{-y'(x'^2 + y'^2)}{x'^2 - y'^2}$$

e inversamente

$$\text{(2')} \qquad x' = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{-y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

La trasformazione è birazionale.

2. Ad una curva C di ordine n del piano π, la cui equazione in coordinate cartesiane sia

$$\text{(3)} \qquad \sum_1^n f_i(x, y) = 0,$$

2'. Ad una curva C' di ordine n' del piano π', la cui equazione in coordinate cartesiane sia

$$\text{(3')} \qquad \sum_1^{n'} f_i(x', y') = 0,$$

(*) SALMON-FIEDLER l. c.

dove $f_i(x, y)$ indica un polinomio omogeneo di grado i nelle x, y, corrisponde nel piano π' una curva C', che per le (2), ha per equazione

$$\sum_1^n \left\{ f_i(x', -y') \left[\frac{x'^2 + y'^2}{x'^2 - y'^2} \right]^i \right\} = 0,$$

cioè

$$(4) \quad \sum_1^n \{ f_i(x', -y') \cdot (x'^2 + y'^2)^i \cdot (x'^2 - y'^2)^{n-i} \} = 0.$$

Il grado di ciascun termine del 1° membro della (4) è

$$i + 2i + 2(n - i) = 2n + i,$$

quindi, facendo $i = n$, si trova che la (4), la quale rappresenta la curva C', è di grado $n' = 3n$.

Si conclude dunque che:

(I) *ad una curva* C *di ordine* n, *del piano* π, *corrisponde, in generale, una curva* C', *del piano* π', *di ordine* $n' = 3n$.

Poichè nell'equazione (4), che rappresenta la C', il termine di minimo grado è

$$f_0(x', -y') \cdot (x'^2 - y'^2)^n, \, (*)$$

si può notare ancora che:

(II) *la curva* C' *ha, in generale, in* O *un punto* 2n-*plo con una coppia di tang. ortogonali inclinate di* $\pm \frac{\pi}{4}$ *sugli assi, contata* n *volte*.

Inoltre, come si vede subito dalla (4):

(III) *la trasformata* C' *di una curva* C *che non passa per* O *è in generale*, n-*circolare, cioè contiene i punti ciclici del piano come punti di multiplicità* n, *e se invece la* C *ha in* O *un punto* r-plo, *la* C' *è* (n — r)-*circolare*.

Anzi si può notare anche che *un termine di grado* m' *della equazione della* C' *è divisibile per*

$$(x'^2 + y'^2)^{m'}.$$

dove $f_i(x', y')$ indica un polinomio omogeneo di grado i nelle x', y', corrisponde nel piano π una curva C, che per le (2') ha per equazione

$$\sum_1^{n'} \left\{ f_i(x, -y) \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right]^i \right\} = 0,$$

cioè

$$(4') \quad \sum_1^{n'} \{ f_i(x, -y) \cdot (x^2 - y^2)^i \cdot (x^2 + y^2)^{n'-i} \} = 0.$$

Il grado di ciascun termine del 1° membro della (4') è

$$i + 2i + 2(n' - i) = 2n' + i,$$

quindi, facendo $i = n'$, si trova che la (4'), la quale rappresenta la curva C, è di grado $n = 3n'$.

Si conclude dunque che:

(I)' *ad una curva* C' *di ordine* n', *del piano* π', *corrisponde, in generale, una curva* C, *del piano* π, *di ordine* $n = 3n'$.

Poichè nell'equazione (4'), che rappresenta la C, il termine di minimo grado è

$$f_0(x, -y) \cdot (x^2 + y^2)^{n'}, \, (*)$$

si può notare ancora che:

(II)' *la curva* C *ha, in generale, in* O *un punto* 2n'-*plo di cui le rette isotrope sono tangenti* n'-*ple*.

Inoltre, come si vede subito dalla (4'):

(III)' *la trasformata* C *di una curva* C' *che non passa per* O *ha, in generale,* n' *coppie di assintoti ortogonali, inclinati di* $\pm \frac{\pi}{4}$ *sugli assi, e se invece la* C' *ha in* O *un punto* r'-*plo, le* n' *coppie di assintoti considerate si riducono a* n—r.

Anzi si può notare anche che *un termine di grado* m *della equazione della* C *è divisibile per*

$$(x^2 - y^2)^m.$$

(*) *Per uniformità si pone* $f_0(x, y)$ e $f_0(x', -y')$ ma va notato che queste sono *costanti*.

3. I resultati ottenuti riguardo all'ordine delle trasformate, apparentemente contradittori, si spiegano con quanto ora noteremo rispetto all'abbassamento dell'ordine stesso.

Sia C una curva di ordine n del piano π, rappresentata dall'equazione (3) e C' la sua trasformata nel piano π', rappresentata dalla (4): se C ha un punto r-plo in O, si ha

$$f_i(x', -y') = 0 \qquad (\text{per } i < r)$$

e quindi la (4) diviene

$$(x'^2+y'^2)^r \cdot \sum_1^n \{f_i(x', -y') \cdot (x'^2+y'^2)^{i-r} \cdot (x'^2-y'^2)^{n-i}\} = 0$$

e perciò, tralasciando il fattore $(x'^2+y'^2)^r$, che eguagliato a zero, rappresenta le rette isotrope contate r volte, il grado dell'equazione della C' si abbassa di $2r$ unità, dunque:

(IV) *la presenza in* O *di un punto* r*-plo della curva* C *fa abbassare di* 2r *unità l'ordine della trasformata* C'.

In particolare se C passa per O l'ordine della C' abbassa di 2 unità.

Può notarsi inoltre che

(V) *se* $f_r(x, y)$ *è divisibile per* x^2+y^2, *ciò che geometricamente equivale a dire che* C *ha nel punto* r*-plo una coppia di tangenti isotrope, il grado dell'equazione della* C' *si riduce ancora di due unità; così se* $f_r(x, y)$ *è divisibile per* $(x^2+y^2)^k$ *ed è* $f_{r+i}(x, y)$ *(per* $i < k$*) divisibile per* $(x^2+y^2)^{k-i}$, *l'ordine della* C' *si abbassa di* 2k *unità.*

Il grado dell'equazione della C' può abbassarsi ancora per altre cause; ad es.: se $f_n(x, y)$ è divisibile per x^2-y^2, la C' vien rappresentata dall'equazione

$$(x'^2-y'^2) \cdot \sum_1^n \{f_i(x', -y') \cdot (x'^2-y'^2)^{i-1} \cdot (x'^2+y'^2)^{n-i}\} = 0$$

e perciò, tralasciando il fattore $x'^2-y'^2$, che eguagliato a zero

Sia C' una curva di ordine n' del piano π', rappresentata dall'equazione (3') e C la sua trasformata nel piano π, rappresentata dalla (4'): se C' ha un punto r'-plo in O si ha

$$f_i(x, -y) = 0 \qquad (\text{per } i < r')$$

e quindi la (4') diviene

$$(x^2-y^2)^{r'} \cdot \sum_1^{n'} \{f_i(x, -y) \cdot (x^2-y^2)^{i-r'} \cdot (x^2+y^2)^{n-i}\} = 0$$

e perciò, tralasciando il fattore $(x^2-y^2)^{r'}$, che eguagliato a zero, rappresenta le bisettrici degli angoli che formano gli assi, contate r' volte, il grado dell'equazione della C si abbassa di $2r'$ unità, dunque:

(IV)' *la presenza in* O *di un punto* r'*-plo della curva* C' *fa abbassare di* 2r' *unità l'ordine della trasformata* C.

In particolare se C' passa per O l'ordine della C si abbassa di 2 unità.

Può notarsi inoltre che

(V)' *se* $f_{r'}(x', y')$ *è divisibile per* $x'^2-y'^2$, *ciò che geometricamente equivale a dire che* C' *ha nel punto* r'*-plo una coppia di tangenti ortogonali inclinate di* $\pm\frac{\pi}{4}$ *sugli assi, il grado dell'equazione della* C *si riduce ancora di due unità; così se* $f_{r'}(x', y')$ *è divisibile per* $(x^2-y^2)^{k'}$ *ed è* $f_{r+i}(x, y)$ *(per* $i < k'$*) divisibile per* $(x^2-y^2)^{k'-i}$, *l'ordine della* C *si abbassa di* 2k' *unità.*

Il grado dell'equazione della C può abbassarsi ancora per altre cause; ad es.: se $f_{n'}(x', y)$ è divisibile per $x'^2+y'^2$, la C vien rappresentata dall'equazione

$$(x'^2+y'^2) \cdot \sum_1^{n'} \{f_i(x, -y) \cdot (x^2+y^2)^{i-1} \cdot (x^2-y^2)^{n-i}\} = 0$$

e perciò, tralasciando il fattore $x'^2+y'^2$, che eguagliato a zero rappresenta le bisettrici degli angoli degli assi, il grado dell'equazione della C' viene abbassato di 2 unità; se poi, più in generale, si suppone che $f_n(x, y)$ sia divisibile per $(x^2-y^2)^p$ ed $f_{n-i}(x, y)$ (per $i<n$) sia divisibile per $(x^2-y^2)^{p-i}$, l'ordine della C' si riduce di $2k$ unità, dunque:

(VI) *se la* C *ha* p *coppie di assintoti inclinati di* $\pm\frac{\pi}{4}$ *sugli assi, l'ordine della trasformata* C' *si abbassa di* 2p *unità.*

Posto ciò, se C è una curva generale dell'ordine n, del piano π, sarà per il Teor. (I), C' dell'ordine $n'=3n$.

La trasformata C_1 nel piano π della curva C' del piano π' deve coincidere evidentemente con C, ma d'altra parte, il suo ordine dovrebbe essere $n_1=9n$. Osserviamo però che per il Teor. (II) la C' ha un punto $2n$-plo in O, e in questo punto $2n$-plo vi è una coppia di tangenti inclinate di $\pm\frac{\pi}{4}$ sugli assi, contate n volte, quindi per i Teor. (IV)' e (V)', e tenuto conto anche della forma della (4'), l'ordine della C_1 si riduce a

$$9n-4n-2n=3n.$$

Inoltre per il Teor. (III) la C' è n-circolare, e tenendo conto anche della (4'), per il Teor. (VI)' l'ordine n_1 della C_1 si riduce a $3n-2n=n$.

Dunque si ha $n_1=n$, come appunto sembrava logico che dovesse avvenire.

rappresenta una coppia di rette isotrope, il grado dell'equazione della C viene abbassato di 2 unità; se poi, più in generale, si suppone che $f_{n'}(x', y')$ sia divisibile per $(x'^2+y'^2)^{p'}$ ed $f_{n'-i}(x', y')$ (per $i<n'$) sia divisibile per $(x'^2+y'^2)^{p'-i}$, l'ordine della C si riduce di $2p'$ unità, dunque:

(VI)' *se la* C' *ha* p' *coppie di assintoti isotropi, cioè se è* p'*-circolare, ed un termine qualunque* $f_{n'-i}(x', y')$ *della sua equazione è divisibile per* $(x'^2+y'^2)^{p'-i}$, *l'ordine della trasformata* C *si abbassa di* 2p' *unità.*

Posto ciò, se C' è una curva generale dell'ordine n', del piano π', sarà, per il Teor. (I)', C dell'ordine $n=3n'$.

La trasformata C'_1 nel piano π' della curva C del piano π deve coincidere evidentemente con C', ma, d'altra parte, il suo ordine dovrebbe essere $n'_1=9n'$. Osserviamo però che per il Teor. (II)', la C ha un punto $2n'$-plo in O ed in questo punto $2n'$-plo vi è una coppia di tangenti isotrope contata n' volte, quindi per i Teoremi (IV) e (V), tenuto conto anche della forma della (4), l'ordine della C' si riduce a

$$9n'-4n'-2n'=3n'.$$

Inoltre per il Teor. (III)' la C ha n' coppie di assintoti inclinati di $\pm\frac{\pi}{4}$ sugli assi, e tenendo conto anche della (4), per il Teor. (VI), l'ordine n'_1 della C'_1 si riduce a

$$3n'-2n'=n'.$$

Dunque si ha $n'_1=n'$, come appunto sembrava logico che dovesse avvenire.

4. Vediamo ora come si trasformano alcune particolari curve C del piano π.

Rette di π. — $(n=1)$. — Da tutto quanto si è detto è facile vedere quale sia la trasformata di una retta del piano π, che non passi per O; l'ordine deve essere $n'=3$ *(Teor. I)*, cioè la curva deve essere una cubica; deve essere circolare *(Teor. III)*; deve avere in O un punto $2n$-*plo (Teor. II)*, cioè, in questo caso, doppio, con una coppia di tangenti ortogonali; la C' è dunque una cubica razionale, circolare, e ortonodale, cioè una *strofoide*.

Anche analiticamente si ha la conferma di ciò, perchè se è

$$y = \mu x + \nu$$

l'equazione di una retta C del piano π, dalla (4) si ha per la trasformata C'

$$(y' + \mu x')(x'^2 + y'^2) + \nu(x'^2 - y'^2) = 0$$

che rappresenta appunto una strofoide col nodo in O e coll'assintoto reale parallelo alla retta simmetrica della C rispetto alla r.

Questa strofoide sarà retta se è $\mu = 0$, cioè se la retta C è parallela ad r; però va osservato che non è questo il solo caso in cui la strofoide è retta, ma lo è anche per $\mu = \infty$, cioè se la retta C è perpendicolare alla r; infatti in tal caso essendo la C rappresentata dall'equazione

$$x = k,$$

la C' lo è da

$$x(x'^2 + y'^2) - k\,(x'^2 - y'^2) = 0.$$

Concludendo si ha dunque che

(VII) *le rette del piano π non passanti per O si trasformano in* **strofoidi** *ed in particolare quelle parallele o perpendicolari ad* r *dànno luogo a strofoidi rette.*

Se poi la C passa per O, come abbiam detto *(Teor. IV)*, l'ordine della trasformata si abbassa di 2 unità; si ha dunque una retta; ciò del resto era chiaro geometricamente perchè la trasformata di una retta OP è la sua simmetrica rispetto alle r.

Ad un fascio di rette di π col centro nel punto (a, b), rappresentate cioè dalla equazione

$$y - b = \lambda\,(x - a)$$

corrispondono le strofoidi rappresentate da

$$F\,(x', y', \lambda) = (y' + \lambda x')\,(x'^2 + y'^2) - (a\lambda - b)\,(x'^2 - y'^2) = 0$$

che passano per il punto $\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}, \frac{-b(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\right)$ ed hanno il loro nodo in O.

Poichè si ha

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x'\,(x'^2 + y'^2) - a\,(x'^2 - y'^2),$$

le strofoidi $F(x', y', \lambda) = 0$ inviluppano una strofoide retta rappresentata dall'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

che ha il vertice in (a, o) ed il nodo in O.

Coniche di π — $(n = 2)$. — Vediamo ora come si trasforma una conica C del piano π nel piano π'.

Sia

$$(5) \qquad a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2a_{13}\,x + 2a_{23}\,y + a_{33} = 0$$

l'equazione di tale curva; per la (4) l'equazione della trasformata sarà

$$(6)\qquad (x'^2+y'^2)^2(a_{11}x'^2-2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2)+ \\ +2(x'^4-y'^4)(a_{13}x'-a_{23}y')+a_{33}(x'^2-y'^2)^2=0.$$

Questa rappresenta, in generale, una *sestica bicircolare* con un punto 4-plo in O a tangenti ortogonali doppie.

Questo resultato si poteva dedurre dai Teor. I, II e III del n. 2.

Se nella (5) è $a_{33}=0$, cioè se la conica C di π passa per O, allora la C', per la (6), si scinde nel punto circolo rappresentato da

$$x'^2+y'^2=0$$

e nella quartica circolare

$$(7)\quad (x'^2+y'^2)(a_{11}x'^2-2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2)+2(x'^2-y'^2)(a_{13}x'-a_{23}y')=0,$$

la quale ha un punto triplo in O con tre tangenti, in generale, distinte.

Ciò è conseguenza anche di quanto fu detto al n. 3.

In particolare se la C è un circolo passante per O e col centro sulla r, cioè se si ha

$$a_{11}=a_{22}=1,\quad a_{12}=a_{23}=0,\quad a_{13}=\pm\rho,$$

la (7) diviene

$$(x'^2+y'^2)^2\pm 2\rho x'(x'^2-y'^2)=0$$

che rappresenta un *trifolium retto.*

Così pure se C è un circolo tangente in O alla r, ossia ortogonale a quello precedentemente considerato, cioè se si ha

$$a_{11}=a_{22}=1,\quad a_{12}=a_{13}=0,\quad a_{23}=\pm\rho,$$

la (7) diviene

$$(x'^2+y'^2)^2\mp 2\rho y'(x'^2-y'^2)=0$$

che rappresenta pure un trifolium retto.

Se la C è un'iperbole equilatera con un vertice in O, ed r è un suo asse, cioè se è

$$a_{11}=-a_{22}=1,\ a_{12}=0,\ a_{13}=0\ (\text{o } a_{23}=0) \text{ e } a_{23}=\pm\rho\ (\text{o } a_{13}=\pm\rho),$$

la (7) si scinde nella coppia di rette

$$x'^2-y'^2=0$$

e nel circolo

$$x'^2+y'^2\mp 2\rho y'=0\quad (\text{o } x'^2+y'^2\pm 2\rho x'=0).$$

Di ciò si trova spiegazione nel Teorema VI.

Se la C è una parabola, avente O per vertice ed n per asse, cioè se è

$$a_{11}=a_{12}=a_{23}=0,\qquad a_{22}=1,\qquad a_{13}=\pm p,$$

la (7) diviene

$$y'^2(x'^2+y'^2)\pm 2px'(x'^2-y'^2)=0$$

che rappresenta un *trifolium parabolico.*

Se invece di supporre nella (5) $a_{33}=0$, come abbiamo fatto fino ad ora, si suppone

$$a_{33}\gtrless 0\quad \text{ma}\quad a_{13}=a_{23}=0,$$

cioè se immaginiamo che la conica abbia il centro in O, la (6) diviene

(8) $$(x'^2+y'^2)^2(a_{11}x'^2-2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2)+a_{33}(x'^2-y'^2)^2=0.$$

In particolare se la C è un circolo, cioè se è

$$a_{11}=a_{22}=1, \qquad a_{12}=0, \qquad a_{33}=-\rho^2,$$

la (8) diviene

$$(x'^2+y'^2)^3-\rho^2(x'^2+y'^2)^2=0$$

che rappresenta un *rosone quadrifoglio*, e se la C è invece un'iperbole equilatera che ha u per asse, cioè se è

$$a_{11}=-a_{22}=1, \qquad a_{12}=0, \qquad a_{33}=\pm\rho^2,$$

la (8) si scinde nella

$$x'^2-y'^2=0$$

e nella

$$(x'^2+y'^2)^2\pm\rho^2(x'^2-y'^2)=0$$

che rappresenta una *lemniscata di Bernoulli*.

5. Tutti questi esempi particolari della trasformazione (C, C') si potevano anche trattare direttamente applicando le (1).

Così per es.: dalle seguenti equazioni polari di coniche C, passanti per O:

$$\rho_{(1)}=a\cos\theta \text{ (circolo)},\ \rho_{(2)}=\frac{a\cos\theta}{\cos 2\theta} \text{ (iperbole equilatera)},\ \rho_{(3)}=\frac{a\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \text{ (parabola)}$$

e dalle altre che hanno il centro in O:

$$\rho_{(4)}=\mathrm{K}^2 \text{ (circolo)},\ \rho^2_{(5)}=\frac{a^2}{\cos 2\theta} \text{ (iperbole equilatera)},$$

si hanno rispettivamente le equazioni delle trasformate:

$$\rho'_{(1)}=a\cos\theta'\cos 2\theta' \text{ (trifolium retto)}. \qquad \rho'_{(2)}=a\cos\theta' \text{ (circolo)},$$

$$\rho'_{(3)}=\frac{a\cos\theta'\cos 2\theta'}{\operatorname{sen}^2\theta} \text{ (trifolium parabolico)},$$

$\rho'_{(4)}=k^2\cos 2\theta'$ (rosone quadrifoglio), $\rho'^2_{(5)}=a^2\cos 2\theta'$ (lemniscata di Bernoulli),

tutti resultati questi che già avevamo trovato,

Possiamo vedere inoltre che:

1° se C è una *Kreuzcurve equilatera*, rappresentata dall'equazione

$$\rho=\frac{a}{\operatorname{sen} 2\theta},$$

cioè che ha il centro in O ed r è un suo asse, la C' è un *molino a vento* rappresentato dalla equazione

$$\rho'=-a\operatorname{cotg} 2\theta';$$

2° se C è un *molino a vento* che ha per equazione

$$\rho=a\operatorname{tg} 2\theta,$$

le C' è un *rosone quadrifoglio* rappresentato da

$$\rho'=-a\operatorname{sen} 2\theta';$$

3° se C è un'*inversa di folium semplice*, cioè se è una *cubica duplicatrice* (o *parabola puntata*), rappresentata dall'equazione

$$\rho = \frac{a}{\cos^3\theta'},$$

la C' è un *folium parabolico retto*

$$\rho' - \frac{a\cos 2\theta'}{\cos^3\theta'}, \text{ ecc. ecc.}$$

6. Finalmente occupiamoci di vedere come si trasformano nel piano π alcune curve particolari del piano π'. Pochi esempi basteranno.

Rette di $\pi' - (n' = 1)$. — Da quanto fu detto è facile dedurre che la trasformata nel piano π di una retta C, che non passa per O, di π è una cubica con due assintoti ortogonali, un punto doppio in O ed in questo una coppia di tangenti isotrope. Anche analiticamente si ha la conferma di ciò; poichè, essendo

$$y' = \mu' x' + \nu'$$

l'equazione di una retta C', dalla (4') si ha per la trasformata C

$$(y + \mu x)(x^2 - y^2) + \nu'(x^2 + y^2) = 0.$$

Se è $\mu = 0$, cioè se la C' è parallela ad r, la precedente diviene

$$y(x^2 - y^2) + \nu'(x^2 + y^2) = 0$$

che rappresenta un'*inversa di trifolium retto*.

Analogamente, se la C' è perpendicolare ad r, cioè se è rappresentata dall'equazione

$$x' = k,$$

la C è rappresentata da

$$x(x^2 - y^2) - k(x^2 + y^2) = 0$$

che è pure l'equazione di un'inversa di trifolium retto,

Coniche di $\pi' - (n' = 2)$. Sia

$$(9) \qquad a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0$$

l'equazione di una conica C' di π'; per la (4') l'equazione della trasformata nel piano π sarà

$$(10) \qquad (x^2 - y^2)^2(a_{11}x^2 - 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + 2(x^4 - y^4) \cdot (a_{13}x - a_{23}y) + a_{33}(x^2 + y^2)^2 = 0,$$

la quale rappresenta una sestica con un punto isolato a tangenti isotrope doppie in O e con una coppia di assintoti ortogonali (inclinati di $\pm\frac{\pi}{4}$ sugli assi), contata due volte.

In particolare, supposto che la C' sia un circolo, cioè supposto che nella (9) sia

$$a_{11} = a_{22} = 1 \quad , \quad a_{12} = 0,$$

la (10) si scinde nelle due

$$x^2 + y^2 = 0$$

e

$$(11) \qquad (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2)(a_{13}x - a_{23}y) + a_{33}(x^2 + y^2) = 0.$$

Quest'ultima, se il circolo C' passa per O, cioè se è $a_{33}=0$, si scinde a sua volta nelle due

$$x^2-y^2=0 \qquad \text{e} \qquad x^2-y^2+2(a_{13}x-a_{23}y)=0,$$

l'ultima delle quali rappresenta un'iperbole equilatera.

Se invece il circolo C' non passa per O, ma ha il suo centro in questo punto, cioè se è,

$$a_{13}=a_{23}=0,$$

la (11) diviene

$$(x^2-y^2)^2+a_{33}(x^2+y^2)=0$$

che rappresenta una *Kreuzcurve equilatera* (quella stessa trovata al n. 5 girata di $\pm\frac{\pi}{4}$).

Si potrebbero ancora, volendo, moltiplicare indefinitamente gli esempi e si potrebbe ancora confermare i resultati ottenuti ai numeri 4 e 5 osservando le trasformazioni inverse a quelle in tali numeri considerate.

Susa, aprile 1901.

Un correlativo del TEOREMA DI STEWART (*)

" Cette proprieté qui est à peu près inconnue de nos jours, mé- " riterait bien de prendre place dans les éléments ou au moins dans " les complements de géometrie ". CHASLES, *Aperçu historique*, 1837. Memoires couronnées de l'Accademie du Belgique, T. XI. p. 175.

" Plusieurs géométres tels que R. Simson, Tomas Simpson, Eulero, (**) " John Leslie ont utilisé le théorème de Stewart dans leurs écrits " mathématiques ". CLEMENT THIRY, *Applications du théorème de Stewart*, 1890. (***)

" È noto di quale possente ausilio sia questo teorema nella trat- " tazione di questioni molteplici e come serva mirabilmente alle dedu- " zioni di numerose relazioni metriche ". A. LUGLI, *Periodico di Matematica*, anno IV, fasc. VI, p. 196.

§ 1. Persuasi dell'utilità pratica e dell'importanza di questo fecondo teorema non crediamo fuor di proposito dedurne uno correlativo.

(*) Mathieu Stewart (1717-1785) illustre geometra scozzese fu discepolo di Roberto Simson (1687-1768) e di Maclaurin (1698-1746); egli professò dopo la morte del suo maestro nell'Università di Edimburgo.

(**) Eulero (1707-1783); Thomas Simpson (1710-1761), è noto il suo metodo per la quadratura delle superficie prime; Jhon Leslie (1766-1832) fu professore dell'Università di Edimburgo.

(***) CLEMENT THIRY, *Applications remarquables " théorème de Stewart "*. Paris 1891. Il teorema di Stewart trovasi pure dimostrato in alcuni trattati italiani, p. es. nelle *Lezioni di algebra elementare* del prof. BELLACCHI, vol. 1, p. 101; negli *Elementi di Matematica* del BALTZE trad. di Cremona Plan. § 14, p. 22; nella *Geometria piana* di FRANCESCO GIUDICE, 1897, p. 104 ecc.

Il teorema generale di Stewart relativo ad un triangolo qualunque rettilineo viene enunciato nei seguenti termini: “ Se si divide la base „ di un triangolo in due segmenti con una retta passante pel vertice „ opposto, la somma dei quadrati dei due lati moltiplicati rispettiva- „ mente per il segmento non adiacente è uguale alla base moltipli- „ cata per il quadrato della distanza del vertice opposto al punto di „ divisione, più la base moltiplicata pel rettangolo dei due segmenti „.

Si estende la dimostrazione del teorema al caso in cui la retta propassante pel vertice opposto alla base incontri questa nel suo prolungamento ed allora si tiene conto della identità di Eulero per tre punti posti in linea retta. (*)

Se indichiamo come al solito con a, b, c i lati opposti ai vertici del triangolo ABC e con x, y, z le distanze del punto F (che può trovarsi tra i vertici A e B o al di là) l'enunciato del teorema di Stewart si ha nella seguente relazione:

$$a^2x + b^2y = cz^2 + cyz \tag{1}$$

e si può enunciare anche così:

“ Se si congiunge il vertice di un triangolo con un punto qualunque „ della base opposta o del suo prolungamento, la somma dei qua- „ drati dei due lati moltiplicati rispettivamente per le distanze del „ punto dai vertici opposti è uguale alla base moltiplicata pel quadrato „ della congiungente, più la base moltiplicata pel rettangolo delle „ altre due distanze „.

Identicamente la relazione (1) si può scrivere sotto la forma seguente sostituendo $c = b + y$:

$$c \, . \, z^2 = (a^2 - y^2) \times x + (b^2 - x^2) \times y. \tag{2}$$

Basandosi esclusivamente sulla identità di Eulero, il teorema di Stewart assume nel suo enunciato la forma seguente:

$$c \, . \, z^2 = ax^2 + by^2 - cab. \tag{3}$$

Osserviamo come quest'ultima non è altro che la nota relazione di Simson:

$$\overline{PA}^2 \times BC + \overline{PB}^2 \times CA + \overline{PC}^2 \times AB + AB \times BC \times CA = 0. \tag{4}$$

Questa relazione vale quando P è situato sulla retta dei tre punti ABC e quando trovasi fuori; si determina direttamente oppure si deduce come caso particolare di una relazione più generale. (**)

(*) Tre punti A, B, C si dicono in linea retta od allineati quando congiungendo uno qualunque di essi p. es. cogli altri due A, B le due congiungenti CA, CB sono in direzione parallele ad una medesima retta: oppure quando le due congiungenti CA, CB formano con una medesima retta passante pel punto comune C angoli opposti al vertice eguali. Queste due definizioni coincidono; qualunque sia la disposizione dei tre punti in linea retta, l'identità di Eulero è la seguente:

$$AB + BC + CA = 0.$$

(**) ACHILLE SANNIA, *Lezioni di geometria projettiva*. Napoli 1886, § VII.

Un'altra forma meno usata dello stesso teorema è la seguente:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + xy \times (a^2 + b^2 - c^2) = c^2z^2, \tag{5}$$

che nel caso particolare del triangolo rettangolo si semplifica e diventa:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2 \tag{6}$$

e nel caso particolare del triangolo isoscele è:

$$a^2 + xy = z^2. \tag{7}$$

§ 2. Esaminiamo in qual modo si può modificare l'enunciato del teorema di Stewart, quando invece dei segmenti x, y determinati dalla trasversale CP, si considerino gli angoli da essa formati coi due lati e colla base, cioè poniamo: $\widehat{PCA} = X$, $\widehat{PCB} = Y$, $\widehat{APC} = \varepsilon$.

Dalla semplice ispezione della figura si vede che esisterà sempre la relazione angolare $X + Y = C$ oppure $X + Y = C + 2\pi$.

Si ricavano facilmente l'eguaglianze:

$$\left.\begin{aligned} a^2 . x &= a^2 . \frac{b . \operatorname{sen} X}{\operatorname{sen} \varepsilon} \\ b^2 . y &= b^2 . \frac{a . \operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} \varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$c . xy = c . \frac{ab . \operatorname{sen} X . \operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} \tag{9}$$

$$ab . \operatorname{sen} C = c . z . \operatorname{sen} \varepsilon. \tag{10}$$

Sostituendo questi valori nella relazione (1) si ottiene:

$$a . \operatorname{sen} X + b . \operatorname{sen} Y = z . \operatorname{sen} C + c \frac{\operatorname{sen} X . \operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} \varepsilon}. \tag{11}$$

Paragonando le due relazioni (1) e (11), si scorge che si può passare dall'una all'altra col semplice scambio della seguenti quantità:

$$\left.\begin{aligned} &ax \equiv \operatorname{sen} X \\ &by \equiv \operatorname{sen} Y \\ &cz \equiv \operatorname{sen} (X + Y) = \operatorname{sen} C \\ &ab \equiv \operatorname{sen} \varepsilon \quad \text{ossia:} \quad xy \equiv \frac{\operatorname{sen} X . \operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} \varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

per cui saranno verificate le due serie di eguaglianze:

$$\frac{ax}{\operatorname{sen} X} = \frac{by}{\operatorname{sen} Y} = \frac{cz}{\operatorname{sen} C} = \frac{ab}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \frac{xy}{\dfrac{\operatorname{sen} X \operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} \varepsilon}} \tag{13}$$

$$\frac{a^2x}{a \operatorname{sen} X} = \frac{b^2x}{b \operatorname{sen} Y} = \frac{cz^2}{z \operatorname{sen} C} = \frac{cxy}{\dfrac{c \operatorname{sen} X \operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} \varepsilon}} = \frac{ab}{\operatorname{sen} \varepsilon} \tag{14}$$

e si conchiude la proprietà che: " Il rapporto fra i termini dell'equa- " zione (1) ed i corrispondenti dell'equazione (11) è costante ed eguale a " quello del rettangolo dei due lati al seno dell'angolo d'inclinazione. „ Si può enunciare il correlativo del teorema di Stewart nel modo seguente: " Se si congiunge il vertice d'un triangolo con un punto qua- " lunque della base opposta o del suo prolungamento, la somma del " prodotto di ciascuno dei due lati per il seno dell'angolo sotto cui " è veduto il segmento non adiacente è uguale alla congiungente mol- " tiplicata pel seno dell'angolo del triangolo, più la base moltiplicata " pel rettangolo dei seni dei due angoli componenti e diviso pel seno " dell'angolo d'inclinazione. „

Se poniamo:

$$\frac{\operatorname{sen} X}{\operatorname{sen} C} = \lambda, \quad \frac{\operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} C} = \mu, \quad \text{e} \quad \nu = \lambda \frac{\operatorname{sen} Y}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \mu \frac{\operatorname{sen} X}{\operatorname{sen} \varepsilon},$$

essendo anche dalla figura: $\operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen}(A + X) = \operatorname{sen}(B + Y)$, l'equazione (11) si può scrivere:

$$z = a \cdot \lambda + b \cdot \mu - c \cdot \nu, \tag{15}$$

che permette di enunciare il correlativo del teorema di Stewart in altro modo. La relazione (11) può essere utile per calcolare le lunghezze di alcune rette notevoli del triangolo.

§ 3. Si può dedurre la dimostrazione della relazione (11) mediante l'uso delle *formule definitive di risoluzione del problema di Pothenot* da noi trovate in altro lavoro. (*) Esse sono:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(\alpha - A) \\ y &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(\beta - B) \\ z &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(\gamma - C) \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

dove il valore di q, che noi abbiamo chiamato *segmento fisso* del punto P rispetto al triangolo di riferimento ABC, è dato da una qualunque delle seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 \beta + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2ab \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos(\gamma - C) \\ q^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + c^2 \operatorname{sen}^2 \beta + 2bc \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos(\alpha - A) \\ q^2 &= c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + 2ca \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha \cos(\beta - B) \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

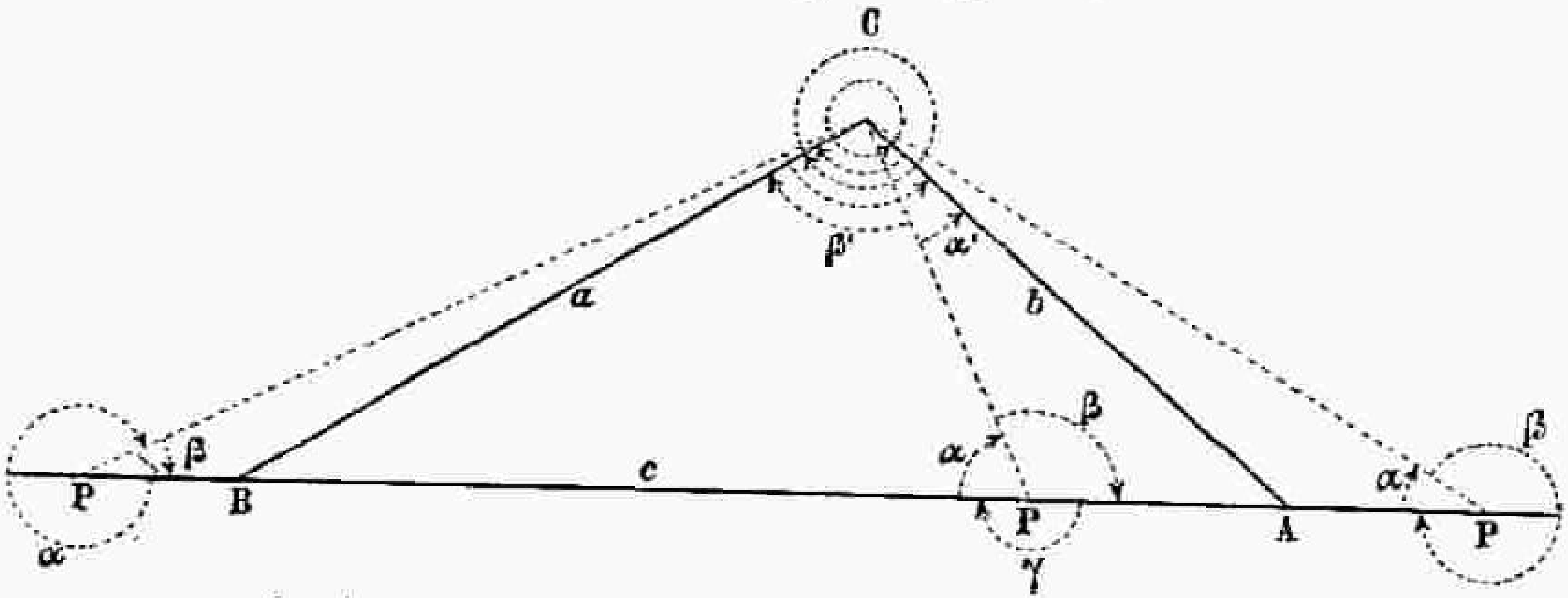
Inoltre sono sempre soddisfatte le relazioni di condizione angolare:

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= \pi \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2\pi \\ (\alpha - A) + (\beta - B) + (\gamma - C) &= \pi \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

(*) Atti della R. Accademia dei Lincei. Giugno 1899. G. DELITALA, *Formule definitive di risoluzione del problema di Pothenot.*

Le dette formule sono generali per qualunque punto P nel piano del triangolo ABC e per tutti i valori degli angoli α, β, γ compresi fra zero e 2π.

Supponiamo che il punto P mobile nel piano del triangolo cada sopra uno dei lati p. es. c o sul suo prolungamento, possono avvenire soltanto le tre disposizioni delle figure seguenti:



$$\begin{cases} x+y=c \\ \alpha+\beta=\pi \\ \gamma=\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=c \\ \alpha+\beta=2\pi \\ \gamma=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=c \\ \alpha+\beta=2\pi \\ \gamma=0. \end{cases}$$

Per i particolari valori degli angoli da una qualunque delle formole (17) si ricava il valore particolare del *segmento fisso*

$$q = c \,\text{sen}\, \alpha = c \,\text{sen}\, \beta,$$

mentre dalle prime due delle formule (16) si ricava $q = b\,\text{sen}\,X + a\,\text{sen}\,Y$ da cui l'eguaglianza: $c\,\text{sen}\,\alpha = b\,\text{sen}\,X + a\,\text{sen}\,Y$, che è vera se si considera anche la proiezione della spezzata ABC sopra una retta perpendicolare alla trasversale CP.

Per il caso particolare esaminato, le formule generali (16) diventano

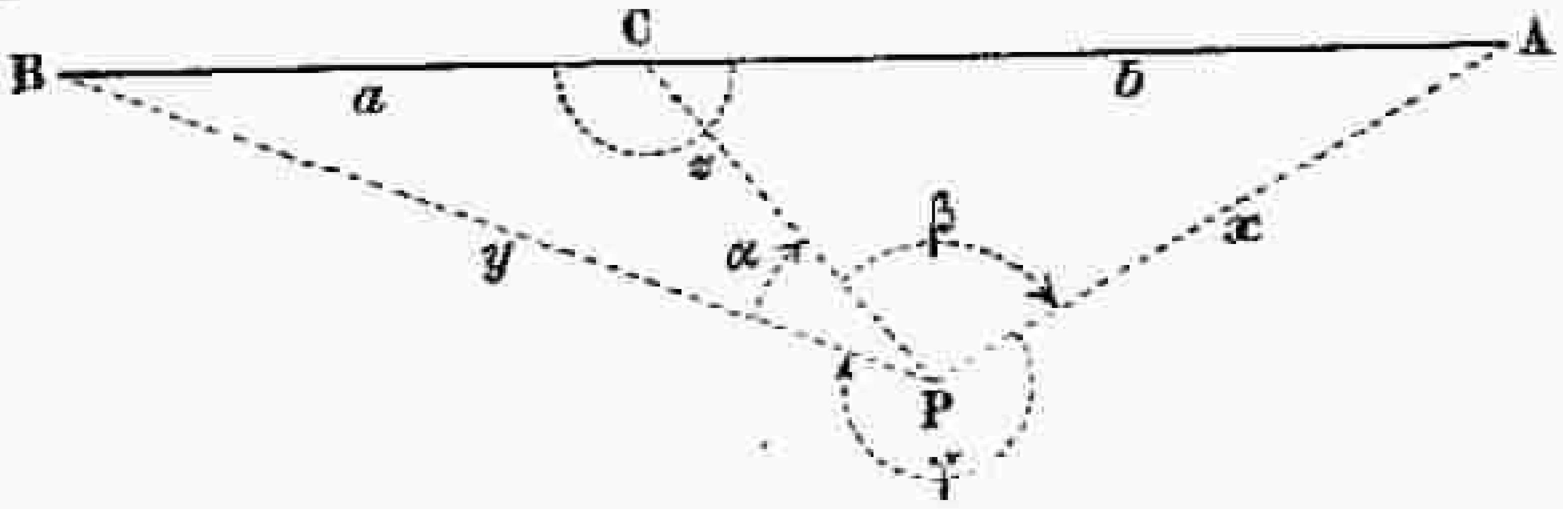
$$\left.\begin{aligned} x &= b \times \frac{\text{sen}\,X}{\text{sen}\,\alpha} \\ y &= a \times \frac{\text{sen}\,Y}{\text{sen}\,\alpha} \\ z &= \frac{ab\,.\,\text{sen}\,C}{c\,.\,\text{sen}\,\alpha} \end{aligned}\right\} ; \tag{19}$$

e quindi si ottengono le relazioni

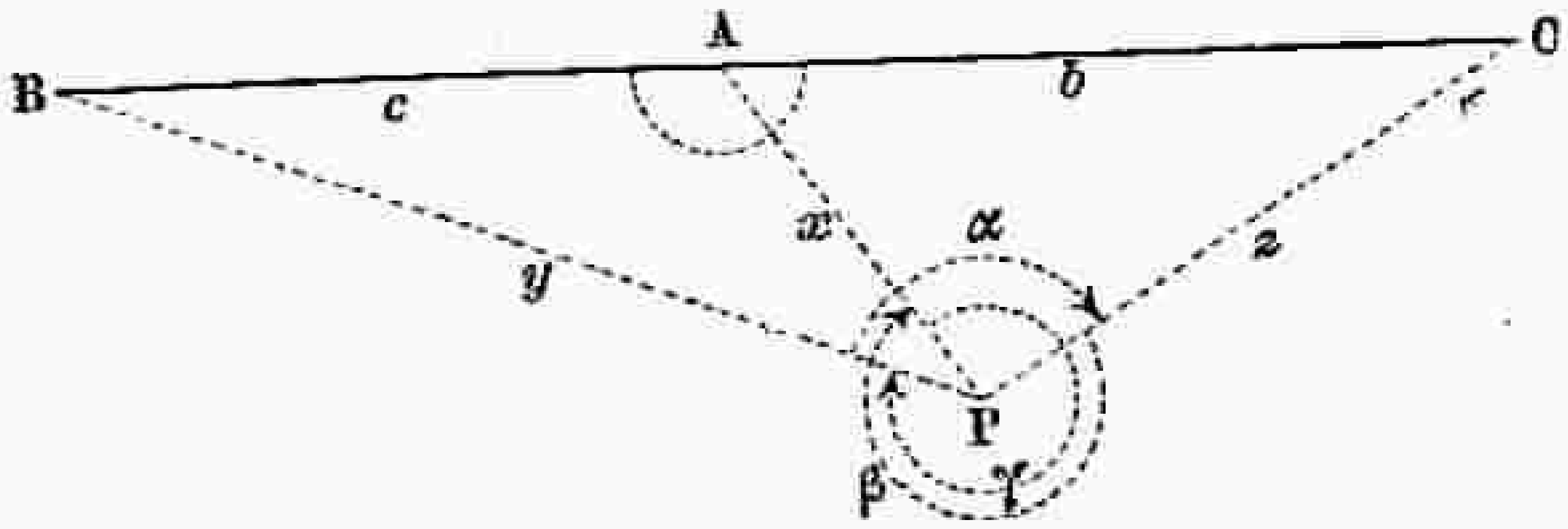
$$\left.\begin{aligned} a^2x &= a^2\,.\,\frac{b\,\text{sen}\,X}{\text{sen}\,\alpha} \\ b^2y &= b^2\,.\,\frac{a\,\text{sen}\,Y}{\text{sen}\,\alpha} \\ ab\,\text{sen}\,C &= c\quad.\,z\,\text{sen}\,\alpha \\ c\,.\,xy &= c\quad.\,\frac{ab\,\text{sen}\,X\,\text{sen}\,Y}{\text{sen}^2\alpha} \end{aligned}\right\} , \tag{20}$$

le quali sono identiche alle (8), (9) e (10), che riproducono la formula (11).

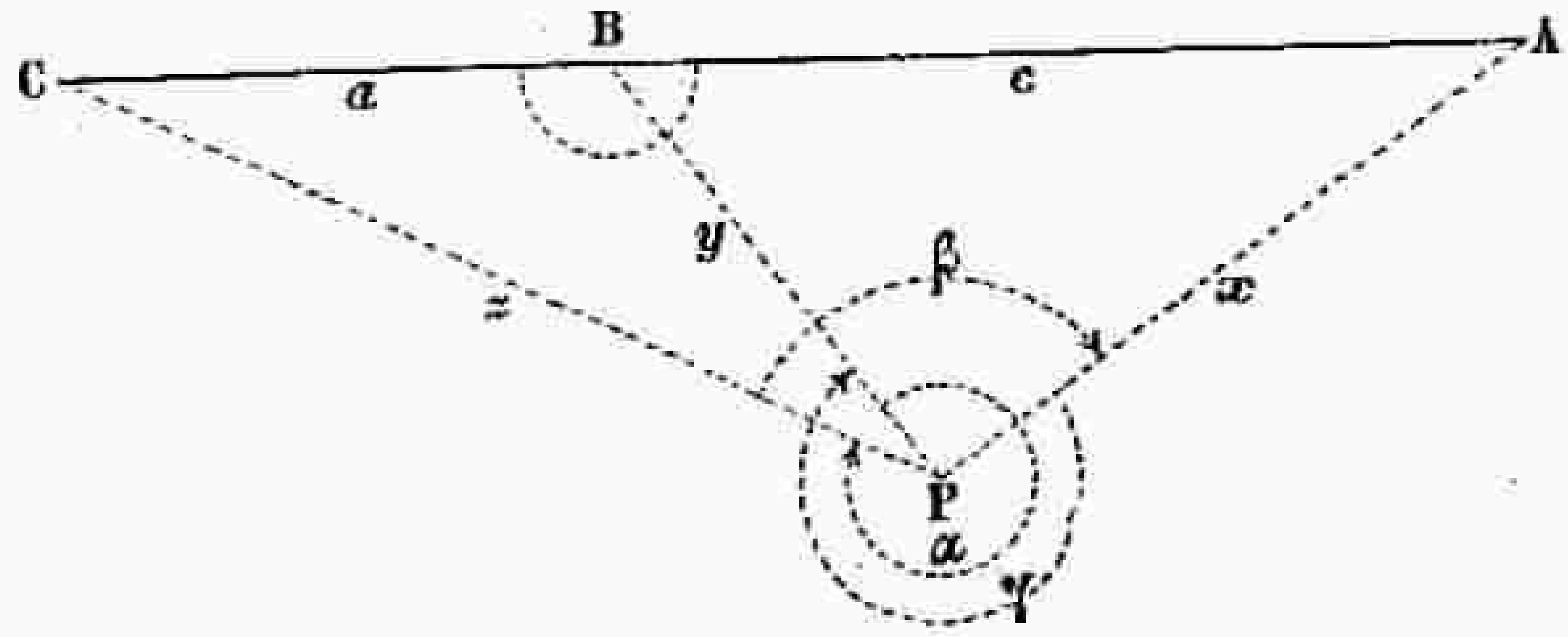
§ 4. Sarà istruttivo esaminare che cosa diventa il *segmento fisso* q e come si trasformano le nostre formule quando si supponga il punto P immobile nel piano del triangolo ABC, e questo si deformi in modo che i tre vertici si riducono allineati; in questo caso particolare si possono presentare le seguenti tre disposizioni delle figure:



$$\begin{cases} c = a + b \\ A = 0,\ B = 0,\ C = \pi. \end{cases}$$



$$\begin{cases} c = a - b \\ A = \pi,\ B = 0,\ C = 0. \end{cases}$$



$$\begin{cases} c = b - a \\ A = 0,\ B = \pi,\ C = 0. \end{cases}$$

Le relazioni (16) si semplificano e diventano

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{bc}{q}\operatorname{sen}\alpha \\ y &= \frac{ca}{q}\operatorname{sen}\beta \\ z &= \frac{ab}{q}\operatorname{sen}\gamma \end{aligned}\right\}, \qquad (16')$$

dove il *segmento fisso* è dato da una qualunque delle seguenti espressioni delle (17):

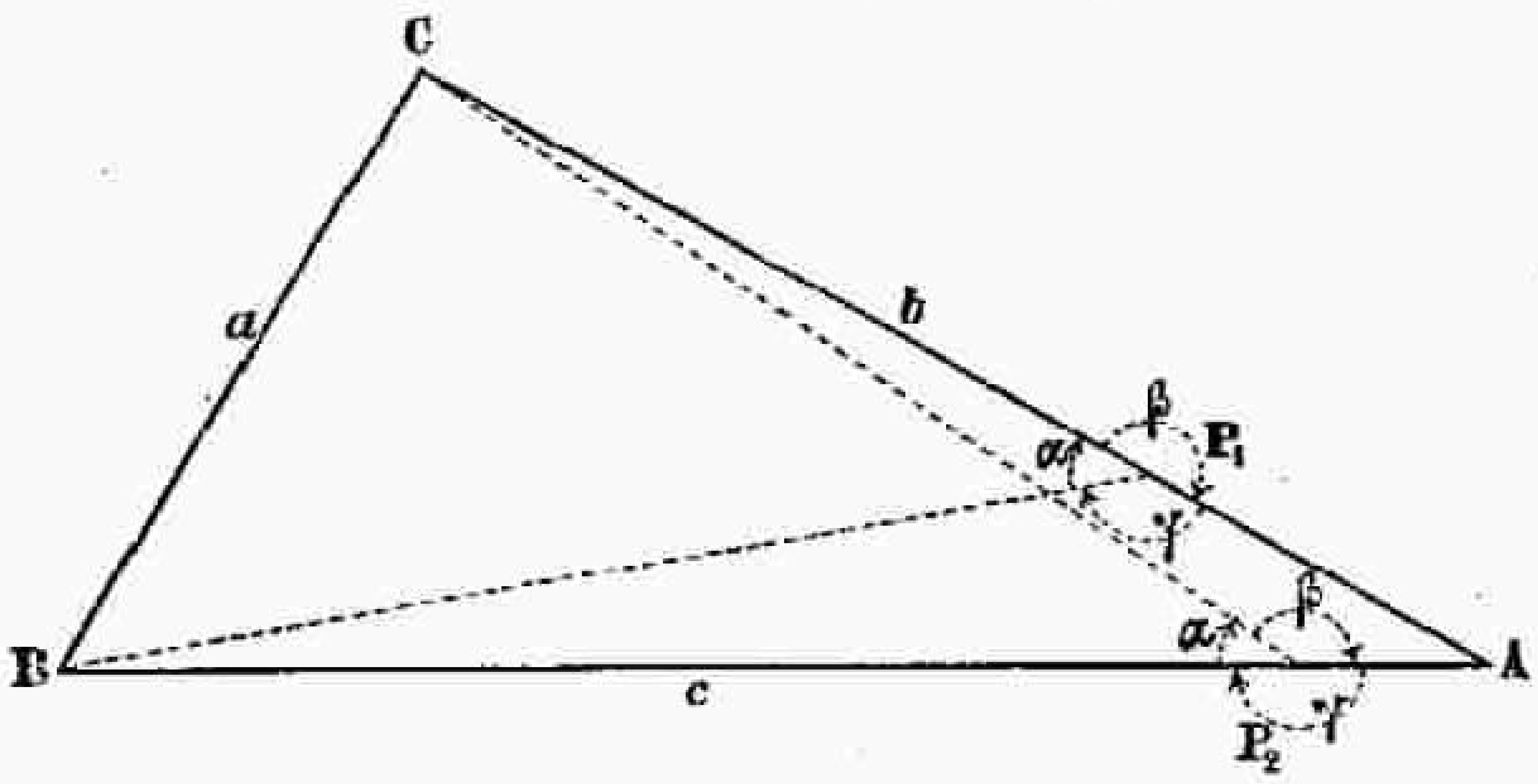
$$\left.\begin{array}{l} q^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \beta + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2ab \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma \\ q^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + c^2 \operatorname{sen}^2 \beta - 2bc \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \\ q^2 = c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \gamma - 2ca \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \end{array}\right\}. \qquad (17')$$

Le (16') ci permettono di enunciare la seguente importante proprietà:

" Le distanze di un punto P da tre punti allineati sono eguali al " prodotto dei due segmenti aventi l'estremità comune in quel punto " pel seno dell'angolo sotto cui è visto il restante segmento, diviso " pel *segmento fisso* dal punto P rispetto alla terna di punti allineati ".

§ 5. Esaminiamo infine che cosa avviene delle nostre formule quando si supponga il punto P mobile sul contorno del triangolo fondamentale ABC.

Perciò consideriamo i due casi in cui il punto P cammini nel senso dell'ordine ciclico dei vertici del triangolo o nel senso inverso. Consideriamo una prima posizione del punto P sul lato CA ed infinitamente prossima al vertice A: quindi una seconda posizione sul lato BA pure infinitamente vicina al vertice A.



Evidentemente al limite della coincidenza del punto P col vertice A si avranno rispettivamente per le due figure le seguenti eguaglianze:

$x = 0$	$\alpha = B$	$x = 0$	$\alpha = A$
$y = c$	$\beta = \pi$	$y = c$	$\beta = (\pi - A)$
$z = b$	$\gamma = (\pi - A).$	$z = b$	$\gamma = \pi.$

Nel primo caso le formule generali (16) diventano:

$$\left.\begin{array}{l} q = \dfrac{0}{0} \\ q = a \operatorname{sen} B \\ q = a \operatorname{sen} B \end{array}\right\},$$

e le (17) danno del *segmento fisso* q, il valore seguente:

$$\left.\begin{array}{l} q = b \operatorname{sen} A \\ q = b \operatorname{sen} A \\ q = \sqrt{\operatorname{sen}^2 A\,(c^2 + a^2 - 2ca \cos B)} = b \operatorname{sen} A \end{array}\right\}.$$

donde si conchiude l'eguaglianza:

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A. \tag{21}$$

Nel secondo caso le formole generali (16) diventano:

$$\left.\begin{array}{l} q = \frac{0}{0} \\ q = a \operatorname{sen} C \\ q = a \operatorname{sen} C \end{array}\right\};$$

mentre dalle (17) si ottengono:

$$\left.\begin{array}{l} q = \sqrt{\operatorname{sen}^2 A\,(a^2 + b^2 - 2ab \cos c)} = c \operatorname{sen} A \\ q = c \operatorname{sen} A \\ q = c \operatorname{sen} A \end{array}\right\}$$

donde si conchiude l'eguaglianza:

$$a \,.\, \operatorname{sen} C = c \,.\, \operatorname{sen} A \tag{22}$$

Dalle formule (21) e (22) si deduce la doppia eguaglianza

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \tag{23}$$

ch'esprime il noto *teorema dei seni* pei triangoli rettilinei. Alla stessa conclusione si sarebbe giunti considerando la posizione del punto P mobile sul contorno del triangolo al limite della coincidenza rispettivamente col vertice B o col vertice C.

Rimane così dimostrato che anche il teorema fondamentale della Trigonometria rettilinea è un caso particolare delle nostre formule più generali, le quali ricevono molteplici applicazioni nello studio della geometria del piano; una di queste è la *risoluzione del tetragono piano*, di cui già ci siamo occupati in altro lavoro. (*)

Prof. Giuseppe Delitala.

APPENDICE ALLA MIA MEMORIA BIBLIOGRAFICA

SULL'ULTIMO TEOREMA DI PIETRO FERMAT (**)

1. Nel compilare questa memoria ho omesso di citare i seguenti lavori:

a) Mémoire sur la résolution, en nombres complexes, de l'équation $A^5+B^5+C^5=0$ par G. Lamé. (Vedi „Journal de mathématiques pures et appliquées „ de J. Liouville, Tome XII, année 1847).

(*) G. Delitala, *La risoluzione completa del tetragono piano.* „Periodico di Matematica, „ gennaio 1901.

(**) Vedi „*Memoria bibliografica dell'ultimo teorema di Fermat* del Dr. Gambioli, „Periodico di Matematica„ Tomo XVI, gennaio-febbraio 1901.

b) Mémoire sur la résolution, en nombres complexes, de l'équation $A^n+B^n+C^n=0$ par G. LAMÉ (Ib. id.)

c) Démonstration générale du théorème de Fermat sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^n+y^n=z^n$ par G. LAMÉ. (Vedi " Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des sciences ", Tome XXXIV, 1847).

d) Note sur un sujet de la démonstration du théorème de Fermat, par LAMÉ. (Ib. Id.)

e) Seconde mémoire sur le dernier théorème de Fermat par G. LAMÉ. (Ib. Id.)

f) Troisième mémoire sur le dernier théorème de Fermat, par G. LAMÉ. (Ib. Id.)

g) Extrait d'une lettre de M. Kummer à M. Liouville. (Vedi " Journal de Liouville ", Tome XII, année 1847).

h) Sur le nombres complexes, qui sont formés avec les nombres entiers réels et les racines de l'unité (in latino par M. KUMMER) (Ib. Id.)

i) Rémarques à l'occasion d'une communication de M. Lamé sur un théorème de Fermat par M. LIOUVILLE. (Vedi " Comptes rendus.... ", Tome XXXIV, 1847).

l) Note sur quelques propriétés de facteurs complexes par B. Cauchy, (Ib. Id.)

m) Théorie des nombres. Mémoire sur de nouvelles formules rélative à la théorie des polynômes radicaux, et sur le dernier théorème de Fermat par M. A. Cauchy. (Vedi " Comptes rendus.... ", Tome 24, année 1847).

2. Il LAMÉ avendo veduto che impiegando solo i numeri reali non gli era stato possibile di poter dimostrare il teorema di Fermat, che nel caso particolare di $n=7$,(*) per pervenire alla dimostrazione del caso generale pensò di ricorrere ai numeri complessi; ma tosto il Liouville (Vedi *i)*) ed egli stesso si avvidero, che anche questi nuovi mezzi erano insufficienti, poichè il teorema su cui si fondava la dimostrazione del Lamé cioè " che un numero complesso composto non può scomporsi in fattori primi, che in un sol modo, " come osservava il Kummer nella sua lettera *g)*, diretta al Liouville, non ha luogo generalmente. Sicchè come era da aspettarsi riuscirono vani anche gli sforzi, che il Lamé fece coi suoi ultimi lavori *d)*, *e)*, *f)* per puntellare l'edifizio, che egli aveva fabbricato su basi non solide.

3. Il celebre Cauchy, allorchè il Lamé lesse all'Accademia di Francia la sua memoria *c)*, prese la parola per ricordare " che egli aveva in una seduta precedente (19 ottobre 1846) presentato all'Accademia stessa una memoria, nella quale faceva conoscere un metodo e delle formule, che in parte riguardavano la teoria dei numeri e che gli sembravano poter condurre alla dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat; ma occupato in altri lavori, egli non aveva avuto il tempo di assicurarsi, che una tale congettura fosse fondata ".

Che il Cauchy in seguito si fosse occupato della memoria *c)* del Lamé, ne abbiamo la prova nella nota *l)*, in cui egli fa vedere, che i principii stabiliti dal Lamé, nelle sue memorie sopra citate, su certi fattori complessi, si possono ottenere in un modo assai semplice.

È d'uopo osservare che il Cauchy non dubitò mai della validità e della esattezza delle dimostrazioni date dal Lamé tanto, che colla sua lunga memoria *l)* pare che abbia voluto in certo qual modo rafforzare e direi quasi ribadire queste dimostrazioni; onde egli cadde negli stessi errori, in cui era caduto precedentemente il Lamé. Però in chi abbia presente l'attività febbrile del celebre annalista francese e quell'intorno di tempo, che va dal 1840 al 1850, in cui l'Accademia delle scienze di Francia aveva fissato per argomento del suo " *grand prix* " l'ultimo

(*) Vedi " Comptes rendus.... ", Tomo IX, 183.

teorema di Fermat e perciò era nato un certo risveglio ed una rifioritura di lavori interno ad esso, può sorgere il dubbio che il Cauchy abbia studiato profondamente una tal questione indipendentemente dalle memorie del Lamé, ma che non sia riuscito a dare di un tal teorema una dimostrazione più soddisfacente di quelle già note.

4. Il Kummer scorse subito il lato debole delle dimostrazioni del Lamé e del Cauchy, e si avvide tosto della insufficienza de' mezzi adoperati dai due matematici francesi; onde si affrettò ad introdurre nell'algebra nuovi enti, i così detti "*numeri complessi ideali*", mediante i quali egli riuscì a dimostrare, come si sa, rigorosamente il teorema di Fermat nel caso, che l'esponente n sia un numero primo dispari e non comparisca come fattore nei numeratori dei primi numeri bernoulliani $\frac{1}{2}(n-3)$. (*)

Quantunque le dimostrazioni date dell'ultimo teorema di Fermat dai due matematici di Parigi siano difettose, tuttavia io credo che esse abbiano suggerito al prof. di Berlino la sua memoria e gli abbiano indicata la via, che egli poi seguì.

5. Ammesso che il Fermat abbia dato una dimostrazione semplice e rigorosa del suo ultimo teorema, come egli ebbe ad asserire, è certo che in essa egli ha impiegato i soli numeri reali; onde mi pare che volere adoperare a tale oggetto altri numeri per dare una dimostrazione vie più generale del suo teorema, sia volere complicare la questione.

Dott. DIONISIO GAMBIOLI.

Milano, 31 maggio 1901.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 539, 557 E 559

539. *Calcolare*

$$\int\left[\left\{1+n\,\mathrm{sen}^{n-1}x\right\}\mathrm{sen}\,(n+1)\,x\right]dx.$$

G. GIOVANETTI.

Risoluzione del sig. Filippo Sibirani di Bologna.

L'integrale

$$\int\left[\left\{1+n\,\mathrm{sen}^{n-1}x\right\}\mathrm{sen}\,(n+1)\,x\right]dx$$

si scinde nei tre

$$\int \mathrm{sen}\,(n+1)x\,.\,dx+n\int \mathrm{sen}^{n-1}x\,\mathrm{sen}\,nx\,.\,\cos x\,.\,dx+n\int \mathrm{sen}^{n}x\cos nx\,.\,dx.$$

Ma

$$\int \mathrm{sen}\,(n+1)\,x\,.\,dx=-\frac{\cos\,(n+1)\,x}{n+1}$$

e

$$n\int \mathrm{sen}^{n}x\,.\,\cos nx\,.\,dx=\mathrm{sen}^{n}x\,.\,\mathrm{sen}\,nx-n\int \mathrm{sen}\,nx\,.\,\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x\,.dx;$$

e quindi sostituendo

$$\int\left[\left\{1+n\,\mathrm{sen}^{n-1}x\right\}\mathrm{sen}\,(x+1)\,n\right]dx=\mathrm{sen}^{n}x\,.\,\mathrm{sen}\,nx-\frac{\cos\,(n+1)x}{n+1}.$$

(*) Vedi *Journal de Crelle*, Tomo 20, 1850.

557. *Trovare l'inviluppo delle parabole che hanno per fuoco il fuoco di una parabola fissa, e per direttrici le tangenti della parabola stessa.*

GREENSTREET.

Risoluzione del sig. E. N. Barisien.

Sia $y^2 - 2px = 0$ l'equazione della parabola fissa. L'equazione di una tangente a questa parabola, che faccia l'angolo φ con Ox è $y = x \operatorname{tg} \varphi + \dfrac{p}{2 \operatorname{tg} \varphi}$, o

$$x \operatorname{sen}^2 \varphi - y \,.\, \operatorname{sen} \varphi \,.\, \cos \varphi + \frac{p}{2} \cos^2 \varphi = 0. \tag{1}$$

Si avrà l'equazione della parabola, che ha per bisettrice questa tangente e per fuoco il fuoco della parabola fissa, esprimendo che la distanza di un punto da quella tangente e dal fuoco sono eguali. Si ottiene così

$$\frac{x \operatorname{sen}^2 \varphi - y \operatorname{sen} \varphi \,.\, \cos \varphi + \frac{p}{2} \cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Ponendo $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \mathrm{R}$, questa equazione si può scrivere

$$\left(x - \frac{p}{2}\right) \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi = \mathrm{R} - \frac{p}{2 \operatorname{sen} \varphi}. \tag{3}$$

La derivata di questa equazione rispetto a φ è

$$\left(x - \frac{p}{2}\right) \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi = \frac{p \cos \varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi}. \tag{4}$$

Resta da eliminare φ fra le (3) e (4) per avere l'inviluppo richiesto. Elevando a quadrato le equazioni (3) e (4) e sommando membro a membro le due equazioni ottenute, si ha

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{p\mathrm{R}}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{p^2}{4 \operatorname{sen}^4 \varphi},$$

da cui

$$\operatorname{sen}^3 \varphi = \frac{p}{4\mathrm{R}}. \tag{5}$$

Dalle (3) e (4) si ha, eliminando y,

$$x - \frac{p}{2} = \mathrm{R} \operatorname{sen} \varphi - \frac{p}{2} + \frac{p \cos^2 \varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

o, in funzione di $\operatorname{sen} \varphi$,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right) \operatorname{sen}^2 \varphi = \mathrm{R} \operatorname{sen}^3 \varphi - \frac{p}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{p}{2}(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi).$$

Sostituendo in questa equazione a $\operatorname{sen}^3 \varphi$ il suo valore dato dalla (5) si ha

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{\frac{3p}{4}}{x + \frac{p}{2}}. \tag{6}$$

Egualiando i due valori di $\operatorname{sen}^6 \varphi$ ricavati dalle (5) e (6), si ha immediatamente, che il luogo richiesto è la cubica rappresentata dall'equazione

$$27p \left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right] = 4\left(x + \frac{p}{2}\right)^3,$$

o

$$27py^2 = 4\left(x + \frac{p}{2}\right)^3 - 27p\left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

559. *Se un circolo passa pel vertice di una parabola, è tangente ad essa in P e la taglia in Q, il centro di curvatura corrispondente a P si trova sulla normale nel punto Q.*

GREENSTREET.

Risoluzione del sig. E. N. Barisien.

Siano $y^2 = 2px$ l'equazione della parabola, e (x_1, y_1), (x_2, y_2) le coordinate dei punti P, Q, in guisa che si abbia $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$. Il coefficiente angolare della tangente in P è $\frac{p}{y_1}$, quella della retta che congiunge il vertice O della parabola col punto Q è $-\frac{p}{y_1}$. Dunque

$$-\frac{p}{y_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{2p}{x_2}.$$

Ne segue che le coordinate del punto Q sono in funzione di quelle del punto P

$$y_2 = -2y_1 \quad , \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p} = \frac{2y_1^2}{p} = 4x_1.$$

L'equazioni delle normali nei punti P e Q sono dunque

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

$$y + 2y_1 = \frac{2y_1}{p}(x - 4x_1).$$

Queste due equazioni risolute rispetto ad x ed y dànno

$$x = 3x_1 + p \quad , \quad y = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

che sono le coordinate del centro di curvatura corrispondente a P.

Osservazioni. — Questa figura dà origine a interessanti proprietà:

1ª. *Quando* P *si sposta sulla parabola, il luogo del centro del circolo dell'enunciato è la curva rappresentata dall'equazione*

$$y^2 = \frac{4(x - p)^3}{27p}$$

cioè una cubica sviluppata della parabola $y^2 = 4p(x + p)$.

Questa cubica è anche il luogo di un punto tale che le tre normali alla parabola e la parallela all'asse, condotte per quel punto formano un fascio armonico.

2ª. *La retta* PQ *inviluppa una parabola.*

3ª. *Il luogo del centro dell'iperbole equilatera che passa per il vertice* O, *per il punto* P *e che è tangente in* Q *alla parabola, è una cubica sviluppata della parabola.*

QUISTIONI PROPOSTE

564. Considerando due tangenti qualunque in due punti P_1 e P_2 di una parabola riferita al suo asse ed alla sua tangente nel vertice, se P è il punto d'incontro di tali tangenti, dimostrare che l'ascissa di P è media geometrica fra quelle di P_1 e P_2, mentre l'ordinata è media aritmetica fra le ordinate degli stessi punti P_1 e P_2.

565. Se

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0$$

sono le equazioni di due coniche di un piano, il luogo dei centri di tutte le coniche del fascio a cui queste appartengono è in generale una conica che ha per equazione

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Dedurre da ciò che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le polari di un punto P, rispetto a tutte le coniche di un fascio Φ, sieno parallele, è che P sia centro di una delle coniche di Φ.

G. Cardoso-Laynes.

566. Dimostrare che la quartica rappresentata in coordinate polari dall'equazione

$$\rho = \frac{a}{\cos\frac{\omega}{2}}$$

ha l'area compresa fra essa ed i suoi asintoti finita ed equivalente all'area della buccola della curva.

567. Si considerino due circoli di cui i centri sono fissi, e la somma dei raggi resta costante. Dal centro di ciascuna circonferenza si conducano due tangenti all'altra. Il luogo dei punti d'incontro di queste quattro tangenti colle due circonferenze si compone di un circolo e di quattro conchiglie di Pascal.

568. Sono date due rette x, y perpendicolari ed una terza z, concorrenti in un punto O. Si trovi l'inviluppo degli assi delle ellissi che hanno un fuoco sopra z, sono tangenti ad x e ad y ed hanno l'asse minore eguale ad una lunghezza data.

569. Siano A, A′ e B, B′ i vertici di un ellisse, ed M un punto qualunque di essa. Le perpendicolari condotte ad MA, MA′, MB, MB′ nei loro punti di mezzo incontrino la normale in M nei punti C, C′, D, D′. Dimostrare che CD = C′D′, e che il luogo del punto di mezzo CC′ è una ellisse.

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Luigi Bianchi. — *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* — Pisa, E. Spörri, editore, 1901. pag. 608. — Lire 20.

La teoria delle funzioni di variabile complessa può svolgersi secondo due punti di vista; l'uno, che si potrebbe dir fisico, di Cauchy-Riemann; l'altro, aritmetico, del Weierstrass. Queste lezioni del prof. Bianchi, che riproducono con molte e notevoli aggiunte i corsi tenuti dall'A. nella R. Università di Pisa, e che già furono, almeno in gran parte, litografate nel 1898, possono caratterizzarsi per una geniale e felicissima fusione dei due metodi, i quali vengono in tal guisa a completarsi e rischiararsi a vicenda e permettono di condurre il lettore attraverso un'esposizione, in cui semplicità e chiarezza si sposano ad una classica eleganza, ad una folla di risultati del più alto interesse.

Uno sguardo all'indice dell'opera è sufficiente a dare un'idea della ricchezza degli argomenti trattati e della loro intelligente coordinazione. Ai primi teoremi sulle serie di potenze e sulle rappresentazioni conformi, l'A. fa seguire nel Capitolo II lo studio dei gruppi discontinui di sostituzioni lineari su una variabile complessa (gruppi Fuchsiani e Kleiniani), in particolare dei gruppi di sostituzioni paraboliche, del gruppo modulare di tutte le sostituzioni $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (con α, β, γ, δ interi ed $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$), così importante per la teoria delle funzioni modulari ellittiche, del gruppo di Picard delle sostituzioni lineari a coefficienti interi complessi. Il terzo capitolo è dedicato alla teoria degli integrali curvilinei e delle funzioni armoniche del piano, fino alla risoluzione del problema di Dirichlet, in un campo circolare. Seguono nei Capitoli IV-VI le proprietà fondamentali delle funzioni di variabile complessa (teorema di Cauchy, sviluppi di Taylor e di Laurent, funzioni analitiche, infiniti ed infinitesimi, singolarità polari ed essenziali, indicatore logaritmico, trascendenti intere, loro genere, teoremi di Mittag-Leffler e Weierstrass, funzione Γ euleriana ecc. ecc.) Fondamentale nell'esposizione del Bianchi è il teorema di Cauchy sull'integrale di una funzione di variabile complessa esteso al contorno di un'area entro la quale, il contorno incluso, la funzione e la derivata prima sono finite, continue e monodrome; se con questo, come con qualche ragione osserva lo Stäckel, (*) si perde forse, almeno in gran parte, il carattere elementare dato da Weierstrass alla teoria delle funzioni e del prolungamento analitico, vi è però largo compenso nella concisione e nell'eleganza, colla quale l'A. può condensare in breve spazio tanti risultati.

Il Capitolo VII è dedicato alle proprietà fondamentali delle funzioni analitiche di più variabili complesse, delle funzioni implicite ed, in particolare, delle funzioni algebriche di una variabile complessa, l'ultimo capitolo della prima parte contiene infine i concetti fondamentali della teoria delle superfici di Riemann, delle funzioni razionali su una superficie Riemanniana, e degli integrali Abeliani.

Anche la teoria delle funzioni ellittiche è trattata dall'A. con metodo personale, notevolissimo, a nostro parere, per la sua semplicità ed utilità didattica. Questa seconda parte dell'opera, densa di formule e di risultati, può giustamente, come osserva lo Stäckel, (**) considerarsi come un primo interessantissimo capitolo dell'ampia teoria delle funzioni automorfe. Mediante un noto teorema di Weierstrass, dimostrato nella prima parte, l'A. costruisce, dai suoi infinitesimi, la trascendente intera σu, che pone anche egli, come il Weierstrass, a base di tutta la teoria, senza però partire dal teorema d'addizione, che è invece fondamentale nella esposizione del Weierstrass. Delle proprietà generali delle $\sigma u, \zeta u, pu$, delle loro variazioni per aggiunta di periodi o di semiperiodi, delle funzioni periodiche di 1ª, 2ª, 3ª categoria, delle funzioni ellittiche generali, del teorema di addizione, della moltiplicazione e divisione dell'argomento nella pu, della equazione per la divisione dei periodi trattano i primi due capitoli. La questione dell'esistenza della pu con assegnati invarianti porta l'A. allo studio della più semplice delle funzioni modulari ellittiche, dell'invariante assoluto $J(\tau)$, come funzione nel semipiano positivo del rapporto dei periodi $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$. Segue la riduzione alla forma normale di Weierstrass del dif-

(*) Cfr. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Bd. 29, s. 332.
(**) Cfr. l. c., s. 331.

ferenziale ellittico $\frac{dw}{\sqrt{P(w)}}$, dove $P(w)$ è il polinomio più generale di 3° e 4° grado (problema d'inversione); la distinzione in tre specie, secondo Weierstrass, degli integrali ellittici normali, la riduzione a questi del più generale integrale ellittico.

I tre capitoli che seguono sono dedicati in massima parte alle funzioni di Jacobi $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, ed alle serie ϑ. Lo studio delle funzioni periodiche, le quali, considerate come funzioni del rapporto o dei periodi appartengono ad un sottogruppo del gruppo modulare, la classificazione in *specie* (secondo Klein) di quelle che appartengono a determinati sottogruppi congruenziali del gruppo stesso, conduce l'A. alle tre funzioni σ pari (funzioni periodiche di 3ª categoria e di 2ª specie), alle loro proprietà principali, alle loro trasformazioni per le sostituzioni del gruppo modulare. Dalle σ si hanno poi le funzioni di Jacobi e le loro proprietà caratteristiche (formole di addizione, trasformazioni del 1° ordine, trasformazione complementare, il quadrato k^2 del modulo di Legendre come funzione modulare etc.) Di grande importanza per le applicazioni sono i due capitoli seguenti, sulle proprietà della pu ad invarianti reali, delle funzioni di Jacobi, quando il modulo k è compreso tra 0 od 1, sugli sviluppi in prodotti infiniti ed in serie trigonometriche delle funzioni σ, sulle serie ϑ di Jacobi.

Alla trasformazione delle funzioni ellittiche, alle funzioni ed alle equazioni modulari sono dedicati i Capitoli dal XV al XVII, ammirevoli per eleganza e chiarezza. Partendo dal problema generale della trasformazione della pu, (della ricerca cioè delle funzioni pu, con diversi periodi, che sono legate da una relazione algebrica) che subito si riduce al problema più semplice delle trasformazioni razionali, da poche e chiare idee generali l'A. deduce le principali proprietà delle funzioni ed equazioni modulari, il teorema di diramazione di Klein, i risultati di Hermite relativi alle prime equazioni modulari trovate, la risoluzione dell'equazione generale di quinto grado, riducendola al problema della divisione per cinque dall'argomento della funzione modulare di Hermite $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$.

Gli ultimi due capitoli dell'opera trattano delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa. Rilevato il legame di queste speciali funzioni ellittiche colla teoria delle forme binarie quadratiche a determinante negativo, l'A. dà le formule effettive di moltiplicazione complessa; dimostra, per queste speciali funzioni ellittiche, la risolubilità per radicali della relativa equazione per la divisione dei periodi, l'esistenza della equazione algebrica per gli invarianti delle classi primitive, di prima e di seconda specie, di assegnato determinante negativo. Dalla teoria Gaussiana della composizione delle forme quadratiche, che l'A. espone sotto la veste geometrica, tenuta dal Klein nelle sue lezioni, segue la determinazione del gruppo di Galois per l'equazione degli invarianti delle classi e la sua risolubilità per radicali. Chiude questa breve e concettosa esposizione della teoria la dimostrazione del teorema di Kronecker della decomponibilità, mediante aggiunta di radicali quadratici, della equazione stessa in tanti fattori di ugual grado, corrispondenti ai generi in cui si distribuiscono le classi primitive di prima specie del determinante che si considera.

Questo, pallidamente riassunto, è il contenuto del libro del Bianchi; qualunque lode sarebbe superflua e presuntuosa. Ci sia lecito solo raccomandarne vivamente lo studio a quanti giovani in Italia coltivano le matematiche superiori, ed esprimere insieme la speranza e l'augurio che a questo altri libri del Bianchi debbano seguire, per l'incremento della cultura matematica e della fama scientifica italiana.

Rieti, 5 agosto 1901.

ONORATO NICCOLETTI.

G. Bigourdan. — *Le système métrique des poids et mesures.* Paris, Gauthier-Villars, 1901.

È trascorso un secolo dalla creazione del *Sistema metrico* adottato ormai da trecento milioni di uomini, e in via di adozione da altrettanti, che abitano gli Stati Uniti e la Gran Brettagna, la Russia, il Giappone, l'Egitto e la Turchia.

Il suo trionfo definitivo non sembra adunque lontano, e l'ora di ricordarne gli umili principii, il faticoso sviluppo, le lotte sostenute, era suonata. Guglielmo Bigourdan, astronomo titolare all'osservatorio di Parigi, ben noto per i suoi studii e i nuovi perfezionamenti agl'istrumenti ed ai metodi di misura, ci ha voluto narrare tutto questo in un volume, pieno d'interesse storico e scientifico al tempo stesso, servendosi dei documenti originali posseduti dall'Osservatorio.

L'idea di prendere dalla natura il prototipo di misura lineare, per assicurarne l'invariabilità, non sembra che debba farsi rimontare ai tempi più remoti, quando si trassero certamente dalle dimensioni del corpo umano le singole unità di misura. Essa insieme alla divisione decimale e al suo rapporto colla lunghezza del pendolo che batte il secondo si trova in un'opera di Gabriele Mouton (1670), vicario della chiesa di S. Paolo a Lione, e fu subito ripresa da Picard, che però con Huyghens e La Condamine propendeva per adottare invece la lunghezza del pendolo che all'equatore batte il secondo. Finalmente, sulle domande reiterate dei tre stati e in mezzo all'entusiasmo di riforme da cui la Francia fu invasa nel 1789, l'Assemblea Nazionale decise, su rapporto del vescovo Talleyrand di adottare la lunghezza del pendolo che batte il secondo a 45° di latitudine. Ma una Commissione dell'Accademia della Scienze respinse questa unità, perchè dipendente da grandezze eterogenee alla lunghezza. Dopo un nuovo rapporto di Talleyrand, Luigi XVI alla vigilia della sua fuga da Varennes sanzionò la misura dell'arco di meridiano, ricevè e s'intrattenne amichevolmente colla Commissione allora nominata. Ma non vogliamo qui spigolare dall'interessante opera del nostro A. i vari episodi che rendono attraente la storia di questa grande impresa cominciata sotto la direzione dell'Accademia e dalla quale la Repubblica Francese, dopo essersi sbarazzata dell'Accademia stessa " perchè un governo saggio non deve tollerare istituzioni parassite ", attendeva la scomparsa di ogni traccia di divisioni territoriali o feudatarie consacrate nella varietà delle antiche misure.

Il psicologo potrà con frutto studiar le critiche misoneiste che dai dotti e più dal popolo vennero contro il nuovo sistema " non necessario in fin dei conti, al " mantenimento della repubblica "; le piccole invidie, le sottigliezze, i raggiri, i ritorni più o meno velati all'antico, che protrassero l'adozione definitiva del sistema metrico, quale i suoi autori l'avevano voluto, fino alla legge del 4 luglio 1837. Lo scienziato ci troverà non solo l'esposizione minuta di tutta la parte scientifica delle misure e dei calcoli che ebbero luogo alla prima determinazione del metro, insieme a molte cose ancora inedite, quali i disegni del comparatore di Fortin, etc., ma anche le critiche e le discussioni che furono in seguito fatte dai corpi scientifici, segnatamente dalla Conferenza geodetica internazionale del 1867, le decisioni della conferenza internazionale del metro, il riassunto dei lavori dell'ufficio internazionale di Pesi e Misure dal 1875 al 1900. La Bibliografia delle pubblicazioni di questi due ultimi corpi scientifici, e la tavola cronologica delle leggi francesi relative alle misure dal 1557 in poi, chiude l'opera importante.

Della quale alcuno lamenterà forse l'omissione, per la parte anedottica, di celebri libelli contro la Commisione del metro, come quello di Marat " *Les charlatans académiques* " che non dovevano esser dimenticati; e per la parte scientifica, i ben noti errori di Méchain e la sua singolare insistenza a nasconderli.

R. Pitoni.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 15 agosto 1901.

Sulla ricerca del " logaritmoseno " e del " logaritmotangente "

DEGLI ARCHI PICCOLI

(Continuazione, vedi fasc. precedente).

Questo ragionamento è basato sull'aver preso per limite superiore di g_1 (8)

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8 \operatorname{sen}^2 x_1};$$

servendosi invece del limite da noi indicato, e che è uguale al precedente moltiplicato per M, si vede che *basterebbe* usare una tavola

di	1″	in	1″	da	0° 25′	a	4° 06′		
»	10″	»	10″	»	4° 06′	»	25° 23′		per $n = 7$
»	1′	»	1′	»	25° 23′	»	45°		

di	1″	in	1″	da	0° 03′	a	0° 25′		
»	10″	»	10″	»	0° 25′	»	2° 28′		per $n = 5$.
»	1′	»	1′	»	2° 28′	»	45°		

§ 20. — **Secondo Metodo.** — Questo metodo consiste nel supporre

(26) $\quad \operatorname{logsen} x = \log x \quad$ e $\quad$ (27) $\quad \operatorname{logtan} x = \log x$,

ma, per evitare il passaggio dalla misura in gradi alla misura circolare (passaggio generalmente necessario), si riduce x in secondi e dal logaritmo del numero x'' di questi secondi si toglie il logaritmo di $648000 : \pi$, ossia il logaritmo del *raggio in secondi* (poichè così si suol chiamare il logaritmo del numero di secondi contenuti in un arco che abbia per lunghezza il raggio), e che si indica con $\log R''$. Il metodo in discorso consisterà quindi nel porre

(26)′ $\operatorname{logsen} x = \log x'' - \log R''$ e (27)′ $\operatorname{logtan} x = \log x'' - \log R''$

dove

(28) $$\log R'' = 5,31442\ 51331\ 76459 \ldots;$$

questo numero si trova in quasi tutte le tavole, e nella prima delle tavole dello Schrön è ripetuto a piè di ogni pagina.

Indichiamo con g_{II} e con g'_{II} gli errori portati dalla (26) e

---

(8) Veggasi, per es., Vieille, *Theorie générale des approximations numériques.* (Ed. Mallet Bachelier, Parigi 1854).

dalla (27) rispettivamente, ossia le quantità che si dovrebbero aggiungere ai secondi membri affinchè le eguaglianze stesse fossero esatte, avremo evidentemente

$$(29) \qquad g_{\text{II}} = \log \frac{\text{sen}\, x}{x} \quad \text{e} \quad (30)\ g_{\text{II}}' = \log \frac{\tan x}{x};$$

dalle quali risulta intanto che g_{II} è negativo e che g_{II}' è positivo; ma, volendo per l'uno e per l'altro un limite superiore, si può procedere nel modo seguente. Si sviluppino i secondi membri in serie di MAC-LAURIN arrestate al terzo termine, si avrà

$$(31) \qquad g_{\text{II}} = -\,\text{M}\,\frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{\text{sen}^2\,\theta x} - \frac{1}{(\theta x)^2}\right]$$

e

$$(32) \qquad g'_{\text{II}} = +\,\text{M}\,2\,x^2\left[\frac{1}{(2\,\theta_1 x)^2} - \frac{\cos 2\,\theta_1 x}{\text{sen}^2\,2\,\theta_1 x}\right];$$

e le quantità fra le parentesi quadre sono positive e crescono ambedue al crescere di θx e di $\theta_1 x$ rispettivamente. Che sia positiva la prima è evidente; per dimostrare che è positiva pure la seconda bisogna dimostrare che si ha

$$(33) \qquad \left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 - \cos x > 0;$$

e per dimostrare che ambedue crescono bisogna dimostrare che le loro derivate son positive, ossia che si ha

$$(34) \qquad \left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^3 - \cos x > 0$$

e

$$(35) \qquad 1 + \cos^2 x - 2\left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^3 > 0;$$

e siccome poi la (33) è vera *a fortiori* se è vera la (34), basterà dimostrare queste ultime due. Perciò osserviamo che i primi membri son nulli per $x = 0$, per dimostrare quindi che essi son positivi basterà far vedere che essi crescono al crescere di x, ossia che le loro derivate son positive, ossia che si ha

$$(36) \qquad 3\,(1 - \cos 2\,x) - 3\,x\,\text{sen}\,2\,x < 2\,x^4$$

e

$$(37) \qquad 3\,(1 - \cos 2\,x) - 3\,x\,\text{sen}\,2\,x > 2\,x^4 \cos x$$

E infatti, sviluppando le funzioni trigonometriche in serie d MAC-LAURIN, opportunamente arrestate, si vede facilmente che per x minore di $\frac{\pi}{2}$ queste son vere.

Avremo quindi, indicando con $|g_{\text{II}}|$ il valore assoluto di g_{II},

$$(38) \qquad |g_{\text{II}}| < \mathrm{M}\,\frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right]$$

e

$$(39) \qquad g'_{\text{II}} < \mathrm{M}\,\frac{(2x)^2}{2}\left[\frac{1}{(2x)^2} - \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\right].$$

Osservazione I. — Le stesse quantità fra le parentesi quadre, nei secondi membri della (31) e della (32), per x tendente a zero tendono a $\frac{1}{3}$ e a $\frac{1}{6}$ rispettivamente; come si vede applicando in ambo i casi la nota regola dell'Hospital quattro volte di seguito; avremo quindi anche

$$(40) \qquad |g_{\text{II}}| > \mathrm{M}\,\frac{x^2}{6} \qquad \text{e} \qquad (41) \qquad g'_{\text{II}} > \mathrm{M}\,\frac{(2x)^2}{12}.$$

Osservazione II. — È facile vedere che g'_{II} è sempre maggiore di $|g_{\text{II}}|$; infatti per ciò basterà che sia

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{x},$$

e questa coincide colla (33).

Osservazione III. — Dalla (39) si può ricavare, col solito procedimento, l'altra

$$(42) \qquad g'_{\text{II}} < \mathrm{M}\,\frac{(2x)^2}{12}\left\{\frac{6}{6-(2x)^2}\right\}^2 \cdot \left\{1 + \frac{4}{15}(2x)^2\right\}$$

molto più comoda per il calcolo numerico.

Osservazione IV. — Ci siamo fermati un po' lungamente su queste ricerche, perchè il metodo in discorso è uno di quelli che crediamo da seguirsi, nei casi che indicheremo in seguito, e poi perchè i risultati ottenuti in questo paragrafo ci saranno utili anche nello studio dell'ultimo metodo (§ 39).

§ 21. — Ed ora si può facilmente, per $n = 5, 6, 7$, indicare un limite di x sotto il quale il metodo in questione porti un errore minore di una mezza unità dell'ultimo ordine.

Osserviamo prima di tutto che, volendo che uno stesso limite valga tanto per il logseno quanto per il logtangente, basterà

(§ 20 oss. II) che sia minore di una mezza unità g'_{II} soltanto. Ciò posto, dalla (42),

$$\begin{array}{llllll} \text{se} & n=5 & \text{per} & x \leqq 20' & \text{si ha} & g'_{II} < 0{,}491\,, \\ \text{»} & n=6 & \text{»} & x \leqq 6' & \text{» »} & g'_{II} < 0{,}441\,, \\ \text{»} & n=7 & \text{»} & x \leqq 2' & \text{» »} & g'_{II} < 0{,}490\,. \end{array}$$

Ma g_{II} e g'_{II} non costituiscono tutto l'errore portato dal secondo metodo, perchè a questo si aggiunge l'altro che si può commettere calcolando, colla interpolazione ordinaria, $\log x''$: ora, supposto che per $n=5$ od $n=6$ nella tavola dei logaritmi dei numeri bisogni ricorrere alla interpolazione da 1000 in poi e che per $n=7$ bisogni far ciò da 10000 in poi, quest'altro errore (come si vede colla (13)) è certamente minore di 0,005429 per $n=5$, di 0,05429 per $n=6$ e di 0,005420 per $n=7$; aggiungendo quindi questi errori ai corrispondenti limiti, avremo che nelle tre ipotesi indicate l'errore, derivante dall'aver ammesse la (26) o la (27) e dal calcolare $\log x''$ colla ordinaria interpolazione, è ancora minore di una mezza unità dall'ultimo ordine.

A questo errore si aggiunge il solito errore l, che anche in questo caso ha per limite l'unità, purchè, se nella ricerca di $\log x''$ occorre l'interpolazione, si trascurino le cifre successive alla n^{ma} solo dopo aver sottratto $\log R''$: infatti l'errore e (§ 3) sarà anche allora minore di mezza unità.

Concludendo: l'errore complessivo portato dall'applicazione del secondo metodo, nelle ipotesi e sotto i limiti indicati, non raggiunge mai 1,5.

Osservazione. — Dalla (41), per i tre casi considerati, si ha rispettivamente

$$g_{II} > 0{,}489 \quad , \quad g'_{II} > 0{,}440 \quad , \quad g'_{II} > 0{,}489:$$

i limiti da noi indicati per g'_{II} sono dunque molto ristretti.

§ 22. — Troviamo indicato questo procedimento nel principio della tavola del Köhler, dove per il logseno e per il logtangente è dato il logarco di decimo in decimo di secondo, ma fino a 1′ solamente, e quindi non è certo per riparare al solito inconveniente, accennato alla fine del § 16.

Il Reidt poi propone questo metodo per x non maggiore di 1,20″ quando n è uguale a 7 e per x non maggiore di 13′ quando n è eguale a. 5: in ambedue i casi l'errore complessivo è certo minore di 1,22.

E noi stessi, supposto $n=6$, lo proponemmo per x non maggiore di 5′ (¹), nel qual caso l'errore complessivo è certo minore di 1,31.

(¹) Veggasi il § 64 della nostra *Appendice*, già citata.

§ 23. — Per una tavola a *cinque* cifre decimali il primo e il secondo metodo, opportunamente limitati, sono più che sufficienti per ottenere il logseno e il logtangente con un errore *complessivo* minore di 1,5. Per ciò basterà che sia $\Delta x = 1''$ fino a 2^0 e $\Delta x = 1'$ da 2^0 in poi e che si stabilisca di ricorrere al secondo metodo quando l'arco sia minore, p: es: di $5'$. Infatti, colla solita seconda tabella del § 6 e coi limiti superiori trovati al § 21, si vede subito che in queste ipotesi tanto g_{I} quanto g_{II}' sono sempre minori di mezza unità.

Per una tavola a *sei* cifre decimali si può dire altrettanto: basta che sia $\Delta x = 1''$ fino a 1^0 (o a 2^0) e $\Delta x = 10''$ (o a $15''$) da 1^0 (o da 2^0) in poi, e stabilire di ricorrere al secondo metodo quando l'arco sia minore di $6'$ (quest'ultimo limite però non può essere sensibilmente alzato come nel caso precedente).

Ma altrettanto non si può dire per una tavola a *sette* cifre decimali, perchè, supposto che essa cominci con $\Delta x = 1''$, e che l'errore complessivo debba essere minore di 1,5, il primo metodo cessa di essere applicabile per x minore di $17'21''$ (§ 16) e il secondo per x maggiore di $2'$ circa (e, p. es:, per $x_1 = 6'$ si avrebbe g_{II}' maggiore di 4,4 e g_{I} maggiore di 4,1).

Osservazione I. — La prima parte della tavola (in cui $\Delta x = 1''$) può essere opportunamente estesa oltre i limiti indicati, per facilitare i calcoli necessarî alla interpolazione.

Osservazione II. — Osserviamo che per $n = 5$ raramente occorre l'interpolazione nella ricerca di $\log x''$, e che quindi raramente il limite dell'errore complessivo sorpassa una unità. Aggiungiamo di più che gli errori g_{I} e g'_{II}, nelle ipotesi fatta per $n = 5$, sono molto minori di una mezza unità, perchè pei $\Delta x = 1''$ a partire da $5'$ e per $\Delta x = 1'$ a partire da 2^0 l'errore g_{I} è minore di 0,06 e di 0,38 rispettivamente: e applicando il secondo metodo per x minore di $5'$ l'errore g_{II}' è minore di 0,05.

§ 24. — **Terzo metodo.** — Questo metodo, dovuto all'astronomo MASKELYNE [1] consiste nel supporre

$$\log \operatorname{sen} x = \log + \frac{1}{3} \log \cos x, \tag{43}$$

e

$$\log \tan x = \log - \frac{2}{3} \log \cos x, \tag{44}$$

---

[1] Veggasi: HAMMER (l. c.) pag. 97; TODHUNTER (l. c.) pag. 154; HOUEL (l. c.) pag. XXXIX.

ossia (§ 20)

$$(43)^1 \qquad \log \operatorname{sen} x = \log x'' - \log R'' + \frac{1}{3} \log \cos x \,,$$

e

$$(44)^1 \qquad \log \tan x = \log x'' - \log R'' - \frac{2}{3} \log \cos x \,.$$

Osserviamo prima di tutto che la (44) si può ricavare immediatamente dalla (43) sottraendo dai due membri di questa logcos x [1]; basterà dunque studiare l'errore che è portato dalla (43) e che indicheremo con g_{III} (onde g_{III} sarà la quantità che si dovrebbe aggiungere ai secondi membri della (43) e della (44) affinchè queste equaglianze fossero esatte).

Ciò posto, siccome è noto [2] che, se si pone

$$(45) \qquad S_{2p} = 1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \dots + \frac{1}{p^{2p}} + \dots$$

si ha

$$(46) \quad \log \operatorname{sen} x = \log x - M \left\{ S_2 \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{S_4}{2} \frac{x^4}{\pi^4} + \dots + \frac{S_{2p}}{p} \frac{x^{2p}}{\pi^{2p}} + \dots \right\}$$

e

$$(47) \quad \log \cos x = - M \left\{ S_2 (2^2 - 1) \frac{x^2}{\pi^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{S_4}{2} (2^4 - 1) \frac{x^4}{\pi^4} + \dots + \frac{S_{2p}}{p} (2^{2p} - 1) \frac{x^{2p}}{\pi^{2p}} + \dots \right\}$$

sarà

$$(48) \quad g_{\text{III}} = M \left\{ \left(\frac{2^4 - 1}{3} - 1 \right) \frac{S_4}{2} \frac{x^4}{\pi^4} + \dots + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2^{2p} - 1}{3} - 1 \right) \frac{S_{2p}}{p} \frac{x^{2p}}{\pi^{2p}} \dots \right\}$$

da cui risulta che g_{III} è positivo e crescente al crescere di x.

---

(1) Non è dunque necessario, dopo aver dimostrato che la (43) è approssimativamente vera, fare altrettanto per la (44), come fanno l'HAMMER e il TODHUNTER.

(2) Veggasi, p. es., NOVI, — *Trattato di Algebra Superiore* — pag. 339 e 340 (Ed. Le Monnier — Firenze 1863)

§ 25. — Si verifica facilmente che, supposto $n=7$, per x eguale a $2^\circ 44'$ g_{III} è ancora minore di 0,5 e che per x eguale a $2^\circ 45'$ comincia a essere maggiore di 0,5: ma, supposto $\Delta x = 10''$ per x eguale a $2^\circ 45'$ è maggiore di 0,5 anche g_I, dunque questo terzo metodo, nelle ipotesi indicate, non può sostituire gli altri due e sempre occorre una parte della tavola con $\Delta x = 1''$.

Supposto invece $n=6$ e $\Delta x = 10''$, $n=6$ e $\Delta x = 15''$, $n=5$ e $\Delta x = 1'$, la tavola si può usare fino a x eguale a $55'$, a $1^\circ 22' 30''$ e a $1^\circ 45'$ rispettivamente, e quindi il metodo in discorso potrebbe completamente sostituire i due precedenti.

Siccome però per applicare questo metodo bisognerebbe ricorrer sempre a due tavole e potrebbero anche esser necessarie due interpolazioni, ci pare che esso non sia preferibile ai due precedenti (limitati come s'è detto) per $n=5$ ed $n=6$, nè a quello che vedremo (§ 39) per $n=7$.

Senza notare che a g_{III} si aggiungono gli altri due errori che si possono commettere calcolando, colla interpolazione ordinaria, $\log x''$ e $\frac{1}{3}\log\cos x$ (la somma di questi due errori però non supera 0,00671), e che ad l si aggiunge il corrispondente errore che si commette nel calcolo di $\frac{1}{3}\log\cos x$ e che (supponendo anche qui di trascurare le cifre successive alla n^{ma} non nei calcoli di $\log x''$ e di $\frac{1}{3}\log\cos x$, ma solo nel risultato finale), ha per limite 0,1666....

§ 26. — Questo metodo, quando sia $n=7$, è proposto dal Reidt per x minore di $2^\circ 44'$; ma si verifica facilmente che per questo valore di x g_{III} è maggiore di 0,496, quindi, tenendo conto di quanto abbiamo detto alla fine del § prec., questo limite è un po' troppo alto. Lo stesso autore lo propone, quando sia $n=5$, per x minore di $8^\circ 32'$ e questo limite è sufficientemente basso.

Supposto ancora $n=7$, esso è proposto anche nelle tavole dello Chambers per x minore di 2°; ma, come già si osservò al § 8, questo limite è molto basso e, anche spingendo l'uso del metodo in discorso fino a $2^\circ 44'$, sarebbe poi sempre necessario ricorrere a un altro metodo fino a 13° circa.

Anche il Todhunter lo propone, ma non dice fino a quale valore di x si possa adottare, nè indica un limite superiore dell'errore che si commette.

E ricorderemo, finalmente, l'Hammer, il quale fa questo ragionamento. « Si ha approssimativamente

$$(49) \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{ossia} \quad \operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{x^2}{2}\right),$$

« ma, pure approssimativamente,

$$(50) \qquad x\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{x^2}{2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

« ed anche

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}; \tag{51}$$

« dunque sarà

$$\operatorname{sen} x = x (\cos x)^{\frac{1}{3}} \tag{52}$$

« e da questa si ha la (43). » E dopo di ciò egli asserisce che, affinchè, supposto $n = 5$, g_{IV} sia minore di 0,5, *deve essere* $\frac{x^4}{4!}$ minore di 0,000005, tenendo così conto solo dell'errore da cui è affetto il secondo membro della (49) e non di quelli da cui sono affetti i secondi membri della (50) e della (51). È con questo ragionamento che egli conclude che, per l'applicabilità del terzo metodo, deve essere x minore di 6^g, come già accennammo al § 13.

§ 27. — **Quarto metodo.** — Questo metodo consiste nel supporre

$$\log \operatorname{sen} x = \log \operatorname{sen} 10\, x - \log 10 - 0{,}33 \log \cos 10\, x, \tag{53}$$

e

$$\log \tan x = \log \tan 10\, x - \log 10 + 0{,}66 \log \cos 10\, x; \tag{54}$$

ed è proposto nella prefazione alle tavole del Borda [1], pubblicate dal Delambre; queste tavole però sono fuori di uso [2] e non avremmo preso in esame il metodo in discorso, se non lo avessimo visto (sostanzialmente) proposto anche nelle recenti tavole del Rex. [3]

Indicando con g_{IV} e con g'_{VI} gli errori portati dalle due eguaglianze precedenti (ossia le quantità che si dovrebbero aggiungere ai secondi membri, perchè le uguaglianze stesse fossero esatte), e servendosi anche qui della (46) e della (47), dopo facili riduzioni si trova

$$\frac{g_{\text{IV}}}{\text{M}} = -\frac{\text{S}_4\, x^4}{2\,\pi^4}\left\{1 + 33\,(2^4 - 1)\,10^2 - 10^4\right\} - \ldots \tag{55}$$

$$- \frac{\text{S}_{2p}\, x^{2p}}{p\,\pi^{2p}}\left\{1 + 33\,(2^{2p} - 1)\,10^{2(p-1)} - 10^{2p}\right\} - \ldots.$$

---

[1] Borda, — *Tables trigonométriques d'cimales.* — (De l'Imprimerie de la République, — Parigi, An. IX).

[2] Per i calcoli colla divisione centesimale si hanno ora le splendide *Tables des logarithmes a huit décimales, publiées par ordre du Ministre de la Guerre* (Imprimerie Nationale, — Parigi 1893).

[3] F. W. Rex, — *Vierstellige Logarithmen-Tafeln.* — (Ed. Metzler, Stuttgarda).

e

$$(56)\quad \frac{g'_{\mathrm{IV}}}{\mathrm{M}} = -\frac{\mathrm{S}_4 x^4}{2\pi^4}\left\{1+(2^4-2)\,10^4-(2^4-1)\,(1+66.10^2)\right\}-\ldots.$$

$$-\frac{\mathrm{S}_{2p}\, x^{2p}}{p\,\pi^{2p}}\left\{1+(2^{2p}-2)\,10^{2p}-(2^{2p}-1)\,(1+66.10^{2(p-1)})\right\}-\ldots.$$

dalle quali risulta che g_{IV} e g'_{IV} sono ambedue negativi e che (essendo p non minore di 2) ambedue crescono, in valore assoluto, al crescere di x.

Osservazione. — È facile vedere che $|g'_{\mathrm{IV}}|$ è sempre maggiore di $|g_{\mathrm{IV}}|$; infatti per ciò basterà che sia

$$10^{2p}-1-66.10^{2(p-1)} > 33.10^{2(p-1)},$$

e questa, per p non minore di 2, è evidente. Volendo quindi che uno stesso limite di x valga tanto per logseno quanto per logtangente, basterà considerare g'_{IV} soltanto.

§ 28. — Si verifica facilmente che, supposto $n=7$, per x eguale a 16′ $|g'_{\mathrm{IV}}|$ è ancora minore di 0,5 e che per x eguale a 17′ comincia ad essere maggiore di 0,5, (cresce poi rapidamente tanto da essere maggiore di 5, di 52, di 92, di 1527, di 5660,.... per x rispettivamente eguale a 7′, a 52′, a 1°, a 2°, a 2° 45′,...); ma, se $\Delta x = 1''$, per x_1 eguale a 17′ 21″ è maggiore di 0.5 anche g_1, dunque nessuno dei metodi trovati fin qui è sufficiente.

Anche se $n=6$ ed $n=5$ il metodo in discorso, da solo, non è sufficiente, perchè (come si è osservato or ora) per x maggiore di 52′ e di 17′, rispettivamente, si ha $|g'_{\mathrm{IV}}|$ maggiore di 0,5; ma siccome per x minore di 51′ e di 16′, rispettivamente, si ha $|g'_{\mathrm{IV}}|$ minore di 0,5, si vede che sarebbe invece sufficiente il metodo stesso associato al primo (quando cioè si avesse una parte della tavola con $\Delta x = 1''$).

Però anche l'applicazione di questo metodo è alquanto laboriosa (sia pur la tavola a divisione centesimale), e ci pare di poter ripetere, con molto maggior ragione, che (per $n=5$ ed $n=6$) è preferibile ricorrere ai primi due.

Senza notare che a g_{IV} e a g'_{IV} si possono aggiungere due altri errori: quelli che si commettono calcolando colla interpolazione ordinaria logsen $10\,x$ (o logtan $10\,x$) e 0,33 logcos x (o 0,66 log cos x); e che ad l si aggiunge il corrispondente errore che si commette nel calcolo di 0,33 logcos x (o di 0,66 logcos x), e che (sempre supponendo di trascurare le cifre successive alla $n=7$ solo nel risultato finale) ha per limite 0,1666.... (o 0,3333....).

§ 29. — Il Rex, posto $n=4$, propone un metodo anologo al precedente per x minore di 12': osserviamo subito che, essendo in principio della tavola $\Delta x = 0',1$, questo limite è esageratamente alto, giacchè fino da 4' si ha g_1 minore di 0,35. Il calcolo poi è leggermente semplificato coll'aggiunta di una colonna che dà il valore dell'ultimo termine del secondo membro della (54) fino a 2°: ma a noi pare che non valga davvero la pena di seguire questo metodo e che per x minore di 4' sia molto più semplice ricorrere al secondo metodo, il quale, in questo caso, è largamente sufficiente.

Osservazione. — Se x è tanto piccolo che moltiplicato per 10 sia ancora minore di 12' (e contenga dei centesimi di 1'), si moltiplica per 100, per 1000,.... e poi negli ultimi termini dei secondi membri a 0,33 e a 0,66 si sostituisce $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ rispettivamente. Così si insegna nella prefazione alle tavole del Borda, ma, per quanto abbiamo detto, crediamo inutile fermarci più a lungo su questo procedimento.

§ 30. — **Quinto metodo.** — Questo metodo consiste nel ricavare prima i valori di sen$x$ e di tan$x$ da una tavola dei valori naturali, e poscia i logaritmi di questi valori da una tavola dei logaritmi dei numeri.

Osserviamo prima di tutto che, indicando con s il valore del *seno,* ricavato ammettendo il principio delle parti proporzionali, e con g_3 ed l_3 i soliti errori corrispondenti, sarà

$$\operatorname{sen} x = s + g_3 + l_3 ,$$

ma si ha in generale

$$\log(\mathrm{N}+h) = \log \mathrm{N} + \frac{\mathrm{M}\,h}{\mathrm{N}+\theta h} \tag{57}$$

dove N è un numero qualunque (diverso da zero) ed M e θ hanno i soliti significati; quindi, se con g_{V} si indica l'errore che si commette con questo metodo nella ricerca di log sen x, si avrà

$$g_{\mathrm{V}} = \frac{(g_3+l_3)\,\mathrm{M}}{s+\theta\,(g_3+l_3)} . \tag{58}$$

Ora, g_3 è sempre positivo ed l_3 può essere positivo o negativo, sarà dunque

$$-|l_3| < \theta\,(g_3+l_3) < g_3 + |l_3|$$

e quindi

$$(59) \qquad \frac{(g_3 + l_3)\,\mathrm{M}}{s + g_3 + |l_3|} < |g_{\mathrm{V}}| < \frac{(g_3 + l_3)\,\mathrm{M}}{s - |l_3|}$$

ed anche

$$(60) \qquad \frac{(g_3 - |l_3|)\,\mathrm{M}}{\mathrm{sen}\,(x_1 + \Delta x) + g_3 + |l_3|} < |g_{\mathrm{V}}| < \frac{(g_3 + |l_3|)\,\mathrm{M}}{\mathrm{sen}\,x_1 - |l_3|}\,.$$

Si noti che, supposto l_3 positivo, si ha

$$s + g_3 + |l_3| = s + g_3 + l_3 = \mathrm{sen}\,x\,,$$

per cui, dalla (59), sarà certamente

$$(61) \qquad |g_{\mathrm{V}}| > \frac{(g_3 + l_3)\,\mathrm{M}}{\mathrm{sen}\,x}\,;$$

ma per x tendente a zero tende a zero anche g_3, quindi per x molto piccolo (essendo il limite superiore di l_3 una unità dell'ultimo ordine) g^{V} può essere molto vicino ad M.

A questo errore poi si aggiunge il solito errore l (§ 3), che si commette nella ricerca di $\log s$.

E ad analoghi risultati si arriva se si applica il procedimento indicato alla ricerca di $\mathrm{logtan}\,x$.

Osservazione. — Ci pare notevole il fatto che, se non si tiene conto di l_3 e si suppone $x = x_1 + \frac{\Delta x}{2}$, l'errore g_{V} dipende solo da Δx e non da x_1. Infatti in questo caso si ha

$$s = \mathrm{sen}\,x_1 + \frac{1}{2}\,[\mathrm{sen}\,(x_1 + \Delta x) - \mathrm{sen}\,x_1] = \mathrm{sen}\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos\frac{\Delta x}{2}$$

e quindi

$$g_{\mathrm{V}} = \log \mathrm{sen}\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\right) - \log s = -\log \cos\frac{\Delta x}{2}\,.$$

§ 31. — L'Houel propone questo metodo per i primi tre gradi, e perciò, in principio della tavola che dà i logaritmi delle funzioni trigonometriche di 1′ in 1′ e a *cinque* cifre decimali, aggiunge due colonne coi valori naturali di seno e di tangente a *sei* cifre decimali; dei valori ricavati da queste colonne si devono poi pigliare i logaritmi dalla tavola, a *cinque* cifre decimali, dei logaritmi dei numeri. Applichiamo, per esempio, il metodo in discorso alla ricerca di $\mathrm{logsen}\,3'\,30''$. Dalle colonne indicate, mediante la interpolazione ordinaria, si ha

$$s = 0{,}001019\,;$$

e per avere i limiti dei corrispondenti errori g_s col l_s si può tenere il seguente procedimento, dove per i valori di g_3 e di l_s si è presa per cifra delle unità la sesta cifra decimale. Dalla (14) e dalla (16) si ha

$$0{,}00000922 < g_s < 0{,}00001231\,,$$

e quindi, essendo g_s positivo.

$$0{,}00101900000922 < s + g_s < 0{,}00101900001231\,;$$

ma dalle tavole del Vega a dieci cifre (pag. 631) si ha direttamente

$$0{,}0010181085535 < \text{sen}\, 3'\, 30'' < 0{,}0010181085545\,,$$

dunque l_s sarà negativo e si avrà

$$0{,}8914455 < |l_s| < 0{,}89145472\,.$$

Dalla (59), prendendo per cifra delle unità la quinta cifra decimale, si avrà quindi

$$37{,}959 < g_V < 38{,}027\,.$$

E infatti dalle tavole del Vega si ha

$$\log s = \overline{3}\,,0081741840$$

e

$$\log \text{sen}\, 3'\, 30'' = \overline{3}\,,0077940864\,,$$

è quindi certamente

$$g_V = 38{,}009\ldots$$

Ricavando invece $\log s$ dalla tavola I dell' Houel si ha

$$\log s = \overline{3}\,,00817\,,$$

e quindi, essendo il nuovo errore l negativo, l'errore complessivo $g_V + l$, da cui è affetto il risultato, diminuisce e si riduce a $37{,}59\ldots$ ma è sempre maggiore di 37 unità dell' ultimo ordine.

Il Vega, nelle sue tavole a dieci cifre, propone questo metodo per x minore di 12' e dà per ciò (pag. 631 e 632) una tavola dei seni naturali di 1'' in 1'', nella quale il numero delle cifre decimali è variabile ed è precisamente tale che dopo la prima cifra significativa si trovano sempre altre nove cifre; per ciò, supposto x maggiore di 2'', si hanno

14	cifre	decimali	da	0' 03''	a	0' 20''
13	»	»	»	0' 21''	»	3' 26''
12	»	»	»	3' 27''	»	12' 00''

gli estremi inclusi. Considerando per cifra delle unità la decima cifra decimale e supponendo che $|l_s|$ possa raggiungere il suo val massimo (cioè una unità dell' ultimo ordine, § 3), dalla (60) risulta che

per	$3'\,26'' < x < 12'\,00''$	si ha	$4,31 < \lvert g_{\mathrm{V}} \rvert < 4,37$
»	$0'\,20'' < x < 3'\,26''$	» »	$4,50 < \lvert g_{\mathrm{V}} \rvert < 4,25$
»	$0'\,02'' < x < 0'\,20''$	» »	$2,98 < \lvert g_{\mathrm{V}} \rvert < 4,50.$

A questo errore si aggiunge poi, come s'è detto, il solito errore l nel calcolo di $\log s$, quindi, per quanto l'errore complessivo che si può commettere usando la tavola ora accennata e quella dei logaritmi dei numeri a dieci cifre decimali sia molto minore di quello che si può commettere colle tavole dell' Houel, ci pare che il metodo in questione (anche prescindendo dal fatto che per applicarlo bisogna ricorrere a due tavole) non sia consigliabile neppure quando si usino le grandi tavole del Vega. [1]

Osservazione I. — Il Vega consiglia di eseguire il calcolo delle parti proporzionali colla moltiplicazione abbreviata *(per multiplicationem contractam*, — *mittelst abgekürzten Multiplikation*, — Introduzione, p. XXII); quindi agli errori qui indicati si aggiunge un altro errore ancora: di questo nuovo errore noi stessi demmo già un limite sureriore. [2]

Osservazione II. — Volendo, colle tavole del Vega, il logaritmo tangente di un arco minore di 12', basta togliere il logcoseno dal logseno; così però il limite superiore dell' errore complessivo aumenta, e quindi le conclusioni precedenti sono vere a maggior ragione.

§ 32. — **Sesto metodo.** — Questo metodo consiste nel supporre che il rapporto fra due archi piccoli sia eguale al rapporto dei loro seni e al rapporto delle loro tangenti, ossia nel supporre che per tali archi si abbia

$$(62)\quad \frac{\operatorname{sen}(x_1+\delta x)}{\operatorname{sen} x_1}=\frac{x_1+\delta x}{x_1} \quad \text{e} \quad (63)\quad \frac{\tan(x_1+\delta x)}{\tan x_1}=\frac{x_1+\delta x}{x_1}$$

Indicando con g_{VI} e con g'_{VI} gli errori portati in logseno e in logtangente dalle precedenti ipotesi, sarà

$$(64)\quad g_{\mathrm{VI}}=[\log\operatorname{sen}(x_1+\delta x)-\log(x_1+\delta x)]-[\log\operatorname{sen}x_1-\log x_1]$$

e

$$(65)\quad g'_{\mathrm{VI}}=[\log\tan(x_1+\delta x)-\log(x_1+\delta x)]-[\log\tan x_1-\log x_1]$$

---

(1) Il quinto metodo è proposto anche dal Prof. Gallo [*Lezioni di Trigonometria rettilinea* pag. 157. — Ed. Castaldi, Aversa 1892)]; il quale però non dice precisamente entro qual limiti si debba applicare e fa, invece, la seguente osservazione.

« Sebbene per i due esempi 3 e 6 si è usato lo stesso modo di interpolazione che per « gli altri esempi, pure cessa di essere applicato trattandosi di angoli verso l'estremità del « quadrante, o di linee trigonometriche i cui logaritmi diventano piccolissimi o grandissimi ».

Gli esempi 3 e 6 consistono nella ricerca di logsen 15° 34′ 23″, 6 e di logcosec 75° 46′ 24″, 8, ai quali (supposto $\Delta x = 1'$ ed $n = 5$) l'A. ha applicato il solito principio delle parti proporzionali; ma i due logaritmi precedenti sono eguali rispettivamente a − log sen 74° 25′ 36″, 4 e a − log sen 75° 46′ 24″, 8 e l'errore di interpolazione cala al crescere di x_1 (§ 5), quindi il principio stesso non dovrebbe ritenersi applicabile quando x sia minore di 75° 46′ 24″, 8: l'A. stesso in altri esempi non è di questo parere. (Accanto ai risultati finali dei due esempi accennati, come accanto a un altro che consiste nella ricerca di logcotg 27° 13′ 55″, 4, si trova segnato (— 10), ma certo, solo per errore di stampa).

(2) Veggasi il § 13 della nostra *Appendice*, più volte citata.

e quindi

$$(66) \qquad g_{\text{VI}} = -\,\mathrm{M}\,\delta x \left[\frac{1}{x_1 + \theta\,\delta x} - \frac{1}{\tan(x_1 + \theta\,\delta x)}\right]$$

e

$$(67) \qquad g'_{\text{VI}} = +\,2\,\mathrm{M}\,\delta x \left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2(x_1 + \theta_1\,\delta x)} - \frac{1}{2(x_1 + \theta_1\,\delta x)}\right].$$

Ma le quantità poste fra le parentesi quadre sono ambedue positive (e questo è evidente), e crescono ambedue al crescere di $x_1 + \theta\,\delta x$ e di $x_1 + \theta_1\,\delta x$ rispettivamente (e questo si vede ricorrendo alle derivate prime e ricordando la (23)), dunque sarà certamente

$$(68) \qquad |g_{\text{VI}}| < \mathrm{M}\,\Delta x \left[\frac{1}{x_1 + \Delta x} - \frac{1}{\tan(x_1 + \Delta x)}\right]$$

e

$$(69) \qquad g'_{\text{VI}} < 2\,\mathrm{M}\,\Delta x \left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2(x_1 + \Delta x)} - \frac{1}{2(x_1 + \Delta x)}\right]$$

e per δx tendente a Δx sarà anche

$$(70) \qquad |g_{\text{VI}}| > \mathrm{M}\,\Delta x \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{\tan x_1}\right]$$

e

$$(71) \qquad g'_{\text{VI}} > 2\,\mathrm{M}\,\Delta x \left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2x_1} - \frac{1}{2x_1}\right].$$

Osservazione. — È facile vedere che g'_{IV} è sempre maggiore di $|g_{\text{VI}}|$; per ciò si osservi che, essendo g_{VI} negativo, si ha

$$g'_{\text{VI}} - |g_{\text{VI}}| = [\operatorname{logtan}(x_1 + \delta x) - 2\log(x_1 + \delta x) + \operatorname{logsen}(x_1 + \delta x)] - $$
$$- [\operatorname{logtan} x_1 - 2\log x_1 + \operatorname{logtan} x_1[$$
$$= \mathrm{M}\,\Delta x \left[\frac{2}{\operatorname{sen} 2(x_1 + \theta\,\delta x)} - \frac{2}{x_1 + \theta\,\delta x} + \frac{1}{\tan(x_1 + \theta\,\delta x)}\right]$$

onde basterà dimostrare che per $x < \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{\tan x} > \frac{2}{x}$$

ossia

$$3 + \cos 2x < 4 \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$$

e questo si vede facilmente sviluppando anche quì (§ 20) $\cos 2x$ e $\operatorname{sen} 2x$ in serie Mac-Laurin opportunamente arrestate.

§ 33. — Il Serret (l. c. pag. 75), seguendo in ciò completamente il Callet (l. c., *Explication*, pag. 35), il quale, con $n = 7$, pone $\Delta x = 10''$, ma dà una tavola separata con $\Delta x = 1''$ fino a 5^0, insegna l'ordinario metodo di interpolazione per $\Delta x = 10''$, e dimostra che l'applicazione di questo metodo non porta errori maggiori di una unità del settimo ordine, quando x sia maggiore di 5^0 (col ragionamento che riportammo al § 8); e quando poi sia x minore di 5^0 e contenga delle frazioni di secondi dice che l'ordinario metodo di interpolazione non conduce più a una approssimazione sufficiente e che bisogna usare il metodo del § prec. (servendosi per ciò della tavola con $\Delta x = 1''$).

Ora per $x_1 = 42'$ dalla (70), essendo $n = 7$, si ha

$$|g_{\text{VI}}| > 0,0857,$$

mentre che dalla (9), supposto $\Delta x = 1''$ si ha

$$g_1 < 0,0855,$$

dunque usando il metodo indicato dal Serret nella ricerca di logseno, per $x_1 = 42'$, si commette un errore maggiore di quello che si commette colla ordinaria interpolazione; per $x_1 = 3^0\,15'$ poi si ha

$$|g_{\text{VI}}| > 0,3980$$

mentre che, anche supponendo $\Delta x = 10''$, si ha

$$g_1 < 0,3973,$$

dunque per $x_1 = 3^0\,15'$ l'errore portato dal metodo suggerito dal Serret è maggiore di quello portato dalla ordinaria interpolazione, anche se, non avendo una tavola con $\Delta x = 1''$, si ricorre a una tavola con $\Delta x = 10''$.

E tutto ciò è maggiormente vero se si tratta del logtangente, perchè dalla Oss. II del § 4 e dalla Oss. del § 22 risulta

$$g'_1 < g_1 \qquad \text{e} \qquad |g_{\text{VI}}| < g'_{\text{VI}}$$

e quindi

$$g'_1 < g'_{\text{VI}}$$

Per esempio, se $x_1 = 34'$, dalla (71) si ha

$$g'_{\text{VI}} > 0,1342,$$

mentre che dalla (10) si ha

$$g'_1 < 0,1314 .$$

Il metodo in discorso non deve dunque per $n = 7$, essere applicato fino a 5^0: chè da $42'$ per il logseno e da $34'$ per il logtangente è certamente preferibile ricorrere alla solita interpolazione semplice.

Siccome poi esso è alquanto laborioso e richiede sempre l'uso di due tavole diverse, delle quali quella dei logaritmi delle funzioni trigonometriche deve cominciare con $\Delta x = 1''$, ci pare che per $n = 7$ non sia da preferirsi a quello del § 39 e che neanche per $n = 5$ ed $n = 6$ sia da preferirsi ai primi due opportunamente limitati (§ 23).

Senza notare che a $|g_{VI}|$ e a g'_{VI} si aggiunge l'errore che si può commettere nella ricerca di $\log (x_1 \div \varepsilon x)$ colla ordinaria interpolazione e che all'errore l (avente per massimo 1) si aggiungono i due errori (aventi per massimo, ciascuno, 0,5) da cui sono affetti $\log \operatorname{sen} x_1$ e $\log x_1$.

Osservazione. — Fra i trattati, che, seguendo quello del Serret, propongono il metodo precedente (sempre supponendo $n = 7$) ricorderemo il Lalbalettrier (l. c. pag. 53) e l'André [1], il primo per x minore di 5°, il secondo per x minore di 2°. — Anche il *De Comberousse* (l. c. pag. 651) suggerisce questo metodo per x minore di 3°, ma poi, nel volerne mostrare l'applicazione a un esempio, segue invece, come vedremo, il metodo del § 39.

§ 34. — **Settimo metodo.** — Questo metodo consiste nel tener conto anche delle differenze seconde: per trovare quindi l'errore corrispondente, che indicheremo in generale con k_2, dovremo cominciare col tenere un procedimento analogo a quello tenuto nel § 2.

La (1) è un caso particolare di una formula generale, alla quale si giunge considerando m valori, $x_1, x_2, \ldots x_m$, della variabile x, e supponondo che $f(x)$ abbia la derivata m^a finita e diversa da zero; quella formula per $m = 2$ si riduce alla (1) stessa e per $m = 3$ si riduce all'altra

$$(72)\quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\left\{\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}\right\} +$$

$$+ (x-x_1)(x-x_2)\left\{\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\} +$$

$$+ (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\frac{f'''(u)}{3!},$$

dove u è un valore compreso fra x_1 e x_3.

---

[1] André, — *Nouveau Cours de Trigonométrie* pag. 38 — (Ed. Guédon, — Parigi).

G. Pesci.

(Continua)

Intorno alla radice quadrata di un numero intero

NOTA DI GIOVANNI FRATTINI

Indichi D un numero positivo, ed a un altro, minore di $\sqrt{D}$. In una nota pubblicata in questo periodico osservai che, se si pone

$$(a+\sqrt{D})^n = P_n + Q_n\sqrt{D},$$

il rapporto $\frac{P_n}{Q_n}$, al crescere di n, tende al limite $\sqrt{D}$. Inoltre, che delle frazioni

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \cdots$$

quelle di posto dispari si avvicinano a $\sqrt{D}$ crescendo, e le altre decrescendo, al modo stesso delle ridotte della frazione continua ordinaria

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$$

che rappresenta $\sqrt{D}$.

L'analogia tra il modo di convergere dei rapporti

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \cdots$$

e delle ridotte

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \cdots$$

della frazione continua corrispondente a $\sqrt{D}$, mi ha condotto a confrontare il rapporto $\frac{P_n}{Q_n}$ con la ridotta $\frac{p_n}{q_n}$ di egual posto, per vedere se mai il rapporto $\frac{P_n}{Q_n}$ non si approssimi al valor della radice più che la corrispondente ridotta $\frac{p_n}{q_n}$. Ho pertanto dimostrato il teorema: *Se* D *è un numero intero e* a *la sua radice a meno di un'unità, il rapporto* $\frac{P_n}{Q_n}$ *è più prossimo a* $\sqrt{D}$ *che non la corrispondente ridotta* $\frac{p_n}{q_n}$. (*)

Questo teorema è fecondo di applicazioni: basti qui l'accennare che, se a è la radice a meno di un'unità di un numero intero a^2+r, le espressioni delle ridotte di $\sqrt{a^2+r}$ (finchè questa quantità conserva la sua forma algebrica generale) sarebbero complicatissime, e intricate, dalla seconda in poi, con funzioni di funzioni E, indicanti parti

(*) Si suppone, naturalmente, che i rapporti $\frac{P_n}{Q_n}$ e $\frac{p_n}{q_n}$ siano differenti. Ove fossero eguali, si ha il caso più sfavorevole; e allora i due rapporti sono egualmente vicini alla radice.

intere di espressioni algebriche: mentre, sostituendo a una qualsiasi ridotta $\frac{p_n}{q_n}$ il corrispondente rapporto $\frac{P_n}{Q_n}$, si ottiene una funzione razionale di a e di r incomparabilmente più semplice di quella ridotta, e ciò nondimeno più prossima al valore della radice. Elevando per esempio $a+\sqrt{a^2+r}$ alla 4ª potenza, si ha:

$$\left(a+\sqrt{a^2+r}\right)^4=8a^4+8a^2r+r^2+(8a^3+4ar)\sqrt{a^2+r}.$$

E il quoziente

$$\frac{8a^4+8a^2r+r^2}{8a^3+4ar}$$

sarà più prossimo al valore di $\sqrt{a^2+r}$ che non la 4ª ridotta dello sviluppo di questa quantità in frazione continua.

Ciò premesso, vengo alla dimostrazione del teorema.

I. Sia D un numero intero e positivo, e sia a la sua radice quadrata a meno di un'unità. Considerando la formola

$$\frac{az+D}{z+a}$$

come indicante una sostituzione lineare sopra una variabile positiva z, se ne formi il quadrato operativo; poi il cubo; quindi la 4ª potenza ecc. Indicando con

$$\left(\frac{az+D}{z+a}\right)_n$$

la potenza n^{ma} della sostituzione, è facile verificare che

$$\left(\frac{az+D}{z+a}\right)_n=\frac{P_nz+DQ_n}{Q_nz+P_n}.$$

II. Cerco ora un'altra espressione della suddetta potenza ennesima, e per semplicità mi riferisco ad un esempio numerico.

Sia dunque $D=19$ e conseguentemente $a=4$. In questo caso la sostituzione su z diviene

$$\frac{4z+19}{z+4}=4+\cfrac{1}{\cfrac{z+4}{3}}.$$

Sostituendo nel 2° membro $\frac{4z+19}{z+4}$ invece di z, si formerà il quadrato della sostituzione, che sarà

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_2=4+\cfrac{1}{\cfrac{8z+35}{3z+12}};$$

ovvero, separando dalla frazione $\frac{8z+35}{3z+12}$ la parte intera del quoziente della divisione del 1° termine del numeratore pel 1° termine del denominatore,

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_2 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2z+11}{3z+12}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{3z+12}{2z+11}}}.$$

Sostituendo di nuovo nel 2° membro $\frac{4z+19}{z+4}$ invece di z, si avrà

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_3 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{24z+105}{19z+82}}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5z+23}{19z+82}}}.$$

Così continuando, si troverebbe

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_n = k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \ldots + \cfrac{1}{k_n + \cfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}}}}$$

dove $k_1, k_2 \ldots k_n$, non che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *sono numeri interi e positivi.* E questo fatto importantissimo non solo avviene nel caso particolare qui considerato, ma altresì nel caso della potenza della sostituzione generale $\frac{az+D}{z+a}$, conforme ho potuto verificare mediante un calcolo algebrico che per brevità tralascio, ma che riporterò in altra occasione, tornando sull' interessante sviluppo della potenza ennesima della sostituzione $\frac{az+D}{z+a}$ in frazione continua. Si ha pertanto:

$$\left(\frac{az+D}{z+a}\right)_n = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ldots + \cfrac{1}{m_n + \cfrac{Az+B}{Cz+F}}}}$$

con $m_1, m_2 \ldots m_n$; A, B, C ed F, interi e positivi.

Confrontando questa espressione di $\left(\frac{az+D}{z+a}\right)_n$ con quella trovata al n. I si ottiene l'eguaglianza

$$\frac{P_n z + DQ_n}{Q_n z + P_n} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ldots + \cfrac{1}{m_n + \cfrac{Az+B}{Cz+F}}}}.$$

Dico ora che i numeri interi e positivi $m_1, m_2 \ldots m_n$ non sono se non gli ordinari quozienti incompleti dello sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua. Considerando infatti il 1° membro dell'ultima eguaglianza, si scorge che esso, per qualsiasi valore della variabile positiva z, è compreso tra $\frac{P_n}{Q_n}$ e $D\frac{Q_n}{P_n}$, quantità che hanno entrambe per limite $\sqrt{D}$. Perciò anche il detto 1° membro, per qualsivoglia valor positivo della z, ha questo limite. E poichè, a cagione dell'eguaglianza, il limite del 1° membro è uguale a quello del 2°, si conclude che la frazione continua

$$m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ldots}}$$

ha per limite $\sqrt{D}$; che cioè i numeri interi e positivi $m_1, m_2, m_3 \ldots$ non sono se non gli ordinari quozienti incompleti dello sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua. Chiamando $a_1, a_2, a_3 \ldots$ siffatti quozienti, si potrà dunque scrivere

$$\frac{P_n z + DQ_n}{Q_n z + P_n} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{Az + B}{Cz + F}}}}$$

con A, B, C, F interi e positivi.

III. Se $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ indicano le ridotte $(n-2)^{ma}$ ed $(n-1)^{ma}$ della frazione continua

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots},$$

il 2° membro dell'ultima eguaglianza si può mettere, com'è noto, sotto la forma

$$\frac{p_{n-1}\left(a_n + \frac{Az+B}{Cz+F}\right) + p_{n-2}}{q_{n-1}\left(a_n + \frac{Az+B}{Cz+F}\right) + q_{n-2}},$$

riducibile facilmente all'altra

$$\frac{z(Cp_n + Ap_{n-1}) + Fp_n + Bp_{n-1}}{z(Cq_n + Aq_{n-1}) + Fq_n + Bq_{n-1}}.$$

Si avrà dunque per confronto:

$$\frac{P_n z + DQ_n}{Q_n z + P_n} = \frac{z(Cp_n + Ap_{n-1}) + Fp_n + Bp_{n-1}}{z(Cq_n + Aq_{n-1}) + Fq_n + Bq_{n-1}}$$

d'onde facilmente:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{Cp_n + Ap_{n-1}}{Cq_n + Aq_{n-1}}$$

$$D = \frac{Fp_n + Bp_{n-1}}{Cq_n + Aq_{n-1}}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{Fq_n + Bq_{n-1}}{Cq_n + Aq_{n-1}}$$

tre formole che collegano il rapporto $\frac{P_n}{Q_n}$ con le ridotte $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ della frazione continua corrispondente a $\sqrt{D}$, mediante l'intervento di quattro numeri interi e positivi A, B, C, F. Dette formole sono feconde di notevoli conseguenze, tra le quali non dedurrò se non quella che è l'oggetto di questa nota.

Dalla prima delle tre formole si scorge che la frazione $\frac{P_n}{Q_n}$ è compresa tra le due ridotte consecutive $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $\frac{p_n}{q_n}$. Si avrà dunque, per n pari,

$$\frac{P_n}{Q_n} \leqq \frac{p_n}{q_n}.$$

E poichè per n pari $\frac{P_n}{Q_n}$ e $\frac{p_n}{q_n}$ superano entrambe $\sqrt{D}$, è chiaro che $\frac{P_n}{Q_n}$, cioè il minore dei due rapporti, sarà il più prossimo a $\sqrt{D}$. Alla stessa conclusione si giunge nell'ipotesi di n dispari.

QUESTIONE DA RISOLVERE. — Dimostrare che il rapporto $\frac{P_n}{Q_n}$, sviluppato in frazione continua ordinaria, ammette, come primi quozienti incompleti, tutti quelli di $\frac{p_n}{q_n}$.

SULLA DISTRIBUZIONE DEI TERMINI CONGRUI
in alcune successioni di numeri interi positivi

In una Nota pubblicata in questo *Periodico* (*) ho trattato di quelle successioni di numeri interi positivi V_n che per $n \geqq 3$ sono definiti dalla relazione

$$V_n = hV_{n-1} + lV_{n-2}$$

dove h, l sono interi positivi diversi da zero comunque dati, ed i termini iniziali $V_1\, V_2$ sono pure dati ad arbitrio. Tra esse ho considerato più specialmente quella ottenuta attribuendo ai termini iniziali i valori $1, h$ rispettivamente; cioè quella definita dalle condizioni

$$v_1 = 1,\; v_2 = h,\; v_n = hv_{n-1} + lv_{n-2} \qquad (n \geqq 3).$$

Per questa successione (successione v) e nella ipotesi che i numeri h, l siano primi tra loro, ho determinato, nella Nota citata, *tutti* i

(*) *Successioni di numeri interi positivi, ciascuno dei quali è una funzione lineare dei due precedenti*, Tomo XVI. Novembre-Dicembre 1900.

termini che sono multipli di un termine dato; in base a questa ricerca e ad altre proprieta ivi stabilite, mi propongo nella presente Nota di studiare, per la stessa successione v, la distribuzione di quei termini che, rispetto ad un termine fissato v_ν, sono congrui con un altro termine pure dato comunque v_μ.

Dovremo supporre sempre $\nu > 1$, ed anche $\nu > 2$ per quella classe di successioni in cui è $v_2 = h = 1$; supporremo inoltre i numeri h, l primi tra loro.

1. Sia v_ν un termine qualunque della successione v; indicando con p un intero positivo qualunque, i termini $v_{\nu p}$, $v_{\nu(p+1)}$ sono multipli di v_ν, ed inoltre non cade tra essi, nella successione, alcun altro multiplo di v_ν. (*) Pertanto i $\nu - 1$ termini compresi tra $v_{\nu p}$, $v_{\nu(p+1)}$ dovranno dare un resto rispetto a v_ν.

Indichiamo con $v_{\nu p+\rho}$, $v_{\nu p+\sigma}$, $(\rho < \sigma < \nu)$, due di quei termini, e cerchiamo se, e quando, danno il medesimo resto rispetto a v_ν.

a) Supponiamo dapprima $\rho > 1$. Dalla relazione

$$v_{n+s} = v_n\, v_{s+1} + l v_s v_{n-1}, \;(**)$$

mutando n in ρ ed s in νp, si deduce

$$v_{\nu p+\rho} = v_\rho\, v_{\nu p+1} + l v_{\nu p}\, v_{\rho-1},$$

ed analogamente,

$$v_{\nu p+\sigma} = v_\sigma\, v_{\nu p+1} + l v_{\nu p}\, v_{\sigma-1}.$$

Osservando che $v_{\nu p}$ è multiplo di v_ν, si avrà, sottraendo, la congruenza

$$v_{\nu p+\sigma} - v_{\nu p+\rho} \equiv v_{\nu p+1}(v_\sigma - v_\rho) \qquad (\text{mod. } v_\nu);$$

e poichè il fattore $v_\sigma - v_\rho$ è, per le ipotesi, minore di v_ν e diverso da 0, mentre l'altro fattore $v_{\nu p+1}$ è primo con v_ν, perchè sono primi tra loro i loro indici, (***) così potremo concludere che il secondo membro della precedente congruenza è non divisibile per v_ν; pertanto i due termini $v_{\nu p+\sigma}$, $v_{\nu p+\rho}$ daranno, rispetto a v_ν, resti differenti.

b) Sia ora $\rho = 1$; dalla relazione già stabilita

$$v_{\nu p+\sigma} = v_\sigma v_{\nu p+1} + l v_{\nu p}\, v_{\sigma-1},$$

discende subito

$$v_{\nu p+\sigma} - v_{\nu p+1} = v_{\nu p+1}(v_\sigma - 1) + l v_{\nu p}\, v_{\sigma-1},$$

e quindi

$$v_{\nu p+\sigma} - v_{\nu p+1} \equiv v_{\nu p+1}(v_\sigma - 1) \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Onde potremo concludere come nel caso precedente, semprechè il secondo membro sia diverso da 0; ma il secondo membro è 0 *solamente* quando è $\sigma = 2$ ed $h = 1$, (perchè allora è $v_\sigma = v_2 = h = 1$), dunque se $h = 1$, dei termini compresi tra $v_{\nu p}$, $v_{\nu(p+1)}$ sono tra loro congrui *soltanto* $v_{\nu p+1}$, $v_{\nu p+2}$. Quindi:

(*) L. c., § 11.
(**) L. c., § 2.
(***) L. c., § 13.

I termini della successione v *compresi tra due multipli consecutivi* $\mathrm{v}_{\nu p}, \mathrm{v}_{\nu(p+1)}$ *del termine* v_ν, *sono tra loro incongrui rispetto a* v_ν *quando è* $\mathrm{h} > 1$: *se invece* $\mathrm{h} = 1$, *sono ancora incongrui i medesimi termini ad eccezione di* $\mathrm{v}_{\nu p+1}$, $\mathrm{v}_{\nu p+2}$ *che sono sempre congrui rispetto a* v_ν.

2. Sia ora v_μ un termine qualunque di v diverso da v_ν; se μ è multiplo di ν anche v_μ è multiplo di v_ν, in caso contrario la divisione di v_μ per v_ν dovrà dare un resto, (*) e possiamo allora dimostrare che esiste una successione di un numero infinito di termini, con indici in progressione aritmetica, che sono congrui con v_μ rispetto a v_ν. Premettiamo a tal fine che se n, δ $(n > \delta)$ sono due interi qualunque, ha luogo la relazione:

$$\frac{v_{n+\delta} + (-l)^\delta\, v_{n-\delta}}{v_n} = lv_{\delta-1} + v_{\delta+1}\,,\ (^{**}) \qquad (\omega)$$

e poichè il secondo membro è intero, avremo la congruenza

$$v_{n+\delta} \equiv -(-l)^\delta\, v_{n-\delta} \qquad (\mathrm{mod.}\ v_n).$$

Ciò posto, indichiamo con λ un intero indeterminato, e con τ un altro intero pure indeterminato ma minore di ν; se allora mutiamo n, δ, che sono indipendenti, rispettivamente in $\nu\lambda$, τ si otterrà,

$$v_{\nu\lambda+\tau} \equiv -(-l)^\tau\, v_{\nu\lambda-\tau} \qquad (\mathrm{mod.}\ v_{\nu\lambda});$$

cambiando in questa λ, τ rispettivamente in $\lambda - 1$, $\nu - \tau$, sarà ancora

$$v_{\nu\lambda-\tau} \equiv -(-l)^{\nu-\lambda}\, v_{\nu(\lambda-2)+\tau} \qquad (\mathrm{mod.}\ v_{\nu\lambda});$$

e quindi, poichè $v_{\nu\lambda}$ è multiplo di v_ν,

$$v_{\nu\lambda+\tau} \equiv (-l)^\nu\, v_{\nu(\lambda-2)+\tau} \qquad (\mathrm{mod.}\ v_\nu).$$

Posto ora

$$\mu = \nu p + r \quad (r < \nu), \quad \text{e} \quad p = 2q + r' \qquad (r' < 2),$$

si cambi nell'ultima congruenza τ in r, e si diano poi a λ successivamente i valori p, $p-2$, $p-4$, ..., $p-2$, $p-2(q-1)$; si dedurranno le q congruenze

$$\left.\begin{array}{r} v_{\nu p+r} \equiv (-l)^\nu\, v_{\nu(p-2)+r} \\ v_{\nu(p-2)+r} \equiv (-l)^\nu\, v_{\nu(p-4)+r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{\nu(p-2q+2)+r} \equiv (-l)^\nu\, v_{\nu(p-2q)+r} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod.}\ v_\nu).$$

Moltiplicando membro a membro, e tenendo conto che è $\nu p + r = \mu$ e $p - 2q = r'$, otterremo

$$(1) \qquad v_\mu \equiv (-l)^{\nu q}\, v_{\nu r'+r} \qquad (\mathrm{mod.}\ v_\nu),$$

(*) L. c., § 11.
(**) Dicendo interi, intenderemo sempre interi positivi.
(***) L. c., § 8.

e moltiplicando soltanto le prime $q-1$, si ha invece

(2) $$v_\mu \equiv (-l)^{(q-1)r} v_{\nu(r'+2)+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu)$$

a) Supponiamo dapprima q *pari;* posto allora $q=2q'$ la (1) diviene

$$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_{r'\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu)$$

quindi se $r'=0$, cioè *se* $p=4q'$ *sarà*

(3) $$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_r \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

e se invece $r'=1$, cioè *se* $p=4q'+1$ *sarà*

(4) $$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_{\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

b) Se q è *dispari*, potremo porre $q=2q'+1$ e la (2) diviene

$$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_{\nu(r'+2)+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu):$$

ma è inoltre

$$p=2q+r'=4q'+2+r' \qquad (r'<2).$$

quindi se $r'=0$, cioè *se* $p=4q'+2$ sarà

(5) $$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_{2\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

e se $r'=1$ cioè *se* $p=4q'+3$ sarà

(6) $$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_{3\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

I risultati contenuti nelle formole (3) (4) (5) (6) si possono raccogliere nel seguente enunciato generale:

Siano dati due termini v_μ, v_ν, *con* μ *non divisibile per* ν; *se si pone*

$$\mu=\nu p+r \quad \text{con} \quad r<\nu\ ,\ p=4q'+\rho' \quad \text{con} \quad \rho'<4,$$

sarà

$$v_\mu \equiv l^{2q'r} v_{\rho'\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu).\ (*)$$

3. Indicando con x un intero indeterminato, consideriamo ora il termine v_y, essendo y definito dall'uguaglianza

$$y=\mu+4\nu x.$$

Avendosi, come abbiamo già detto,

$$\mu=\nu p+r \quad \text{con} \quad r<\nu,\ p=4q'+\rho' \quad \text{con} \quad \rho'<4$$

sarà anche

$$y=\nu(p+4x)+r \quad , \quad p+4x=4(q'+x)+\rho'$$

e quindi applicando l'ultimo teorema alle due coppie (v_μ, v_ν), (v_y, v_ν), avremo le congruenze:

$$\left.\begin{aligned} v_\mu &\equiv l^{2q'r}\, v_{\rho'\nu+r} \\ v_y &\equiv l^{(q'+x)}\, v_{\rho'\nu+r} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

(*) Questo teorema sussiste anche senza l'ipotesi posta che i coefficienti h, l siano primi tra loro, come la (ω) dalla quale è dedotto.

Deriva di qui che affinchè sussista la congruenza

$$v_y \equiv v_\mu \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

è necessario e sufficiente che sia

$$l^{2q'\nu} v_{\varrho'\nu+r} \equiv l^{2(q'+x)\nu} v_{\varrho'\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu)$$

ed è sufficiente, che si abbia

$$l^{2q'\nu} \equiv l^{2(q'+x)\nu} \qquad (\text{mod. } v_\nu)$$

ed anche

$$l^{2\nu . x} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Ma essendo l, e quindi anche $l^{2\nu}$, primo con v_ν, (*) questa congruenza, ossia

$$(l^{2\nu})^x \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

ammette infinite soluzioni, contenute tutte nei successivi multipli della minima. Pertanto detta ε tale soluzione, le altre sono date dalla formula $x = n\varepsilon$ dove n è un intero qualunque; e poichè per tale valore di x è

$$y = \mu + 4\nu\varepsilon . n,$$

così potremo concludere che per $n = 1, 2, \ldots \infty$, ha luogo la congruenza

$$v_\mu \equiv v_{\mu+4\nu\varepsilon . n} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Se inoltre poniamo

$$\mu = 4\nu\varepsilon . Q + R \quad \text{con} \quad R < 4\nu\varepsilon,$$

sarà anche, per qualunque valore di n,

$$v_R \equiv v_{R+4\nu\varepsilon . n} \qquad (\text{mod. } v_\nu)$$

ed in particolare per $n = Q$,

$$v_R \equiv v_\mu \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Pertanto resta dimostrato il seguente teorema:

Siano v_μ, v_ν *due termini qualunque, con* μ *non divisibile per* ν; *se* ε *è la soluzione minima della congruenza*

$$(l^{2\nu})^x \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

ed R *il resto della divisione di* μ *per* $4\nu\varepsilon$, *i termini della successione illimitata*

$$v_R, v_{R+4\nu\varepsilon}, \ldots v_\mu, v_{\mu+4\nu\varepsilon}, \ldots\ldots v_{\mu+4\nu\varepsilon . n}, \ldots \qquad (S)$$

(ove gli indici formano una progressione aritmetica di differenza $4\nu\varepsilon$*) sono congrui con* v_μ *rispetto a* v_ν.

(*) L. c., § 11, lemma 1°.

Corollario I. — Se supponiamo in particolare $\mu = 1$, essendo allora $v_\mu = v_1 = 1 < v_\nu$, si concluderà che *i termini*

$$v_1\,,\; v_{1+4\nu\varepsilon}\,,\; v_{1+8\nu\varepsilon}\,,\; \dots\; v_{1+4\nu\varepsilon n}\,,\; \dots$$

divisi per v_ν *dànno di resto* 1.

Corollario II. — *Se è* $h = 1$, è anche $v_2 = 1$; quindi facendo $\mu = 2$, si dedurrà che *oltre* quelli del corollario precedente *i termini*

$$v_2\,,\; v_{2+4\nu\varepsilon}\,,\; \dots\; v_{2+4\nu\varepsilon . n}\,,\; \dots$$

divisi per v_ν *dànno di resto* 1.

4. I termini della succesione (S) del teorema precedente appartengono alla successione

$$\dots,\; v_{\mu-4\nu}\,,\; v_\mu\,,\; v_{\mu+4\nu}\,,\; v_{\mu+8\nu}\,,\; \dots\; v_{\mu+4\nu\lambda}\,,\; \dots$$

ove la progressione degli indici ha per differenza 4ν. Facciamo vedere ora che *se* μ, ν *sono primi tra loro non esistono in quest' ultima altri termini congrui con* v_μ *rispetto a* v_ν. Posto infatti $z = \mu + 4\nu\lambda$, supponiamo che sussista la congruenza

$$v_\mu \equiv v_z \qquad (\text{mod. } v_\nu\,):$$

avendosi, come precedentemente,

$$\mu = \nu p + r \;\;,\; p = 4q' + \rho' \;\; (r < \nu\,, \rho' < 4)$$

e quindi

$$z = \nu\,(p + 4\lambda) + r \;\;,\; p + 4\lambda = 4\,(q' + \lambda) + \rho',$$

si dedurrà, a causa del teorema del § 2,

$$l^{2q'\nu}\, v_{\rho'\nu+r} \equiv l^{2\nu(q'+\lambda)}\, v_{\rho'\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu\,).$$

Ma poichè per ipotesi μ, ν, e perciò ν, r sono primi tra loro, saranno primi tra loro anche i numeri $\nu, \rho'\nu + r$; ne segue che il fattore $v_{\rho'\nu+r}$ che figura nei due termini della precedente congruenza è primo col modulo v_ν; (*) inoltre è primo con v_ν anche il fattore $l^{2\nu q'}$, (**) onde dividendone i due membri per $l^{2\nu q'}\, v_{\rho'\nu+r}$ avremo *necessariamente*

$$(l^{2\nu})^\lambda \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu\,),$$

e perciò $\lambda = n\varepsilon$, essendo ε la soluzione minima ed n un intero qualunque; ne segue

$$z = \mu + 4\nu\varepsilon . n$$

e quindi v_z appartiene ad (S) come si voleva provare.

5. Riprendiamo a considerare i due termini v_μ, v_ν e le relazioni

$$\mu = \nu p + r \;\;,\; p = 2q + r' \;\; (r < \nu\,, r' < 2);$$

(*) L. c., § 13.

(**) L. c., § 11.

abbiamo trovato al § 2 che è

$$v_\mu \equiv (-l)^{rq}\, v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_r),$$

e quindi *se* ν *è pari* si avrà

$$(7) \qquad v_\mu \equiv l^{rq}\, v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_r).$$

Ciò premesso pongasi $y = \mu + 2\nu x$ ove x è un intero indeterminato; sarà anche

$$y = \nu(p+2x) + r \quad p + 2x = 2(q+x) + r'$$

e perciò, a causa della (7),

$$v_y \equiv l^{r(q+x)}\, v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_r).$$

Determiniamo x in modo che si abbia la congruenza

$$v_y \equiv v_\mu \qquad (\text{mod. } v_r);$$

a tal fine si deve avere

$$l^{rq}\, v_{\nu r'+r} \equiv l^{r(q+x)}\, v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_r),$$

ed (analogamente a quanto dicemmo al § 3) è sufficiente che x soddisfi la congruenza

$$(l^r)^x \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_r)$$

che, per essere l^r primo con v_r, ammette infinite soluzioni contenute tutte nella formula $x = n\varepsilon_1$, essendo ε_1 la soluzione minima ed n un intero qualunque. Si conclude dunque che sarà per qualunque n,

$$v_\mu \equiv v_{\mu+2\nu\varepsilon_1 . n} \qquad (\text{mod. } v_r).$$

Se inoltre chiamiamo D il resto della divisione di μ per $2\nu\varepsilon$ sarà anche, rispetto al modulo v_r,

$$v_D \equiv v_{D+2\nu\varepsilon_1 . n},$$

ed in particolare

$$v_D \equiv v_\mu .$$

Possiamo dunque enunciare il seguente teorema:

Siano v_μ, v_r *due termini qualunque con* μ *non divisibile per* ν, *e sia* ν *un numero pari; se* ε_1 *è la soluzione minima della congruenza*

$$(l^r)^x \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_r),$$

e D *il resto della divisione di* μ *per* $2\nu\varepsilon_1$, *i termini della successione illimitata*

$$v_D,\ v_{D+2\nu\varepsilon_1},\ \ldots,\ v_\mu,\ v_{\mu+2\nu\varepsilon_1},\ \ldots,\ v_{\mu+2\nu\varepsilon_1 . n},\ \ldots, \qquad (S)$$

(ove gli indici formano una progressione aritmetica di differenza $2\nu\varepsilon_1$*) sono congrui con* v_μ *rispetto a* v_r.

In particolare supponendo $\mu = 1$, $\mu = 2$ successivamente, si ha:

Corollario I. — *Se ν è un numero pari, i termini*

$$v_1\,,\ v_{1+2\nu\varepsilon_1}\,,\ \ldots\ldots,\ v_{1+2\nu\varepsilon_1 n}\,,\ \ldots$$

divisi per v_ν *dànno di resto* 1.

Corollario II. — *Se ν è pari ed inoltre* $h = 1$, *i termini*

$$v_2\,,\ v_{2+\nu\varepsilon_1}\,,\ \ldots\ v_{2+2\nu\varepsilon_1 n}\,,\ \ldots$$

divisi per v_ν *dànno di resto* 1.

6. I termini della successione (S_1) appartengono alla successione

$$\ldots,\ v_{\mu-2\nu}\,,\ v_\mu\,,\ v_{\mu+2\nu}\,,\ \ldots\ v_{\mu+2\nu\lambda}\,,\ \ldots$$

ove gli indici formano una progressione di differenza 2ν. *Quando i numeri μ, ν sono primi tra loro non esistono in questa altri termini congrui con v_μ rispetto a v_ν*. Infatti, posto $z = \mu + 2\nu\lambda$, suppongasi

$$v_\mu \equiv v_z \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Essendo

$$\mu = \nu p + r\ ,\ p = 2q + r'\ \ (r < \nu\,,\ r' < 2)$$
$$z = \nu\,(p + 2\lambda) + r\ ,\ p + 3\lambda = 2\,(q + \lambda) + r'\,,$$

applicando la (7) alle due coppie di termini $(v_\mu\,,v_\nu)\,(v_z\,,v_\nu)$ si ottiene

$$l^{\nu q}\, v_{\nu r'+r} \equiv l^{\nu(q+\lambda)}\, v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

e quindi, per le stesse considerazioni fatte al § 4, si dedurrà che deve *necessariamente* aver luogo la congruenza

$$(l^\nu)^\lambda \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

onde $\lambda = n\varepsilon_1$, dove ε_1 è la soluzione minima ed n un intero qualunque; quindi $z = \mu + 2\nu\varepsilon_1 n$, e v_z appartiene ad (S_1) come abbiamo asserito.

7. Dal teorema del § 3 e da quello del § 5 risulta che se ν è *pari* sono congrui con v_μ rispetto al modulo v_ν i termini delle due successioni illimitate,

$$\ldots\, v_{\mu-4\nu\varepsilon}\,,\ v_\mu\,,\ v_{\mu+4\nu\varepsilon}\,,\ \ldots\ v_{\mu+4\nu\varepsilon n}\,,\ \ldots \qquad (S)$$
$$\ldots\, v_{\mu-2\nu\varepsilon_1}\,,\ v_\mu\,,\ v_{\mu+2\nu\varepsilon_1}\,,\ \ldots\ v_{\mu+2\nu\varepsilon_1 n}\,,\ \ldots \qquad (S_1)$$

essendo ε, ε_1 i minimi interi che soddisfano le congruenze

$$\left.\begin{array}{l}(l^{2\nu})^{\varepsilon} \equiv 1\\ (l^{\nu})^{\varepsilon_1} \equiv 1\end{array}\right\} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Ma da queste si deduce che 2ε è un multiplo di ε_1, onde indicando con γ un numero intero *determinato*, si avrà

$$2\varepsilon = \varepsilon_1\gamma\,;$$

ne segue, per qualunque valore di n,

$$4\nu\varepsilon . n = 2\nu\varepsilon_1 (\gamma n)$$

e quindi

$$v_{\mu+4\nu\varepsilon . n} = v_{\mu+2\nu\varepsilon_1 (\gamma n)} .$$

Poichè il primo membro è un termine qualunque della successione (S), mentre il secondo è uno speciale di (S_1), (perchè dipendente da γ) così potremo affermare che tutti i termini di (S) cadono in (S_1); ma questa contiene *inoltre* tutti i termini della forma

$$v_{\mu+2\nu\varepsilon_1 . m}$$

nei quali m non è multiplo di γ. Nel *solo* caso di $\gamma = 1$ le due successioni coincidono. Ora si può vedere che *ciò avviene soltanto quando* ε_1 *è pari*. Infatti in questa ipotesi la congruenza

$$(l^\nu)^{\varepsilon_1} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu)$$

assume la forma

$$(l^{2\nu})^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu);$$

e quindi $\frac{\varepsilon_1}{2}$ è una soluzione della congruenza

$$(l^{2\nu})^x \equiv 1 \qquad (\text{mod. } v_\nu);$$

ma coincide colla soluzione minima ε, perchè se fosse $\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$ non sarebbe 2ε multiplo di ε_1 come è necessario. Avremo dunque per ε_1 pari, $2\varepsilon = \varepsilon_1$, onde $\gamma = 1$, e le due successioni (S) (S_1) coincidono. Se poi ε_1 è dispari, l'uguaglianza $2\varepsilon = \varepsilon_1\gamma$ prova che è $\gamma > 1$, quindi la (S) è contenuta nella (S_1). Ciò prova quanto abbiamo asserito.

Osservazione. — Da quanto abbiamo ora stabilito, risulta che quando ν è pari il teorema del § 3 è contenuto in quello del § 5; onde basterà dire che rispetto a v_ν, sono congrui con v_μ i termini della successione (S) quando ν è *dispari*, e quelli di (S_1) quando ν è *pari*.

8. Alcune altre proprietà stabilite in questo paragrafo, vengono applicate nel seguito ad una classe speciale di successioni, dedotte dalla v, per la determinazione del resto nella divisione di due loro termini qualunque. Abbiamo visto al § 2 che, essendo v_μ, v_ν termini *qualunque* e

$$\mu = \nu p + r \quad \text{con} \quad r < \nu \; , \; p = 2q + r' \quad \text{con} \quad r' < 2,$$

si ha

$$(8) \qquad v_\mu \equiv (-l)^{q\nu} \, v_{\nu r' + r} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Consideriamo separatamente le ipotesi di ν pari e ν dispari:

I^a Ipotesi

ν è un numero pari.

La congruenza precedente diviene

$$v_\mu \equiv l^{q\nu} v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

quindi:

1°. Se $r'=0$, cioè se $p=2q$ si avrà,

$$v_\mu \equiv l^{q\nu} v_r \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

2°. Se $r'=1$, cioè se $p=2q+1$, sarà invece

$$v_\mu \equiv l^{q\nu} v_{\nu+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

ma è, per qualunque valore di ν,

$$\frac{v_{\nu+r}+(-l)^r v_{\nu-r}}{v_\nu} = \text{numero intero (*)}$$

ossia

$$v_{\nu+r} \equiv -(-l)^r v_{\nu-r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

quindi, poichè ν è pari, risulterà

$$v_\mu \equiv -(-l)^{q\nu+r} v_{\nu-r} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Ne consegue, se *r è pari*

$$v_\mu \equiv -l^{q\nu+r} v_{\nu-r} \equiv l^{q\nu+r}(v_\nu - v_{\nu-r}) \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

e se *r è dispari*

$$v_\mu \equiv l^{q\nu+r} v_{\nu-r} \qquad (\text{mod. } v_\nu).$$

Riassumendo si ha il teorema:

Se ν è un numero pari è v_μ, v_ν due termini di v, posto $\mu=\nu p+r$ con $r<\nu$, si avrà rispetto al modulo v_ν:

1°. $v_\mu \equiv l^{q\nu} v_r$ *quando è* $p=2q$

2°. $\begin{cases} v_\mu \equiv l^{q\nu+r}(v_\nu - v_{\nu-r}) \text{ quando è } p=2q+1 \text{ con r pari} \\ v_\mu \equiv l^{q\nu+r} v_{\nu-r} \text{ quando è } p=2q+1 \text{ con r dispari} \end{cases}$

II^a Ipotesi

ν è un numero dispari.

A) Supponiamo prima che *q sia pari;* dalla congruenza (8), che sussiste incondizionatamente, si ha allora

$$v_\mu \equiv l^{q\nu} v_{\nu r'+r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

(*) L. c., § 8.

e se si pone $q = 2q'$, si avrà anche

$$p = 2q + r' = 4q' + r' \qquad \text{con} \qquad r' < 2.$$

1°. Se $r' = 0$ cioè se $p = 4q'$ si dedurrà subito

$$v_\mu \equiv l^{2q'\nu} v_r.$$

2°. Se $r' = 1$ cioè se $p = 4q' + 1$ sarà

$$v_\mu \equiv l^{2q'\nu} v_{\nu+r} ;$$

ma, come abbiamo visto, si ha per qualunque valore di ν

$$v_{\nu+r} \equiv -(-l)^r v_{\nu-r} \qquad (\text{mod. } v_\nu),$$

quindi *se* r *è pari* sarà (sempre rispetto al modulo v_ν)

$$v_\mu \equiv -l^{2q'\nu+r} v_{\nu-r} \equiv l^{2q'\nu+r} (v_\nu - v_{\nu-r}),$$

e se *r è dispari* si avrà invece

$$v_\mu \equiv l^{2q'\nu+r} v_{\nu-r}.$$

B) Supponiamo ora *q dispari;* dalla (8), poichè ν è dispari per ipotesi, si deduce

$$v_\mu \equiv -l^{q\nu} v_{\nu r'+r} ;$$

inoltre se si pone $q = 2q' + 1$, sarà anche

$$p = 2q + r' = 4q' + 2 + r' \qquad \text{con } r' < 2$$

3°. Se $r' = 0$, cioè *se* $p = 4q' + 2$ si troverà sostituendo

$$v_\mu \equiv l^{(2q'+1)\nu} v_r \equiv l^{(2q'+1)\nu} (v_\nu - v_r).$$

4°. Se $r' = 1$, cioè *se* $p = 4q' + 3$, sarà invece

$$v_\mu \equiv -l^{(2q'+1)\nu} v_{\nu+r};$$

e poichè, come abbiamo già osservato, si ha per *qualunque* ν

$$v_{\nu+r} \equiv -(-l)^r v_{\nu-r}$$

si dedurrà

$$v_\mu \equiv -(-l)^{(2q'+1)\nu+r} v_{\nu-r};$$

quindi se *r è pari* sarà

$$v_\mu \equiv l^{(2q'+1)\nu+r} v_{\nu-r},$$

e se *r è dispari* si troverà

$$v_\mu \equiv -l^{(2q'+1)\nu+r} v_{\nu-r} \equiv l^{(2q'+1)\nu+r} (v_\nu - v_{\nu-r}).$$

Riassumendo possiamo enunciare il seguente teorema:

Se ν *è un numero dispari e* v_μ, v_ν *due termini di* v, *posto* $\mu = \nu p + r$ *con* $r < \nu$, *si avrà rispetto al modulo* v_ν :

1°. $v_\mu \equiv l^{2q'r}\, v_r$ quando è $p = 4q'$

2°. $\begin{cases} v_\mu \equiv l^{2q'r+r}(v_r - v_{r-r}) \\ v_\mu \equiv l^{2q'r+r}\, v_{r-r} \end{cases}$ „ „ $p = 4q' + 1$ ed r pari; „ „ $p = 4q' + 1$ ed r dispari

3°. $v_\mu \equiv l^{(2q'+1)r}(v_r - v_r)$ „ „ $p = 4q' + 2$

4°. $\begin{cases} v_\mu \equiv l^{(2q'+1)r+r}\, v_{r-r} \\ v_\mu \equiv l^{(2q'+1)r+r}(v_r - v_{r-r}) \end{cases}$ „ „ $p = 4q' + 3$ ed r pari; „ „ $p = 4q' + 3$ ed r dispari.

(Continua)

ALBERTO TAGIURI.

SUL RESTO DELLA DIVISIONE ALGEBRICA

Nell'ultimo numero del *Supplemento* è detto che le considerazioni con cui i recenti trattati d'Algebra mettono al coperto dalle critiche, che le erano state mosse, la ordinaria dimostrazione del teorema sul resto della divisione d'un polinomio intero per $x - a$ non hanno contribuito a conservare ad essa il grado di semplicità, che la distingueva; peraltro. volendo, se ne potrebbe conservare tutta la semplicità senza venir meno al rigore: basterebbe infatti osservare che, per la regola della divisione algebrica, il resto è precisamente la differenza tra il dividendo ed il prodotto del divisore pel quoziente perchè, per l'accennata regola, si giunge al resto sottraendo successivamente dal dividendo il prodotto del divisore pei varii termini del quoziente, per cui, se A, B, Q, R, sono dividendo, divisore, quoziente e resto d'una divisione algebrica, la relazione $A - BQ = R$ risulta stabilita mediante diretta sottrazione del prodotto BQ da A, indipendentemente quindi dal concetto di divisione e, per ciò, sussiste anche pei valori delle lettere pei quali $B = 0$. In questo modo, senza introdurre complicazioni, resta dimostrato che dividendo e resto sono uguali pei valori delle lettere pei quali è nullo il divisore od il quoziente, osservazione generale questa, che dà, come caso particolarissimo, il resto della divisione d'un polinomio intero per $x - a$. E si può aggiungere che viceversa, se per speciali valori delle lettere sono uguali dividendo e resto, per quei valori è nullo od il divisore od il quoziente. Le considerazioni che si fanno comunemente, e che io ebbi già occasione di suggerire nel *Periodico* (1890, pag. 157-158) sono tuttavia necessarie per dar rigore al calcolo letterale, per assicurare, p. es., che due polinomii interi, per esser uguali per valori qualsiansi delle lettere, debbono essere identicamente uguali, per generalizzare delle formule come anch'io ebbi occasione di fare, p. es., nella *Rivista di Matematica* (1893, pag. 148, ultime linee).

E poichè sono in argomento voglio pur comunicare un'espressione del resto della divisione d'un polinomio intero per un altro, la quale non vidi mai rilevata, quantunque derivi immediatamente da formule molto note.

Sia $f(x)$ un polinomio intero ed a coefficienti interi di grado non minore di m e $Q(x)$ ed $R(x)$ siano quoziente e resto della divisione di $f(x)$ per $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$, cosicchè

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)\,Q(x)+R(x),$$

da cui segue che, se k è uno dei numeri $1, 2, \dots, m$, $f(a_k)=R(a_k)$. Si ha quindi che

$$\begin{vmatrix} R(x) & x^{m-1} & x^{m-2} & \dots & x & 1 \\ f(a_1) & a_1^{m-1} & a_1^{m-2} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(a_m) & a_m^{m-1} & a_m^{m-2} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix}=0$$

per gli m valori, $a_1, a_2, \dots, a_m$ di x. Il primo membro, essendo di grado minore di m in x, è nullo identicamente e quindi

$$R(x)=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m-1} & \dots & x & 1 \\ f(a_1) & a_1^{m-1} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(a_m) & a_m^{m-1} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^{m-1} & a_1^{m-2} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^{m-1} & a_m^{m-2} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix}}.$$

La forma frazionaria del secondo membro è solo apparente, perchè il numeratore, annullandosi se per una qualsiasi delle m quantità $a_1, \dots, a_m$ si pone una delle rimanenti, è divisibile pel prodotto delle differenze di queste quantità, ossia pel denominatore; ed anzi, oltre ad essere intero, è simmetrico nelle $a_1, \dots, a_m$, perchè numeratore e denominatore sono funzioni alternanti di queste quantità, cioè mutano di segno, senza mutar di valore assoluto, per ogni trasposizione di due delle quantità $a_1, \dots, a_m$: e ciò era prevedibile perchè, se $a_1, a_2, \dots, a_m$ son le radici dell'equazione $\varphi(x)=0$ e $\varphi(x)=x^m+c_1 x^{m-1}+\dots+c_{m-1}x+c_m$, $R(x)$ è resto della divisione di $f(x)$ per $\varphi(x)$ ed è intero in $c_1, \dots, c_{m-1}, c_m$. Al resto si posson dare varie forme, come rilevasi subito dalla teoria dell'interpolazione; si vede immediatamente, p. es., che, conformemente alle formule di Lagrange e di Newton,

$$R(x)=f(a_1)\frac{(x-a_2)\dots(x-a_m)}{(a_1-a_2)\dots(a_1-a_m)}+\dots+f(a_m)\frac{(x-a_1)\dots(x-a_{m-1})}{(a_m-a_1)\dots(a_m-a_{m-1})}=$$

$$=f(a_1)+(x-a_1)\left(\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}+\frac{f(a_2)}{a_1-a_2}\right)+(x-a_1)(x-a_2)\left(\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{f(a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\right)+\dots+$$

$$+(x-a_1)\dots(x-a_{m-1})\left(\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)\dots(a_1-a_m)}+\dots+\frac{f(x_m)}{(a_m-a_1)\dots(a_m-a_{m-1})}\right).$$

Dal confronto di queste varie espressioni del resto, come pure dalla equivalenza

$$\begin{vmatrix} x^m & x^{m-1} & \dots & x & 1 \\ a_1^m & a_1^{m-1} & \dots & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^m & a_m^{m-1} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^{m-1} & a_1^{m-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{m-1} & a_2^{m-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^{m-1} & a_m^{m-2} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^m - (a_1 + a_2 + \dots + a_m)\, x^{m-1} + \dots + (-1)^m a_1 a_2 \dots a_m,$$

si posson dedurre particolari sviluppi di determinanti ed anche (*) notevoli relazioni segmentarie.

Genova, 10 maggio 1901.

F. GIUDICE.

SULLE FRAZIONI CONTINUE PERIODICHE

Per le frazioni continue periodiche semplici è noto che dati i quozienti incompleti del periodo si possono mediante questi ottenere le espressioni dei termini di una qualunque ridotta. Tale problema fu risoluto da GÜNTHER (**), che si è servito dei determinanti, ed ultimamente anche dall'AMANZIO (***), che si è servito di certi polinomii, di cui ha trovato notevoli proprietà.

L'oggetto di questa nota è dimostrare che esiste una semplicissima relazione tra le due ultime ridotte di ogni periodo di una frazione continua periodica semplice, e dedurne alcune conseguenze riguardanti le frazioni continue periodiche semplici simmetriche ed i numeri di Fibonacci. Tale relazione che qui è dedotta direttamente, non si potrebbe in modo facile ottenere dalle complicate formole dei su citati autori.

1. Consideriamo la frazione continua periodica semplice positiva, radice dell'equazione quadratica

$$(1) \qquad ax^2 - bx - c = 0$$

ove a, b, c sono numeri interi e positivi.

Se k è il numero dei quozienti incompleti di un periodo vogliamo dimostrare che tra le due ridotte ultime di ogni periodo, cioè tra R_{mk} ed R_{mk-1} esiste una relazione bilineare i cui coefficienti sono a, b, c.

Se si indicano con P, Q i numeratori ed i denominatori delle ridotte,

(*) V. *Le matematiche pure ed applicate;* vol. I, n. I, febbraio 1901; V. RETALI, *Un'applicazione geometrica dei determinanti.*

(**) Zeitschirft für Mathematick di Schlömilch. Anno 1877.

(***) Annali dell'Istituto tecnico di Napoli, 1898. — Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Vol. 7 della 2ª serie.

l'equazione che dà il valore della frazione continua si ottiene arrestandosi ad un qualunque periodo, ed è precisamente:

$$Q_{mk}x^2 - (P_{mk} - Q_{mk-1})x - P_{mk-1} = 0.$$

Confrontando questa equazione con la (1) si ha

$$\begin{aligned} Q_{mk} &= a \,.\, A_m, \\ P_{mk} - Q_{mk-1} &= b \,.\, A_m, \\ P_{mk-1} &= c \,.\, A_m, \end{aligned}$$

ove A_m è un coefficiente intero dipendente da m, cioè dal periodo a cui ci siamo fermati

Dalle precedenti eguaglianze, per divisione risulta

$$\frac{P_{mk} - Q_{mk-1}}{Q_{mk}} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \frac{P_{mk-1}}{Q_{mk}} = \frac{c}{a}.$$

Dalla prima si ha: $\dfrac{Q_{mk-1}}{Q_{mk}} = R_{mk} - \dfrac{b}{a}$, e dividendo questa per l'altra:

$$\frac{Q_{mk-1}}{P_{mk-1}} = \frac{R_{mk} - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{c}{a}},$$

ovvero

$$R_{mk-1}^{-1} = \frac{aR_{mk} - b}{c};$$

donde otterremo la relazione

$$aR_{mk} \,.\, R_{mk-1} - bR_{mk-1} = c. \tag{2}$$

2. Se la frazione continua periodica semplice è anche simmetrica, deve essere in virtù di un teorema di GALOIS (*) $a = c$. Allora la (2) diventa

$$aR_{mk}\, R_{mk-1} - bR_{mk-1} = a,$$

ovvero

$$a(R_{mk}\, R_{mk-1} - 1) = bR_{mk-1},$$

e quindi

$$R_{mk} - R_{mk-1}^{-1} = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Cioè: *in una frazione continua periodica semplice simmetrica è costante la differenza tra l'ultima ridotta di un qualunque periodo e l'inversa della precedente.*

3. Scrivendo la (3) con la notazione solita abbiamo

$$\frac{P_{mk}}{Q_{mk}} - \frac{Q_{mk-1}}{P_{mk-1}} = \frac{b}{a};$$

ma si ha pure

$$\frac{P_{mk}}{Q_{mk}} - \frac{P_{mk-1}}{Q_{mk-1}} = \pm \frac{1}{Q_{mk}\, Q_{mk-1}};$$

(*) Vol. 19 degli annali di Gergonne, anno 1828-29. Cfr. pure LUCAS. *Théorie des nombres* pag. 452-457.

dunque

$$\frac{b}{a} \pm \frac{1}{Q_{mk}Q_{mk-1}} = \frac{P^2_{mk-1} - Q^2_{mk-1}}{Q_{mk-1}\,P_{mk-1}};$$

ed osservando che per essere la frazione continua simmetrica è $Q_{mk} = P_{mk-1}$; si ha

$$(4) \qquad \frac{b}{a} = \frac{P^2_{mk-1} - Q^2_{mk-1} \pm 1}{P_{mk-1}\,Q_{mk-1}}.$$

Se $a = 1$, cioè se la frazione continua ha un sol quoziente incompleto per periodo, si ricava che la frazione del secondo membro è un numero intero, cioè: *se si ha una frazione continua periodica semplice con il periodo di un sol quoziente incompleto, la differenza dei quadrati dei termini di una ridotta qualunque aumentata o diminuita di* 1, *secondo che il suo posto è pari o dispari, è divisile per il loro prodotto.*

4. Dalla (4) risulta

$$bQ_{mk-1}\,P_{mk-1} = aP^2_{mk-1} - aQ^2_{mk-1} \pm a,$$

Avendosi così una equazione del 2° grado in Q_{mk-1}, il suo discriminante, cioè

$$(5) \qquad b^2P^2_{mk-1} + 4a^2P^2_{mk-1} \pm 4a^2,$$

deve essere un quadrato esatto.

Scegliendo il segno $+$, cioè supponendo m numero pari, e supponendo di più che b sia numero pari, la somma:

$$\left[\frac{b}{2}P_{mk-1}\right]^2 + \left[aP_{mk-1}\right]^2 + a^2$$

deve essere un quadrato esatto. Avremo quindi il teorema: *se si trasforma in frazione continua la radice positiva dell'equazione quadratica:* $ax^2 - 2hx - a = 0$, *e si indica con* α *il numeratore della penultima ridotta di un periodo di posto pari, la somma dei quadrati dei tre numeri* a, αa *ed* αh *è un altro quadrato.*

Così si ha il mezzo di risolvere con l'uso delle frazioni continue simmetriche l'equazione pitagorica $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$.

5. Se $a = b = 1$ i numeri P e Q sono i termini $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5\ldots$ della serie di Fibonacci, e l'espressione (5) diventa $5u_n^2 \pm 4$ cioè: *il quintuplo del quadrato di un termine della serie di Fibonacci aumentato o diminuito di* 1, *secondo che è di posto dispari o pari, è un quadrato esatto.*

Sia u_n un termine di posto dispari, ma che sia numero pari (u dovrà essere della forma $6K + 5$ per $K = 0, 1, \ldots$); avremo

$$u_n^2 + 4u_n^2 + 4 = \text{quadrato}$$

e dividendo per 4

$$\left(\frac{1}{2}u_n\right)^2 + u_n^2 + 1 = \text{quadrato}$$

cioè: *Se* u *è un termine pari di posto dispari della serie di Fibonacci, la somma dei quadrati di* u *e della sua metà aumentata di* 1 *è un quadrato*

6. Dalla (3) si ricava $R_{mk-1}^{-1} = R_{mk} - \frac{b}{a}$, ma si ha pure

$$R_{mk-1} = R_{mk} \pm \frac{1}{Q_{mk}\,Q_{mk-1}};$$

dunque

$$1 = \left(R_{mk} - \frac{b}{a}\right)\left(R_{mk} \mp \frac{1}{Q_{mk}Q_{mk-1}}\right).$$

Abbiamo cioè una equazione del secondo grado in R_{mk}; il suo discriminante, ossia

$$\left(\frac{1}{Q_{mk}Q_{mk-1}} - \frac{b}{a}\right)^2 \pm \frac{4b}{aQ_{mk}\,Q_{mk-1}} + 4 = \left(\frac{1}{Q_{mk}Q_{mk-1}} \pm \frac{b}{a}\right)^2 + 4,$$

dovrà essere un quadrato esatto, e perciò dovrà essere quadrato esatto anche

$$(a \pm bQ_{mk}\,Q_{mk-1})^2 + 4a^2(Q_{mk}\,Q_{mk-1})^2.$$

Così si ha un altro mezzo per trovare dei numeri interi che soddisfano all'equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

7. Supposto $a = b = 1$ si avrà:

$$(Q_{mk}Q_{mk-1} \pm 1)^2 + (2Q_{mk}Q_{mk-1})^2 = \text{quadrato}$$

e si ricaverà la proprietà seguente dei numeri della serie di Fibonacci.

Il prodotto di due termini consecutivi della serie di Fibonacci fornisce una soluzione dell'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = z^2$: *se* p *è tale prodotto si può porre* x = 2p ed y = p ± 1, *secondo che il fattore maggiore è di posto pari o dispari.*

Così per i primi due termini 1, 2 si ha $x = 4$, $y = 3$ e si ritrova la soluzione minima costituita dai numeri 3, 4, 5.

G. Gallucci.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 564, 565, 566, 567, 568 E 569

564. *Considerando due tangenti qualunque in due punti* P_1 *e* P_2 *ad una parabola riferita al suo asse e alla tangente nel vertice, se* P *è il punto d'incontro di tali tangenti, dimostrare che l'ascissa di* P *è media geometrica fra quelle di* P_1 *e* P_2, *mentre l'ordinata è media aritmetica fra le ordinate degli stessi punti* P_1 *e* P_2.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. Di Stefano R. U. di Catania.

Dalle equazioni delle tangenti nei punti $P_1(x_1\,y_1)$ e $P_2(x_2\,y_2)$ alla parabola $y^2 = 2px$ cioè

$$yy_1 - px_1 - px = 0 \qquad yy_2 - px_2 - px = 0$$

si ottiene che le coordinate del punto d'incontro sono

$$y = \mathrm{P}\frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

e

$$x = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Altre risoluzioni dei sigg. Bianca R. U. di Catania: Barisien; Fornari di Varese; Mercogliano e Longobardi di Napoli; Occhipinti R. U. di Palermo e Pensa di Savigliano.

565. *Se* $f_1(x, y) = 0$: $f_2(x, y) = 0$ *sono le equazioni di due coniche di un piano, il luogo dei centri di tutte le coniche del fascio a cui queste appartengono è in generale una conica che ha per equazione*

$$\frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dy} - \frac{df_2}{dx}\cdot\frac{df_1}{dy} = 0.$$

Dedurre da ciò che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè le polari di un punto P *rispetto a tutte le coniche di un fascio* Φ *sieno parallele, è che* P *sia centro di una delle coniche* Φ.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. Longobardi di Napoli.

Al variare di k nell'equazione

(1) $$f_1(x, y) + kf_2(x, y) = 0$$

si hanno tutte le coniche del fascio Φ a cui appartengono le coniche

$$f_1(x, y) = 0 \quad ; \quad f_2(x, y) = 0.$$

Le coordinate del centro della (1) sono le soluzioni delle equazioni di primo grado in x e y

(2) $$\frac{df_1}{dx} + k\frac{df_2}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{df_1}{dy} + k\frac{df_2}{dy} = 0.$$

Eliminando k tra le (2), si ha pel luogo dei centri delle coniche di Φ l'equazione

(3) $$\frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dy} - \frac{df_2}{dx}\cdot\frac{df_1}{dy} = 0,$$

cioè detto luogo è anch'esso una conica.

L'equazione della polare di un punto $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ rispetto alla (1)

(4) $$\frac{df_1}{dx_1}x + \frac{df_1}{dy_1}y + \frac{df_1}{dz_1} + k\left(\frac{df_1}{dx_1}x + \frac{df_1}{dy_1}y + \frac{df_1}{dz_1}\right) = 0,$$

e al variare di k in (4) si hanno le equazioni delle polari di P rispetto a tutte le coniche Φ. — La (4) al variare di k rappresenta un fascio di rette il cui centro è il punto comune alle rette

(5) $$\frac{df_1}{dx_1}x + \frac{df_1}{dy_1}y + \frac{df_1}{dz_1} = 0 \quad ; \quad \frac{df_2}{dx_1}x + \frac{df_2}{dy_1}y + \frac{df_2}{dz_1} = 0$$

polari di O rispetto alle coniche $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$.

Perchè dunque le polari (4) sieno parallele è necessario che le coordinate del punto P (x_1, y_1) verifichino l'equazione

$$\frac{df_1}{dx_1}\cdot\frac{df_2}{dy_1} - \frac{df_2}{dx_1}\cdot\frac{df_1}{dy_1} = 0,$$

cioè è necessario che P sia un punto della conica (3), cioè centro di una delle coniche del fascio Φ.

Osservazione. — Se più generalmente si vuole che dette polari convergano sopra una retta data

$$Ax + By + C = 0 \tag{6}$$

è necessario che il polo P (x_1, y_1) sia tale da far coesistere le equazioni (5) con la (6); cioè è necessario che P sia un punto della conica

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Questa si riduce alla (3), cioè al luogo dei centri delle coniche del fascio, quando la retta data è all'infinito cioè quando nella precedente equazione $A = 0$, $B = 0$, C diverso da 0. È facile trovare la proprietà correlativa.

Altre risoluzioni dei sigg. Bianca R. U. di Catania; Di Stefano R. U. di Catania; Mercogliano; Pensa di Savigliano.

566. *Dimostrare che la quartica rappresentata in coordinate polari dall'equazione*

$$\rho = \frac{a}{\cos\frac{\omega}{2}} \tag{1}$$

ha l'area, compresa tra essa ed i suoi asintoti, finita ed equivalente all'area della buccola della curva.

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Longobardi di Napoli.

La (1) è simmetrica intorno all'asse polare e al raggio vettore ad esso perpendicolare; ha sul detto raggio vettore due punti doppi alla distanza $a\sqrt{2}$ dal polo; ha per asintoti le parallele all'asse alla distanza $2a$.

L'area della buccola della (1) è quindi

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\, d\omega = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{\omega}{2}}{\cos^2\frac{\omega}{2}} = 4a^2 \left[\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2.$$

L'equazione di un asintoto della (1) è

$$\rho \operatorname{sen} \omega = 2a.$$

L'area compresa tra la (1) ed i suoi asintoti è quindi

$$S' = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{4a^2}{\operatorname{sen}^2 \omega} - \frac{a^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}\right) d\omega = 4a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}} = 4a^2\left(-\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4a^2$$

cioè è finita ed equivalente a quella della buccola.

Altra risoluzione del sig. Fornari di Varese.

567. *Si considerino due circoli, di cui i centri sono fissi, e la somma dei raggi resta costante. Dal centro di ciascuna circonferenza si conducano due tangenti all'altra. Il luogo dei punti d'incontro di queste quattro tangenti con le due circonferenze si compone di un circolo e di quattro conchiglie di Pascal.*

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Longobardi di Napoli e Fornari di Varese.

Sieno O e O' i centri fissi dei due sistemi di cerchi, k la somma dei raggi ed a la distanza OO'.

Evidentemente i punti di contatto delle tangenti a ciascun cerchio condotte dal centro dell'altro sono sulla circonferenza descritta sul diametro OO'.

Se θ è l'angolo che una tangente da O al circolo di centro O' fa con la retta OO', osservando che l'espressione del raggio di quest'ultimo è $a \operatorname{sen} \theta$, si avrà tra le coordinate ρ e θ (OO' asse polare, O polo) dei punti d'incontro di quella tangente col corrispondente cerchio O la relazione

$$\rho \pm a \operatorname{sen} \theta = \mathrm{K},$$

che rappresenta due conchiglie di Pascal.

Similmente si ragiona per l'altro cerchio.

Le equazioni cartesiane di dette quattro conchiglie di Pascal riferite alla OO' per asse delle x e alla perpendicolare ad essa in O per asse delle y sono

$$(x^2 + y^2 \pm ay)^2 - \mathrm{K}^2 (x^2 + y^2) = 0$$
$$[(x-a)^2 + y^2 \pm ay]^2 - \mathrm{K}^2 [(x-a)^2 + y^2] = 0.$$

568. *Sono date due rette* x, y *perpendicolari ed una terza* z, *concorrenti in un punto* O. *Si trovi l'inviluppo degli assi delle ellisi che hanno un fuoco sopra* z, *sono tangenti ad* x *e* y *ed hanno l'asse minore eguale ad una lunghezza data.*

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Longobardi di Napoli.

Le rette x, y siano gli assi, e l'equazione della z sia

$$y = mx. \tag{1}$$

L'equazione tangenziale di ogni conica tangente agli assi è

$$2h\,uv + 2gu + 2fv + 1 = 0 \tag{2}$$

e il punto (g, f) ne è il centro. Le coordinate del fuoco F della (2), che deve stare sulla (1), siano x_1, mx_1. L'equazione di una qualunque retta (u, v) per F è

$$y - mx_1 = m_1 (x - x_1), \tag{3}$$

e le coordinate della congiungente il suo polo rispetto alla (2) con F sono

$$u_2 = \frac{(gu_1 + fv_1 + 1)\,mx_1 - hu_1 - f}{(hu_1 + f)x_1 - (hv_1 + g)\,mx}, \quad v_2 = \frac{hv_1 + g - (gu_1 + fv_1 + 1)x_1}{(hu_1 + f)x_1 - (hv_1 + g)\,mx_1};$$

e questa retta (u_2, v_2) è perpendicolare alla (3), se

$$[mx_1^2 - (gm+f)x_1 + h]m_1^2 - [(m^2-1)x_1^2 + 2(g-fm)x_1]m_1 - [mx_1^2 - (gm+f)x_1 + h] = 0$$

Essendo F fuoco della (2), qualunque retta per esso è perpendicolare alla sua reciproca, e perciò la precedente equazione dev'esser vera qualunque sia la retta (u, v) per esso, cioè qualunque sia m_1. Si hanno dunque le equazioni

$$\begin{cases} mx_1^2 - (gm + f)x_1 + h = 0 \\ (m^2 - 1)x_1 + 2(g - fm) = 0; \end{cases} \tag{4}$$

eliminando tra le quali x_1, si ha la condizione

$$2(m^2+1)(gm-f)(g-fm)+h(m^2-1)=0,$$

alla quale debbono soddisfare f, g, h perchè la (2) abbia un fuoco sulla x.

Essendo l'origine il punto di incontro di due tangenti ortogonali della (2), il quadrato della sua distanza dal centro (g, f), cioè g^2+f^2, è eguale, alla somma dei quadrati dei semiassi a e b della (2). Quindi la distanza del fuoco F della (2) del suo centro (g, f) è dato da

$$\sqrt{g^2+f^2-2b^2}, \tag{5}$$

essendo b il semiasse minore dato. Per conseguenza il punto F, dovendo stare sulla (1) e trovarsi alla distanza (5) dal punto (g, f) è un punto del luogo

$$(1+m^2)x_1^2-2(g+fm)x_1+2b^2=0,$$

e, dando a x_1 il valore dato da (4), si ha la condizione

$$4m(gm-f)(g-fm)+b^2(m^2-1)^2=0; \tag{6}$$

alla quale debbono soddisfare f, g perchè la (2) abbia dato il semiasse minore.

L'equazione dell'asse focale di (2) è

$$y-f=\frac{f-mx_1}{g-x_1}(x-g),$$

cioè dando a x_1 il valore dato da (4)

$$[2gm-(m^2+1)f]x+[2fm-(m^2+1)g]y+2(gm-f)(fm-g)=0;$$

e le sue coordinate sono

$$u=\frac{2gm-(m^2+1)f}{2(gm-f)(fm-g)}; \quad v=\frac{2fm-(m^2+1)g}{2(gm-f)(fm-g)}.$$

Eliminando f, g tra le precedenti e la (6), si ha per l'inviluppo dell'asse focale della (2) la conica

$$b^2(mu+v)(mv+u)-m=0. \tag{7}$$

L'equazione dell'asse minore di Q è

$$y-f=-\frac{g-x_1}{f-mx_1}(x-g);$$

cioè, dando a x_1 il valore dato da (4),

$$[2fm-(m^2+1)g]x-[2gm-(m^2+1)f]y+(m^2+1)(g^2-f^2)=0;$$

e le sue coordinate sono

$$u=\frac{2fm-(m^2+1)g}{(m^2+1)(g^2-f^2)} \quad ; \quad v=-\frac{2gm-(m^2+1)f}{(m^2+1)(g^2-f^2)},$$

Eliminando f, g tra le precedenti e la (6), si ha per l'inviluppo dell'asse minore di (2) la curva di quarta classe

$$4m(mu-v)(mv-u)+b^2(m^2+1)^2(v^2-u^2)=0, \tag{8}$$

doppiamente tangente alla retta all'infinito.

Chiamando x, y le coordinate g, f del centro, l'equazione di condizione (6) si riduce a

$$4m(mx-y)(x-my)+b^2(m^2-1)^2=0,$$

e rappresenta il luogo del centro. Trasformando questa equazione in coordinate tangenziali si ricade nell'equazione

$$b^2(mu+v)(mv+u)-m=0$$

della conica inviluppo dell'asse focale, cioè la conica luogo del centro coincide con la conica inviluppo dell'asse focale. Da ciò segue che l'altro asse è sempre una normale a detta conica (7) e perciò il suo inviluppo (8) coincide con l'inviluppo delle normali alla (7), cioè con la sua evoluta. Riassumendo si ha dunque che l'inviluppo degli assi delle ellissi, che hanno un fuoco sulla z, sono tangenti a x e y ed hanno l'asse minore eguale ad una lunghezza data è l'insieme della conica luogo dei loro centri, e della sua evoluta.

Osservazione. — Poichè il centro (g, f) è il punto medio tra i due fuochi (x_1, y_1) (x_2, y_2) si ha

$$x_2 = 2g - x_1 = \frac{2m(f - gm)}{1 - m^2} \quad ; \quad y_2 = 2f - y_1 = \frac{2(f - gm)}{1 - m^2};$$

donde

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{1}{m}.$$

Adunque mentre il fuoco (x_1, y_1) percorre la retta $y = mx$ (detta z) l'altro fuoco (x_2, y_2) percorre la retta $my = x$ (che diremo t). Le rette z e t sono egualmente inclinate rispettivamente a x e y. Si ha anche, evidentemente l'eguaglianza

$$x_1 x_2 = y_1 y_2 = b^2. \tag{9}$$

Queste relazioni mostrano che l'asse focale determina su z e t due punteggiate proiettive, e perciò la conica (7) da esso inviluppata è un'iperbole avente z e t per assintoti.

La (9) esprime il noto teorema: *è costante l'area del triangolo formato dagli assintoti e da una tangente variabile dell'iperbole.*

569. *Siano* A, A' *e* B, B' *i vertici di un ellisse, ed* M *un punto qualunque di essa. Le perpendicolari condotte ad* MA, MA', MB, MB' *nei loro punti di mezzo incontrino la normale in* M *nei punti* C, C', D, D'. *Dimostrare che* CD = C'D' *e che il luogo del punto di mezzo* CC' *è un'ellisse.*

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Longobardi di Napoli.

Sia $M(x', y')$ un punto dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1}$$

x', y' verificano la (1), cioè

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

L'equazione della normale ad (1) in M è

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'), \tag{3}$$

e quelle delle perpendicolari a MA e MB nei loro punti medi sono

$$y - \frac{y'}{2} = \frac{a - x'}{y'}\left(x - \frac{a + x'}{2}\right), \tag{4}$$

$$y - \frac{b + y'}{2} = \frac{x'}{b - y'}\left(x - \frac{x'}{2}\right). \tag{5}$$

Le coordinate del punto d'incontro c di (3) e (4) sono quindi

$$x = \frac{c^2 x'}{2a^3}(x' + a); \qquad y = \frac{c^2 y'}{2ab^2}(x' - a) \tag{6}$$

e quelle del punto d'incontro C di (3) e (5) sono:

(7) $$x = \frac{c^2 x'}{2a^2 b}(-y' + b)\,; \qquad y = \frac{c^2 y'}{2b^3}(-y' - b).$$

Mutando nelle precedenti espressioni (6) e (7) a in $-a$ e b in $-b$ si hanno per le coordinate dei punti C' e D' rispettivamente i valori

$$x = \frac{c^2 x}{2a^3}(-x' + a)\,; \qquad y = \frac{c^2 y'}{2ab^2}(-x' - a)$$
$$x = \frac{c^2 x'}{2a^2 b}(y' + b)\,; \qquad y = \frac{c^2 y'}{2b^3}(y' - b).$$

Dai precedenti valori deducesi che il punto di coordinate

(8) $$x = \frac{c^2 x'}{2a^2}\,; \qquad y = -\frac{c^2 y'}{2b^2}$$

è punto medio di CC' e DD', e da ciò segue che

$$CD = C'D'.$$

Eliminando x' e y' tra la (2) e le (8), si ha pel luogo del punto medio di CC' o DD', al variare di M sull'ellisse, l'equazione

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{2a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{c^2}{2b}\right)^2} = 1\,;$$

cioè detto luogo è anch'esso un'ellisse, che diventa omotetica alla data se si gira di 90° intorno al centro.

Osservazione. — Si hanno facilmente le seguenti relazioni, nelle quali b' è il semidiametro coniugato a quello che passa per M

$$CD = C'D' = \frac{c^2 b'}{2ab}\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right)$$
$$CD' = C'D = \frac{c^2 b'}{2ab}\left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right)$$
$$CC' = \frac{c^2 b' x'}{a^2 b}\,; \qquad DD' = \frac{c^2 b' y'}{ab^2}$$
$$\overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2 = \frac{c^4 b'^2}{a^2 b^2}.$$

Altra risoluzione del sig. Bianca R. U. di Catania.

QUESTIONE A PREMIO.

Dimostrare che per valori interi e positivi di a, b, c, le espressioni

$$\frac{a}{b + \frac{1}{c}} \qquad\qquad \frac{a}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\frac{a}{b}}}}$$

hanno la stessa parte intera, almeno quando $ac + b$ è un numero pari.

G. Frattini.

N. B. Fra coloro che risolveranno la precedente questione, verrà sorteggiato un premio, consistente in un'opera di matematica del valore di L. 50, dono offerto dal prof. G. Frattini al *Periodico*. L'opera di matematica sarà a scelta del vincitore. Il tempo utile per l'invio dei lavori scade il 31 marzo 1902.

QUISTIONI PROPOSTE

570. Si desidera una dimostrazione puramente geometrica del seguente

TEOREMA. — Siano r_1, r_2, r_3 tre rette che partono dai tre vertici di un triangolo e ρ_1, ρ_2, ρ_3 le loro rispettive coniugate armoniche; se le tre prime s'incontrano in un punto, le due coniugate ρ_1, ρ_2 si incontrano sulla r_3, le due ρ_2, ρ_3 s'incontrano sulla r_1 e le due ρ_3, ρ_1 si incontrano sulla r_2.

P. CASSANI.

571. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta)^2} = \frac{1}{3}.$$

572. Mostrare che il rapporto delle aree delle due curve, rappresentate dalle equazioni

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0,$$
$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

è eguale a $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

573. Esistono infiniti triangoli simili ad un triangolo T′ e circoscritti ad un triangolo T.

Trovare il massimo dell'area e del perimetro di questo triangolo.

Caso in cui T′ è equilatero.

574. Luogo del punto M del piano di un triangolo ABC, tale che sia MA = MB + MC. Caso in cui il triangolo ABC è equilatero.

575. La potenza del vertice di una parabola rispetto ad un circolo bitangente ad essa è eguale al quadrato della distanza del vertice stesso dalla corda di contatto.

576. Il luogo dei centri di similitudine dei circoli che sono ortogonali ad un circolo dato c, e di cui il centro si sposta sopra una retta fissa r è una conica.

E. N. BARISIEN.

577. Dimostrare l'eguaglianza delle due frazioni continue

$$\left(\frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \cdots\right) \left(\frac{b^2}{ab+a}, -\frac{ab}{a+b+ab}, -\frac{ab}{a+b+ab}, -\frac{ab}{a+b+ab}, \cdots\right)$$

578. Se si ha $\varphi + \psi i = f(x\sqrt{1+i} + y\sqrt{1-i})$ essendo φ, ψ funzioni a coefficienti reali di x, y, si deve avere

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} + \frac{d^4\varphi}{dy^4} = 0 \qquad \frac{d^4\psi}{dx^4} + \frac{d^4\psi}{dy^4} = 0.$$

579. Essendo $S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ l'equazione di una conica, Δ il suo descriminante ed $R^2 = (a-b)^2 + 4h^2$, l'equazioni delle direttrici si possano mettere sotto la forma

$$\sqrt{R+a-b}\,\frac{\partial S}{\partial x} + \sqrt{R+b-a}\,\frac{\partial S}{\partial y} \pm 2\sqrt{2\Delta} = 0.$$

580. Trovare i punti d'inflessione della curva

$$x^2(x^2-2) + y^2(y^2-2) = 0.$$

GREENSTREET.

581. Risolvere il sistema

$$\sum_1^3 x_i^3 + \sum_1^3 x_i x_j (x_i + x_j) = a, \qquad x_1 x_2 x_3 = b, \qquad \sum_1^3 x_j \lambda_i = c.$$

CANDIDO.

BIBLIOGRAFIA

Opere matematiche di FRANCESCO BRIOSCHI — Tomo I con ritratto di F. Brioschi.

L'editore U. Höepli con questo volume, nitidamente e riccamente stampato dalla *tipografia matematica di Palermo,* ha iniziato la pubblicazione delle opere di F. Brioschi; pubblicazione che fu deliberata dal Comitato sorto alla morte dell'illustre matematico per onorarne la memoria e composto dei senatori *Ascoli, Beltrami, Colombo, Cremona, Negri* e *Schiapparelli.*

Questo primo volume di 410 pagine contiene 54 note o memorie pubblicate dal 1851 al 1861 negli otto volumi degli *Annali di scienze matematiche, e fisiche* del Tortolini e nei primi quattro volumi degli Annali di matematica pura ed applicata.

Revisori sono stati i professori Cerruti, Bianchi, Capelli, Gerbaldi, Loria, Pascal, Pittarelli, Reina e Tonelli. — La prefazione del prof. Colombo presidente del Comitato si chiude colle seguenti parole, che ci piace di riportare:

“ Con questa pubblicazione il Comitato crede di aver bene interpetrato il “ pensiero dei sottoscrittori, sicuro che la raccolta degli scritti di *Francesco Brioschi* “ rimarrà il monumento più degno della sua memoria „.

De numeris libri duo authore Joanne Noviomago, esposti ed illustrati dal Prof. G. FRIZZO. — Drucker, Padova 1901. — L. 3.

Il Prof G. Frizzo, R. provveditore agli studi a Pavia, cercando nella biblioteca Comunale di Forlì materiali per la *Storia delle matematiche* alla quale attende da molti anni, trovò un volume, segnato nel catalogo come *raro,* nel quale erano rilegate insieme cinque opere diverse pubblicate nel secolo XVI, una delle quali è quella che ha molto opportunamente esposto ed illustrato nel presente volume.

I *libri duo* sui numeri di Giovanni Bronchorst (1494-1570), altrimenti detto *Noviomagus* dal nome della sua città nativa, Nimega, sono infatti assai interessanti. Il *libro primo dell'aritmetica che tratta della logistica, ossia dell'arte di computare* contiene una dettagliata esposizione dei vari modi adoperati dai Greci e dai Romani per rappresentare i numeri, l'antica maniera di computare piegando variamente le dita, *(chironomia)* ricavata da un volume di Beda, i simboli dei numeri tratti dall'astrologia caldaica, che sono assai ingegnosi, sebbene non possano reggere il confronto colla scrittura attualmente in uso introdotta in Europa da Fibonacci, infine le varie regole per eseguire l'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione e la somma dei termini di una progressione. Fra queste sono alcune regole ormai dimenticate, seguite dagli antichi, che sebbene meno semplici e comode delle attuali, sono però molto ingegnose. — Fra queste sono curiosissime quelle per fare operazioni con serie di monete o con pallottole.

Il libro si chiude con una breve teoria delle frazioni e colla regola del tre.

Il libro secondo dell'aritmetica che tratta della teoria dei numeri è meno interessante, e, come osserva giustamente il Frizzo, è ben povera cosa in confronto di quanto Euclide lasciò nei libri VII, VIII, IX, X dei suoi *elementi*, i quali contengono il germe della *teoria dei numeri*, che raggiunse il suo massimo sviluppo alla fine del secolo XVIII e al principio del XIX. Esso si aggira principalmente sulle distinzioni in numeri *pari* e *dispari*, *parimente impari* e *imparimente pari*, sui numeri *superflui*, *diminuiti* e *perfetti*, sui numeri *figurati*, *lineari*, *poligonali*, *piramidali*, ecc.

Tutta l'opera vale a lumeggiare i sistemi seguiti nell'insegnamento della matematica in Europa nel secolo XVI, e crediamo che il Frizzo abbia reso un servizio alla storia della matematica, rimettendola in luce. — L'esposizione fatta dal Frizzo, come tutte le cose dell'egregio autore, è fatta con eleganza e semplicità, in guisa che l'opera si legge con diletto. L'edizione è bellissima. K.

VOGT. — *Éléments de mathématiques supérieurs a l'usage des physiciens, chimistes et ingenieurs et des élèves des facultés des sciences.*

Scopo di questo libro, come dice l'A. nella prefazione è di mettere gli studenti di matematica, fisica e chimica che entrano nell'Università in grado di profittare più rapidamente che sia possibile dell'insegnamento superiore teorico e applicato; « essi sono destinati ai giovani che hanno fatto buoni studi di matematiche elementari, e che, desiderando seguire dei corsi d'analisi, di meccanica, di fisica, di elettrotecnica, di chimica fisica, di elettrochimica, ecc., non possono consacrare un intero anno per imparare in una classe di matematiche speciali il poco d'algebra e geometria analitica che è loro necessaria, nè seguire un corso completo di calcolo differenziale e integrale ».

Ed infatti apparisce chiaro lo studio di condensare la maggior quantità di nozioni e concetti fondamentali in un numero relativamente piccolo di pagine (620) come si vede dall'Indice che riassumo:

PARTE I. - *Complementi d'algebra.* — In 8 capitoli contiene: Equazioni lineari a due e tre incognite. — Determinanti fino al 4° ordine. — Formula del binomio, Radicali ed esponenti. — Limiti. — Serie. — La serie e e la funzione e^x. — Funzione esponenziale e logaritmi.

PARTE II. - *Principi di geometria analitica.* — In 6 capitoli contiene: Unità e omogeneità. — Segmenti e proiezioni. — Coordinate nel piano. — La retta. — Equazioni usuali delle coniche. — Coordinate nello spazio.

PARTE III. - *Derivate e differenziali.* — In 10 capitoli, tratta dei seguenti argomenti: Derivate. — Variazioni. — Formule di Taylor e Maclaurin. — Forme indeterminate. — Funzioni rappresentate da serie. — Interpolazione. — Infinitesimi e differenziali. — Funzioni di più variabili. — Formule di Taylor per le medesime. — Massimi e minimi.

PARTE IV. - *Teoria dell'equazioni.* — Contiene quattro capitoli, che trattano degli imaginari; delle proprietà delle radici di un'equazione algebrica; della risoluzione dell'equazione di 3° grado; della risoluzione numerica dell'equazioni.

PARTE V. - *Applicazioni geometriche.* — In 8 capitoli vengono trattate le nozioni fondamentali di geometria differenziale cioè: Tangenti e normali. — Costruzioni di curve piane (Cap. II e III). — Luoghi e inviluppi. — Curvature. — Tangenti e normali alle curve gobbe. — Generazione di superficie. — Inviluppi. — Curvature delle curve gobbe.

PARTE VI. - *Calcolo integrale.* — In 9 capitoli si studiano: Integrali definiti e indefiniti. — Processi d'integrazione delle funzioni razionali. — Integrazione di funzioni algebriche e trascendenti. — Calcolo degl'integrali definiti. — Integrali doppi. — Integrali tripli. — Integrazioni dei differenziali totali. — Integrali curvilinei. — Integrali di superficie. — Trasformazione degli integrali multipli.

PARTE VII. - *Equazioni differenziali.* — Contiene 4 capitoli: Equazioni differenziali del 1º ordine. — Equazioni differenziali di ordine superiore. Equazioni differenziali simultanee. Equazioni a derivate parziali.

Il volume si chiude con due lunghe note nelle quali si completano i corsi di algebra e geometria analitica.

La ricerca della brevità è qualche volta riuscita a danno del rigore. Per es. la teoria dei determinanti ci sembra poco felice. A pag. 34 notiamo la seguente definizione: Una serie è *convergente* se la successione dedotta ha un limite, è *divergente* se la successione stessa non ha limite. E le serie indeterminate? K.

DA GIORNALI E RIVISTE

Bulletin de sciences mathématiques et physiques élémentaires fondé par *M. B. Niewenglowski.*

Anno VI, N. 13, 1 aprile 1901. — *L. G.*, Sulle definizioni (Esamina se sia sempre necessario dimostrare l'esistenza della cose che si son definite). — *G. De Rocquigny-Adanson,* Questioni d'aritmetica. — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 14, 15 aprile 1901. — *L. G.*, Sulle bisettrici. (Riporta e completa una dimostrazione del noto teorema: "In ogni triangolo, al maggior lato corrisponde la minor bisettrice", data da *Wasteels,* indipendente dal postulato d'Euclide). — *L. G.*, Sulle definizioni (cont.) (Dà un'idea del metodo *logico* di Peano). — Questioni risolute. — Questioni proposte,

N. 15, 1 maggio 1901. — *B. N.*, Teorema fondamentale relativo alla somma algebrica. — *Ch. Michel,* Sulle corde d'un circolo. (Dà un'espressione del rapporto anarmonico di quattro punti della circonferenza valendosi del teorema di Tolomeo ecc.). — Preparazione agli esami — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 16, 15 maggio 1901. — *B. N.*, Definizione della lunghezza d'un arco di circolo. — *Ch. Coschez* e *I. Grand,* Costruzione di triangoli. — Corrispondenza. (*L. G.* difende il metodo di Peano dell'accusa di essere un nuovo *volapük* (!)). — Preparazione agli esami. — Questioni, ecc.

N. 17, 1 giugno 1901. — *A. Bonnefoy*, Osservazioni sulle soluzioni negative. — *Z. G.*, Problemi matematici. (Dà conto di una conferenza di M. Hilbert). — Preparazione agli esami. — Questioni, ecc.

Journal de Mathématiques élémentaires de *H. Vuibert.*

Anno XXV, N. 13, 1 aprile 1901. — *Ch. Bioche,* Sulle relazioni fra gli elementi dei triangoli

N. 14, 15 aprile 1901. — *C. Rech*, Note sull'applicazione del senso degli angoli in un piano.

N. 15, 1 maggio 1901. — *M. Laurence,* Nota sulle frazioni continue. — *M. Mascart,* Discorso pronunziato a Nancy il 13 aprile 1901.

N. 16, 15 maggio 1901. — *R. Badia,* Volume della sfera (Trova facilmente le formule del volume, servendosi della nota relazione $\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma n^2}{(n+1)^3} = \frac{1}{2}$).

N. 18, 15 giugno 1901. — *M. Vogt,* Sugli assintoti dell'iperbole.

In questi numeri e in quelli non citati, numerosi esercizi e problemi.

L' Enseignement mathématique Revue internationale dirigée par *M. M. C. A. Laisant* et *H. Ferr.*

Anno III, N. 2, 15 marzo 1901. — *Fr. Pietzcker*, L' insegnamento della matematica in Germania. (Porta in appendice il programma delle matematiche nei ginnasi e nelle scuole reali.) — *C. A. Laisant*, Un'esumazione geometrica. (Vedi *Periodico di Matematica*, Anno XVI, num. VI, *Bollettino dell'associaz. Mathesis.*) — *R. de Montessus*, Si possono volgarizzare le matematiche superiori? (Crede di sì, e dà come esempio un' esposizione della teorica delle superficie minime e delle superficie applicabili). — *L. Lelieurre*, Sui poligoni di Poucelet. — *H. Padé*, Nota su un punto della teorica della funzione esponenziale e dei logaritmi. — Cronaca. — Corrispondenza. — Bibliografia. (Parla di opere di L. Walras, Fr. Michel, L. Bochelier, E. Delage, I. H. Graf, Ed. Gubler, Th. Crivetz, Gauss e Bolyai (corrispondenza pubblicata da Schmidt e Staeckel) Müller, Bagnoli, Alasia, Patrick e Chevel, Holzmüller, De Franchis, Ghersi.) — Bollettino bibliografico.

N. 3, 15 maggio 1901. — *D. E. Smith*, L'insegnamento della matematica negli Stati Uniti. (Coi programmi delle Università di Haward, Chicago e Michigan.) — *Ch. Meray*, L'insegnamento delle matematiche. — *D. Hilbert*, Sulla retta considerata come più breve distanza da un punto a un altro. — *M. Alliaume*, Sulla costruzione delle coniche in geometria proiettiva. — *M. Lelieuvre*, Sulla teorica dei determinanti. — *C. A. Laisant*, Trasformazione delle coordinate baricentriche. — *L. von Emelen*, Sull'impiego del simbolo 1_θ nella ricerca delle formule trigonometriche. — *P. Barbarin*, Su una variazione elementare. — Cronaca. — Corrispondenza. — Bibliografia. (Parla dell' opera di A. Marckoff: *Calcolo delle probabilità.*)

E. Nannei.

Unterichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Anno VI (1900), fasc. 4°. — *H. Schotten*, Scienza e scuola, (cont. v. fasc. 3°). — *R. Böger*, La geometria di posizione nelle scuole. — *H. Schubert*, Sui triangoli eronici con trasversali misurate da numeri interi. (L'A. ricerca come possano prendersi misure dei lati a, b, c di un triangolo in numeri interi in modo che la mediana t uscente dal vertice A risulti pure espressa mediante un numero intero, e trova che basta prendere due numeri interi pari qualunque $e > e'$ e due divisori $f > f'$, e porre $b = e(f+f') - e'(f-f')$, $c = e(f-f') + e'(f+f')$, $a = 2(ef - e'f')$, chè allora si ottiene $t = ef' + e'f$). — Sugli esami di ammissione ai "Seekadetten ". — Notizie scolastiche e universitarie. — Mezzi d'insegnamento. — Recensioni delle seguenti opere: — 1° *H. Borner*, Manuale di fisica ecc., 2ª ediz., Berlino, 1898. — 2° *B. Fèaux*, Trigonometria piana e stereometria elementare, Padeborn, 1898. — 3° *T. Reye*, La geometria di posizione, Leipzig, 1899, Baumgärtner. — 4° *G. Schubring*, Il nuovo secolo e il calendario cristiano.

Fasc. 5° (1900). — *K. Kraepelin*, Aforismi sull'insegnamento delle scienze naturali descrittive. — *A. Wernicke*, Temi scolastici sulla meccanica con speciale riguardo alla tecnica. — *A. Voller*, Sopra nuove ricerche sulla teoria dei raggi. (Si fa un raffronto tra le proprietà dei raggi Röntgen e dei raggi Becquerel. — *Haentzschel*, Le definizioni nella trigonometria. (Risposta alla critica di Schafheitlin, v. fasc. 3°.) — *Moroff*, Il teorema dell'addizione per i seni e coseni. — Notizie scolastiche ed universitarie. — Associazioni e adunanze. — Mezzi d'insegnamento. — Recensioni dei seguenti libri: — 1° *M. Brückner*, Poligoni e poliedri, Teoria e storia. Leipzig, Teubner. — 2° *A. Ritter*, Manuale di meccanica superiore, Leipzig, 1899, Baumgärtner.

F. Palatini.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 16 ottobre 1901.