Indice Articoli Anno 1905

SULLE OPERAZIONI
FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI
e, in particolare,
sul calcolo delle parti proporzionali
nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche

(Continuazione, v. fasc. precedente)

CAPITOLO TERZO (*)

SUI CALCOLI NUMERICI RELATIVI ALLA INTERPOLAZIONE SEMPLICE.

§ 17. Si consideri una tavola numerica qualunque, la quale dia i valori di una funzione ad una variabile corrispondenti ai successivi valori della variabile stessa, crescenti (questi ultimi) in progressione aritmetica; e siano y_0 e y_1 i valori della funzione corrispondenti a due valori x_0 e x_1, prossimi e successivi, della variabile: se, per avere il valore y della funzione corrispondente a un valore x della variabile compreso fra x_0 e x_1, o, inversamente, per avere il valore x della variabile corrispondente a un valore y della funzione compreso fra y_0 e y_1, si ammette il principio delle parti proporzionali, si ha

$$(11)\quad y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0), \qquad (12)\quad x = x_0 + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0).$$

Ora, i valori x_0 e x_1 della variabile sono numeri esatti e altrettanto si suppone del valore x che comparisce nella (11), mentre i valori y_0 e y_1 forniti dalla tavola sono affetti dall'errore che deriva dall'arrotonda-

---

(*) In questo capitolo e nel successivo avremo frequentemente occasione di citare le seguenti nostre note:

1º. *Errori prodotti dalla interpolazione semplice nell'uso delle Tavole logaritmo-trigonometriche,* "Rivista Marittima" Luglio 1895;

2º. *Sulla ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli,* "La Corrispondenza" 1901, Fasc. V e VI e "Periodico di Matematica" 1901, Luglio-Decembre;

3º. *Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice,* "Periodico di Matematica" 1902, Luglio-Agosto;

quindi, per brevità, le indicheremo, rispettivamente, con [N1], [N2], [N3].

mento dell'ultima cifra, e altrettanto si può supporre del valore y che comparisce nella (12). Ne viene che, se, per il calcolo del secondo membro della (11) e della (12), non si vuole nè avere delle cifre illusorie nè tralasciare delle cifre che si possano ritenere esatte, converrà applicare i procedimenti indicati nel primo capitolo. Ci proponiamo di far vedere come questa applicazione si possa fare nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche.

Per semplicità, porremo

$$x_1 - x_0 = \Delta x\,, \qquad x - x_0 = \delta x\,, \qquad y_1 - y_0 = \Delta y\,, \qquad y - y_0 = \delta y\,,$$

onde sarà

$$(11)' \qquad y = y_0 + \frac{\delta x}{\Delta x}\,\Delta y \qquad \text{e} \qquad (12)' \qquad x = x_0 + \frac{\delta y}{\Delta y}\,\Delta x\,;$$

e chiameremo Δx *passo della variabile* e Δy *differenza tavolare,* intendendo bene che questa differenza sia precisamente quella che si deduce dai valori arrotondati della tavola e non la differenza esatta fra i valori che assume la funzione corrispondentemente ai valori x_0 e x_1 della variabile.

Chiameremo inoltre *parte proporzionale della ricerca diretta* e *parte proporzionale della ricerca inversa* i secondi termini dei secondi membri della (11) e della (12).

Supporremo poi sempre che nelle differenze $y_1 - y_0$ e $y - y_0$, come nel calcolo della parte proporzionale della ricerca diretta, si consideri come cifra delle unità l'ultima cifra di y_0.

Osservazione. — Senza entrare in particolari, accenneremo solo che, nel caso in cui y cali al crescere di x, se si vuole che la parte proporzionale della ricerca diretta sia sempre addittiva (il che è, generalmente, comodo, sia per brevità e sia per uniformità di calcolo), anzichè alla (11), si ricorre all'altra

$$(11)'' \qquad y = y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}(y_0 - y_1)\,.$$

§ 18. E sarà opportuno anche premettere le seguenti considerazioni, d'ordine generale, sulla divisione di δy per Δy, che occorre di fare per il calcolo della parte proporzionale della ricerca inversa.

Indicando δy con A e Δy con B, osserviamo prima di tutto che, per quanto s'è detto alla fine del § prec., A e B si possono sempre considerare come due numeri interi e che il primo è sempre minore del secondo.

Ciò posto, se A e B hanno lo stesso numero b di cifre (Es. I), essendo A′ minore di B′, si cade nell'ultimo dei quattro casi considerati nel § 10, e quindi, come si disse alla fine del § stesso, basta calcolare il quoziente con tante cifre quante ne ha A, ossia con b cifre; e siccome la prima cifra significativa del quoziente è certamente la cifra dei decimi (perchè, dalle ipotesi che A e B abbiano lo stesso numero di cifre e che A sia minore di B, deriva che A è compreso fra $0{,}1 \times$ B e B), si può anche dire che basta calcolare il quoziente con tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha B.

Se A ha $b-1$ cifre e B ne ha ancora b, può presentarsi tanto il caso in cui sia A′ maggiore di B′ (Es. II), quanto quello in cui sia A′ minore di B′ (Es. III). Il primo cade nel terzo dei quattro casi accennati, e quindi si calcola il quoziente con una cifra di più di quelle che ha A, ossia con b cifre; e la prima cifra del quoziente è anche ora la cifra dei decimi (perchè, anche ora, dalle ipotesi che A abbia una cifra di meno di B e che A′ sia maggiore di B′, deriva che A è compreso fra $0{,}1 \times$ B e B). Il secondo cade nel quarto dei quattro soliti casi, e quindi basta calcolare il quoziente con tante cifre quante ne ha A, ossia con $b-1$ cifre; e la prima cifra del quoziente è la cifra dei centesimi (perchè, ora, dalle ipotesi che A abbia una cifra di meno di B e che A′ sia minore di B′, deriva che A è compreso fra $0{,}01 \times$ B e $0{,}1 \times$ B). Si può dunque dire che, anche se A ha una cifra di meno di B, basta calcolare il quoziente con tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha B.

E siccome lo stesso ragionamento per il caso in cui A avesse due, tre, ... cifre di meno di B condurrebbe alle stesse conseguenze (Es. IV e V), si può concludere che *del quoziente di* δy *per* Δy *conviene calcolare tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha* Δy.

I)
412 | 425
3825 | 0,969
295
2550
400
3825
175

II)
45 | 425
425 | 0,105
25
2125
375

III)
42 | 425
3825 | 0,099
375
3400
350

IV)
5 | 425
425 | 0,012
75
425
325

V)
4 | 425
3825 | 0,009
175

1. — Tavola dei logaritmi dei numeri.

§ **19.** Considereremo, di questa tavola, i due tipi più comuni: quello da 10000 a 100000 e a *sette* cifre decimali; e quello da 1000 a 10000 e a *cinque* cifre decimali.

In essi il passo Δx è sempre uguale all'unità, quindi il calcolo di y nella ricerca diretta (§ 17, (11′)) si riduce alla moltiplicazione del numero approssimato Δy per il numero esatto δx e all'addizione del prodotto approssimato così ottenuto col numero approssimato y_0.

Si voglia, p. es., il logaritmo del numero 45892,16865 da una tavola del primo tipo; essendo

$$y_0 = 4{,}6617370 \qquad \text{e} \qquad \Delta y = 94\,,$$

si avrà prima di tutto

$$\Delta y \times \delta x = 94 \times 0{,}16865 = 15{,}8\,,$$

94
0 16865
94
564
752
564
15,8

che si ottiene eseguendo la moltiplicazione col procedimento indicato nella Oss. II al § 8, e poscia

$$y = 4{,}6617386,$$

che si ottiene eseguendo l'addizione col procedimento indicato nella Oss. II al § 4. Siccome però nell'eseguire l'addizione si trascura l'ultima cifra (8) del prodotto (15,8) precedentemente ottenuto, sarà più semplice calcolare questo prodotto con una cifra di meno, come qui accanto (considerando come ultima cifra del primo prodotto parziale la cifra delle unità e scrivendo quindi un prodotto parziale di meno). E, invece di eseguire a parte la moltiplicazione per poi aggiungere il prodotto a y_0, si potranno addirittura aggiungere ad y_0 i successivi prodotti parziali di quella moltiplicazione e dare al calcolo la forma qui accanto.

```
  94
   0,16865
----------
  94
  564
   752
----
 16
```

```
y = L 45892,16865 (Δy = 94)
      45892. . . . . . 6617370
          1. . . . .        94
           8. . . .        564
            8 . . .        752
                   -----------
           y = 4,6617386
```

Volendo ricavare il logaritmo dello stesso numero da una tavola del secondo tipo, si procederebbe nello stesso modo, dando anche la stessa forma al calcolo (come qui accanto), e si troverebbe

$$y = 4{,}66174\,.$$

```
y = L 45892,16865 (Δy = 9)
      4589 . . . . . . . 66172
         2. . . . . . .     18
          1. . . . . .      09
                     ---------
             y = 4,66174
```

Per il calcolo della mantissa di y, nella ricerca diretta, si ha dunque la seguente

REGOLA. — *Si scrivano sotto alla mantissa di* y_0 *i successivi prodotti della differenza tavolare* Δy *per le cifre che* x *ha di più di* x_0, *spostando successivamente l'ultima cifra di un posto verso destra (a cominciare dal primo di questi prodotti), dando alla operazione la disposizione indicata nell'esempio e arrestando i prodotti stessi quando si vede che il prodotto seguente uscirebbe tutto dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra della mantissa di* y_0; *nel fare poi l'addizione finale si trascurino tutte le cifre che escono dalla colonna della stessa ultima cifra.*

Le tavole dei logaritmi dei numeri contengono ordinariamente delle tavolette ausiliarie le quali danno 0,1, 0,2, 0,3, ... 0,9 di Δy, e quindi i prodotti parziali occorrenti si trascrivono immediatamente, senza bisogno di eseguirli (*).

§ 20. Il calcolo di x nella ricerca inversa (§ 17, (12)'), anche ora per essere il passo Δx eguale all'unità, si riduce alla divisione del numero approssimato δy per il numero, pure approssimato, Δy, che si eseguisce col criterio stabilito nel § 18, e alla addizione del quoziente così ottenuto col numero esatto x_0 (§ 4, Oss. III), che si eseguisce scrivendo di seguito ad x_0 tutte le cifre decimali (significative o no) del quoziente stesso. Si voglia, p. es., da una tavola del primo tipo ricavare il numero che ha per logaritmo 4,0093221: essendo

```
 412   | 425
 3825  |------
 ----  | 0,969
  295
  2550
  ----
   400
   3825
   ----
    175
```

$$y_0 = 4{,}0092809\,, \qquad x_0 = 10216\,, \qquad \Delta y = 423\,,$$

si ha $$\frac{\delta y}{\Delta y} = \frac{412}{425} = 0{,}969\,,$$

poscia $$x = 10216{,}969\,.$$

E invece di eseguire a parte la divisione, si suol dare al calcolo la disposizione qui accanto.

```
Lx = 4,0093221 (Δy = 425)
         2809. . . . . . .  10216
         ----
          412
          3825 . . . . . .      9
          ----
           295
           2550. . . . .         6
           ----
            400
            3825. . . . .         9
            ----
             175
                     x = 10216,969
```

(*) La disposizione qui indicata per il calcolo di y è quella che è seguita da tutti, ed è quindi strano (come dicemmo in una nota al § 7) che la disposizione dei prodotti parzali indicata nel procedimento del § 7 appaia sempre come cosa nuova ai giovani uscenti dalle scuole secondarie.

Con una tavola del secondo tipo si procederebbe nello stesso modo.

Per il calcolo delle cifre successive a x_0, nella ricerca inversa, si ha dunque la seguente

Regola. — *Si faccia la differenza* δy, *e si calcoli il quoziente di questa differenza per la differenza tavolare* Δy *con tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha* Δy, *dando a questa divisione la disposizione indicata nell'esempio e avvertendo di aumentare di una unità l'ultima cifra, se si vede che la cifra seguente sarebbe uguale a 5 o maggiori di 5; poscia si trascrivano tutte queste cifre decimali (significative o no) di seguito a* x_0.

Avendo le tavolette ausiliarie accennate alla fine del § precedente, l'operazione è anche ora semplificata; anzi nella ricerca inversa la semplificazione è più notevole, perchè, avendo sott'occhio tutti i prodotti parziali, si hanno subito (senza tentativi) le successive cifre del quoziente; non solo, ma (invece di scrivere il prodotto corrispondente all'ultima cifra e poi fare la differenza, come si è fatto nell'esempio precedente, per vedere se la cifra seguente sarebbe o no inferiore a 5) si può (chè è lo stesso) pigliare addirittura la cifra corrispondente al prodotto parziale più vicino, tralasciando anche di scrivere questo prodotto. Così, nell'esempio qui accanto, dei due prodotti parziali 20,3 e 23,2, fra i quali è compreso 23 e che corrispondano rispettivamente alle cifre 7 e 8, il più vicino è il secondo; quindi l'ultima cifra del quoziente è un 8 e non un 7.

$$
\begin{array}{lr}
Lx = 3{,}17184 \ (\Delta y = 29) & \\
\quad 73 \ \ldots\ldots & 1485 \\
\quad \overline{11} & \\
\quad 87 \ \ldots\ldots & 3 \\
\quad \overline{23} \ \ldots\ldots & 8 \\
 & x = \overline{1485{,}38}
\end{array}
$$

Osservazione I. — Per le ragioni dette nella Oss. III al § 8, se le ultime cifre della parte proporzionale della ricerca inversa sono degli zeri, questi non devono essere tralasciati. Così, essendo, per es., $Lx = 3{,}3722011$, il secondo resto parziale è nullo, ma Δy ha tre cifre, quindi si dovrà prendere $x = 2356{,}1400$; essendo $Lx = 4{,}7825371$, la mantissa si trova esattamente nella tavola, ma Δy ha due cifre, quindi si dovrà prendere $x = 60609{,}00$.

Osservazione II. — Quando, nel collocare la virgola nell'antilogaritmo, si vede che l'ultima cifra trovata risulta di ordine maggiore di zero, non si possono aggiungere degli zeri (§ 8, Oss. IV), ma bisogna o ricorrere alle convenzioni indicate, o (in pratica) cambiare unità. Così, se fosse, p. es. $Lx = 9{,}0093221$, si scriverebbe

$$x = 10216969_{00} \qquad \text{oppure} \qquad x = 10216969 \text{ centinaia};$$

e se, in pratica, x rappresentasse dei metri, si potrebbe scrivere

$$x = 1021696{,}9 \ Km.$$

2. — Tavola dei logaritmi delle funzioni trigonometriche a *sette* cifre decimali

§ 21. È noto che nella ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli, come pure nelle corrispondenti ricerche inverse, il principio delle parti proporzionali non è più ammissibile, e che per riparare a questo inconveniente si ricorre a parecchi metodi differenti (*). Ne viene che le tavole dei logaritmi delle funzioni trigonometriche, oltre differire per il passo della variabile e per il numero delle cifre decimali che si considerano, differiscono anche per la diversità dei metodi che, per l'accennato scopo, si propongono.

Il tipo di tavole, a *sette* cifre, che qui considereremo, è quello che contiene: una tavola completa, in cui $\Delta x = 10''$; una tavola di logaritmiseni e di logaritmitangenti soltanto, da 0° a 5°, e in cui $\Delta x = 1''$; una tavola dei logaritmi rapporti S e T (compresa in quella dei logaritmi dei numeri), da 0° a $30'$ e in cui Δx è uguale a $10''$ o a $50''$, secondo che x è maggiore o minore di $16'40'' = 1000''$ (**).

Osservazione. — Per non entrare in particolari, il cui posto non sarebbe questo, ci occuperemo sempre del logseno e del logtangente di un arco acuto, soltanto.

§ 22. La prima delle tre tavole accennate, quando occorra l'interpolazione, si userà solo per x maggiore di 5°, se si tratta di un logseno, e solo per x compreso fra 5° e 85°, se si tratta di un logtangente; e ciò perchè, altrimenti, l'errore prodotto dalla interpolazione potrebbe non essere trascurabile.

In essa Δx è uguale a $10''$ e le operazioni da farsi sono le stesse di quelle che si sono indicate nei §§ 19 e 20; basta solo osservare, in proposito, che la prima cifra di δx, invece di essere dell'ordine -1, è ora dell'ordine zero.

Si avranno dunque le stesse regole che si hanno per la tavola dei logaritmi dei numeri (§§ 19 e 20), colla sola modificazione che le cifre della parte proporzionale della ricerca inversa dovranno esser tante quante quelle di Δy, *compresa quella delle unità di secondo.*

(*) Questi metodi, che noi sappiamo, sono *otto*, e nella nostra [N_2] li studiammo minuziosamente tutti, per vedere quali siano da preferirsi.

Ci piace ricordare in proposito che in quello studio facemmo vedere come alcuni degli otto metodi accennati possano condurre ad errori maggiori di quelli che si avrebbero colla ordinaria interpolazione. Questo accade, per es., sia seguendo il metodo ideato dal Callet (*Tables portatives des logarithmes*, Ed. Firmin Didot, Parigi 1864, *Explication*, pag. 35) e insegnato dal Serret (*Traité de Trigonométrie*, Ed. Gautier-Villars, Parigi 1888, pag. 75), sia seguendo il metodo proposto dal Bremiker (*Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen*, Ed. Nicolaische, Berlino 1890, *Einleitung*, pag. XIII). E facemmo anche vedere come possano qualche volta dar luogo ad errori molto maggiori di una unità (dell'ultimo ordine), mentre furono immaginati per evitare un errore di una unità. Questo accade, p. es., seguendo il primo metodo proposto dall'Houel (*Tables des logarithmes a cinq décimales*, Ed. Gautier-Villars, Parigi 1877, pag. XV); così, seguendo questo metodo, si trova

$$\text{Lsen}\, 3'30'' = \bar{3},00817,$$

mentre che, a meno di una mezza unità del decimo ordine, si ha (veggasi il *Thesaurus logarithmorum* del Vega, dal quale intenderemo sempre ricavati i logaritmi a dieci cifre, che avremo occasione di considerare in seguito)

$$\text{Lsen}\, 3'30'' = \bar{3},0077940864\ ;$$

l'errore è dunque maggiore di 37 unità dell'ultimo ordine. E, anche se, invece di calcolare sen $3'30''$ con sei cifre (come fa l'autore in tutti i suoi esempi), si calcola con sette, si trova

$$\text{Lsen}\, 3'30'' = \bar{3},00796,$$

e l'errore è ancora maggiore di 16 unità.

(**) Come quelle del Vega, pubblicate dal Bremiker e tradotte in italiano dal Cremona (*Manuale logaritmico trigonometrico*, Ed. Weidmann, Berlino 1872). In queste, S e T sono dati fino a $2^\circ 46'30''$ ($9990''$), ma i valori oltre $30'$ non ci serviranno.

La tavola in discorso contiene generalmente le tavolette ausiliarie, che danno 0,1, 0,2,... 0,9 di Δy, e quindi il calcolo è anche qui semplificato.

Veggansi i due esempi accanto. Nel primo (ricerca diretta) i prodotti parziali sono arrestati al quarto, perchè solo il quinto esce dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra della mantissa. Nel secondo (ricerca inversa) si sono calcolate, per la parte proporzionale, 3 cifre (compresa quella delle unità di secondo), tante essendo quelle di Δy; e (supposto di avere le tavolette ausiliarie accennate) l'ultima si è aumentata di una unità, senza scrivere l'ultimo prodotto parziale, per quanto si disse alla fine del § 20.

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{y = \mathrm{L\,sen}\,11^\circ 53'55'',1199\ (\Delta y = 999)} \\
11^\circ 53'50'' \ldots\ldots & \bar{1},3141976 \\
5'' \ldots\ldots & 4995 \\
1 \ldots\ldots & 999 \\
1 \ldots\ldots & 999 \\
9 \ldots\ldots & 8991 \\
\hline
& y = \bar{1},3142487
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{\mathrm{L\,tan}\,x = \bar{1},9890893\ (\Delta y = 422)} \\
0501 \ldots\ldots & 44^\circ 16'40'' \\
\overline{392} & \\
3798 \ldots\ldots & 9 \\
\overline{122} & \\
844 \ldots\ldots & 2 \\
\overline{376} \ldots\ldots & 9 \\
\hline
& x = 44^\circ 16'49'',29
\end{array}$$

Osservazione I. — Analoga alla I del § 20: per cui, essendo, p. es.,

$$\mathrm{L\,tan}x = \bar{1},4531471\,, \qquad \text{si avrà} \qquad x = 15^\circ 50'55'',00\,.$$

Osservazione II. — In questa tavola, per $y = \mathrm{Lsen}\,x$, può essere $\Delta y = 1$, e in tale caso non si hanno per x che le cifre di x_0, date dalla tavola stessa; non si può quindi considerare esatta la cifra delle unità di secondo, ed essendo per esempio

$$\mathrm{L\,tan}x = \bar{1},9999884\,,$$

si ha (§ 8, Oss. IV) $x = 89^\circ 34'5_0''$.

§ **23.** Nella seconda delle tre tavole accennate (§ 21) si ha $\Delta x = 1''$, quindi le regole da applicarsi sono quelle dei §§ 19 e 20, senza nessuna modicazione. Questa tavola però, quando occorra l'interpolazione, si userà solo per x maggiore di $30'$; e ciò per la ragione accennata nel principio del § precedente.

Si noti che questa tavola non contiene, ordinariamente, le tavolette delle parti proporzionali, e neppure la differenza tavolare; quindi i calcoli per l'interpolazione devono esser fatti tutti.

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{y = \mathrm{L\,sen}\,0^\circ 32'13''56483\ (\Delta y = 2246)} \\
0^\circ 32'13'' \ldots\ldots & \bar{3},9718004 \\
5 \ldots\ldots & 11230 \\
6 \ldots\ldots & 13476 \\
4 \ldots\ldots & 8984 \\
8 \ldots\ldots & 17968 \\
\hline
& y = \bar{3},9719273
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{\mathrm{L\,tan}\,x = \bar{2},7097643\ (\Delta y = 412)} \\
420 \ldots\ldots & 2^\circ 56'03'' \\
\overline{223} & \\
2060 \ldots\ldots & 5 \\
\overline{170} & \\
1648 \ldots\ldots & 4 \\
\overline{520} & \\
412 \ldots\ldots & 1 \\
\hline
& x = 2^\circ 56'03'',541
\end{array}$$

Veggansi, senz'altro, i due esempi qui accanto.

§ **24.** Resta a dirsi come si eseguisca l'interpolazione, quando, essendo l'arco minore di $30'$, si ricorre all'uso della tavola dei logaritmi rapporti S e T; nella quale, si rammenti, Δx è uguale a $10''$, o a $50''$, secondochè x è maggiore, o minore, di $16'40''=1000''$.

Si ricordi prima di tutto che questi numeri sono definiti dalle eguaglianze

$$S = L\frac{\operatorname{sen} x}{x''}, \qquad T = L\frac{\tan x}{x''}$$

(dove x'' indica l'arco espresso in secondi), e che il loro uso è basato sulle identità

$$\text{(13)} \qquad L \operatorname{sen} x = Lx'' + S, \qquad L \tan x = Lx'' + T.$$

Ciò posto, è chiaro che per la ricerca diretta basta calcolare separatamente Lx'' ed S (o T): per il primo calcolo serve la regola del § 19; e per il secondo, se $\Delta x = 10''$, serve la stessa regola (§ 22), e se $\Delta x = 50''$, siccome (quando occorre l'interpolazione) Δy è uguale o a 1, o a 2, o a 3 al più, invece di eseguire prima la moltiplicazione di Δy per δx e poi la divisione del prodotto così ottenuto per $50''$, basterà, corrispondentemente, moltiplicare $\frac{1}{50} = 0{,}02$, $\frac{2}{50} = 0{,}04$, $\frac{3}{50} = 0{,}06$ per δx, e così si potrà anche qui applicare la solita regola (§ 19).

Però è bene non eseguire separatamente la somma che dà Lx'', poi quella che dà S (o T), indi quella che dà $Lx'' + S$ (o $Lx'' + T$), ma eseguirne una sola; come nei tre esempi accanto. Così, non solo si abbrevia l'operazione, ma si raggiunge anche una maggiore approssimazione nel risultato; e la ragione ne è evidente.

I)

$y = L \tan 0^\circ 28' 48'',93972$

$L\, x'')$	$0^\circ 28' 48'',9$	$3{,}2277699$
$(\Delta y = 251)$	8	753
	9	2259
	7	1757
T)	$0^\circ 28' 40''$	$\bar{6}{,}6855840$
$(\Delta y = 2)$	8	16
	9	18
	$y =$	$\bar{3}{,}9233649$

II)

$y = L \operatorname{sen} 0^\circ 22' 31'',29673$

$L\, x'')$	$0^\circ 22' 31'',2$	$3{,}1307196$
$(\Delta y = 322)$	9	2898
	6	2254
	7	1932
S)	$0^\circ 22' 40''$	$\bar{6}{,}6855717$
$(\Delta y = 1)$	8	08
	$y =$	$3{,}8163228$

III)

$y = L \tan 0^\circ 13' 56'',37891$

$L\, x'')$	$836'',37$	$2{,}9223984$
$(\Delta y = 52)$	8	416
	9	468
T)	$0^\circ 13' 20''$	$\bar{6}{,}6855770$
$(\Delta y = 3)$	$30''$	18
	$6''$	36
	$y =$	$\bar{3}{,}6079802$

A proposito poi del II esempio, si noti che S cala al crescere di x (mentre T cresce), e che quindi, per aver la parte proporzionale sempre additiva, invece di prendere y_0, si è preso y_1 (§ 17, Oss.)

Per la ricerca inversa si cerchi prima nella tavola in cui $\Delta x = 1''$ il valore più vicino, per eccesso o per difetto, al dato logseno (o logtangente); si ha così il numero arrotondato dei secondi contenuti nell'arco incognito; dopo di ciò:

1° si calcoli il valore di S (o di T) corrispondente a quel numero di secondi, e l'interpolazione, se occorre è semplicissima, perchè si riduce ad aggiungere alla mantissa di S (o di T) letta nella tavola, o l'unico prodotto parziale corrispondente alle unità dello stesso numero se $\Delta x = 10''$, o i due prodotti parziali corrispondenti alle decine e alle unità di secondi se $\Delta x = 50''$;

2° si sottragga il valore di S (o di T) così ottenuto dal valore dato;

3° siccome la differenza che così si trova è *prossimamente* (perchè nel calcolo di S, o di T, si trascurano le frazioni di secondo) eguale a Lx'', si calcoli x'' colla solita regola (§ 20).

Si veggano i tre esempi accanto, nei quali si sono sempre messi i calcoli di S o di T solo per chiarezza, chè, se $\Delta x = 10''$, questi si fanno a mente, come a mente si calcolano i loro complementi a 0 (ossia i cologaritmi) da aggiungere al valore dato.

I)

$$\begin{array}{rl} \mathrm{L}\tan x = & \bar{3},9233649 \\ -\,\mathrm{T} = & 5,3144149 \\ \hline \mathrm{L}\,x'' = & 3,2377798 \\ & 699\ .\ .\ .1728\ \ 9 \\ (\Delta y = 251) & \overline{99} \\ & 753\ .\ .\quad 3 \\ & \overline{237} \\ & 2259\ .\ .\quad 9 \\ & \overline{111}\ .\ .\quad 4 \\ x'' = & 1351'',9394 \\ x = & 0^\circ 28' 48'',9394 \end{array}
\qquad
\begin{array}{|l} \mathrm{L}\tan 0^\circ 28' 49'' = \bar{3},9233800 \\ \mathrm{T})\ .\ .\ 0^\circ 28' 40''\ .\ .\ \bar{6},6855849 \\ (\Delta y = 2)\quad 9''\ .\ .\qquad 18 \\ \mathrm{T} = \bar{6},6855851 \end{array}$$

II)

$$\begin{array}{rl} \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\, x = & \bar{3},8163228 \\ -\,\mathrm{S} = & 5,3144282 \\ \hline \mathrm{L}\,x'' = & 3,1307510 \\ & 7196\ .\ .\ .1351\ \ 2 \\ (\Delta y = 322) & \overline{314} \\ & 2898\ .\ .\quad 9 \\ & \overline{242} \\ & 2254\ .\ .\quad 7 \\ & \overline{166}\ .\ .\quad 5 \\ x'' = & 1351'',2975 \\ x = & 0^\circ 22' 31'',2975 \end{array}
\qquad
\begin{array}{|l} \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\, 0^\circ 22' 31'' = \bar{3},8162271 \\ \mathrm{S})\ .\ .\ 0^\circ 22' 40''\ .\ .\ \bar{6},6855747 \\ (\Delta y = 1)\quad 9''\ .\ .\qquad 9 \\ \mathrm{S} = \bar{6},6855718 \end{array}$$

III)

$$\begin{array}{rl} \mathrm{L}\tan x = & \bar{3},6079802 \\ -\,\mathrm{T} = & 5,3144228 \\ \hline \mathrm{L}\,x'' = & 2,9224030 \\ & 3984\ .\ .\ .\ 836\ \ 37 \\ (\Delta y = 52) & \overline{46} \\ & 416\ .\ .\quad 8 \\ & \overline{44}\ .\ .\quad 9 \\ x'' = & 836'',3789 \\ x = & 0^\circ 13' 56'',3789 \end{array}
\qquad
\begin{array}{|l} \mathrm{L}\tan 0^\circ 13' 56'' = \bar{3},6077835 \\ \mathrm{T})\ .\ .\ 0^\circ 13' 20''\ .\ .\ \bar{6},6855770 \\ (\Delta y = 3)\quad 30''\ .\ .\qquad 18 \\ \qquad\quad 6''\ .\ .\qquad 36 \\ \mathrm{T} = \bar{6},6855772 \end{array}$$

3. — Tavola dei logaritmi delle funzioni trigonometriche a *cinque* cifre decimali.

§ 25. Il tipo di tavola, a *cinque* cifre, che qui considereremo, è quello che contiene una tavola completa in cui $\Delta x = 1'$; e una tavola di logseni e logtangenti soltanto, da 0° a 3°, e in cui $\Delta x = 1''$ (*).

§ 26. La prima delle due tavole accennate, quando occorra l'interpolazione, si userà solo per x maggiore di 3°, se si tratta di un

(*) Come quelle dell'ALBRECHT: — *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen.* Ed. Stankiewicz, Berlino 1884. — Nella tavola dei logaritmi dei numeri di questa raccolta sono anche dati i logaritmi rapporti S e T da 0° a 2°46'40'' (=10000''); ma, come vedremo, se ne può fare a meno.

logseno, e solo per x compreso fra 3° e 87° se si tratta di un logtangente; e ciò per la solita ragione.

In essa $\Delta x = 1'$, e siccome le frazioni di primo sono, generalmente, espresse in secondi, converrà per la interpolazione considerare $\Delta x = 60''$: ne viene che i relativi calcoli delle parti proporzionali [§ 17, (11)' e (12)'], non essendo più Δx eguale a 1 o a 10, sono meno semplici che in tutti i casi fin qui considerati.

Il calcolo della parte proporzionale della ricerca diretta si può eseguire in tre modi diversi, che, mettendo fra parentesi l'operazione dalla quale si comincia, si possono rappresentare così:

$$\text{(I)}\quad \frac{(\delta x \times \Delta y)}{\Delta x}\,,\qquad \text{(II)}\quad \left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\times \Delta y\,,\qquad \text{(III)}\quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\times \delta x\,:$$

quale di questi tre modi è il preferibile? Supponendo che non si abbia nessuna tavoletta ausiliaria, il preferibile è il primo, il quale consiste nella moltiplicazione del numero approssimato Δy per il numero esatto δx (§ 8, Oss. II), e poi nella divisione del prodotto approssimato, così ottenuto, per il numero esatto $\Delta x = 60''$, divisione semplicissima, perchè, prescindendo dalla virgola, il divisore è 6. E siccome il quoziente va aggiunto a y_0, basta (§ 4, Oss. II) che esso sia arrestato alla cifra delle unità; e perciò basta nel primo prodotto parziale della moltiplicazione, di Δy per δx, considerare come cifra delle unità la cifra delle decine. Veggansi i quattro esempî accanto.

```
I)
Δy = 236
δx = 43",3785
944
 70 | 8
  7 | 08
  1 | 652
    | 1888
1024 : 6 = 171

II)
Δy = 92
δx = 38",276
276
 73 | 6
  1 | 84
    | 644
352 : 6 = 59

III)
Δy = 48
δx = 0",765
  3 | 36
    | 285
  4 : 6 = 1

IV)
Δy = 7
δx = 30",94
 21
    | 63
 22 : 6 = 4
```

Ed è facile vedere che gli altri due modi richiedono dei calcoli o dei criterî (per eseguire opportunamente le due operazioni) meno semplici.

Per il calcolo della mantissa di y, nella ricerca diretta, si ha dunque la seguente

REGOLA. — *Si moltiplichi* Δy *per* δx, *prendendo sempre per moltiplicando* Δy *ed applicando il solito procedimento* (§ 7), *nella ipotesi però che si consideri come ultima cifra del primo prodotto parziale la cifra delle decine del prodotto stesso; si divida il prodotto per 6, arrestando il quoziente alle unità; e si aggiunga il quoziente così ottenuto alla mantissa di* y_0.

Veggansi, anche per la disposizione del calcolo, i due esempî accanto.

```
y = L sen 7°52'38",276  (Δy = 92)      |    92
      7°52' . . . . . . . . .  1̄,13630  |    38",276
        38",276 . . . . . .         59  |  276
                            ---------   |   73 | 6
                          y = 1̄,13689   |    1 | 84
                                        |      | 644
                                        |  352 : 6

y = L tan 3°04'43",3785 (Δy = 236)     |  236
      3°04' . . . . . . . . .  2̄,72896  |    43",3785
        43",3785. . . . . .        171  |  944
                            ---------   |   70 | 8
                          y = 2̄,73067   |    7 | 08
                                        |    1 | 652
                                        |      | 1888
                                        | 1024 : 6
```

§ 27. Anche il calcolo della parte proporzionale della ricerca inversa si può eseguire in tre modi diversi, che si possono rappresentare così:

$$\text{(I)}\quad \frac{(\delta y \times \Delta x)}{\Delta y}\,,\qquad \text{(II)}\quad \left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)\times \Delta x\,,\qquad \text{(III)}\quad \delta y : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\,;$$

e anche qui, supponendo sempre di non avere nessuna tavoletta ausiliaria, il modo preferibile è il primo. Il quale consiste nella moltiplicazione del numero approssimato δy per il numero esatto $\Delta x = 60''$ (§ 8, Oss. II), moltiplicazione semplicissima, perchè, prescindendo dalla virgola, il moltiplicatore è 6, e nella divisione del prodotto approssimato così ottenuto per il numero pure approssimato Δy. E siccome il prodotto di δy per Δx è affetto da un errore il cui limite superiore inabbassabile è $60''$ (perchè, in causa dell'arrotondamento di y_0 e di y (§ 2, III), δy è affetto da un errore il cui limite superiore inabbassabile è l'unità), se Δy ha 3, 2, 1 cifre, ossia se è rispettivamente compreso fra 100 e 241 (perchè da 3° in poi Δy è al più 241), fra 10 e 100, fra 2 e 10 (perchè per $\Delta y = 1$ l'interpolazione non occorre), gli estremi superiori esclusi solo negli ultimi due casi, il quoziente ottenuto coi procedimenti ordinari, anche supposto Δy esatto, è affetto da un errore il cui limite superiore inabbassabile è rispettivamente compreso fra $0'',24$ e $0'',6$, fra $0''6$ e $6''$, fra $6''$ e $30''$; se quindi non si vogliono cifre illusorie, basterà arrestare il quoziente ai decimi, alle unità e alle decine di secondi rispettivamente. Veggansi i quattro esempi accanto, dai quali, confrontandoli coi corrispondenti esempi del § prec., si può dedurre che una ulteriore cifra del quoziente può essere illusoria, anche tenendo conto del solo arrotondamento di y.

I) $\delta y = 171$, $\Delta y = 236$

$$\begin{array}{r|l} 10260'' & 236 \\ \hline 944 & 43'',4 \\ 82 & \\ 708 & \\ 112 & \\ 944 & \\ 176 & \end{array}$$

II) $\delta y = 59$, $\Delta y = 92$

$$\begin{array}{r|l} 3540'' & 92 \\ \hline 276 & 38'' \\ 78 & \\ 736 & \\ 44 & \end{array}$$

III) $\delta y = 1$, $\Delta y = 48$

$$\begin{array}{r|l} 60'' & 48 \\ \hline 48 & 1'' \\ 12 & \end{array}$$

IV) $\delta y = 4$, $\Delta y = 7$

$$\begin{array}{r|l} 240'' & 7 \\ \hline 21 & 30'' \\ 3 & \end{array}$$

E anche qui è facile vedere che gli altri due modi richiedono dei calcoli o dei criteri meno semplici.

Per il calcolo delle cifre successive a x_0, nella ricerca inversa, si ha dunque la seguente

Regola. — *Si faccia la differenza* δy *e si moltiplichi questa differenza per* $60''$ *(nel modo ordinario), poi si divida questo prodotto per* Δy*, arrestando la divisione alla cifra delle decine di secondi, delle unità di secondo, dei decimi di secondo, secondochè* Δy *ha rispettivamente una, due, tre cifre; il quoziente così trovato si scriva, senz'altro, di seguito a* x_0.

$$\begin{array}{lr} L\,\mathrm{sen}\,x = \bar{1},13689\ (\Delta y = 92) & \\ \quad 30 \ldots\ldots & 7^\circ 52' \\ \quad \overline{59} \ldots\ldots & 38'' \\ & x = \overline{7^\circ 52' 38''} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 59 \times 60 = & \\ = 3540 & 92 \\ \hline 276 & 38 \\ 78 & \\ 736 & \\ 44 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} L\,\tan x = \bar{2},73067\ (\Delta y = 236) & \\ \quad 2896 \ldots\ldots & 3^\circ 04' \\ \quad \overline{171} \ldots\ldots & 43'',4 \\ & x = \overline{3^\circ 04' 43'',4} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 171 \times 60 = & \\ = 10260 & 236 \\ \hline 944 & 43,4 \\ 82 & \\ 708 & \\ 112 & \\ 944 & \\ 176 & \end{array}$$

Veggansi, anche per la disposizione del calcolo, i due esempi accanto.

Osservazioni. — Analoghe alla I e alla II del § 22.

§ **28.** Nella tavola come quella che stiamo considerando si trovano spesso delle tavolette ausiliarie, che facilitano i calcoli di interpolazione; e la facilitazione è molto più sensibile di quella che si ottiene colle tavolette accennate nei §§ 19, 20 e 22. Queste tavolette però sono di diversi tipi, e noi considereremo quelle che si trovano nelle tavole dell'ALBRECHT (*), e che danno i prodotti di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per 1, 2, ... 9, 10, 20, 30, 40, 50; veggansi i due esempi accanto. Evidentemente, servendosi di queste tavolette, i calcoli delle parti proporzionali, della ricerca diretta e della ricerca inversa rispettivamente, si eseguiscono nel terzo dei modi indicati in principio dei §§ 26 e 27, e si possono seguire le solite regole e le solite disposizioni dei §§ 19 e 20. Una sola avvertenza è necessaria, e bisogna tenerla ben presente: la cifra delle unità del prodotto parziale corrispondente alle decine di secondi e la cifra delle unità del prodotto parziale corrispondente alle unità di secondo devono essere scritte *tutt' e due* sotto l'ultima cifra della mantissa di y_0, e quindi il secondo prodotto parziale (questo solo) non va spostato (come al solito) di un posto verso destra (**). E anche per il numero delle cifre della parte proporzionale della ricerca inversa la regola è la stessa, purchè, come risulta dalla regola del § prec., si consideri come prima cifra di questa parte proporzionale quella delle decine di secondi.

92	
1	1,5
2	3,1
3	4,6
4	6,1
5	7,7
6	9,2
7	11,7
8	12,3
9	13,8
10	15,3
20	30,7
30	46,0
40	61,3
50	76,7

236	
1	3,9
2	7,9
3	11,8
4	15,7
5	19,7
6	23,6
7	27,5
8	31,5
9	35,4
10	39,3
20	78,7
30	118,0
40	157,3
50	196,7

Veggansi i due esempi accanto, che sono di quelli già svolti nei §§ prec., senza tavolette; da essi quindi si può rilevare l'utilità delle tavolette stesse.

OSSERVAZIONE. — I prodotti parziali forniti dalle tavolette in questione non sono in generale esatti, perchè, in generale, il quoziente di Δy per 60 non finisce esattamente nè alla prima nè alla seconda cifra decimale; ma l'errore che così si commette si ritiene trascurabile, e che così sia lo dimostreremo nel capitolo seguente.

$$
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{\mathrm{L\,tan} = 3^\circ 04' 43'',3785 \quad (\Delta y = 236)} \\
3^\circ 04' \ldots\ldots\ldots\ldots & \bar{2},72896 \\
40'' \ldots\ldots\ldots & 1573 \\
3'' \ldots\ldots\ldots & 118 \\
3 \ldots\ldots\ldots & 118 \\
7 \ldots\ldots\ldots & 275 \\
 & y = \overline{\bar{2},73067}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{\mathrm{L\,sen}\, x = \bar{1},18689 \quad (\Delta y = 92)} \\
\underline{30} \ldots\ldots\ldots\ldots & 7^\circ 52' \\
59 & \\
\underline{460} \ldots\ldots\ldots & 3 \\
130 \ldots\ldots\ldots & 8 \\
 & x = \overline{7^\circ 52' 38''}
\end{array}
$$

§ 29. Nella seconda delle tavole accennate (§ 25) si ha $\Delta x = 1''$, quindi basta ripetere quanto si disse al § 23. Questa tavola però, sempre per la solita ragione, si userà solo per x maggiore di $3'$.

Ed è anche inutile dare degli esempi numerici, chè di differente da quelli del § citato, non ci sarebbe che il numero delle cifre della mantissa.

§ 30. Resta a vedere come si possa procedere, per la interpolazione, quando x è minore di $3'$.

(*) Già citate, al § 25.

(**) L'esperienza di parecchi anni ci ha dimostrato che questa avvertenza molto frequentemente sfugge ai calcolatori; dando così luogo ad errori spesso non trascurabili. In un'altra nota, di prossima pubblicazione (*Studio comparativo sulla disposizione e sull'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche*), faremo vedere come si possa riparare a questo inconveniente e raggiungere, nello stesso tempo, qualche altro vantaggio.

In tal caso ammetteremo che il seno e la tangente di un arco siano uguali alla misura (riferita al raggio) dell'arco stesso; ammetteremo cioè che si abbia

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{L\,sen}x = \mathrm{L}x \qquad \text{e} \qquad \mathrm{L\,tan}x = \mathrm{L}x\,,$$

ossia, per maggior facilità di calcolo,

$$\text{(14)}' \qquad \mathrm{L\,sen}x = \mathrm{L}x'' - \mathrm{LR}'' \qquad \text{e} \qquad \mathrm{L\,tan}x = \mathrm{L}x'' - \mathrm{LR}''\,,$$

(indicando con R″ *il raggio in secondi*, ossia il quoziente di 648000 per π); e così, per la ricerca diretta e inversa del logseno e del logtangente di un arco minore di 3′, saremo ricondotti alla tavola dei logaritmi dei numeri.

Non occorre quindi nessuna regola nuova, perchè serviranno quelle dei §§ 19 e 20; e in quanto al logaritmo di R″, che del resto si trova sempre già calcolato nelle ordinarie raccolte di tavole (fra le costanti usuali), rammenteremo che è dato da

$$\mathrm{LR}'' = 5{,}314425133176459\ldots$$

Osserveremo soltanto che nella ricerca diretta converrà, per maggior approssimazione, prendere la mantissa di LR″ con una cifra di più.

$y = \mathrm{L\,sen}\ 0°01'12'',37572$

$\mathrm{L}x''$)	72″,37	1,85956
($\Delta y = 6$)	5 . . .	30
	7. . .	42
$-\mathrm{LR}''$		$\bar{6}$,685575
	$y =$	$\bar{4}$,54517

$\mathrm{L\,tan}\,x$	$\bar{4}$,18727	
$+\mathrm{LR}''$	5,31443	
$\mathrm{L}x''$)	1,50170	
($\Delta y = 13$)	61 . . .	31,74
	9	
	78 . .	6
	12 . .	9
	$x'' =$	31″,7469

CAPITOLO QUARTO.

STUDIO DEGLI ERRORI PRODOTTI DAI PROCEDIMENTI INDICATI NEL CAPITOLO PRECEDENTE.

1. — Errori prodotti dal calcolo numerico.

§ 31. Nel capitolo secondo abbiamo studiato l'errore m prodotto dalla applicazione dei procedimenti indicati nel capitolo primo, e l'errore l che necessariamente affretterebbe il risultato, quando si eseguissero le operazioni nel modo ordinario; abbiamo poscia confrontati fra loro i limiti di questi errori, e abbiamo così veduti nuovamente giustificati i nostri procedimenti. Ci proponiamo di fare uno studio analogo per il caso particolare considerato nel capitolo precedente, e perciò indicheremo:

con m l'errore complessivo che si commette calcolando y coi procedimenti indicati, e con l l'errore, pure complessivo, che si commetterebbe calcolando lo stesso valore y nei modi ordinarî;

con m' ed l' gli errori analoghi per il calcolo di x;

con μ, λ, μ' e λ' i massimi, o dei limiti superiori inabbassabili, di m, l, m' ed l'.

§ 32. Nel caso in cui il calcolo di y e di x consista solo nel calcolo dei secondi membri della (11)' e della (12)' (e questo comprende tutti i casi considerati nel capitolo precedente, meno, soltanto, quelli dei §§ 24 e 30), i valori di λ e di λ' furono già da noi studiati, e basterà, in proposito, ricordare quanto segue.

L'errore l non dipende nè dal passo Δx, nè dalla forma della funzione y, ed ha sempre per massimo una unità, ossia ([N_3], § 3) si ha sempre

$$\lambda = 1; \tag{15}$$

e siccome questa è una unità dell'ultimo ordine, esso dipende evidentemente dal numero delle cifre decimali che si considerano, e impiccolisce al crescere di questo numero.

L'errore l' invece dipende sia dal passo Δx, sia dalla forma della funzione y, e il suo limite superiore inabbassabile è sempre dato da ([N_3], § 6)

$$\lambda' = \frac{1}{\Delta y} \times \Delta x; \tag{16}$$

e siccome Δy è espressa in unità dell'ultimo ordine, anch'esso dipende dal numero delle cifre decimali che si considerano e impiccolisce al crescere di questo numero (*).

Osservazione I. — Si noti che nella moltiplicazione di Δy per δx (che occorre per il calcolo della parte proporzionale della ricerca diretta) l'ipotesi che si fece nel § 15 per avere per λ il valore più piccolo qui è sempre soddisfatta, perchè il moltiplicatore δx si suppone esatto.

Si noti pure che nella divisione di δy per Δy (che occorre per il calcolo della parte proporzionale della ricerca inversa) l'ipotesi che per questo caso si fece nel § 16, che cioè il divisore sia esatto, è precisamente fra quelle che conducono al massimo valore di l' ([N_3], § 5).

Osservazione II. — A proposito dell'errore l è notevole che, se, invece di usare la differenza tavolare quale precisamente risulta dalle tavole (ossia dai valori arrotondati di y_0 e y_1), si usa una differenza più approssimata (dedotta, p. es., da un'altra tavola avente un maggior numero di cifre decimali (**)), l'errore stesso invece di diminuire, può anche crescere. Anzi, come si è osservato nella osservazione precedente, fra le condizioni che rendono massimo l c'è appunto quella che l'errore di Δy sia nullo. E di questo apparente paradosso demmo anche un esempio numerico ([N_3], § 3, Oss.).

Osservazione III. — E, a proposito dell'errore l', si rammenti che λ' è stato dedotto nella ipotesi che il valore dato per y sia affetto solo dall'errore di arrotondamento, chè, se questo valore (che, generalmente, è il risultato di un calcolo) fosse affetto anche da un altro

---

(*) A questo risultato si giunge, generalmente, o supponendo δy e Δy errati di mezza unità, o y_0 e y_1 esatti ([N_3], § 7), tutte ipotesi evidentemente inammissibili; mentre invece, come noi dimostrammo, vi si giunge anche supponendo errati al più di mezza unità y_0, y_1 ed y, che è appunto l'ipotesi che abbiamo sempre fatta.

(**) Come nelle tavole trigonometriche del notissimo *Manuale logaritmico-trigonometrico* del Köhler (Ed. Tauchnitz, Lipsia 1873). Veggasi in proposito tutto il § 10 della [N_2].

errore t, avente per massimo o per limite superiore inabbassabile θ, invece della (2) si avrebbe ([N$_3$], § 6)

$$\lambda' = \frac{1+\theta}{\Delta y} \times \Delta x. \tag{17}$$

Si noti però che, affinchè il ragionamento che ha condotto a questa formula sussista, bisogna che $0,5+\theta$ (che è l'errore che affetta y) non sia maggiore di Δy e bisogna anche che non sia mai, contemporaneamente, y minore e $y+(0,5+\theta)$ maggiore di y_0. E questo, in seguito accadrà sempre, perchè $0,5+\theta$ avrà per limite superiore 1,5; e quindi non potrà questo errore essere maggiore di Δy, perchè, se occorre l'interpolazione, Δy è almeno eguale a 2; nè potrà essere contemporaneamente y minore e $y+(0,5+\theta)$ maggiore di y_0, perchè, se ciò fosse, $0,5+\theta$ dovrebbe essere eguale a 2 almeno.

§ **33.** Passiamo agli errori m ed m' nei casi considerati nel § prec., escluso quello in cui sia $\Delta x = 1'$ (§§ 26, 27 e 28).

Se $\Delta x = 1$ (§ 19), o $\Delta x = 1''$ (§§ 23 e 29), l'errore m si riduce solo a quella parte, che, nella moltiplicazione di Δy per δx, deriva dal tralasciare i prodotti parziali indicati (§ 15); perchè quella che deriva dal trascurare nel risultato le cifre decimali è già compresa in l ([N$_2$], § 3), e l'errore dell'addizione finale (§ 4, Oss. II) si riduce a zero avendo già i due addendi lo stesso numero di cifre. Sarà dunque

$$\mu = 0,2. \tag{18}$$

Se poi $\Delta x = 10''$ (§ 22), nel prodotto di Δy per δx non si considera come ultima cifra del primo prodotto parziale la cifra delle unità, ma la cifra delle decine; quindi il limite dell'errore che deriva dai prodotti parziali tralasciati è 2. Ma (come risulta dalla (11')) questo errore va diviso per $\Delta x = 10''$, quindi anche ora si ha la (18).

Confrontando la (18) colla (15) e ricordando quanto si è detto al § 10, si ha così, immediatamente, la giustificazione del procedimento indicato per la ricerca diretta, quando sia Δx eguale a 1, o a $1''$, o a $10''$.

§ **34.** In quanto all'errore m', si cominci coll'osservare che, se b è il numero delle cifre di Δy, si ha intanto

$$10^{b-1} \leqq \Delta y < 10^b\,,$$

da cui, per la (16),

$$\Delta x \,.\, 10^{-b} < \lambda' \leqq \Delta x \,.\, 10^{-b+1}.$$

Ora, se Δx è eguale a 1, o a $1''$, si ha evidentemente

$$\mu' = 0,5 \times 10^{-b},$$

quindi è certamente μ' minore di λ', mentre non è μ' minore di $\lambda' : 10$ (§ 11); se poi Δx è uguale a $10''$, tanto λ' che μ' vanno moltiplicati per 10 quindi la conclusione è la stessa.

Anche il procedimento indicato per la ricerca inversa, in tutti i casi indicati, è dunque giustificato.

Osservazione. — L'uso delle tavole ausiliarie in tutti i casi ora considerati non porta nessuna modificazione a quanto precede, perchè abbiamo supposto che queste tavole diano precisamente 0,1, 0,2,... 0,9 di Δy.

§ 35. Veniamo ora al caso in cui sia $\Delta x = 1'$ (§§ 26 e 27).

Applicando la regola del § 26, l'errore m è, evidentemente, eguale al quoziente per 6 della somma dei prodotti parziali tralasciati (quando si consideri per cifra delle unità la cifra delle decine del primo prodotto parziale), ma questa somma ha per limite superiore inabbassabile 0,2 (per la (18)), quindi sarà

(19) $$\mu = 0{,}1 : 3.$$

È dunque, certamente, μ minore di λ (per la (15)); anzi, essendo anche minore di $\lambda : 10$ (non però di $\lambda : 100$) l'ultima cifra del prodotto si deve ritenere illusoria. Non conviene però calcolare quel prodotto con una cifra di meno, perchè il piccolo vantaggio, che così si avrebbe, scomparirebbe davanti alla minor semplicità della regola che bisognerebbe stabilire per la divisione per 6 (chè la cifra delle unità del quoziente non corrisponderebbe più all'ultima cifra della mantissa già presa).

Nella ricerca inversa, dalla regola stabilita (§ 27) risulta che si ha

(20) $$\mu' = 0'',05\,, \qquad \mu' = 0'',5\,, \qquad \mu' = 5'',$$

quando, corrispondentemente, Δy ha tre, due, una cifra, ossia quando (come nel § stesso si osservò)

(21) $$0'',24 < \lambda' \leqslant 0'',6\,, \qquad 0'',6 \leqslant \lambda' \leqslant 6''\,, \qquad 6'' \leqslant \lambda' \leqslant 30''\,;$$

e in ciascuno di questi casi si ha certamente μ' minore di λ', mentre non è necessariamente μ' minore di $\lambda' : 10$.

§ 36. Quando però si usino le tavolette ausiliarie indicate nel § 28, ciascuno degli errori m ed m' consta di due parti: una dovuta ai prodotti parziali tralasciati, e alle cifre tralasciate nel quoziente, e che indicheremo con r ed r'; l'altra dovuta alle cifre decimali tralasciate in ciascuno dei prodotti parziali e che indicheremo con s ed s'.

Ciò posto, si cominci dall'osservare che nella ricerca diretta i prodotti parziali che si prendono non possono essere più di quattro, perchè tutti questi prodotti, escluso il primo soltanto (che corrisponde alle decine di secondi), hanno due cifre al più (precisamente: il massimo valore di questi prodotti è 36, perchè Δy è al più 240 e $\frac{9}{60} \times 240 = 36$), per cui il quarto ha certo la sua prima cifra fuori della colonna in cui si trova l'ultima cifra di y_0, e quindi il quinto la ha fuori della colonna successiva. Ne viene di conseguenza che s non supera certamente la somma

$$0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 = 0{,}1055.$$

Ma, nel nostro caso, questo limite si può abbassare. Infatti, essendo Δy intero, la parte decimale del prodotto parziale corrispondente alle decine di secondi non può essere che

$$\tfrac{1}{6}=0{,}1666..., \quad \tfrac{2}{6}=0{,}3333..., \quad \tfrac{3}{6}=0{,}5000..., \quad \tfrac{4}{6}=0{,}6666..., \quad \tfrac{5}{6}=0{,}8333...;$$

per cui, arrestando il quoziente alla cifra dei decimi, non si può commettere che un errore eguale

$$\text{o a } +0{,}0333\ldots, \qquad \text{o a } -0{,}0333\ldots;$$

la parte decimale del prodotto parziale corrispondente alle unità di secondo non può essere che

$$0{,}0166\ldots, \quad 0{,}0333\ldots, \quad 0{,}0500\ldots, \quad 0{,}0666\ldots, \quad 0{,}0833\ldots;$$

per cui, arrestando il quoziente alla cifra dei decimi, non si può commettere che un errore eguale

$$\text{o a } +0{,}0333\ldots, \qquad \text{o a } -0{,}0333\ldots, \qquad \text{o a } +0{,}0500\ldots.$$

Dunque l'errore s, se è per eccesso, ha per massimo (s'intende sempre in valore assoluto)

$$0{,}0333\ldots+0{,}05+0{,}005+0{,}0005=0{,}088833\ldots;$$

se è per difetto ha invece per massimo

$$0{,}0333\ldots+0{,}0333\ldots+0{,}00333\ldots+0{,}000333\ldots=0{,}07033\ldots.$$

Così, essendo $\Delta y=241$ (veggasi la tavoletta accanto), per

$$\delta x=43'',33 \qquad \text{e} \qquad \delta x=52'',22,$$

la parte proporzionale corrispondente alla ricerca diretta è, rispettivamente,

$$174{,}131 \qquad \text{e} \qquad 209{,}68,$$

mentre col calcolo diretto si ha

$$174{,}042166\ldots \qquad \text{e} \qquad 209{,}75033\ldots,$$

e quindi gli errori sono, rispettivamente,

$$-0{,}088833\ldots \qquad\qquad +0{,}070333\ldots.$$

	241
1	4,0
2	8,0
3	12,1
4	16,1
5	20,1
6	24,1
7	28,1
8	32,1
9	36,2
10	40,2
20	80,3
30	120,5
40	160,7
50	200,8

Si noti però che se l'ultimo prodotto parziale che si piglia, invece di corrispondere ai centesimi di secondo, corrispondesse ai decimi, alle unità, alle decine di secondi, il massimo per eccesso si ridurrebbe rispettivamente a

$$0{,}08833\ldots, \qquad 0{,}08383\ldots, \qquad 0{,}03333\ldots,$$

e il massimo per difetto a

$$0{,}07000\ldots, \qquad 0{,}06066\ldots, \qquad 0{,}03333\ldots.$$

In quanto all'errore r, che è sempre per difetto, sappiamo già che esso, in generale, ha per limite superiore 0,2, ma nel nostro caso particolare anche questo limite può essere alquanto abbassato. Infatti, per il ragionamento fatto nella Oss. II al § 15, r sarebbe massimo quando, prescindendo per ora dalle virgole, le cifre corrispondenti ai prodotti parziali tralasciati fossero 1, 9, 9, ... e il quoziente $\Delta y : 60$ fosse prossimo a 1. Ora, si osservi che il valore di questo quoziente più vicino a 1 è dato da $59 : 60 = 0{,}9833\ldots$ (perchè, se la differenza Δy è di tre cifre, essa è al più eguale a 241, e quindi il valore di $\Delta y : 60$ più vicino a 10 è dato da $241 : 60 = 4{,}166\ldots$, e se la differenza stessa è di una cifra sola, il valore di $\Delta y : 60$ più vicino a 0,1 è data da $9 : 60 = 0{,}0833\ldots$); ma per l'arrotondamento dei prodotti parziali dati dalle tavolette, il prodotto corrispondente a 1 per Δy eguale a 59, 58 e 57 è 1 e non 0,9, quindi questo prodotto non si trascura ed è solo per $\Delta y = 56$ che quel prodotto resta, per la prima volta, 0,9. E allora si ha

$$56 : 6 = 9{,}383\ldots, \qquad (56 : 6) \times 9 = 8{,}4,$$

quindi r è al più eguale a

$$0{,}09833\ldots + 0{,}084 + 0{,}0084 + \ldots = 0{,}18666\ldots$$

Si avrà dunque un limite superiore di m, sommando questo massimo di r (che è sempre per difetto) col massimo valore di s quando è per difetto: così si trova

$$0{,}07033\ldots + 0{,}18666\ldots = 0{,}257,$$

ed è questo certamente un limite superiore di m. Ma questo limite è ancora abbassabile? Parrebbe di sì, perchè per $\Delta y = 56$ i prodotti parziali che si pigliano, perchè r abbia il valore massimo, sono *due* e quindi il limite di s è $0{,}0666\ldots$ e non $0{,}07033\ldots$, e allora per $s + r$ si ha

$$0{,}0666\ldots + 0{,}1866\ldots = 0{,}2533\ldots.$$

Così, per $\delta y = 47{,}1999$, essendo $\Delta y = 56$, colla tavoletta si ha 43,8, e senza tavoletta si ha 44,05324, e quindi l'errore è precisamente 0,253.... Ma, se, al crescere di Δy, r cala, s cresce (perchè i prodotti parziali, che si pigliano, possono diventare tre o quattro), e quindi non si può, senz'altro, dare una risposta affermativa. Possiamo però concludere che, essendo μ un limite superiore inabbassabile di $r + s$, si ha certamente

(22)
$$0{,}253 < \mu < 0{,}257.$$

Anche servendosi delle tavolette ausiliarie, è dunque μ minore di λ e maggiore di $\lambda : 10$.

§ **37.** Nella ricerca inversa, i prodotti parziali a cui si ricorre non possono essere più di tre, e siccome gli errori di questi prodotti influiscono sul quoziente come se, invece di affettare i prodotti stessi, affettassero il dividendo, si può dire che l'errore s' ha per limite superiore inabbassabile

$$\frac{0{,}087333\ldots}{\Delta y} \times 60'' = \frac{5'',3}{\Delta y}, \quad \text{o} \quad \frac{0{,}07}{\Delta y} \times 60'' = \frac{4'',2}{\Delta y},$$

secondo che è per difetto, o per eccesso (perchè i prodotti parziali vanno sottratti).

In quanto all'errore r', che può essere per eccesso o per difetto, sappiamo che esso ha per massimo nel primo caso, per limite superiore inabbassabile nel secondo,

$$0'',05\ ,\qquad 0''5\ ,\qquad 5''\ ,$$

secondo che Δy è di tre, due, una cifre.

Si avrà dunque un limite superiore di m' sommando questo massimo, o questo limite superiore, di r' col maggiore dei due limiti trovasi per s', e quindi per

$$100 \leqslant \Delta y \leqslant 241\ ,\qquad 10 \leqslant \Delta y \leqslant 100\ ,\qquad 2 \leqslant \Delta y \leqslant 10\ ,$$

si avrà rispettivamente

$$(24)\quad 0'',071 \leqslant \mu' < 0'',103\ ,\quad 0'',553 \leqslant \mu' < \leqslant 1'',030\ ,\quad 5'',53 \leqslant \mu' \leqslant 7'',65.$$

Ed ora, confrontando queste limitazioni colle corrispondenti (21), si vede che,

se Δy ha tre cifre, μ' è *sempre* minore di λ', senza essere necessariamente minore di $\lambda' : 10$;

se Δy ha due cifre (nel quale caso l'ultima cifra di r è quella delle unità di secondo), μ' è certamente minore di $1'',030$, mentre λ' è compreso fra $0'',6$ e $6''$.

se Δy ha una cifra (nel qual caso l'ultima cifra di x è quella delle decine di secondo), μ' è certamente minore di $7'',65$, mentre λ' è compreso fra $6''$ e $30''$.

Anche in questo caso dunque (§ 11) l'indicato procedimento è giustificato.

Osservazione. — A scanso di equivoci, ricordiamo che (dipendentemente dal modo col quale sono state calcolate) l'uso delle tavolette ausiliarie può dar luogo a tre errori differenti. Uno si presenta in alcune tavole (*) nelle quali, invece di avere una tavoletta per ogni diversa differenza tavolare, se ne ha una per la differenza media fra 10, o fra 15, di queste differenze, e di questo errore parleremo più avanti. Un altro si presenta in quelle tavole, e sono molte (**), nelle quali si trascura la cifra dei decimi nei successivi prodotti parziali, e di questo errore è molto facile trovare un limite superiore inabbassabile. Un altro, finalmente, è quello che abbiamo studiato qui, indicandolo con s e con s'.

I primi due errori sono, evidentemente, evitabili e nei tipi di tavole da noi considerati non si presentano; mentre il terzo è inevitabile, e perciò ne abbiamo qui cercati dei limiti inabbassabili.

§ 38. Consideriamo ora il caso in cui si usino i logaritmi rapporti S e T (§ 24).

Nella ricerca diretta, l'errore l consta di due parti, che derivano dalla interpolazione nel calcolo di Lx'' e nel calcolo di S (o di T), e ciascuna di queste due parti avrebbe per massimo l'unità (§ 32). Sic-

(*) Veggansi, p. es., le tavole del Callet, già citate.
(**) Veggansi, p. es., le tavole del Köhler, quelle del Callet e quelle dell'Houel, tutte già citate.

come però, per il procedimento indicato nel § 24, le cifre che vengono dopo la settima si trascurano una volta sola, questo massimo si riduce di una mezza unità ([N_2], § 3), e si ha

$$\lambda = 1{,}5. \tag{24}$$

Anche l'errore m consta, corrispondentemente, di due parti, e ciascuna di queste due parti ha per limite superiore 0,2 (§ 33); ma nel nostro caso quella dovuta al calcolo di S (o di T) si può abbassare. Infatti (supponendo x minore di 30') δx si moltiplica per un numero che è al più eguale a 6 (§ 24); quindi l'errore in questione ha per limite superiore inabbassabile 0,12. Più precisamente: questo limite è 0,1 se il moltiplicando è 1, o 2, o 5, è invece 0,12 se il moltiplicando è 3, o 4, o 6 (e a questo risultato si giunge facilmente con un ragionamento analogo a quello fatto nella Oss. II al § 15, e nel § 36; così: moltiplicando 2 per δx, il primo prodotto parziale che si trascura è, al più, 0,08, gli altri sono al più, 0,018, 0,0018,... e la loro somma ha per limite superiore inabbassabile 0,1; moltiplicando invece 6 per δx, i prodotti stessi sono, al più, 0,06, 0,054, 0,0054... e la loro somma ha per limite superiore inabbassabile 0,12). Sarà dunque

$$\mu' = 0{,}32; \tag{25}$$

e questo valore confrontato col valore di λ, dato dalla (24), giustifica, nel solito modo, il procedimento indicato.

Nella ricerca inversa, il valore che si ottiene per S (o per T) è necessariamente affetto da un errore l il cui limite superiore inabbassabile è 1 (§ 32); per cui il valore di Lx'', oltre che dall'errore di arrotondamento, sarà affetto anche da questo errore, e quindi si avrà (§ 32, Oss. III)

$$\lambda' = \frac{2}{\Delta y}. \tag{26}$$

In quanto all'errore dovuto al procedimento stabilito, si osservi che nella interpolazione che occorre per il calcolo di S (o di T),

se $\Delta x = 10''$, non si trascura nessun prodotto parziale;

se $\Delta x = 50''$, si può tutt'al più trascurare il prodotto parziale corrispondente alle unità di secondo, ma, se ciò accade, quel prodotto è di una sola cifra e questa non va sommata con nessuna cifra del prodotto precedente (che è di due cifre) quindi l'errore, che così si può commettere, rientra in l'.

L'errore m' si riduce dunque solo a quello che si commette nella ricerca inversa di Lx''. E allora, moltiplicando per 2 i limiti di λ' dati nel § 34 (onde avere (per la 26) i limiti del massimo errore l', che si può avere in questo caso), si vede che si può ripetere lo stesso ragionamento e arrivare alla stessa conclusione.

§ **39.** Resta, finalmente, da esaminare il caso considerato nel § 30.

Nella ricerca diretta, l'errore l deriva solo dalla interpolazione nel calcolo di Lx'' ed ha per massimo una unità (§ 32). L'errore m invece consta di due parti: quella che deriva dai prodotti tralasciati e che ha per limite superiore inabbassabile 0,2 (§ 33), e quella che deriva dalle cifre tralasciate in LR″ e che è eguale a 0,0132..., si avrà quindi

(27) $$0,243 < \mu < 0,214.$$

Sarà dunque, anche ora, μ minore di λ senza essere μ minore di $\lambda:10$ (§ 11).

Nella ricerca inversa, il valore di Lx'', oltre che dall'errore del suo arrotondamento, è affetto anche dall'errore prodotto dall'arrotondamento di LR″, e quest'ultimo è eguale a 0,4866...; sarà quindi (§ 32, Oss. III)

(28) $$\frac{1,486}{\Delta y} < \lambda' < \frac{1,487}{\Delta y}.$$

E allora, moltiplicando per 1,486 e per 1,487, rispettivamente, i limiti di λ' dati nel § 34 (onde avere, per la (28), i limiti del massimo errore l' che si può avere in questo caso) e osservando che l'errore m' deriva solo dall'applicare il solito criterio nella ricerca inversa di Lx'' (§ 20), si vede che, anche qui, si può ripetere lo stesso ragionamento e arrivare alla stessa conclusione.

(Continua) G. Pesci.

SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

12. Tale formola, per (4), può scriversi:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\Delta^r\varphi_2(x_{m-r}),$$

e coincide con la formola di Leibniz. Essa può estendersi ad un numero qualunque di funzioni.

Si ha:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\Delta^r\varphi_2(x_{m-r}),$$

e sostituendo α_1 ad r, può scriversi:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \Sigma\, (m)_{\alpha_1} \Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x_0)\Delta^{\alpha_1}\varphi_2(x_{m-\alpha_1}),$$

potendo attribuire ad α_1 tutti valori, interi e positivi, da 0 ad m ed ottenendo così $m+1$ termini.

Sostituendo a $\varphi_2(x_0)$ il prodotto $\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)$, si ha:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)] = \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\Delta^r[\varphi_2(x_{m-r})\varphi_3(x_{m-r})] =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) \sum_{s=0}^{r} (r)_s \Delta^{r-s}\varphi_2(x_{m-r})\Delta^s\varphi_3(x_{m-r+r-s}),$$

e sostituendo α_1 ad r e α_2 ad s, può scriversi:

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)] =$$
$$= \Sigma\,(m)_{\alpha_1}\Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x_0)\,.\,(\alpha_1)_{\alpha_2}\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi_2(x_{m-\alpha_1})\Delta^{\alpha_2}\varphi_3(x_{m-\alpha_2}),$$

potendo attribuire ad α_1 tutti i valori, interi e positivi, da 0 ad m e ad α_2 tutti i valori, interi e positivi, da 0 ad α_1 ed ottenendo così $\binom{m+2}{2}$ termini,

Così procedendo è facile stabilire la formola generale e dimostrarla col metodo di conclusione da n ad $n+1$.

Perciò, siano n aggregati finiti, ciascuno di $m+1$ elementi:

$$\begin{array}{l}
a_0\,,\ a_1\,,\ldots,a_i\,,\ldots,a_m\,,\\
b_0\,,\ b_1\,,\ldots,b_i\,,\ldots,b_m\,,\\
c_0\,,\ c_1\,,\ldots,c_i\,,\ldots,c_m\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
l_0\,,\ l_1\,,\ldots,l_i\,,\ldots,l_m\,,
\end{array}$$

e si formi il prodotto:

$$a_ib_ic_i\ldots l_i\ \ (i=0,1,\ldots,m),$$

sarà:

$$\Delta^m[a_0b_0\ldots k_0l_0]=\Sigma\frac{m!}{(m-\alpha_1)!(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\alpha_{n-1}!}\Delta^{m-\alpha_1}a_0\,\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}b_{m-\alpha_1}\ldots$$
$$\ldots\Delta^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}}k_{m-\alpha_{n-2}}\,\Delta^{\alpha_{n-1}}l_{m-\alpha_{n-1}}, \qquad (13)$$

potendo attribuire ad α_1 tutt' i valori, interi e positivi, da 0 ad m, ad α_2 tutt' i valori, interi e positivi, da 0 ad α_1 e così via via ad α_{n-1} tutt' i valori, interi e positivi. da 0 ad α_{n-2} ed ottenendo in tutto $\binom{m+n-1}{n-1}$ termini ed essendo in ogni termine la somma degli indici delle Δ uguale ad m.

Si può osservare che in tale espressione entrano in forma simmetrica tutt' i termini dei triangoli delle differenze di

$$b_0\,,\ c_0\,,\ldots,k_0$$

ed i termini della diagonale discendente, verso destra di a_0 e della diagonale ascendente, verso sinistra, di l_0.

Se poi per mezzo della interpolazione si determinano le n funzioni:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),$$

che pel valore x_i della variabile, assumono rispettivamente i valori:

$$a_i\,,\ b_i\,,\ldots,l_i\,,$$

la formola (13) si scrive:

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\ldots\varphi_n(x_0)]=$$
$$=\Sigma\frac{m!}{(m-\alpha_1)!\,(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\,\alpha_{n-1}!}\Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x_0)\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi_2(x_{m-\alpha_1})\ldots$$
$$\ldots\Delta^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}}\varphi_{n-1}(x_{m-\alpha_{n-2}})\,\Delta^{\alpha_{n-1}}\varphi_n(x_{m-\alpha_{n-1}}),$$

e siccome essa, nella sua costituzione, dipende solamente dal numero delle funzioni e dalla classe delle differenze, così scelto un intervallo costante h, si ha:

$$\Delta^m[\varphi_1(x)\dots\varphi_n(x)]=$$
$$=\Sigma\frac{m!}{(m-\alpha_1)!(\alpha_1-\alpha_2)!\dots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\alpha_{n-1}!}\Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x)\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi_2(x+(m-\alpha_1)h)\dots$$
$$\dots\Delta^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}}\varphi_{n-1}(x+(m-\alpha_{n-2})h)\,\Delta^{\alpha_{n-1}}\varphi_n(x+(m-\alpha_{n-1})h),$$

qualunque siano le funzioni di x; e sotto quest'ultima forma basta ammettere $n=2$ e quindi che l'ultimo α sia α_1 per ricavarne la nota formola di Leibniz per la differenza m-esima del prodotto di due funzioni.

13. Sostituendo in (10) invece di $\varphi_2(x_0)$ il prodotto $\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)$, la differenza m-esima del prodotto di tre funzioni sarà:

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)]=\sum_{r=0}^{m-1}\{(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}[\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)]+$$
$$+(m-1)_r\Delta^r[\varphi_2(x_{m-r-1})\varphi_3(x_{m-r-1})]\,\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\}$$

e come da (10) si ricavano

$$2m=2+2\,(m-1)_1$$

termini, ciascuno prodotto di due differenze tali che la somma degl'indici è costantemente m, così da questa si ricavano

$$2\,(m+1)_2+1+2\,(m)_2=2m^2+1=3+2\,.\,3\,(m-1)_1+2^2\,(m-1)_2$$

termini, ciascuno prodotto di tre differenze tali che la somma degli indici è costantemente m.

In generale la differenza m-esima del prodotto di n funzioni è:

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\dots\varphi_n(x_0)]=\sum_{r=0}^{m-1}\{(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}[\varphi_2(x_0)\dots\varphi_n(x_0)]+$$
$$+(m-1)_r\Delta^r[\varphi_2(x_{m-r-1})\dots\varphi_n(x_{m-r-1})]\,\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\}$$

e sviluppando, ciascuno dei termini sarà un prodotto di n differenze tali che la somma degli indici sia costantemente m.

Indagando sul numero dei termini d'un tale sviluppo si trova che esso è il termine m-esimo d'una progressione aritmetica d'ordine $n-1$ e precisamente

$$\mathrm{N}=2^0(m-1)_0\,(n)_1+2^1(m-1)_1\,(n)_2+\dots+2^{n-1}\,(m-1)_{n-1}(n)_n\,. \quad (14)$$

Applicazioni ed esercizi.

14. Si convenga di attribuire ad x tutti e solamente i valori, essenzialmente interi, della serie naturale dei numeri d'ordine

$$-\infty\dots,-1,0,1,\dots\infty;$$

se

$$\Delta^m \varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (m)_i \Delta^0 \varphi(x+m-i)$$

è costante, cioè indipendente dal valore particolare che si attribuisce ad x, allora $\varphi(x)$ è una progressione aritmetica d'ordine m.

In generale una progressione aritmetica d'ordine m è funzione della variabile x e di $m+1$ costanti arbitrarie. Così date $m+1$ quantità affatto indipendenti l'una dall'altra (1):

$$a_0 , \; a_1 , \ldots , a_i , \ldots , a_m ,$$

si può costruire il triangolo delle differenze di a_0, e assunte le $m+1$ quantità come termini consecutivi d'una progressione aritmetica d'ordine m, si può costruirla effettivamente sia a destra di a_m che a sinistra di a_0, insieme con tutte le progressioni aritmetiche d'ordine inferiore, che da essa derivano, riguardando come primi termini i termini della serie delle differenze di a_0, e si hanno le seguenti sei formole in cui r può assumere tutti i valori, interi e positivi, da o ad m.

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \sum_{i=1}^{m-r} (m-r+p)_i \Delta^{r+i} a_0 , \tag{15}$$

$$\Delta^r a_{-p} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (p-1+i)_i \Delta^{r+i} a_0 , \tag{16}$$

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \sum_{i=0}^{m-r} (p-1+i)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i} , \tag{17}$$

$$\Delta^r a_{-p} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r+p)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i} , \tag{18}$$

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r+p)_{m-r-i} (p-1+i)_i \Delta^r a_{m-r-i} , \tag{19}$$

$$\Delta^r a_{-p} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r+p)_{m-r-i} (p-1+i)_i \Delta^r a_i . \tag{20}$$

La formola (15) si potrebbe riferire alla formola d'interpolazione di Newton e la formola (19) a quella di Lagrangia, e tutt'e sei si deducono senza difficoltà dalle tre formole fondamentali (3), (4) e (5).

15. Siano

$$\varphi_1(x), \; \varphi_2(x), \ldots , \varphi_n(x),$$

n progressioni aritmetiche d'ordine rispettivamente

$$m_1 , \; m_2 , \ldots , m_n ;$$

dalla relazione:

$$\Delta^r[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)] = \Delta^{r-1}[\varphi_1(x+1)+\ldots+\varphi_n(x+1)] - \\ - \Delta^{r-1}[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)] = \Delta^r\varphi_1(x)+\Delta^r\varphi_2(x)+\ldots+\Delta^r\varphi_n(x),$$

che si ottiene facilmente partendo da $r=1$, si deduce che la progressione somma d'un qualsivoglia numero di progressioni aritmetiche, avrà la stessa differenza costante e sarà dello stesso ordine della progressione d'ordine maggiore, e se tutte sono dello stesso ordine, cioè se $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$ la differenza costante della somma sarà la somma delle differenze costanti.

16. Se le n progressioni aritmetiche si moltiplicano fra di loro, l'ordine e la differenza costante della progressione prodotto saranno dati dalla formola

$$\Delta^{m_1+\ldots+m_n}[\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)] = \frac{(m_1+\ldots+m_n)!}{m_1!\ldots m_n!}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\ldots\Delta^{m_n}\varphi_n(x). \quad (21)$$

Infatti ponendo in (10) m_1+m_2 invece di m si ha

$$\Delta^{m_1+m_2}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = \sum_{r=0}^{m_1+m_2-1}(m_1+m_2-1)_r\Delta^r\varphi_1(x+m_1+m_2-r)\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_2(x)+$$
$$+\sum_{r=0}^{m_1+m_2-1}(m_1+m_2-1)_r\Delta^r\varphi_2(x+m_1+m_2-r-1)\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_1(x),$$

riferendola in generale al punto x.

Ora avuto riguardo al secondo fattore di ciascuno di questi due sviluppi è facile concludere che $\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_2(x)$ è sempre nullo per $m_1-r>0$ e $\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_1(x)$ è sempre nullo per $m_2-r>0$, e avuto riguardo al primo fattore si conclude ugualmente che

$$\Delta^r\varphi_1(x+m_1+m_2-r)$$

è sempre nullo per $r>m_1$ e $\Delta^r\varphi_2(x+m_1+m_2-r-1)$ è sempre nullo per $r>m_2$; e siccome la somma degl' indici delle Δ è costantemente m_1+m_2, così segue che si annullano tutti i termini, salvo il termine

$$(m_1+m_2-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2)\Delta^{m_2}\varphi_2(x)$$

del primo sviluppo ed il termine

$$(m_1+m_2-1)_{m_2}\Delta^{m_2}\varphi_2(x+m_1-1)\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$

del secondo, e quindi

$$\Delta^{m_1+m_2}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = (m_1+m_2-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2)\Delta^{m_2}\varphi_2(x)+$$
$$+(m_1+m_2-1)_{m_2}\Delta^{m_2}\varphi_2(x+m_1-1)\Delta^{m_1}\varphi_1(x),$$

e riducendo:

$$\Delta^{m_1+m_2}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!\ m_2!}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2}\varphi_2(x).$$

Così pure, sostituendo nell'espressione della differenza m-esima del prodotto di tre funzioni, $m_1+m_2+m_3$ invece di m e ragionando analogamente, si conclude che si annullano tutti i termini, salvo il termine

$$(m_1+m_2+m_3-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2+m_3)\Delta^{m_2+m_3}[\varphi_2(x)\varphi_3(x)]$$

del primo sviluppo ed il termine

$$(m_1+m_2+m_3-1)_{m_2+m_3}\Delta^{m_2+m_3}[\varphi_2(x+m_1-1)\varphi_3(x+m_1-1)]\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$

del secondo, e quindi:

$$\Delta^{m_1+m_2+m_3}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)]=(m_1+m_2+m_3)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2+m_3}[\varphi_2(x)\varphi_3(\varphi)],$$

e pel risultato già ottenuto, sostituendo e riducendo

$$\Delta^{m_1+m_2+m_3}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)]=\frac{(m_1+m_2+m_3)!}{m_1!\ m_2!\ m_3!}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2}\varphi_2(x)\Delta^{m_3}\varphi_3(x).$$

Ammesso perciò

$$\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)]=\frac{(m_2+\ldots+m_n)!}{m_2!\ldots m_n!}\Delta^{m_2}\varphi_2(x)\ldots\Delta^{m_n}\varphi_n(x),$$

si sostituisca $m_1+m_2+\ldots+m_n$ invece di m nell'espressione della differenza m-esima del prodotto di n funzioni, e si conclude che si annullano tutti i termini, salvo il termine

$$(m_1+\ldots+m_n-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2+\ldots+m_n)\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)]$$

del primo sviluppo ed il termine

$$(m_1+\ldots+m_n-1)_{m_2+\ldots+m_n}\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x+m_1-1)\ldots\varphi_n(x+m_1-1)]\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$

del secondo, ed essendo per definizione

$$\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2+\ldots+m_n)=\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$
$$\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x+m_1-1)\ldots\varphi_n(x+m_1-1)]=\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)],$$

si ha

$$\Delta^{m_1+\ldots+m_n}[\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)]=(m_1+\ldots+m_n)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)],$$

e sostituendo e riducendo si ottiene la formola (21).

La stessa formola si può ottenere direttamente dalla formola (13). Infatti:

$$\Delta^m[\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)]=\Sigma\frac{m!}{(m-\alpha_1)!(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\alpha_{n-1}!}.$$
$$.\Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x)\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi_2[x+(m-\alpha_1)h]\ldots\Delta^{\alpha_{n-1}}\varphi_n[x+(m-\alpha_{n-1})h],$$

in cui si vede che il denominatore del coefficiente è il prodotto dei fattoriali degl'indici delle Δ, e sostituendo $m_1+\ldots+m_n$ invece di m, per essere, per ipotesi, $\varphi_i(x)$ una progressione aritmetica d'ordine m_i, è necessario che, perchè il fattore

$$\Delta^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\varphi_i[x+(m_1+\ldots+m_n-\alpha_{i-1})h]$$

non si annulli, si abbia sempre

$$\alpha_{i-1}-\alpha_i\leq m_i,$$

e riguardando al modo della variazione di tutte le α, si conchiude che dev'essere

$$\alpha_{i-1} - \alpha_i = m_i ;$$

ovvero, si deve avere contemporaneamente, per l'ipotesi fatta:

$$\begin{aligned} m_1 + \ldots + m_n - \alpha_1 &\leq m_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &\leq m_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &\leq m_{n-1} \\ \alpha_{n-1} &\leq m_n , \end{aligned}$$

e la somma dei primi dev'essere sempre

$$m_1 + \ldots + m_n ,$$

e perciò sarà:

$$\begin{aligned} m_1 + \ldots + m_n - \alpha_1 &= m_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= m_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &= m_{n-1} \\ \alpha_{n-1} &= m_n , \end{aligned}$$

e quindi sostituendo si ha la formola (21).

Se

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n ,$$

dalla stessa formola si ottiene l'ordine e la differenza costante della potenza n-esima d'una progressione aritmetica d'ordine m, cioè:

$$\Delta^{mn}[\varphi(x)]^n = \frac{(mn)!}{(m!)^n} [\Delta^m \varphi(x)]^n . \tag{22}$$

17. Escludendo che la differenza costante sia nulla, i più semplici valori che possono attribuirsi alle $m+1$ quantità affetto indipendenti l'una dall'altra (in un ordine però prestabilito) e che sono necessarie e sufficienti a determinare un'unica progressione d'ordine m insieme con le m progressioni che ne derivano, sono dati dalle due relazioni:

$$\begin{gathered} a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0 \\ a_m = 1 , \end{gathered}$$

le quali determinano e definiscono i numeri figurati d'ordine m.

Assumendo come primo termine $\Delta^r a_0$, dalle formole (15) e (16) si deduce:

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \binom{m-r+p}{m-r}$$

$$\Delta^r a_{-p-1} = (-1)^{m-r} \binom{m-r+p}{m-r}$$

e quindi

$$\Delta^r a_{m-r+p} = (-1)^{m-r} \Delta^r a_{-p-1} .$$

Il simbolo $\binom{n}{m}$ definito dalla relazione

$$\binom{n}{m}=\frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1.2.3\dots m},$$

in cui m è un intero positivo ed n un intero positivo o negativo, è sufficiente a rappresentare tutt'i numeri figurati, ammettendosi per convenzione

$$\binom{n}{0}=1.$$

La serie completa dei numeri figurati d'ordine $m-r$ è dunque:

$$\dots,\binom{-p-1}{m-r},\dots,\binom{-1}{m-r},\binom{0}{m-r},\dots$$
$$\dots,\binom{m-r-1}{m-r},\binom{m-r}{m-r},\dots,\binom{m-r+p}{m-r},\dots$$

e si può dire che rispetto ai termini del periodò centrale, tutti e solamente nulli:

$$\binom{0}{m-r},\dots,\binom{m-r-1}{m-r},$$

i numeri figurati si sviluppano simmetricamente verso le due direzioni opposte, essendo uguali e dello stesso segno od uguali e di segno contrario, secondo che $m-r$ è pari o dispari.

Supponendo adesso che le $\varphi(x)$ siano numeri figurati, le formole (21) e (22) diventano:

$$\Delta^{m_1+\dots+m_n}\left\{\binom{x}{m_1}\dots\binom{x}{m_n}\right\}=\frac{(m_1+\dots+m_n)!}{m_1!\dots m_n!} \tag{23}$$

e

$$\Delta^{mn}\left\{\binom{x}{m}\right\}^n=\frac{(mn)!}{(m!)^n}=\binom{m}{m}\binom{2m}{m}\dots\binom{nm}{m}, \tag{24}$$

e se si esprime la differenza costante data da (23) in funzione dei termini della progressione prodotto delle n serie di numeri figurati, si ha la relazione, qualunque intero sia x positivo o negativo

$$\frac{(m_1+\dots+m_n)!}{m_1!\dots m_n!}=\sum_{i=0}^{m_1+\dots+m_n}(-1)^i(m_1+\dots+m_n)_{m_1+\dots+m_n-i}\binom{x-i}{m_1}\dots\binom{x-i}{m_n} \tag{25}$$

18. È evidente che qualunque sia n, le prime m differenze di $\left\{\binom{0}{m}\right\}^n$ sono tutte nulle; se $n=2$ le altre $m+1$ saranno:

$$\binom{m}{0}\binom{m}{0},\ \binom{m}{1}\binom{m+1}{1},\dots,\binom{m}{m}\binom{2m}{m},$$

cosicchè

$$\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\binom{x}{m}\binom{m}{0}\binom{m}{0}+\binom{x}{m+1}\binom{m+1}{1}\binom{m}{1}+\ldots+\binom{x}{2m}\binom{2m}{m}\binom{m}{m}. \quad (26)$$

Infatti l'espressione del termine di posto $x+1$ in funzione delle differenze del termine di posto $x-m+1$, è

$$\binom{x}{m}=\sum_{i=0}^{m}\binom{x-m}{i}\binom{m}{i},$$

e quindi:

$$\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\binom{x}{m}\sum_{i=0}^{m}\binom{x-m}{i}\binom{m}{i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{x}{m}\binom{x-m}{i}\binom{m}{i}$$

che può scriversi:

$$\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\sum_{i=0}^{m}\binom{x}{m+i}\binom{m+i}{i}\binom{m}{i},$$

che è precisamente la formola (26).

Come conseguenza

$$\sum_{x=0}^{x}\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\sum_{i=0}^{m}\binom{x+1}{m+1+i}\binom{m+i}{i}\binom{m}{i}. \quad (27)$$

19. Se nella formola (24) si fa $m=1$, si ha il risultato noto:

$$\Delta^n x^n = n\,!$$

e quindi

$$\Delta^m x^n = 0\,, \qquad \text{per} \qquad m > n\,.$$

Si ha:

$$\Delta^m x^n = (m+x)\,\Delta^m x^{n-1} + m\,\Delta^{m-1} x^{n-1}\,. \quad (28)$$

Infatti, per la formola (5)

$$(m+x)\Delta^m x^{n-1} = (-1)^0(m+x)(m)_0(x+m)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^i(m+x)(m)_i(x+m-i)^{n-1}+\ldots+(-1)^m(m+x)(m)_m x^{n-1},$$
$$m\Delta^{m-1}x^{n-1} = (-1)^0(m)(m-1)_0(x+m-1)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{i-1}(m)(m-1)_{i-1}(x+m-i)^{n-1}+\ldots+(-1)^{m-1}(m)(m-1)_{m-1}x^{n-1},$$

e sommando il termine $i+1$ del primo sviluppo col termine i del secondo, si ha

$$(-1)^i(m+x)(m)_i(x+m-i)^{n-1}+(-1)^{i-1}(m)(m-1)_{i-1}(x+m-i)^{n-1} =$$
$$=(-1)^i(x+m-i)^{n-1}\left[(m+x)(m)_i-(m)(m-1)_{i-1}\right]=$$
$$=(-1)^i(x+m-i)^{n-1}\left[(m+x)(m)_i-i\,.\,\frac{m}{i}\,(m-1)_{i-1}\right]=$$
$$=(-1)^i(x+m-i)^{n-1}\left[(m+x-i)(m)_i\right]=$$
$$=(-1)^i(m)_i(x+m-i)^n,$$

che per la stessa formola (5) è il termine generale dello sviluppo di $\Delta^m x^n$.

Per $x=0$ si ha una nota formola.

20. Ponendo $m+n$ invece di n, $\Delta^m x^{m+n}$ è divisibile per $m!$ ed il quoziente si può trasformare in un polinomio intero di grado n e si trova

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^m x^{m+n}}{m!} = & \binom{m+n}{n} x^n + \\ & + \binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{2} x^{n-1} + \\ & + \binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{3}\frac{3m+1}{4} x^{n-2} + \\ & + \binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{4}\binom{m+1}{2} x^{n-3} + \\ & + \binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{5}\frac{15m^3+30m^2+5m-2}{48} x^{n-4} + \\ & + \binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{6}\binom{m+1}{2}\frac{3m^2+7m-2}{8} x^{n-5} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned} \tag{29}$$

da cui per $x=0$, si deduce:

$$\frac{\Delta^m 0^m}{m!} = 1,$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+1}}{m!} = \binom{m+1}{2},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+2}}{m!} = \binom{m+2}{3}\frac{3m+1}{4},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+3}}{m!} = \binom{m+3}{4}\binom{m+1}{2},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+4}}{m!} = \binom{m+4}{5}\frac{15m^3+30m^2+5m-2}{48},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+5}}{m!} = \binom{m+5}{6}\binom{m+1}{2}\frac{3m^2+7m-2}{8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

VITO MELFI MOLÈ.

LA TRASFORMAZIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI

e le proprietà metriche delle figure

1. Sieno P_1 e P_2 due punti qualunque di un piano e P'_1, P'_2 i punti del piano stesso che loro corrispondono nella trasformazione per raggi vettori reciproci, avente per polo un certo punto O, supponendo, per semplicità, il modulo d'inversione uguale ad 1.

Poichè si ha: (*)

$$\overline{OP_1} \,.\, \overline{OP'_1} = \overline{OP_2} \,.\, \overline{OP'_2}$$

i triangoli OP_1P_2 e $OP'_2P'_1$ sono simili e quindi è

$$|\overline{OP_1}| : |\overline{P_1P_2}| = |\overline{OP'_2}| : |\overline{P'_2P'_1}|, \qquad \text{da cui:} \qquad |\overline{P_1P_2}| = \frac{|\overline{P'_2P'_1}| \,.\, |\overline{OP_1}|}{|\overline{OP_2'}|},$$

ossia

$$|\overline{\mathbf{P_1P_2}}| = \frac{|\overline{\mathbf{P'_2P'_1}}|}{|\overline{\mathbf{OP'_1}}| \,.\, |\overline{\mathbf{OP'_2}}|}. \tag{1}$$

Abbiamo tacitamente supposto che P_1 e P_2 fossero punti diversi da O; nel caso invece in cui uno di questi punti, per es. P_2, coincidesse con O, allora è chiaro che, invece della (1), sussisterebbe l'altra:

$$|\overline{\mathbf{OP_1}}| = \frac{1}{|\overline{\mathbf{OP'_1}}|}. \tag{2}$$

Le (1) (2), che dànno la distanza di due punti in funzione di quella dei punti corrispondenti nella trasformazione per raggi vettori reciproci e dei raggi vettori relativi a questi ultimi, permettono che da certe proprietà metriche di una data figura se ne deducano altre per la figura trasformata. Appunto è di questa applicazione delle formule (1) (2), sopra stabilite, che voglio occuparmi in questa noticina; (**) nei §§ 2-4 riunisco quelle applicazioni che si riferiscono alla Geometria elementare; nei §§ seguenti quelle che riguardano le proprietà focali di alcune curve algebriche.

***

2. È noto come nella trasformazione per raggi vettori reciproci ad una retta non passante per il polo corrisponda una circonferenza che contiene il polo.

Premesso ciò, mostriamo come dalla relazione

$$|\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| = |\overline{P_1P_3}|, \tag{3}$$

(*) In tutta questa noticina il simbolo $\overline{AB}$ indicherà la *misura* del segmento AB e con $|\overline{AB}|$ indicheremo il valore assoluto di tale misura.

(**) L'idea mi è stata suggerita dalla dimostrazione del teor. di Tolomeo usata dal BALTZER nei suoi *Elementi di Matematica* (trad. CREMONA), Parte IV, § 14, e da un accenno alla presente teoria che si trova in SALMON (trad. CHEMIN), *Courbes planes*, § 281.

la quale sussiste se P_1, P_2, P_3 sono tre punti di una retta r che si succedono nell'ordine scritto, (*) si possa dedurre per la (1) il teorema di Tolomeo, trasformando la r per raggi vettori reciproci, preso per polo un punto qualunque esterno ad essa.

Ed infatti notiamo anzitutto che se P_1, P_2, P_3 si succedono nell'ordine scritto su la retta a cui appartengono, anche O, P'_1, P'_2, P'_3 si succederanno in quest'ordine su la circonferenza trasformata della r.

Applicando la (1) alla (3), si ha

$$\frac{|\overline{P'_3P'_1}|}{|\overline{OP'_3}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}=\frac{|\overline{P'_2P'_1}|}{|\overline{OP'_2}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}+\frac{|\overline{P'_3P'_2}|}{|\overline{OP'_3}|\,.\,|\overline{OP'_2}|},$$

cioè:

$$|\overline{P'_3P'_1}|\,.\,|\overline{OP'_2}|=|\overline{P'_2P'_1}|\,.\,|\overline{OP'_3}|+|\overline{P'_3P'_2}|\,.\,|\overline{OP'_1}| \tag{4}$$

che esprime appunto il teorema di Tolomeo.

Più in generale, dalla relazione

$$|\overline{P_1P_n}|=|\overline{P_1P_2}|+|\overline{P_2P_3}|+\ldots+|\overline{P_{n-1}P_n}|,$$

che lega le distanze di n punti collineari disposti sulla retta nell'ordine $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n-1}, P_n$, si ha, per la (1), l'altra

$$\frac{|\overline{P'_nP'_1}|}{|\overline{OP'_n}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}=\frac{|\overline{P'_2P'_1}|}{|\overline{OP'_2}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}+\frac{|\overline{P'_3P'_2}|}{|\overline{OP'_3}|\,.\,|\overline{OP'_2}|}+\ldots+\frac{|\overline{P'_nP'_{n-1}}|}{|\overline{OP'_n}|\,.\,|\overline{OP'_{n-1}}|}, \tag{5}$$

che lega le distanze di $n+1$ punti conciclici O, $P'_1, P'_2 \ldots P'_n$, che si succedono su la circonferenza nell'ordine scritto.

La (5) può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Tolomeo (4) ai poligoni, di più di quattro lati, iscritti in un circolo.

In particolare se ABCDE è un pentagono iscritto in un circolo, si ha per la (5):

$$\frac{|\overline{EB}|}{|\overline{AE}|\,.\,|\overline{AB}|}=\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AC}|\,.\,|\overline{AB}|}+\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{AD}|\,.\,|\overline{AC}|}+\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{AE}|\,.\,|\overline{AD}|},\ (**)$$

ossia:

$$|\overline{AC}|.|\overline{AD}|.|\overline{EB}|=|\overline{AD}|.|\overline{AE}|.|\overline{CB}|+|\overline{AB}|.|\overline{AE}|.|\overline{DC}|+|\overline{AB}|.|\overline{AC}|.|\overline{ED}|. \tag{5'}$$

Per il pentagono regolare, dalla (5'), si ha la relazione

$$d^3=3l^2d+l^3$$

che lega le misure l e d rispettivamente del lato e della diagonale.

(*) V. nota (*), pag. precedente.

(**) Cfr. *Supplemento al Periodico di Matematica*, Anno VII, fasc. VI; quist. 591.

3. Mostriamo ora come, per le (1) (2), dal teorema di Stewart si possa dedurre quello di Legendre.

Essendo ABC un triangolo qualunque ed M un punto del lato BC, si ha

$$|\overline{AB}|^2 . |\overline{MC}| + |\overline{AC}|^2 . |\overline{MB}| = |\overline{BC}| . (|\overline{AM}|^2 + |\overline{BM}| . |\overline{MC}|) . \qquad (6)$$

(teor. di Stewart).

Applicando alla (6) le formule (1) (2), quando s' immagini di trasformare la figura per raggi vettori reciproci, prendendo per polo il punto A, avremo:

$$\frac{1}{|\overline{AB'}|^2} \cdot \frac{|\overline{C'M'}|}{|\overline{AC'}| . |\overline{AM'}|} + \frac{1}{|\overline{AC'}|^2} \cdot \frac{|\overline{B'M'}|}{|\overline{AB'}| . |\overline{AM'}|} =$$

$$= \frac{|\overline{C'B'}|}{|\overline{AC'}| . |\overline{AB'}|} \cdot \left(\frac{1}{|\overline{AM'}|} + \frac{|\overline{M'B'}| . |\overline{C'M'}|}{|\overline{AM'}|^2 . |\overline{AB'}| . |\overline{AC'}|} \right)$$

cioè:

$$|\overline{AM'}| . (|\overline{C'M'}| . |\overline{AC'}| + |\overline{B'M'}| . |\overline{AB'}|) = |\overline{C'B'}| . (|\overline{AB'}| . |\overline{AC'}| + |\overline{M'B'}| . |\overline{M'C'}|) .$$

E siccome, per l'osservazione già fatta, A, B', M', C' sono punti conciclici, ed anzi, vertici di un quadrilatero, non intrecciato, inscritto in un circolo, AB', B'M', M'C' e C'A sono lati di questo quadrilatero e AM' e C'B' ne sono le diagonali.

Ponendo, per semplicità:

$$|\overline{AB'}| = a , \ |\overline{B'M'}| = b , \ |\overline{M'C'}| = c , \ |\overline{C'A'}| = d , \ |\overline{B'C'}| = e , \ |\overline{AM'}| = f ,$$

la precedente relazione diviene:

$$f(cd + ab) = e\,(ad + bc) ,$$

ossia

$$\frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{e}{f} ,$$

che esprime appunto il teorema di Legendre.

4. Si consideri una trasversale di un triangolo $P_1P_2P_3$, la quale incontri i lati P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, o i loro prolungamenti, rispettivamente in M_1, M_2 ed M_3; è nota la relazione

$$\frac{\overline{P_2M_1}}{\overline{M_1P_3}} \cdot \frac{\overline{P_3M_2}}{\overline{M_2P_1}} \cdot \frac{\overline{P_1M_3}}{\overline{M_3P_2}} = -1 \quad (7)$$

(teor. di Menelao.)

4.bis Sia S un punto qualunque del piano di un triangolo $P_1P_2P_3$ e indichiamo rispettivamente con Q_1, Q_2, Q_3 le intersezioni delle coppie di rette (SP_1, P_2P_3), (SP_2, P_3P_1), (SP_3, P_1P_2); è nota la relazione

$$\frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}} \cdot \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}} \cdot \frac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}} = 1 \quad (7^{bis})$$

(teor. di Ceva.)

Applicando a questa la (1), se il polo O dell'inversione è un punto qualunque del piano del triangolo, diverso però dai punti $P_1, P_2, \dots M_3$, e se indichiamo con $P'_1, P'_2 \dots M'_3$ i punti corrispondenti ai primi, avremo, dopo eseguite le semplificazioni:

$$\frac{\overline{M'_1P'_2}}{\overline{P'_3M'_1}} \cdot \frac{\overline{M'_2P'_3}}{\overline{P'_1M'_2}} \cdot \frac{\overline{M'_3P'_1}}{\overline{P'_2M'_3}} = -1,$$

che al pari della (7), può mettersi sotto la forma:

$$\overline{P'_1M'_3} \,.\, \overline{P'_2M'_1} \,.\, \overline{P'_3M'_2} = \\ = \overline{P'_1M'_2} \,.\, \overline{P'_2M'_3} \,.\, \overline{P'_3M'_1} \,. \quad (8)$$

Siccome, essendo (P_2, P_3, M_1), (P_3, P_1, M_2), (P_1, P_2, M_3), (M_1, M_2, M_3) gruppi di punti collineari, (O, P'_2, P'_3, M'_1), (O, P'_3, P'_1, M'_2), (O, P'_1, P'_2, M'_3), (O, M'_1, M'_2, M'_3) debbono essere gruppi di punti conciclici, la (8) esprime il teorema:

Se c_1, c_2, c_3 sono tre circonferenze passanti per uno stesso punto (O) *e con P'_1, P'_2, P'_3 si indicano rispettivamente le ulteriori intersezioni di* (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1, c_2), *e se una quarta circonferenza* c, *pure passante per* O, *incontra ulteriormente le altre tre nei punti* M'_1, M'_2, M'_3 *rispettivamente, fra le distanze dei suddetti punti esiste la relazione* (8).

Applicando a questa la (1), se il polo O dell'inversione è un punto qualunque del piano del triangolo, diverso però dai punti S, $P_1, P_2, \dots Q_3$, e se indichiamo con $S', P'_1, P'_2, \dots Q'_3$ i punti corrispondenti ai primi, avremo, dopo eseguite le semplificazioni:

$$\frac{\overline{Q'_1P'_2}}{\overline{P'_3Q'_1}} \cdot \frac{\overline{Q'_2P'_3}}{\overline{P'_1Q'_2}} \cdot \frac{\overline{Q'_3P'_1}}{\overline{P'_2Q'_3}} = 1,$$

che, al pari della (7^{bis}), può mettersi sotto la forma:

$$\overline{P'_1Q'_3} \,.\, \overline{P'_2Q'_1} \,.\, \overline{P'_3Q'_2} = \\ = \overline{Q'_1P'_3} \,.\, \overline{Q'_2P'_1} \,.\, \overline{Q'_3P'_2} \,. \quad (8^{bis})$$

Siccome, essendo (P_2, P_3, Q_1), (P_3, P_1, Q_2), (P_1, P_2, Q_3), (P_1, Q_1, S), (P_2, Q_2, S), (P_3, Q_3, S) gruppi di punti collineari, (O, P'_2, P'_3, Q'_1), $(O, P'_3, P'_1, Q'_2) \dots (O, P'_3, Q'_3, S)$ debbono essere gruppi di punti conciclici, la (8^{bis}) esprime il teorema:

Se c_1, c_2, c_3 sono tre circonferenze passanti per uno stesso punto O *e con P'_1, P'_2, P'_3 si indicano le ulteriori intersezioni di* (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1, c_2), *e se poi si costruiscono le circonferenze* $c'_1 \equiv (O, S, P'_1)$, $c'_2 \equiv (O, S, P'_2)$, $c'_3 \equiv (O, S, P'_3)$, *essendo* S *un punto qualunque del piano, diverso da* $O, P'_1 \dots$, *e con* Q'_1, Q'_2, Q'_3 *si indicano le ulteriori intersezioni di* (c_1, c'_1), (c_2, c'_2), (c_3, c'_3), *fra le distanze dei suddetti punti sussiste la relazione* (8^{bis}).

Nei casi particolari, per ora esclusi, i teoremi vengono modificati, come facilmente si può vedere; per es. dal teorema di Ceva, se per polo dell'inversione si sceglie il punto S, si ha il teorema:

Se c_1, c_2, c_3 sono tre circonferenze passanti per uno stesso punto O *e con P'_1, P'_2, P'_3 si indicano le ulteriori intersezioni di* (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1, c_2), *con* Q'_1, Q'_2, Q'_3 *le intersezioni delle rette* OP'_1, OP'_2, OP'_3 *rispettivamente con le circonferenze* c_1, c_2, c_3, *fra le distanze dei suddetti punti sussiste la relazione* (8^{bis}).

Per amore di brevità ometto gli altri teoremi che, analogamente all'ultimo enunciato, si potrebbero dedurre dai teoremi di Menelao e di Ceva, prendendo per polo della trasformazione uno dei punti particolari, esclusi prima.

***

5. Consideriamo una curva piana, rappresentata, in coordinate rettangolari, dalla equazione

$$f(x, y) = 0 . \tag{9}$$

Supposto che il polo sia $O \equiv (m, n)$, e supposto anche che il modulo dell'inversione sia l'unità, è noto che per ottenere l'equazione

$$\varphi(x', y') = 0 \tag{10}$$

della trasformata per raggi vettori reciproci della (9), occorre servirsi delle formule:

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + m , \qquad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} + n . \tag{11}$$

Per le formule (1) (2) del § 1, da alcune proprietà metriche che sussistono per la curva rappresentata dalla (9), potremo trovarne altre che valgano per quella rappresentata dalla (10). È di ciò appunto che trattano i §§ seguenti, nei quali, dalle note proprietà focali delle coniche, vengono dedotte altre proprietà relative a cubiche o quartiche particolari.

6. Applichiamo ciò che è stato detto nel § precedente al caso della iperbole; supponiamo cioè che la (9) sia l'equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 .$$

Mediante le (11), troviamo facilmente per la trasformata l'equazione

$$(x'^2 + y'^2)(b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2) + 2(x'^2 + y'^2)(b^2mx' - a^2ny') + \\ + (b^2x'^2 - a^2y'^2) = 0 , \tag{12}$$

la quale, in generale, rappresenta una quartica bicircolare con un nodo nell'origine.

Se il polo (m, n) dell'inversione è un punto qualunque dell'iperbole, allora, essendo

$$b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2 = 0 ,$$

la (12) si riduce a rappresentare una cubica e precisamente una strofoide. (Se il polo è un vertice dell'iperbole, la strofoide è retta; negli altri casi è obliqua.)

Se (m, n) è invece un punto che non appartiene all'iperbole, essendo

$$b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2 \neq 0 ,$$

potremo porre:

$$\frac{b^2 m}{b^2 m^2 - a^2 n^2 - a^2 b^2} = \mathrm{A}\,; \qquad \frac{a^2 n}{b^2 m^2 - a^2 n^2 - a^2 b^2} = \mathrm{B}\,;$$

$$\frac{\mathrm{A}}{m} = \mathrm{C}\,; \qquad \frac{\mathrm{B}}{n} = \mathrm{D}$$

e la (12) quindi prende la forma:

$$(x'^2 + y'^2)^2 + 2\,(x'^2 + y'^2)\,(\mathrm{A}x' - \mathrm{B}y') + (\mathrm{C}x'^2 - \mathrm{D}y'^2 = 0\,.$$

7. Ciò premesso, consideriamo la nota relazione

$$|\overline{\mathrm{PF}}_1| - |\overline{\mathrm{PF}}_2| = \pm\, 2a\,, \tag{13}$$

che esprime la proprietà caratteristica principale dell'iperbole, cioè, che " la differenza fra le distanze (considerate in valore assoluto) che un punto qualunque della curva ha dai due fuochi è costante ed eguale all'asse reale ".

Applichiamo alla (13) la (1), prendendo per polo dell'inversione un punto qualunque O del piano dell'iperbole, diverso da F_1 e F_2.

Indicando con le stesse lettere munite di apici i punti corrispondenti nell'inversione, avremo:

$$\frac{|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}'}|}{|\overline{\mathrm{OP}'}|\,.\,|\overline{\mathrm{OF}'_1}|} - \frac{|\overline{\mathrm{F}'_2\mathrm{P}'}|}{|\overline{\mathrm{OP}'_1}|\,.\,|\overline{\mathrm{OF}'_2}|} = \pm\, 2a\,. \; (*) \tag{14}$$

E poichè si ha:

$$\overline{\mathrm{OF}}_1 = \pm\sqrt{(m + ae)^2 + n^2} = \sigma_1\,, \qquad \overline{\mathrm{OF}}_2 = \pm\sqrt{(m - ae)^2 + n^2} = \sigma_2\,,$$

sarà

$$|\overline{\mathrm{OF}'_1}| = \frac{1}{\sigma_1}\,; \qquad |\overline{\mathrm{OF}'_2}| = \frac{1}{\sigma_2}\,.$$

Ponendo

$$|\overline{\mathrm{F}'_1\mathrm{P}'}| = \rho'_1\,, \qquad |\overline{\mathrm{F}'_2\mathrm{P}'}| = \rho'_2\,, \qquad |\overline{\mathrm{OP}'}| = \rho'\,, \tag{15}$$

la (14) diviene

$$\sigma_1\rho'_1 - \sigma_2\rho'_2 = \pm\, 2a\,\rho'\,. \tag{16}$$

Riguardo al doppio segno è bene notare che, per la (13), dovremo scegliere il superiore o l'inferiore, secondo che P appartiene al ramo dell'iperbole che ha F_2 come punto interno o a quello invece che ha come punto interno F_1.

La (16) esprime una proprietà metrica delle curve inverse di iperbole, proprietà metrica che lega le distanze di un punto qualunque della curva da tre punti speciali *(fuochi)* (**) F'_1, F'_2, O del piano della curva stessa.

(*) Come nella (13) anche in questa relazione intendiamo col simbolo $|\overline{\mathrm{AB}}|$ indicare la misura del segmento AB, considerata però in valore assoluto.

(**) V. Salmon (trad. Chemin), *Courbes planes*, IV, 138 e VI, 354.

Applichiamo i resultati ottenuti ad alcuni casi particolari.

a) Supponiamo

$$m = n = 0,$$

cioè supponiamo che il polo dell'inversione sia il centro C della iperbole: in tal caso la (12) si riduce alla equazione

$$(x'^2 + y'^2) = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}. \tag{17}$$

Si ha poi:

$$\overline{CF}_1 = ae, \qquad \overline{CF}_2 = -ae$$

$$\overline{CF'}_1 = \frac{1}{ae}, \qquad \overline{CF'}_2 = -\frac{1}{ae}$$

e quindi la (16) diviene:

$$ae\,\rho'_1 - ae\,\rho'_2 = \pm\, 2a\,\rho',$$

cioè

$$\rho'_1 - \rho'_2 = \pm \frac{2}{e}\,\rho', \tag{18}$$

dunque: ***In una curva inversa d'iperbole, essendo polo dell'inversione il centro dell'iperbole stessa, la differenza (in valore assoluto) fra le distanze di un punto qualunque*** P' ***della curva da due punti fissi*** F'_1, F'_2 (fuochi) ***è proporzionale alla distanza del punto*** P' ***dal punto medio*** C' ***del segmento*** $F'_1 F'_2$; ***il rapporto è*** $\frac{2}{e}$.

Se è $e = \sqrt{2}$, cioè se l'iperbole è equilatera, l'inversa, come si vede dalla (17), che diviene

$$(x'^2 + y'^2)^2 = \frac{1}{a^2}(x'^2 - y'^2), \tag{19}$$

è una lemniscata di Bernoulli, e la (18) dà per questa curva:

$$\rho'_1 - \rho'_2 = \pm \sqrt{2}\,.\,\rho',$$

la quale eguaglianza esprime una nota proprietà della lemniscata, (*) che è un caso particolare del teorema sopra enunciato.

Se è $e = 2$, la (18) diviene:

$$\rho'_1 - \rho'_2 = \pm\, \rho',$$

quindi può dirsi che: *l'inversa, rispetto al centro, di una iperbole la cui eccentricità è 2, ha la proprietà che in ogni suo punto ha dai punti* F'_1, F'_2, C' *(essendo* C' *medio del segmento* $F'_1 F'_2$*) distanze tali che la terza è uguale alla differenza delle prime due.*

(*) Il luogo del vertice di un triangolo di cui la base rimane fissa e gli altri due lati b, c e la mediana m verificano la relazione $b - c = m\sqrt{2}$ è una lemniscata di Bernoulli (cfr. per esempio Briot et Bouquet, *Leçons de géométrie analytique*, éd. revue par Appel, Paris, Delagrave, 1897, p. 31, ex. 9.

Per tale proprietà la curva in questione la direi *lemniscata differenziale*. La sua equazione, come si vede facilmente dalla (17) è

$$(x'^2 + y'^2)^2 = \frac{1}{a^2}(x'^2 - \tfrac{1}{3}y'^2).$$

La proprietà trovata per la lemniscata differenziale è caratteristica. Infatti, se deve essere soddisfatta la (19), cioè $|\overline{P'F'_1}| - |\overline{P'F'_2}| = |\overline{P'C'}|$, essendo P' un punto qualunque della curva e F'_1, F'_2, C' tre punti collineari, fra cui C' è medio del segmento determinato dagli altri due, ponendo $\overline{F'_1C'} = \overline{C'F'_2} = \delta$, se è $P' \equiv (x, y)$, abbiamo:

$$\sqrt{(x-\delta)^2 + y^2} - \sqrt{(x+\delta)^2 + y^2} = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$$

da cui

$$(x^2 + y^2)^2 = 4\delta^2(x^2 - \tfrac{1}{3}y^2),$$

che rappresenta una lemniscata differenziale.

Questa curva può definirsi quindi come *luogo del vertice di un triangolo, di cui è fisso il lato opposto e la mediana relativa a questo eguaglia la differenza degli altri due lati.* (V. una mia questione pubblicata in *Mathesis.*) (*)

b) Se prendiamo invece per polo dell'inversione uno dei vertici dell'iperbole, per es. $A \equiv (a, 0)$, cioè se è $m = a$, $n = 0$, la (12) diviene:

$$x'(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2a}x'^2 - \frac{a}{2b^2}y'^2 = 0, \tag{20}$$

che rappresenta una concoide slusiana, dotata di nodo (in A).

Si ha poi:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AF}_1 &= a(e-1); & \overline{AF}_2 &= -a(e+1) \\ \overline{AF'}_1 &= \frac{1}{a(e-1)}; & \overline{AF'}_2 &= -\frac{1}{a(e+1)} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

e quindi la (16) diviene:

$$a(e-1)\rho'_1 - a(e+1)\rho'_2 = \pm 2a\rho',$$

cioè

$$(e-1)\rho'_1 - (e+1)\rho'_2 = \pm 2\rho'. \tag{22}$$

In quanto al doppio segno va notato che, siccome al ramo dell'iperbole che ha F_2 come punto interno corrisponde nell'inversione la *foglia* della concoide nodata, per i punti della foglia stessa dovremo scegliere il segno superiore, mentre per gli altri punti della curva dovremo scegliere l'inferiore.

Nel caso in cui l'iperbole data sia equilatera, cioè se è $e = \sqrt{2}$, la trasformata è una strofoide retta, giacchè la (20) diviene:

$$x'(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2a}(x'^2 - y'^2) = 0. \tag{23}$$

La (22) poi prende la forma

$$(\sqrt{2} - 1)\rho'_1 - (\sqrt{2} + 1)\rho'_2 = \pm 2\rho'. \tag{24}$$

(*) MATHESIS. *Recueil mathématique*, publié par M.M. Mansion & Neuberg, 2me Série, T. X, 1900, p. 104, e 3me Série, T. I. 1901, pag. 59.

Poichè per le (15) è

$$\rho'_1 = |\overline{F'_1P'}|, \qquad \rho'_2 = |\overline{F'_2P'}|, \qquad \rho' = |\overline{AP'}|,$$

la (24) ci esprime la seguente proprietà:

Sull'asse di una strofoide retta esistono due punti F'_1, F'_2, *tali che per un punto* P' *qualunque della strofoide si ha*, indicando con A il nodo,

$$(\sqrt{2}-1)\,.\,|\overline{F'_1P'}| - (\sqrt{2}+1)\,|\overline{F'_2P'}| = \pm 2\,|\overline{AP'}|, \tag{25}$$

dando al doppio segno il significato sopra attribuitogli.

Facilmente possono ottenersi le coordinate di F'_1 e F'_2 (considerando A come origine); per le (21) si ha infatti:

$$\overline{AF'_1} = \frac{1}{a(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{a}; \qquad \overline{AF'_2} = -\frac{1}{a(\sqrt{2}+1)} = -\frac{\sqrt{2}-1}{a}.$$

Indicando con α la distanza del vertice della strofoide dal nodo *(parametro)*, cioè ponendo (23) $\alpha = \frac{1}{2a}$, le precedenti divengono:

$$\overline{AF'_1} = 2\alpha(\sqrt{2}+1), \qquad \overline{AF'_2} = -2a(\sqrt{2}-1). \tag{26}$$

La proprietà trovata è caratteristica per la strofoide. Infatti avendo sopra una retta (asse x) tre punti: $A \equiv [0,0]$, $F'_1 \equiv [2\alpha(\sqrt{2}+1), 0]$, $F'_2 \equiv [-2\alpha(\sqrt{2}-1), 0]$, e supponendo gli assi x, y rettangolari, cerchiamo il luogo dei punti P' che sodisfano la (25); avremo:

$$(\sqrt{2}-1)\sqrt{[x-2\alpha(1+\sqrt{2})]^2+y^2} - (\sqrt{2}+1)\sqrt{[x+2\alpha(\sqrt{2}-1)]^2+y^2} = \pm 2\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

e successivamente:

$$\begin{aligned}
&(3-2\sqrt{2})\,.\,[x^2+y^2-4\alpha x(1+\sqrt{2})+4\alpha^2(3+2\sqrt{2})] + \\
&+(3+2\sqrt{2})\,.\,[x^2+y^2-4\alpha x(\sqrt{2}-1)+4\alpha^2(3-2\sqrt{2})] - \\
&-2\sqrt{[x^2+y^2-4\alpha x(1+\sqrt{2})+4\alpha^2(3+2\sqrt{2})]\,.\,[x^2+y^2+4\alpha x(\sqrt{2}-1)+4\alpha^2(3-2\sqrt{2})]} = \\
&= 4(x^2+y^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)+2\sqrt{2}\,(4\alpha x\sqrt{2}-8\alpha^2\sqrt{2}) - \\
&-\sqrt{(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)^2-(4\alpha x\sqrt{2}-8\alpha^2\sqrt{2})^2} = 2(x^2+y^2);
\end{aligned}$$

$$x^2+y^2+4\alpha x+4\alpha^2 = \sqrt{(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)^2-32\alpha^2(x-2\alpha)^2};$$

$$(x^2+y^2+4\alpha x+4\alpha^2)^2-(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)^2 = -32\alpha^2(x-2\alpha)^2;$$

$$(x^2+y^2+8\alpha^2)(x-\alpha) = -2\alpha(x-2\alpha)^2$$

e finalmente:

$$x(x^2+y^2)+\alpha(x^2-y^2)=0$$

che rappresenta una strofoide retta.

Trattiamo ora il caso particolare, che finora abbiamo escluso; supponiamo cioè che il polo dell'inversione sia uno dei fuochi dell'iperbole, per es. $F_1 \equiv (ae, 0)$.

In tal caso la (12) diviene

$$b^4(x'^2+y'^2)^2+2aeb^2x'(x'^2+y'^2)+b^2x'^2-a^2y'^2=0,$$

ossia:

$$\left(x'^2+y'^2+\frac{aex'}{b^2}\right)^2 = \frac{a^2}{b^4}(x'^2+y'^2)$$

e ponendo

$$\frac{a}{b^2} = \alpha, \qquad \frac{ae}{b^2} = \beta, \tag{27}$$

la precedente diviene

$$(x'^2 + y'^2 + \beta x)^2 = \alpha^2 (x'^2 + y'^2),$$

che rappresenta una conchiglia di Pascal. Considerandola come concoide di cerchio, β è il diametro del cerchio direttore ed α è il segmento addizionale.

Siccome per le (27) si ha

$$\frac{\beta}{\alpha} = e > 1, \qquad \text{cioè} \qquad \beta > \alpha,$$

la Conchiglia di Pascal è nodata, come già avevamo osservato dalla (12) ed il nodo è in F_1.

Dalla solita relazione (13) si ha in questo caso:

$$\frac{1}{|\overline{P'F_1}|} - \frac{|\overline{F'_2P'}|}{|\overline{F'_2F_1}| \cdot |\overline{P'F_1}|} = \pm 2a,$$

ossia:

$$|\overline{F'_2F'}| - |\overline{P'F'_2}| = \pm 2a\, |\overline{F'_2F_1}| \cdot |\overline{P'F_1}| \tag{28}$$

e poichè, avendo:

$$\overline{F_2F_1} = 2ae, \qquad \text{sarà} \qquad \overline{F'_2F_1} = \frac{1}{2ae} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta}, \tag{29}$$

la (28) diverrà:

$$\pm \frac{1}{e} \cdot |\overline{P'F_1}| + |\overline{P'F'_2}| = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta},$$

ossia:

$$\pm \alpha \cdot |\overline{P'F_1}| + \beta \cdot |\overline{P'F'_2}| = \tfrac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2),$$

e ponendo

$$|\overline{P'F_1}| = \rho'_1, \quad |\overline{P'F'_2}| = \rho'_2,$$

si ha:

$$\pm \alpha\rho'_1 + \beta\rho'_2 = \tfrac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2). \tag{30}$$

In quanto al doppio segno si deve considerare (13) il superiore o l'inferiore, secondo che P' appartiene o no alla *foglia* della conchiglia.

Questa relazione esprime la seguente proprietà della conchiglia nodata:

Sull'asse di una conchiglia di Pascal nodata esiste un punto F'_2, tale che, essendo F_1 il nodo, P' un punto qualunque della conchiglia, α e β rispettivamente le misure del segmento addizionale e del diametro del circolo direttore, si abbia la (30), *scegliendo il segno* (+) *se* P' *appartiene alla foglia ed il segno* (—) *nel caso contrario.*

Per le (29) si ha subito l'ascissa di F'_2, considerando F_1 come origine; si ha cioè

$$\overline{F_1F'_2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta}. \tag{31}$$

I punti F_1 e F'_2 sono *fuochi* della conchiglia.

Questa proprietà è caratteristica per la conchiglia nodata. — Si voglia infatti cercare il luogo geometrico dei punti P′ che soddisfano alla (30), essendo F_1, F_2 due punti tali che la loro distanza sia uguale a $\left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}\right|$ cioè a $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}$. Considerando come asse x la retta $\overrightarrow{F_2F_1}$ e come asse y la perpendicolare a questa, condotta per F_1, ponendo per semplicità

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}=c, \tag{32}$$

avremo:

$$\pm\alpha\sqrt{x^2+y^2}+\beta\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\tfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

e successivamente:

$$[\alpha^2(x^2+y^2)+\beta^2(x^2+y^2-2cx)]^2=4\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-2cx+c^2);$$
$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)^2+4c^2\beta^4x^2-4\beta^2cx(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-$$
$$-4\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)^2+8c\alpha^2\beta^2x(x^2+y^2)=4\alpha^2\beta^2c^2(x^2+y^2);$$
$$(x^2+y^2)^2(\alpha^2-\beta^2)^2-4\beta^2cx(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2)+4\beta^4c^2x^2=4\alpha^2\beta^2c^2(x^2+y^2);$$

e tenendo conto della (32), sopprimendo il fattore comune $(\alpha^2-\beta^2)^2$:

$$(x^2+y^2)^2+2\beta x+\beta^2x^2=\alpha^2(x^2+y^2),$$

cioè:

$$(x^2+y^2+\beta x)^2=\alpha^2(x^2+y^2).$$

c. d. d.

(Continua)

Monza, maggio 1904.

G. Cardoso-Laynes.

RETTE BISETTRICI E PIANI BISETTORI

Nota di Geometria descrittiva

Se, come sembra razionale, *fondamentali* sono da chiamarsi quei problemi che non sono corollari di altri, e da cui, per converso, derivano le soluzioni di questioni importanti, quell'epiteto sembra di pieno diritto appartenere ai problemi che hanno per fine la costruzione delle rette bisettrici degli angoli di due date rette e dei piani bisettori dei diedri formati da due dati piani: infatti, risoluti che siano, innumerevoli questioni relative a triangoli, tetraedri, ecc. non offrono più alcun ostacolo teorico o pratico. La ragione per la quale, ciò non ostante, quei problemi, negli ordinari trattati di Geometria descrittiva, non sono annoverati fra i fondamentali devesi, a parere mio, ricercarsi nel costume generale di risolverli ricorrendo a ribaltamenti. Ora tale procedura (prescindendo anche dal fatto che maschera il vero carattere di quei problemi) sembra consigliabile evitare, perchè, guardando al fondo delle cose, è facile persuadersi come *ai ribaltamenti spetti l'ufficio di ausiliari indispensabili* **soltanto** *in quelle questioni ove tra le cose date o le domandate si trovino grandezze* *geometriche* (angoli, segmenti, diedri, ecc.). (*) Che in particolare: ribaltamenti possono evitarsi nella trattazione delle enunciate questioni, pur senza ricorrere in eccessive complicazioni, risulterà dalle linee seguenti, ove di esse sono esposte soluzioni dirette fondate sopra le osservazioni seguenti: I. Le bisettrici degli angoli di due rette r, s (segantisi in un punto A e situate in un piano α) sono gli elementi comuni alla involuzione circolare C esistente nel fascio (A, α) ed all'involuzione I avente r, s per raggi doppi. — II. I piani bisettori dei diedri formati da due piani σ, τ (segantisi nella retta a) sono gli elementi comuni alla involuzione circolare C esistente nel fascio di piani di asse a ed all'involuzione I avente σ e τ per piani doppi.

Nell'esporre le soluzioni dei detti problemi adopereremo il metodo di Monge; ma l'intelligente lettore non tarderà a riconoscere come lo scheletro di esse rimanga intatto usando la proiezione centrale.

I. Supponiamo anzitutto (fig. 1) che le rette date (r, s) non abbiano alcuna speciale relazione di posizione con gli elementi di riferimento.

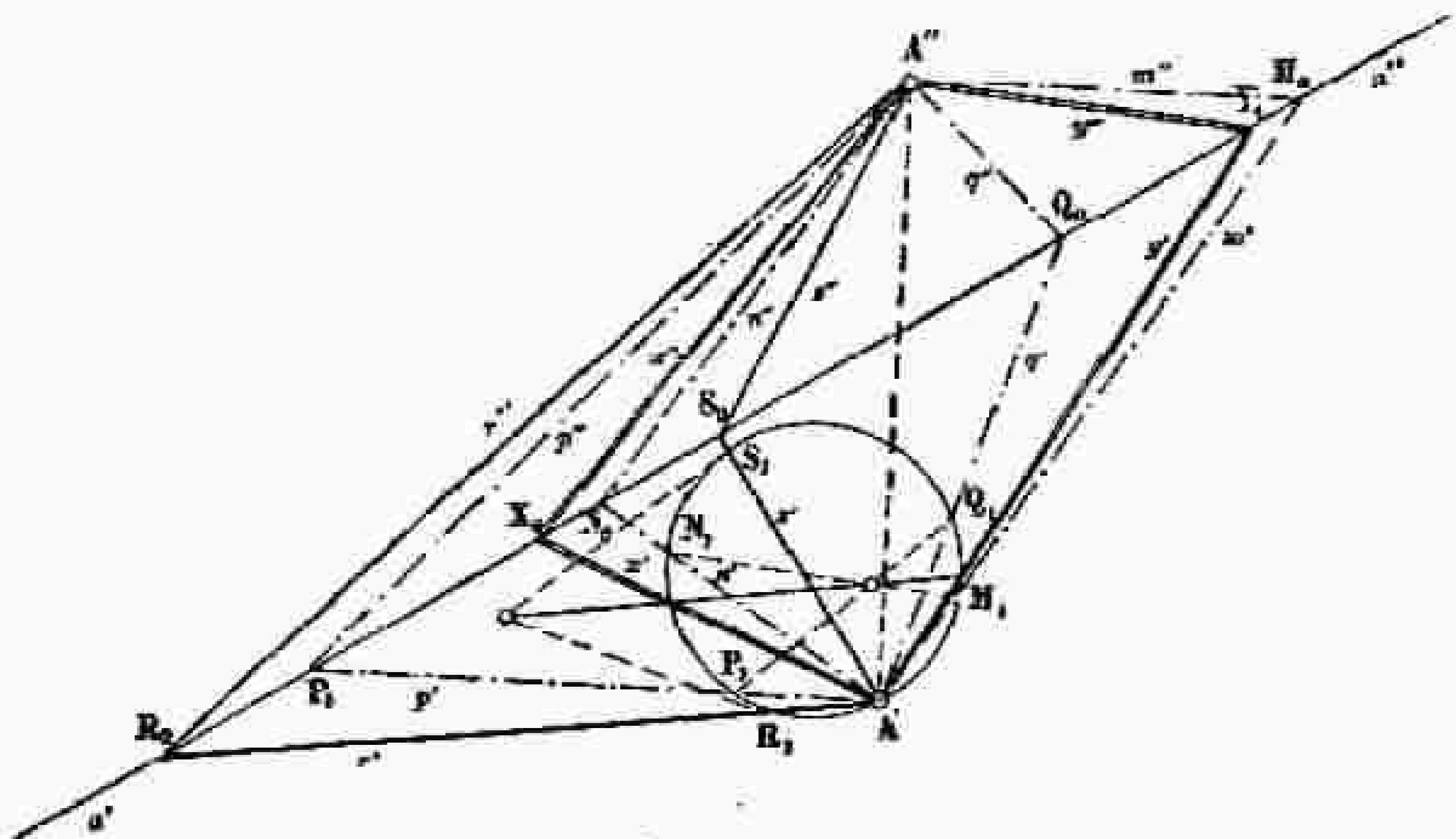


Fig. 1.

Le due proiezioni di una figura situata nel piano α, sono affini; l'asse d'affinità è la retta $a' \equiv a''$ che unisce il punto $R_0 \equiv r'r''$ al punto $S_0 \equiv s's''$; allora le due proiezioni di uno stesso raggio del fascio (A, α) sono rette che si tagliano sopra tale asse. Nell'anzidetto fascio esiste un raggio m parallelo al piano orizzontale; la sua proiezione verticale è la parallela m'' condotto da A'' alla linea di terra: m' se ne deduce in conseguenza, ricorrendo all'asse di affinità già tracciato. In quel fascio esiste un raggio n perpendicolare ad m; siccome l'angolo retto mn ha un lato (m) orizzontale così la sua proiezione orizzontale è un altro angolo retto; n' e quindi la perpendicolare condotta da A' a m'; n'' se ne deduce. In modo perfettamente analogo si costruiscano le proiezioni dei lati di quell'angolo retto pq del fascio (A, α) di cui un lato p è parallelo al piano verticale.

(*) Ad es. il problema: " rappresentare il cerchio K di cui si conosce il piano $\tau \equiv [t_1, t_2]$, il centro $O \equiv (O', O'')$ ed il raggio r ", che si suole ordinariamente risolvere ricorrendo a ribaltamenti, può sciogliersi più direttamente così. Si consideri nel piano τ l'orizzontale $p \equiv (p', p'')$ passante per O e la retta q condotta da O perpendicolarmente a p; p' e q' saranno (in direzione) le proiezioni orizzontali degli assi della elisse K' proiezione di K sul piano orizzontale π_1. La lunghezza dell'asse p' sarà $2r$ e quella dell'asse q' sarà $2r \cos(\tau, \pi_1)$; onde K' è pienamente individuata. K'' si determinerà similmente, oppure ricorrendo all'affinità che esiste fra K' e K''.

Ora l'involuzione circolare C si proietta evidentemente nella involuzione (ellittica) C' determinata dalla coppia m', n'; p', q'; e l'involuzione I si proietta nell'involuzione (iperbolica) I' di cui r', s' sono i raggi doppi. Quindi i raggi comuni alle due involuzioni C' e I' sono le proiezioni orizzontali delle bisettrici x, y cercate; x'' e y'' ne seguono tosto; ed il problema è risoluto.

Notisi che in questa soluzione non si fece alcun uso della linea di terra (la quale non venne neppure segnata sulla figura).

Se una delle date rette trovasi in un piano perpendicolare alla linea di terra (ed è quindi individuata da due suoi punti), del punto A si può trovare la rappresentazione e dal piano α l'asse d'affinità; fatto ciò, il resto della soluzione non soffre alterazione alcuna. Che se poi entrambe le date rette si trovassero in un piano perpendicolare alle linee di terra, per risolvere la questione non v'ha di meglio del ricorrere ad un piano di profilo, anzi di assumere come tale il piano delle due rette.

Osservazione. — In modo del tutto analogo può risolversi la questione che segue, di cui quello che precede è un evidente caso speciale: " Una conica Γ è individuata dal suo piano $\tau \equiv [t_1, t_2]$ e dalle proiezioni orizzontali (o verticali) di cinque suoi punti; determinare le proiezioni de' suoi assi ". Infatti tali assi sono i raggi comuni a due involuzioni; cioè: all'involuzione I, formata dai diametri coniugati di Γ, ed all'involuzione circolare C attorno al centro O di tale curva. Ora la proiezione orizzontale di I, essendo la involuzione dei diametri coniugati di Γ', può costruirsi con un noto procedimento, mentre per ottenere C' serve la costruzione superiormente esposta; i raggi comuni a queste due involuzioni sono le prime proiezioni degli assi domandati; le seconde ne conseguono tosto.

2. I piani dati siano (fig. 2) in posizione generale rispetto ai piani di riferimento; siano s_1, s_2 le tracce del primo, t_1, t_2 quelle del se-

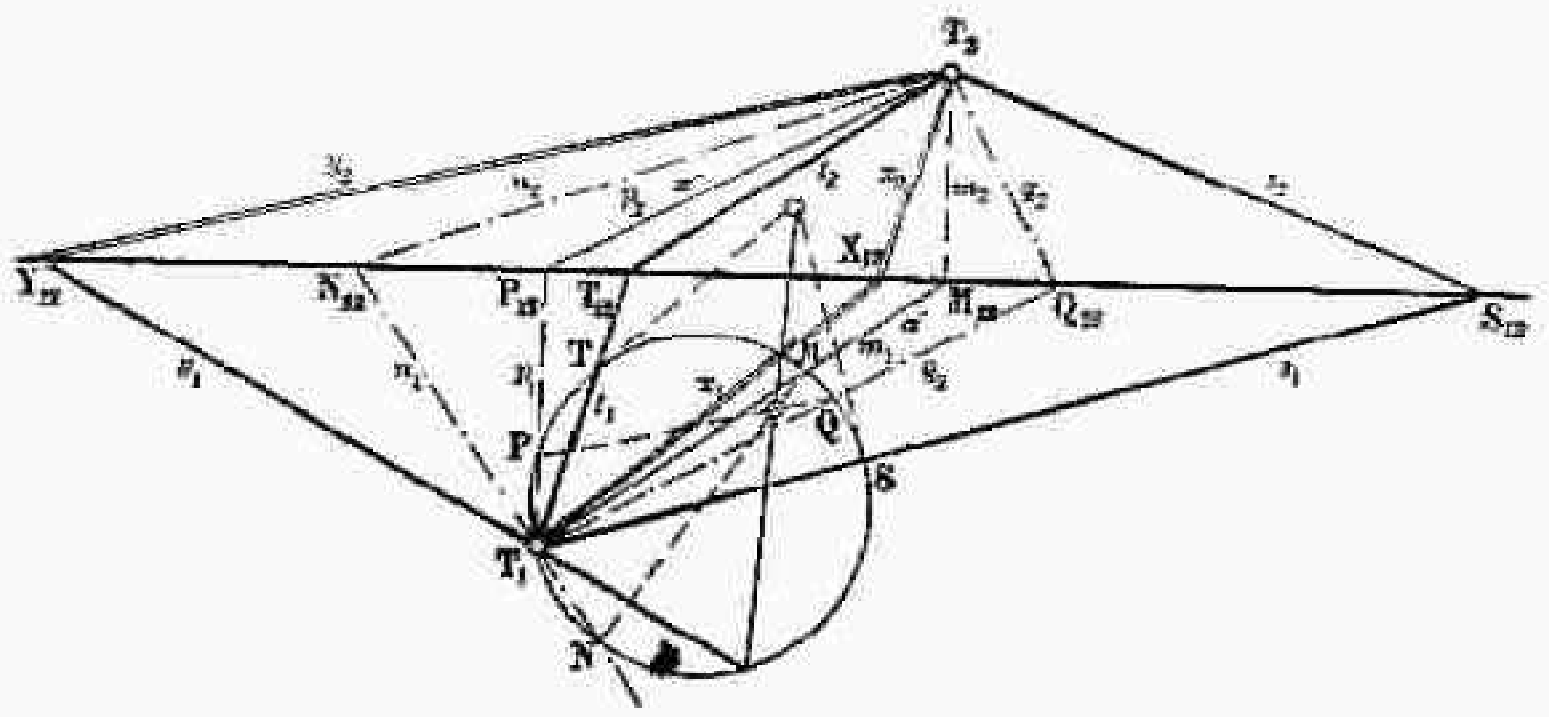


Fig. 2.

condo; costruiamo anzitutto le tracce T_1, T_2 e le proiezioni a', a'' della retta a in cui essi si tagliano. La retta a è asse di un fascio di piani nel quale esiste una involuzione circolare C, la quale è segata dai piani fondamentali secondo due involuzioni (ellittiche) C_1 e C_2, che ci proponiamo di individuare.

Consideriamo a tale scopo il piano $\mu \equiv (m_1, m_2)$ proiettante la retta a sopra il piano orizzontale: m_1 coincide con a' e m_2 è perpendicolare alla linea di terra; consideriamo pure il piano $\nu \equiv (n_1, n_2)$ passante per a e perpendicolare a μ; n_1 è la perpendicolare condotta da T_1 a m_1, n_2 ne consegue; m_1, n_1 è evidentemente una coppia della involuzione C_1, mentre m_2, n_2 lo è della C_2. Un'altra coppia p_1, q_1 della C_1 si ottiene similmente considerando il piano che proietta la retta a sul piano verticale e quello condotto per a perpendicolarmente ad esso.

Cerchiamo ora i raggi comuni alla involuzione (ellittica) C_1 $(m_1, n_1; p_1, q_1)$ ed a quella (iperbolica) avente s_1, t_1 per raggi doppi; daranno essi le tracce orizzontali x_1, y_1 dei due piani richiesti; quelle verticali ne conseguono subito.

Nel caso in cui uno dei piani dati passi per la linea di terra (e sia quindi determinato mediante un punto) trovata la intersezione dei piani stessi, il resto della soluzione precedente è ancora applicabile nella sua sostanza.

E se poi entrambi i piani dati contenessero la linea di terra, per determinare i piani bisettori dei diedri che essi formano l'artificio migliore consiste nell'usare un piano di profilo.

Genova, 23 giugno 1904.

GINO LORIA.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 657, 668 E 672

657. *1°. Le tre iperboli circoscritte a un triangolo, tangenti nei vertici di questo alle simediane corrispondenti e aventi per centri i punti medi dei lati opposti, hanno per assintoti le rette di Wallace relative ai punti medi degli archi che gli stessi lati determinano sul circolo circoscritto.*

2°. I piedi delle ceviane dei punti appartenenti a ciascuna delle tre iperboli sono in circoli che passano per il centro della curva.

G. BIASI.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

1°. Sia ABC il triangolo dato, A′ il punto medio di BC, AK la simediana condotta per A, γ_a l'iperbole equilatera di centro A′ e circoscritta ad ABC, AA_1 un diametro di γ_a. Abbiamo:

$$\widehat{BAK} = A_1\widehat{A}C = A\widehat{A_1}B,$$

dunque $\widehat{BAK}$ e $B\widehat{A_1}A$ sono inversamente uguali e quindi, AK è tangente a γ_a. (*) Inoltre gli assintoti di γ_a sono paralleli alle bisettrici dell'angolo $\widehat{BAC}$ e dell'angolo ad esso conseguente. Siano M, N i punti d'incontro degli assintoti con AC; R, S gli estremi del diametro (normale a BC) del circolo circoscritto ad ABC. Essendo A′M parallela ad AS avremo:

$$A'\widehat{M}C = S\widehat{A}C = S\widehat{R}C = A'\widehat{R}C$$

(*) Si fa uso del teorema: *Se dagli estremi di un diametro di un'iperbole equilatera si proiettano i punti dell'iperbole stessa si ottengono due fasci di raggi inversamente uguali.*

quindi i punti C, A', M, R sono sul cerchio di diametro CR; allora $\widehat{RMC}$ è retto ossia la A'M è la retta di Wallace di R. Analogamente la A'N e la retta di Wallace di S. È evidente che esiste una sola conica circoscritta ad ABC, tangente ad AK e di centro A', si conclude quindi che questa conica dovrà essere la γ_a.

2°. Sia P un punto di γ_a e P_a, P_b, P_c i piedi delle ceviane relative a P; sia $H \equiv (BC, P_bP_c)$. Gli angoli $\widehat{ABP}$ ed $\widehat{ACP}$ sono inversamente ugnali, quindi i punti B, C, P_b, C_r sono su uno stesso cerchio, e allora si ha:

$$HP_b \,.\, HP_c = HB \,.\, HC\,; \tag{1}$$

inoltre $(HP_aBC) = -1$, cioè:

$$HB \,.\, CP_a + HC \,.\, BP_a = 0\,. \tag{2}$$

$$2\,HA' \,.\, HP_a = HP_a\,(HB + HC) = HB\,(HP_a - HC) + HC\,(HP_a - HB) + \\ + 2\,HB \,.\, HC = HB \,.\, CP_a + HC \,.\, BP_a + 2\,HB \,.\, HC\,,$$

e per le (2), (1) si ha:

$$HP_b \,.\, HP_c = HA' \,.\, HP_a$$

cioè i punti P_a, P_b, P_c, A' sono di uno stesso cerchio.

668. *Esistono sei coniche (tre ellissi e tre iperboli) concentriche a due a due (un'ellisse con un'iperbole), circoscritte a un triangolo ABC e tali che se le ceviane di un loro punto incontrano i lati corrispondenti in D, E, F e il circolo DEF taglia per la seconda volta gli stessi lati in D', E', F', le rette AD', BE', CF' s'incontrano in un punto della stessa conica. I centri delle sei coniche sono i punti medi dei lati del triangolo e ciascuna conica contiene due punti del gruppo di Gergonne; le sei coniche s'incontrano per conseguenza a tre a tre in questi quattro punti.*

Le sei coniche sono rispettivamente tangenti nei vertici del triangolo alle bisettrici degli angoli interni ed esterni, le quali bisettrici sono i luoghi dei centri dei circoli che passano per i piedi delle ceviane dei punti appartenenti alle coniche ad esse tangenti.

G. Biasi.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Siano S_0, S_1, S_2, S_3 i punti di Gergonne di ABC; A', B', C' i punti medi dei lati, A_1 il simmetrico di A rispetto ad A'. Sia:

$$H_i = (AB, CS_i)\,. \qquad K_i = (AC, BS_i)\,,$$

con $i = (0, 1, 2, 3)$; avremo:

$$AH_i = AK_i\,. \tag{1}$$

I punti $ABCA_1S_0S_1$, $ABCA_1S_2S_3$ *sono su due coniche* γ_{01}, γ_{23} *concentriche in* A'.

Infatti segando i fasci $B\,(AS_0S_1A_1)$, $C\,(AS_0S_1A_1)$ rispettivamente con AC ed AB si ottengono le punteggiate $(AK_0K_1\,\infty)$, $(AH_0H_1\,\infty)$, le quali, per la (1), sono proiettive. Analogamente segando con AC e AB rispettivamente i fasci $B\,(AS_0S_3A_1)$, $C\,(AS_2S_3A_1)$ si ottengono due punteggiate che per la (1) sono proiettive. Si hanno poi altre quattro coniche γ_{02}, γ_{13}; γ_{03}, γ_{12} concentriche, le prime due in B' e le ultime due in C'. Sia P un punto qualunque di γ_{01} o di γ_{23} e $H = (AB, CP)$, $K = (AC, BP)$.

Si ha:

$$\overline{AH} = \overline{AK}\,.$$

Infatti segando i due fasci proiettivi $B\,(AS_0PA_1)$, $C\,(AS_0PA_1)$ rispettivamente con AC, AB otteniamo le punteggiate

$$(AK_0K\,\infty) = (AH_0H\,\infty)$$

e quindi per la (1) si deduce che $\overline{AH} = \overline{AK}$.

Se il punto P appartiene invece alla conica γ_{23} allora basta scambiare nella precedente dimostrazione 0 con 2 o con 3. Viceversa: *Se si ha* $\overline{AH} = \overline{AK}$ *il punto* P *appartiene a* γ_{01} *o a* γ_{23}.

Siano D, E, F i piedi delle ceviane di un punto qualunque di una delle coniche γ_{01}, γ_{23}; avremo per quanto s'è visto precedentemente $AE = AF$ quindi il luogo del centro del cerchio DEF è rispettivamente la bisettrice interna o esterna di $\widehat{BAC}$. Se D', E', F' sono i punti d'incontro del cerchio DEF coi lati di ABC avremo: $\overline{AE} = \overline{AF'}$, e per quanto s'è visto sopra, il punto (BE', CF') apparterrà a γ_{01} o a γ_{23}. Inoltre le tre ceviane AD', BE', CF' passano per uno stesso punto. Infatti dal noto teorema di Carnot: *Se una conica sega i lati* BC, CA, AB *d'un triangolo in* D, D'; E, E'; F, F'; *si ha:*

$$\frac{BD \,.\, CE \,.\, AF}{CD \,.\, AE \,.\, CF} = \frac{CD' \,.\, AE' \,.\, BF'}{BD' \,.\, CE' \,.\, AF'},$$

si deduce che, se le ceviane AD, BE, CF passano per uno stesso punto, il primo membro della relazione di Carnot diventa uguale all'unità negativa, e quindi anche AD', BE' CF' passano per uno stesso punto. Quando la conica è un cerchio allora rientriamo appunto nel nostro problema. Per il caso del cerchio la relazione di Carnot si ricava molto facilmente moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AE'}{AF'}, \quad \frac{BD}{BF} = \frac{BF'}{BD'}, \quad \frac{CE'}{CD'} = \frac{CD'}{CE'}.$$

Le bisettrici, interna ed esterna, di $\widehat{BAC}$ *sono rispettivamente tangenti a* γ_{01}, γ_{23}, *cioè queste due coniche si segano ortogonalmente in* A.

Infatti sia P' un punto qualunque (diverso da A) di una delle due bisettrici e $H' = (AB, CP')$, $K' = (AC, BP')$; avremo: $AH' \neq AK'$. (*) Dunque per quanto già sappiamo P' non può essere sulla conica corrispondente alla bisettrice considerata, la quale sarà quindi tangente in A alla conica suddetta.

Le dimostrazioni fatte valgono naturalmente anche per le coniche γ_{02}, γ_{13}; γ_{03}, γ_{12}.

672. *Se* M *è un punto di uno degli assintoti di una iperbole di centro* O *e della quale i fuochi sono* F, F' *ed* a, b *sono le lunghezze de' suoi semiassi, dimostrare la relazione*

$$(\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 4a^2)^2 - 4\,(\overline{MF}^2 . \overline{MF'}^2 - 4a^2b^2) = 0.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

L'espressione data possiamo anche scriverla così

$$(\overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2)^2 - 8a^2\,(\overline{MF}^2 + \overline{MF'}) + 16a^2\,(a^2 + b^2). \tag{1}$$

Abbiamo poi

$$\overline{MF}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OF}^2 - 2\,\overline{OM}\,.\,\overline{OF} \cos \widehat{MOF} = \overline{OM}^2 + a^2 + b^2 - 2a\,.\,\overline{OM}, \tag{2}$$

$$\overline{MF'}^2 = \overline{OM}^2 + a^2 + b^2 + 2a\,.\,\overline{OM}. \tag{3}$$

Sostituendo con le (2), (3) nella (1) essa si annulla.

(*) Se P' fosse sulla bisettrice interna e se AH' fosse uguale ad AK', si dedurrebbe facilmente $AB = AC$ il che in generale non è. Se P' fosse poi sulla bisettrice esterna e se $AH' = AK'$, si avrebbe la relazione assurda $\widehat{BAC} < \widehat{P'H'A} = \widehat{P'K'A} < \widehat{BAC}$.

QUISTIONI PROPOSTE

677. Sia M un punto variabile sopra una ellisse che ha per fuochi F, F'. Il luogo dei centri di similitudine del circolo inscritto nel triangolo MFF' e di un circolo fisso si compone di due coniche.

678. Essendo M un punto variabile sopra una ellisse di fuoco F, si consideri il circolo c avente M per centro ed avente per raggio n . MF, ed un circolo c' di centro C e raggio R.

a) Il luogo dei centri di similitudine dei due circoli c, c' si compone di due coniche.

b) Se il raggio R resta fisso, si trovi quale deve essere il luogo del centro C affinchè ciascuna di queste coniche sia: 1° un circolo; 2° una parabola; 3° una iperbole equilatera; 4° una coppia di rette.

679. Si consideri un raggio fisso OA ed un raggio mobile OM di un circolo. Trovare il luogo dei vertici della iperbole che passa per A ed M ed ha per assintoti le perpendicolari condotte ad OA od OM per i loro punti di mezzo.

680. Siano A, B, C, D quattro punti conciclici di una iperbole equilatera. La retta di Simson del punto D rispetto al triangolo ABC passa per il centro della iperbole.

681. Per due punti P e Q di un piano si conducano le corde PAB, QCD di una conica parallele ad una direzione variabile. Trovare l'inviluppo della iperbole equilatera e quello della parabola individuata dai quattro punti A, B, C, D.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

S. Catania. — *Aritmetica razionale* per le scuole secondarie superiori. Catania, N. Giannelli editore, 1904. Pag. v-184 (L. 1,60).

Nel fascicolo marzo-aprile 1903 discorrendo sull'*Aritmetica generale ed Algebra elementare* di G. Peano (Torino, Paravia, 1902) auguravo che la bontà di questo trattato — vinte le difficoltà che opponevano il simbolismo logico-matematico e l'eccessiva condensazione del testo — inducesse qualche volenteroso docente a sperimentarlo per sè e per la scuola. Un tal desiderio è oggi realizzato in gran parte, mercè l'operetta, che l'egregio prof. S. Catania ha testè pubblicata, e sulla quale mi permetto di richiamar l'attenzione dei nostri colleghi.

Il prof. Catania ha estratto dal libro del prof. Peano (il quale di buon grado assentiva ed incoraggiava) le parti meno elevate dell'aritmetica — quelle insomma, che più interessano la scuola media — e le ha riprodotte fedelmente con la scrittura ordinaria (salvo qualche leggera e inevitabile modificazione) studiandosi di conservare al possibile il loro nativo sapore. N'è uscito un trattatello, che nella forma, e un po' anche nella materia, si distingue dagli altri libri d'aritmetica; ed è atto a fornire una giusta idea dei vantaggi, anche didattici e pratici, che si potrebbe ritrarre da un uso discreto dei principî e dei metodi che informano la Logica algebrica.

Ho per fermo che questi Elementi non si troveranno di più difficil lettura, o di struttura men semplice, di fronte ai libri di testo comunemente adottati nelle nostre scuole medie. Altri ne parlerà con maggior diffusione; io qui mi ristringo a questo brevissimo cenno: lieto di poter senza scrupolo raccomandare un lavoro, che potrà far del bene all'insegnamento.

M. PIERI.

Scentia. N. 22. — J. W. GIBBS. *Diagrammes et surfaces thérmodinamiques.* Paris, Naud, 1903.

Questo volumetto del Gibbs, tradotto in francese dal Roy, è una sostanziale e concisa esposizione dei metodi usati dall'Autore, per rappresentare con diagrammi i fenomeni termodinamici.

Al diagramma classico di Clapeyron, egli aggiunge due diagrammi nuovi, il diagramma entropico che si indirizza all'entropia ed alla tensione corrispondente, la temperatura ed un secondo nuovo diagramma, che assume per coordinate il volume e l'entropia. Il diagramma volume-entropia è la prefazione necessaria allo studio della superficie volume-entropia-energia.

È noto che alcune di queste idee hanno ancora tra noi valorosi sostenitori; uno di questi fu il compianto prof. Bertoldo, che ne sviluppò buona parte nel suo opuscolo *I diagrammi entropici delle motrici a vapore.* Tra i viventi debbono essere ricordati il prof. Garuffa e il prof. Rossi.

Ritornando al volume del Gibbs, diremo che questo, dopo una introduzione di Bruhnes ed una Notizia biografica e bibliografica su W. Gibby, è diviso in due parti.

Nella prima " Metodi grafici nella termodinamica dei fluidi „ parla delle proprietà dei diagrammi e stabilisce il paragone del diagramma entropia-temperatura col diagramma ordinario; quindi definisce il diagramma volume-entropia.

Nella seconda " Metodo di rappresentazione geometrica delle proprietà termodinamiche dei corpi con superficie „ dà il mezzo di rappresentare il volume, l'entropia, l'energia, la pressione e la temperatura; quindi passa a stabilire le proprietà della superficie, relative alla stabilità dell'equilibrio termodinamico; e dopo avere discorso delle proprietà essenziali della superficie termodinamica per le sostanze che si presentano negli stati solido, liquido, gassoso, chiude questa rassegna con alcuni problemi relativi alla superficie di energia dissipata.

Il Bruhnes terminando la sua introduzione, dice: Saremo felici se questo libro renderà più accessibile al lettore lo studio delle rappresentazioni geometriche in termodinamica. — In tutti i casi, vi sarà profitto nel rileggere e meditare gli scritti di uno dei rari pensatori della nostra epoca, non lasciando sterile ciò che si potrebbe chiamare il lavoro puramente scolastico del commentatore, nel senso di avere probabilità di scoprire del nuovo col solo studio di meglio penetrare il suo pensiero.

F. LENZI.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 agosto 1904

SULLE OPERAZIONI
FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI
e, in particolare,
sul calcolo delle parti proporzionali
nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

---

2. — Errori prodotti dal principio delle parti proporzionali.

§ 40. Abbiamo trascurato fin qui l'errore prodotto dall'ammettere il principio delle parti proporzionali e (nei §§ 24 e 30) anche altri errori dei quali parleremo fra poco; ma tutti questi errori si aggiungono agli errori l ed l' (§ 31), e quindi può sorgere il dubbio che in qualche caso essi possano esser tali da rendere illusorie alcune delle cifre ottenute colle regole indicate. E vedremo che per le ordinarie tavole dei logaritmi delle funzioni trigonometriche questo dubbio è giustificatissimo.

Ci proponiamo di dimostrare che per i tipi di tavole da noi considerate nel capitolo terzo (e dentro i limiti da noi stabiliti per x_0), tale dubbio non sussiste (*); e perciò cercheremo prima dei limiti superiori per tutti gli errori ora accennati, e poi, confrontandoli coi limiti superiori inabbassabili dei corrispondenti errori l ed l', faremo vedere che i primi sono sempre molto minori dei secondi e che, nel caso più sfavorevole, i primi sono certamente minori di tre decimi dei corrispondenti secondi.

§ 41. Indicando con g_L e con g'_L gli errori prodotti dall'ammettere il principio delle parti proporzionali, nella ricerca diretta e nella ricerca inversa rispettivamente, quando sia

$$y = \mathrm{L}x,$$

abbiamo visto ([N_1], § 4) che il primo è sempre per difetto, che il

---

(*) Questi tipi differiscono alquanto da quelli che indicammo nella conclusione della [N_2]. A queste modificazioni siamo stati condotti sia dallo studio che ora qui riportiamo e nel quale si considera anche la ricerca inversa (mentre nella [N_2] si considerò solo la ricerca diretta), sia dall'altro studio, cui accennammo in una nota al § 28 e che pubblicheremo prossimamente.

secondo è sempre per eccesso, e che, in valore assoluto, sono sempre rispettivamente minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta y}^2}{8} \times \frac{1}{x_0^2} \quad \text{e di} \quad \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_1}{x_0^2},$$

dove M è il modulo dei logaritmi volgari. Abbiamo pure visto che ambedue questi limiti calano al crescere di x_0 (per il primo ciò è evidente). Come abbiamo anche visto che per $\delta x : \Delta x = 0,5$ gli errori stessi, sempre in valore assoluto, sono, rispettivamente, maggiori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{x_1^2} \quad \text{e di} \quad \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_0}{x_1^2};$$

per cui indicando con γ_L e con γ'_L (in val. ass.) dei limiti superiori inabbassabili di g_L e di g'_L, per x compreso fra x_0 ed $x_1 = x + \Delta x_0$, sarà certamente

$$\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{x_1^2} < \gamma_L < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{x_0^2}, \tag{29}$$

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_0}{x_1^2} < \gamma'_L < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_1}{x_0^2}. \tag{30}$$

§ 42. Dalla (29), ricordando che

$$M = 0,43429\ 44819\ 03251 \ldots$$

e intendendo sempre di considerare come cifra delle unità di g_L l'ultima cifra della mantissa di y_0, si ha (qualunque sia x e per tutt'e due i tipi di tavole considerati nei §§ 19 e 20)

$$0,000054 < \gamma_L < 0,005429;$$

che si ottiene ponendo $x_0 = 10000$ (o $x_0 = 1000$) nel limite superiore, e $x_0 = 99999$ e quindi $x_1 = 100000$ (o $x_0 = 9999$ e quindi $x_1 = 10000$) nel limite inferiore; mentre è sempre $\lambda = 1$ (§ 32).

Dalla (30), intendendo sempre di considerare come cifra delle unità di g'_L l'ultima cifra del numero x_0, per il primo tipo,

se $10000 \leqslant x_0 \leqslant 43454$, si ha $0,0000028 < \gamma'_L < 0,0000126$,
" $43455 \leqslant x_0 \leqslant 99999$, " $0,0000012 < \gamma'_L < 0,0000029$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \geqslant \Delta y \leqslant 435$, da cui $0,0022 < \lambda' \leqslant 0,0100$,
" $43 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, " $0,0100 \leqslant \lambda' < 0,0233$.

E per il secondo tipo,

se $1000 \leqslant x_0 \leqslant 4362$, si ha $0,000028 < \gamma'_L < 0,000126$,
" $4363 \leqslant x_0 \leqslant 9999$, " $0,000012 < \gamma'_L < 0,000029$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $10 \leqslant \Delta y \leqslant 44$, da cui $0,022 < \lambda' \leqslant 0,100$,
" $4 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, " $0,10 \leqslant \lambda' \leqslant 0,25$.

Ed ora, confrontando il limite superiore di γ_L con λ e i vari limiti superiori così trovati per γ'_L coi corrispondenti limiti inferiori di λ', si vede che i primi sono sempre minori di un centesimo dei corrispondenti secondi.

Osservazione I. — I limiti di g_L e di g'_L sommati coi corrispondenti limiti di l e di l' danno dei limiti, superiori e inferiori, per gli errori complessivi $g_L + l$ e $g'_L + l'$ che si commettono colla interpolazione semplice; e la conoscenza di questi limiti è, evidentemente, utilissima per chi usa una determinata tavola, ed è poi indispensabile per chi deve stabilire il tipo di tavole adatte ad una determinata specie di calcoli. È anzi questa una delle ragioni per le quali degli errori g_L e g'_L abbiamo dato anche dei limiti inferiori, mentre qui bastava dare dei limiti superiori. Questa osservazione, in seguito, sarà sottintesa.

Osservazione II. — La conoscenza dei limiti degli errori complessivi ora accennati può servire a giustificare direttamente (indipendentemente cioè da quanto si è detto nei §§ 33 e 34) le regole del precedente capitolo. Così, considerando, p. es., il caso della ricerca inversa nella tavola del primo tipo (e nello stesso modo si ragionerebbe per gli altri casi):

per $10000 \leqslant x_0 \leqslant 43454$, Δy ha sempre tre cifre, quindi

$$\mu' = 0{,}0005,$$

ma si ha

$$0{,}0022 < \lambda' + \gamma'_L < 0{,}0101,$$

quindi μ' è certamente minore di $\lambda' + \gamma'_L$ e non è necessariamente minore di un decimo di questa somma (§ 11);

per $43455 \leqslant 99999$, Δy ha generalmente due cifre (potendo, al più, essere eguale a 100), quindi, generalmente,

$$\mu' = 0{,}005,$$

ma si ha

$$0{,}0100 < \lambda' + \gamma'_L < 0{,}0234,$$

quindi, anche ora, μ' è certamente minore di $\lambda' + \gamma'_L$ e non è necessariamente minore di un decimo di questa somma.

Osservazione III. — Il limite superiore indicato per g'_L cala al crescere di x_0, mentre quello di l' cresce; bastava quindi calcolare le limitazioni precedenti solo per il minimo valore di x_0 (10000, o 1000); abbiamo però creduto opportuno di esaminare separatamente i valori di x_0 pei quali è diverso il numero delle cifre di Δy, sia per rendere possibile l'esame cui si è accennato nella Oss. prec.; sia per seguire un metodo uniforme per tutti casi (chè questa separazione in qualche altro caso è, come vedremo, necessaria); sia perchè questi risultati, facendo conoscere con maggiori particolari l'approssimazione che si raggiunge, possono (come vedremo) essere utilissimi ad altre ricerche in proposito.

Osservazione IV. — Dalle limitazioni (29) e (30) del § 41 si può dedurre che i limiti superiori da noi indicati, per g_L e g'_L *non potranno mai subire un abbassamento sensibile qualunque altra via si segua per la loro ricerca.* Così, p. es., per $x_0 = 1000$ si ha

$$0{,}0054 < \gamma_L < 0{,}0055, \qquad 0{,}00012 < \gamma'_L < 0{,}00013;$$

ora, sapendosi che

$$L\,1000 = 3{,}0000000000, \quad L\,1000{,}5 = 3{,}0002170930, \quad L\,1001 = 3{,}0004340775,$$

se si calcola il logaritmo di 1000,5 colla interpolazione semplice si ha

$$3{,}0002170388 \qquad \text{e quindi} \qquad g_L = +\,0{,}0054\ldots;$$

e se, viceversa, si calcola l'antilogaritmo di 3,0002170930 si ha

$$1000{,}50012\ldots \qquad \text{e quindi} \qquad g'_L = -\,0{,}00012\ldots;$$

e sulle cifre qui conservate per questi errori, gli errori l, m, l', m' non hanno, evidentemente, nessuna influenza.

Osservazione V. — Da tutte le considerazioni fatte risulta chiaramente che non si possono giustificare quei criteri che stabiliscono di prendere sempre uno stesso determinato numero di prodotti parziali nella ricerca diretta, e uno stesso determinato numero di cifre per la parte proporzionale della ricerca inversa. Così, p. es., se per una tavola del primo tipo si stabilisse, nella ricerca diretta, di prendere sempre *tre* prodotti parziali, se ne potrebbe prendere uno inutile se Δy fosse di *due* cifre; mentre (solo per questo) si potrebbe commettere un errore che ha per limite superiore inabbassabile 0,435 se Δy fosse di *tre* cifre.

Osservazione VI. — I due tipi di tavole, da noi considerati, comprendono quasi tutte le ordinarie tavole dei logaritmi dei numeri; fra le poche che fanno eccezione e che sono in uso abbastanza frequente citeremo quelle che si dicono ordinariamente *Tavole del Lalande a sette decimali* (*), che sono una estensione fatta dal Marie delle tavole del Lalande a cinque decimali (**). Esse però, essendo estese fino a 10000 soltanto, hanno il difetto che, almeno in principio, γ_L è maggiore di 0,5 (come facilmente risulta dalla (29) del § 41); e inoltre richiedono, per la interpolazione, un laborioso calcolo per il quale neppure si hanno tavolette ausiliarie. L'estensione del Marie ci pare quindi poco opportuna, e meno opportuno ancora ci pare l'aver dato a quelle tavole il nome del Lalande, perchè questi, colle sue piccole tavole, volle proprio dare il modo di evitare l'uso di *sette* cifre decimali (***).

§ **43.** Indicando con g_{Ls} e con g'_{Ls} gli errori accennati, quando sia

$$y = L\,\text{sen}\,x,$$

abbiamo visto ([N₁], § 8) che il primo è sempre per difetto, che il secondo è sempre per eccesso e che, in valore assoluto, sono sempre, rispettivamente, minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\text{sen}^2 x_0} \qquad \text{e} \qquad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_1}{\text{sen}^2 x_0},$$

(*) *Tables de Logarithmes, par Jérome de Lalande; étendues a sept decimales, par* F. C. M. Marie. Ed. Gauthier Villars, Parigi 1890.

(**) *Tables de Logarithmes pour le nombre et pour le sinus, par* Jérome de Lalande. Ed. Firmin Didot, Parigi, 1805.

(***) "...les astronomes, les navigateurs, les militaires, les géographes, les arpenteurs, les architectes, ont un besoin continuel de petites tables, bien plus rarement des grandes... J'ai calculé quelques centaines d'éclipses, et je n'y ai presque jamais employé d'autres tables que celles que je publie... (l. c., Preface, pagg. 6 e 7).

dove con $(\Delta x)''$ s'intende il passo espresso in secondi. Di questi due limiti il primo evidentemente cala al crescere di x_0; e in quanto al secondo, abbiamo visto che esso cala per x_0 crescente fino a $45^\circ - \Delta x$, che prende il suo valor minimo fra $45^\circ - \Delta x$ e 45° e che poi cresce per x_0 crescente da 45° a $90^\circ - \Delta x$; e abbiamo pure osservato che dei due valori che esso piglia per $x_0 = \alpha$ e per $x_0 = 90^\circ - \Delta x - \alpha$ (essendo α un angolo qualunque minore di 45°) il maggiore è il primo. Come abbiamo anche visto che per $\delta x : \Delta x = 0,5$ gli errori stessi, sempre in valore assoluto, sono rispettivamente maggiori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1} \quad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_0}{\operatorname{sen}^2 x_1};$$

per cui, indicando con γ_{Ls} e con γ'_{Ls} (in val. ass.) dei limiti superiori inabbassabili di g_{Ls} e di g'_{Ls}, per x compreso fra x_0 e $x_1 = x_0 + \Delta x$, sarà certamente

$$\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1} < \gamma_{Ls} < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_0}, \tag{31}$$

$$\frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_0}{\operatorname{sen}^2 x_1} < \gamma'_{Ls} < \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_1}{\operatorname{sen}^2 x_0}. \tag{32}$$

Sia invece

$$y = \mathrm{L} \tan x;$$

si osservi, prima di tutto, che, avendo due archi complementari i loro logtangenti eguali e di segno contrario, basterà far variare x_0 da 0° a $45^\circ - \Delta x$. Attribuendo poi a g_{Lt} e a g'_{Lt} i soliti significati, abbiamo visto ([N₁], § 9) che da 0° a 45° il primo è per difetto e il secondo è per eccesso (da 45° a 90°, evidentemente accade il contrario), e che in valore assoluto sono sempre minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0} \quad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0} \operatorname{sen} 2x_1.$$

Abbiamo pure visto che ambedue questi limiti calano al crescere di x_0 da 0 a $45^\circ - \Delta x$; come abbiamo anche visto che, nella solita ipotesi di $\delta x : \Delta x = 0,5$, essi sono rispettivamente maggiori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} \quad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} \operatorname{sen} 2x_0.$$

Per cui, attribuendo a γ_{Lt} e a γ'_{Lt} i soliti significati, per x compreso fra x_0 e $x_1 = x_0 + \Delta x$, sarà certamente

$$\frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \times \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} < \gamma_{Lt} < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \times \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0}, \tag{33}$$

$$\frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} \operatorname{sen} 2x_0 < \gamma'_{Lt} < \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \times \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0} \operatorname{sen} 2x_1. \tag{34}$$

§ **44.** Applichiamo ora i risultati precedenti alle quattro tavole studiate nei §§ 22, 23, 26 e 29, tenendo presente che, nella ricerca inversa, per Δy minore di 2 l'interpolazione non occorre.

I) Tavola in cui $\Delta x = 10''$ ed $n = 7$, (§ 22).
Quando $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x$, nella ricerca diretta,

se $5^\circ \leqslant x_0$, si ha $\quad 0{,}0012 < \gamma_{\mathrm{Ls}} < 0{,}1678, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $5^\circ 00' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 11^\circ 53' 40''$ si ha $\quad 0'',00030 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00070,$
" $11^\circ 53' 50'' \leqslant x_0 \leqslant 64^\circ 36' 40''$ " $\quad 0'',00012 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00031,$
" $64^\circ 36' 50'' \leqslant x_0 \leqslant 17^\circ 18' 50''$ " $\quad 0'',00015 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00130,$
" $87^\circ 19' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 89^\circ 42' 10''$ " $\quad 0'',00117 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',01180$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $1000 \leqslant \Delta y \leqslant 2460,$ da cui $\quad 0'',0042 < \lambda' \leqslant 0'',0100,$
" $100 \leqslant \Delta y \leqslant 1000,$ " $\quad 0'',01 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',10,$
" $10 \leqslant \Delta y \leqslant 100,$ " $\quad 0'',1 \leqslant \lambda' \leqslant 1'',0,$
" $2 \leqslant \Delta y \leqslant 10,$ " $\quad 1'' \leqslant \lambda' \leqslant 5''.$

Quando invece $y = \mathrm{L}\tan x$, nella ricerca diretta,

se $5^\circ \leqslant 84^\circ 59' 50''$, si ha $\quad 0{,}0000 < \gamma_{\mathrm{Lt}} < 0{,}1667, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $5^\circ 00' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 12^\circ 47' 20''$, si ha $\quad 0'',00026 < \gamma'_{\mathrm{Lt}} < 0'',00069,$
" $12^\circ 47' 30'' \leqslant x_0 \leqslant 44^\circ 59' 50''$, " $\quad 0'',00000 \leqslant \gamma'_{\mathrm{Lt}} < 0'',00026$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $1000 \leqslant \Delta y \leqslant 2424,$ da cui $\quad 0'',0041 < \lambda' \leqslant 0'',0100,$
" $421 \leqslant \Delta y \leqslant 1000,$ " $\quad 0'',010 \leqslant \lambda' < 0'',024.$

II) Tavola in cui $\Delta x = 1''$ ed $n = 7$ (§ 23).
Quando $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x$, nella ricerca diretta,

se $0^\circ 30' 00'' \leqslant x_0$, si ha $\quad 0{,}0016 < \gamma_{\mathrm{Ls}} < 0{,}1676, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $0^\circ 30' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 1^\circ 12' 25''$, si ha $\quad 0'',000028 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',000070,$
" $1^\circ 12' 26'' \leqslant x_0 \leqslant 4^\circ 50' 59''$, " $\quad 0'',000006 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',000029$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $1000 \leqslant \Delta y \leqslant 2412,$ da cui $\quad 0'',0004 < \lambda' \leqslant 0'',0010,$
" $241 \leqslant \Delta y \leqslant 1000,$ " $\quad 0'',0010 \leqslant \lambda' < 0'',0042.$

Quando $y = \mathrm{L}\tan x$, si hanno tutte le stesse limitazioni, colla sola differenza che il limite inferiore della seconda limitazione di Δy è 243, invece di 241, ma il corrispondente limite superiore di λ' (perchè fermato alla quarta cifra decimale) non cambia.

III) Tavola in cui $\Delta x = 1'$ ed $n = 5$ (§§ 26, 27, 28).
Quando $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x$, nella ricerca diretta

se $3^\circ 00' \leqslant x_0$, si ha $\quad 0{,}0004 < \gamma_{\mathrm{Ls}} < 0{,}1678, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $3^\circ 00' \leqslant x_0 \leqslant 7^\circ 12'$ si ha $\quad 0'',017 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',042,$
" $7^\circ 13' \leqslant x_0 \leqslant 51^\circ 43'$ " $\quad 0'',004 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',018,$
" $51^\circ 54' \leqslant x_0 \leqslant 85^\circ 13'$ " $\quad 0'',004 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',027$

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \leqslant \Delta y \leqslant 240$, da cui $0'',25 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',60$,
" $10 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, " $0'',6 \leqslant \lambda' \leqslant 6'',0$
" $2 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, " $6'' \leqslant \lambda' \leqslant 30''$.

Quando, invece, $y = \mathrm{L} \tan x$, nella ricerca diretta,

se $3^\circ 00' \leqslant x_0 \leqslant 86^\circ 59'$, si ha $0,0000 < \gamma_{\mathrm{Lt}} < 0,1673$, mentre $\lambda' = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $3^\circ 00' \leqslant x_0 \leqslant 7^\circ 20'$, si ha $0'',016 < \gamma'_{\mathrm{Lt}} < 0'',042$,
" $7^\circ 21' \leqslant x_0 \leqslant 44^\circ 59'$ " $0'',000 < \gamma'_{\mathrm{Lt}} < 0'',017$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \leqslant \Delta y \leqslant 241$, da cui $0'',24 < \lambda' \leqslant 0'',60$,
" $25 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, " $0'',60 \leqslant \lambda' \leqslant 2'',40$.

IV) Tavola in cui $\Delta x = 1''$ ed $n = 5$ (§ 29).
Quando $y = \mathrm{L} \operatorname{sen} x$, nella ricerca diretta

se $0^\circ 03' 00'' \leqslant x_0$, si ha $0,00004 < \gamma_{\mathrm{Ls}} < 0,16756$, mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $0^\circ 03' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 0^\circ 07' 16''$, si ha $0'',00028 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00070$,
" $0^\circ 07' 17'' \leqslant x_0 \leqslant 1^\circ 12' 47''$, " $0'',00002 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00029$,
" $1^\circ 12' 48'' \leqslant x_0 \leqslant 2^\circ 59' 59''$, " $0'',00001 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00003$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \leqslant \Delta y \leqslant 240$, da cui $0'',004 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',010$,
" $10 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, " $0'',01 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',10$,
" $4 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, " $0'',10 \leqslant \lambda' \leqslant 0''25$.

Quando $y = \mathrm{L} \tan x$, si hanno tutte le stesse limitazioni, colla sola differenza che il limite superiore della seconda limitazione di x_0 è $1^\circ 12' 58''$ invece di $1^\circ 12' 47''$, e (per conseguenza) il limite superiore della terza limitazione è $1^\circ 12' 59''$, invece di $1^\circ 12' 48''$.

Ed ora, confrontando i limiti superiori di γ_{Ls} e γ_{Lt} con λ e i varî limiti superiori trovati per γ'_{Ls} e γ'_{Lt} coi corrispondenti limiti inferiori di λ', si vede

che nella ricerca diretta il primo (quello di γ_{Ls}, o quello di γ_{Lt}), è in *tutti* i casi, minore di 2 decimi del secondo;

e che nella ricerca inversa il primo è certamente minore di 2 decimi del secondo per la prima limitazione (rispetto a x_0) di ciascuno dei sei gruppi considerati e di un decimo solo, per tutte le altre. Così, per es., per $n = 7$, $\Delta x = 10''$ e

$$5^\circ 00' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 11^\circ 53' 40'',$$

si ha, in valore assoluto,

$$\gamma_{\mathrm{Ls}} < 0'',00070 < 0,0042 \times 0,2 < \lambda' \times 0,2 .$$

Osservazione I. — Analoga alla Oss. II del § 42. Così, p. es., nel caso della ricerca inversa di logseno, nelle tavole considerate nel § 22 (dove $n=7$ e $\Delta x=10''$), si vede che, corrispondentemente alle quattro limitazioni stabilite per x_0, si ha

$$\mu'=0'',0005, \qquad \mu'=0'',005, \qquad \mu'=0'',05, \qquad \mu'=0'',5;$$

e questi valori, confrontati con quelli che (sempre corrispondentemente) si ottengono per i limiti di $\gamma_{L_s}+\lambda'$, giustificano, nel solito modo, il nostro procedimento.

Osservazione II. — Alle conclusioni precedenti non si giungerebbe sempre se si usassero le tavole da noi considerate fra limiti diversi da quelli da noi stabiliti, o se si considerassero altre tavole.

Così, p. es., per la ricerca inversa relativa ad archi molto piccoli, l'Albrecht (l. c., *Einleitung*, pag. XI) dice che l'uso dei logaritmi rapporti S e T (poichè, per la ricerca diretta, a questi egli ricorre nel caso indicato, e non all'artifizio del § 30) non è di nessun reale vantaggio e che conviene meglio servirsi della tavola con $\Delta x=1''$. Orbene, per $x_0=42''$ e trattandosi di un logseno, si ha $\Delta y=1022$, onde $\mu'=0'',00005$; mentre invece dalla (32) del § 43 si deduce che g'_{L_s} può essere maggiore di $0'',0028$; si avrebbe dunque, col solito procedimento, *una* cifra certamente illusoria.

Adoperando poi nello stesso caso la tavola del Bruhns (*) si avrebbe $\Delta y=102191$, onde $\mu'=0000005$; e così, per quanto si è osservato ora, si avrebbero *tre* cifre certamente illusorie. E si noti bene che il Bruhns stesso, anche in questi casi, dà le tavolette ausiliarie per le interpolazioni; nè può obbiettarsi che queste si debbano usare solo per la ricerca diretta, perchè per $x_0=42''$ si ha certamente (come si deduce dalla (31) del § 43) g_{L_s} maggiore di 293 unità.

E così è giustificato il dubbio a cui si accenna nel § 40.

Osservazione III. — Nel caso di logseno, per x maggiore di 45° i limiti dell'errore g'_{L_s} crescono e crescono anche quelli di l'; quindi in questo caso è necessaria la separazione accennata nella Oss. III al § 42.

Osservazione IV. — Se $n=7$ e $\Delta x=10''$ (§ 22), si vede che, supponendo x compreso fra 5° e 85°, nella ricerca inversa di logtangente la somma $g'_{L_t}+\lambda'$ è al più compresa fra $0'',0100$ e $0'',0233$; mentre che nella ricerca inversa di logseno, anche limitando x ad essere minore di 64°36'50'', la stessa somma è compresa fra $0''01012$ e $0'',10031$. Se invece $n=5$ e $\Delta x=1'$ (§ 29), si vede che quella somma è compresa fra $0'',600$ e $2'',417$ per il logtangente, mentre che per il logseno, anche limitando x ad essere minore di 51°43', è compresa fra $0'',604$ e $30'',027$. Aggiungasi che, quando x supera 64°36'50'' nel primo caso, e 51°43' nel secondo (essendo allora Δy minore di 2), la somma stessa può, rispettivamente, superare 10'' e 1'; e questo è chiaro.

È perciò che, come si dice in quasi tutti i trattati di *Trigonometria*, è sempre preferibile far in modo che le ricerche inverse siano per tangente anzichè per seno.

(*) *Nuovo manuale logaritmico*. Ed. Tauchnitz, Lipsia, 1889, pag. 188.

OSSERVAZIONE V. — Anche dalle limitazioni (31), (32), (33) e (34) si può dedurre che i limiti superiori da noi indicati per g_{Ls}, g_{Lt}, g'_{Ls}, e g'_{Lt} *non potranno mai subire un abbassamento sensibile, qualunque altra via si segua per la loro ricerca.* Così, per $x_0 = 3^\circ$ ed $n = 5$ e $\Delta x = 1'$ (§ 29), si ha

$$0{,}166 < \gamma_{Ls} < 0{,}168 \qquad 0'',041 < \gamma'_{Ls} < 0'',042$$

e le stesse limitazioni si hanno per γ_{Lt} e γ'_{Lt} rispettivamente; ora sapendosi che

$$\begin{array}{ll} \text{L sen } 3^\circ 09'00'' = \bar{2},7188001636, & \text{L tan } 3^\circ 00'00'' = \bar{2},7193957573, \\ \text{L sen } 3^\circ 00'00'' = \bar{2},7200037606, & \text{L tan } 3^\circ 00'30'' = \bar{2},7205026693, \\ \text{L sen } 3^\circ 01'00'' = \bar{2},7212040219, & \text{L tan } 3^\circ 01'00'' = \bar{2},7218062548, \end{array}$$

se si calcolano il logseno e il logtangente di $3^\circ 00'30''$ colla interpolazione semplice, si ha rispettivamente

$$\bar{2},7200020927 \quad \text{e} \quad \bar{2},7206010061$$

e quindi

$$g_{Ls} = g_{Lt} = +0{,}166\ldots;$$

e se, viceversa, si calcola (sempre colla interpolazione semplice) l'arco che ha per logseno e per logtangente, rispettivamente,

$$\bar{2},7200037606 \quad \text{e} \quad \bar{2},7206026693$$

si ha

$$3^\circ 00'30'',0415\ldots \qquad 3^\circ 00'30'',0414\ldots$$

e quindi

$$g'_{Ls} = g'_{Lt} = -0'',041\ldots$$

e, anche sulle cifre qui conservate per questi errori, gli errori l, m ed l', m' non hanno, evidentemente, nessuna influenza.

OSSERVAZIONE VI. — Se, invece di avere delle tavolette calcolate per ogni differenza tavolare, si avessero delle tavolette per le differenze medie fra 10 differenze nei logaritmi dei numeri, e fra 15 differenze nei logaritmi trigonometrici, tutti gli errori g_L, g'_L, g_{Ls}, g'_{Ls} g_{Lt}, g'_{Lt} evidentemente aumenterebbero. Così nel caso delle tavole del CAILLET, abbiamo dimostrato che i primi due vengono moltiplicati per 36 e gli altri quattro per 56 ([N$_1$], § 5, Oss. II e § 10, Oss. II). Aggiungasi che, in tale ipotesi, aumentano anche i limiti superiori degli errori l ed l' (*).

§ 45. Consideriamo ora il caso in cui si ricorra ai logaritmi rapporti S e T (§ 24).

Nella ricerca diretta l'errore, che è dovuto al metodo indicato e che indicheremo con r_S ed r_T, consta di due errori:

1° quello dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali nel calcolo di Lx'';

2° quello dovuto alla stessa causa nel calcolo di S o di T.

Il primo è l'errore g_L già studiato nel § 41; resta quindi a studiarsi il secondo, che indicheremo con g_S e g_T.

(*) V. *Appendice* citata (§ 27 e seguenti).

Perciò ricordiamo ([N$_2$], § 39) che g_S e g_T sono, rispettivamente, per difetto e per eccesso, e che in valore assoluto sono, sempre rispettivamente, minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1} - \frac{1}{x_1^2}\right) \quad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\left(\frac{1}{(2x_1)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1}\right).$$

Ricordiamo pure che ambedue questi limiti sono sempre positivi, e che ambedue crescono al crescere di x_1. Per cui, attribuendo a γ_S e γ_T i soliti significati, avremo, come al solito,

$$(35) \qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_0} - \frac{1}{x_0^2}\right) < \gamma_S < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1} - \frac{1}{x_1^2}\right),$$

$$(36) \qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\left(\frac{1}{(2x_0)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0}\right) < \gamma_T < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\left(\frac{1}{(2x_1)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1}\right).$$

Siccome però, nel nostro caso, x_0 è molto piccolo (minore di 30′) e $x_1 - x_0$ è eguale a 10″ o a 50″ (§ 24), conviene trasformare le limitazioni precedenti in altre più adatte al calcolo numerico. Per ciò cominciamo dall'osservare che

$$(37) \quad \lim_{x=0}\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right\} = \frac{1}{3}, \qquad (38) \quad \lim_{x=0}\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctn} x}{\operatorname{sen} x}\right\} = \frac{1}{6},$$

come si può vedere applicando, quattro volte di seguito, la regola dell'Hospital. Ricordiamo poscia che, indicando con a la misura circolare di un arco compreso fra 0 e $\frac{1}{2}\pi$, si ha

$$(39) \qquad 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} < \cos a < 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!},$$

$$(40) \qquad a^2 - \frac{a^4}{3} < \operatorname{sen}^2 a < a^2 - \frac{a^4}{3} + \frac{2a^6}{45};$$

da cui, con facili trasformazioni,

$$(41) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{1}{a^2} < \frac{1}{3 - a^2},$$

$$(42) \qquad \frac{1}{(2a)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2a}{\operatorname{sen} 2a} < \frac{1}{2} \times \frac{15 + a^2 + 2a^4}{45 - 60a^2 + 32a^4}.$$

Sarà dunque

$$(43) \qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{24} < \gamma_S < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{3 - x_1^2},$$

$$(44) \qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{12} < \gamma_T < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{4} \times \frac{15 + x_1^2 + 2x_1^4}{45 - 60x_1^2 + 32x_1^4}.$$

§ 46. Ed ora, per avere i limiti cercati di r_S e di r_T, basta osservare che, per quanto s'è detto nel § prec., si ha

$$r_S = g_S + g_L, \qquad r_T = g_T + g_L.$$

Nelle nostre ipotesi (§ 24), dalla (43) e dalla (44), se $16'40'' < x < 30'$, nel quale caso $\Delta x = 10''$, si ha

$$0{,}0004253 < \gamma_S < 0{,}0004254, \qquad 0{,}0008506 < \gamma_T < 0{,}0008508,$$

e se $x < 16'40''$, nel quale caso $\Delta x = 50''$, si ha

$$0{,}0106331 < \gamma_S < 0{,}0106333, \qquad 0{,}0212663 < \gamma_T < 0{,}0212671;$$

mentre dalla (29), nel primo caso, essendo x'' compreso fra $1000''$ e $1800''$, si ha

$$0{,}0016755 < \gamma_L < 0{,}0054287,$$

e nel secondo caso, essendo x'' compreso fra 0 e $1000''$, si ha

$$0{,}0000542 < \gamma_L < 0{,}0054287.$$

Ma gli errori g_L e g_S sono ambedue per difetto, mentre l'errore g_T è per eccesso: quindi, indicando con ρ_S e ρ_T dei limiti superiori inabbassabili di r_S ed r_T, ρ_S sarà eguale a $\gamma_S + \gamma_L$, mentre ρ_T, essendo γ_L maggiore o minore di γ_T secondo che x'' è maggiore o minore di $1000''$ (come risulta dalle precedenti limitazioni), sarà rispettivamente eguale a γ_L o a γ_T. Si avrà dunque

$$0{,}0021008 < \rho_S < 0{,}0058541, \qquad 0{,}0016755 < \rho_T < 0{,}0054287$$

per $16'40'' < x < 30'$, e

$$0{,}0106874 < \rho_S < 0{,}0160620, \qquad 0{,}0212663 < \rho_T < 0{,}0212671$$

per $x < 16'40''$.

Ed ora, confrontando i limiti superiori di ρ_S e di ρ_T col valore di λ dato dalla (24), si conclude che i primi sono sempre minori di 2 centesimi del secondo (§ 40).

Osservazione I. — Dai valori numerici trovati nel nostro caso per le limitazioni di γ_S e di γ_T si deduce, al solito (§ 42, Oss. IV, § 44, Oss. V), che i limiti superiori da noi indicati per g_S e g_T *non potranno mai subire un abbassamento sensibile, qualunque altra via si segua per la loro ricerca.*

Osservazione II. — Vogliamo mostrare con un esempio, come per gli errori considerati possa essere utile anche la conoscenza degli indicati limiti inferiori (§ 42, Oss. I).

Il Callet (*) dà i logaritmi rapporti S e T fino a 3° e con $\Delta x = 60''$: ebbene, per x maggiore di $2°46'40''$ ($= 10000''$) e $\Delta x = 1''$, dalle (31) e (33) si ha (considerando come cifra delle unità la ottava cifra decimale, perchè da 1000 in poi le mantisse dei logaritmi dei numeri sono date con otto cifre)

$$\gamma_{L_S} < 0{,}054, \qquad \gamma_{L_T} < 0{,}054;$$

mentre che per x maggiore di $2°46'40'$ e $\Delta x = 60'$, dalla (35) e (36) si ha

$$\gamma_S > 0{,}152, \qquad \gamma_T > 0{,}306.$$

Quindi il limite superiore (non abbassabile, sensibilmente) dell'errore che si può commettere coll'uso dei logaritmi rapporti nella ricerca diretta, è certamente maggiore del limite superiore dell'errore che

(*) Già citato in una nota al § 21; però il metodo cui ivi accennammo, non è quello che prendiamo in considerazione ora. ([N₂], §§ 33 e 41.)

si può commettere usando l'ordinaria tavola di secondo in secondo. E si noti bene che, oltre l'aver trascurato l'errore g_L, non si è tenuto conto del fatto che λ nel primo caso è eguale a 1,2 (§ 38) mentre nel secondo è eguale a 1 soltanto (§ 32).

§ **47.** Nella ricerca inversa l'errore che è dovuto al metodo indicato (§ 24) e che indicheremo con r'_S ed r'_T, consta di tre errori:

1° quello dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali nel calcolo di S, o di T;

2° quello dovuto al trascurare, nel calcolo ora accennato, le frazioni di secondo (chè non si conoscono);

3° quello dovuto all'ammettere il solito principio nella ricerca inversa di Lx''.

Il primo deriva dagli errori g_S e g_T già studiati nel § 45, e il terzo è l'errore g'_L studiato nel § 41; restano quindi a studiarsi gli errori dai quali deriva il secondo e che indicheremo con d_S e d_T.

Osserviamo prima di tutto che, indicando con ΔS e ΔT gli aumenti che subiscono S e T quando l'arco cresce da x_0 a $x_1 = x_0 + \Delta x$, e con δ_S e δ_T i massimi, o dei limiti superiori inabbassabili, dei valori assoluti di d_S e di d_T, siccome questi errori possono essere tanto per eccesso che per difetto, δ_S e δ_T saranno rispettivamente eguali alla metà dei valori assoluti di ΔS e di ΔT. Ora, le prime due derivate di S sono

$$\mathrm{M}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{ed} \qquad \mathrm{L}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right),$$

e, nel nostro caso, sono ambedue negative; quindi, al crescere di x, S cala e la sua derivata prima cresce, in valore assoluto; sarà dunque

$$\mathrm{M}\Delta x\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{\tan x_0}\right)<\Delta \mathrm{S}<\mathrm{M}\Delta x\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{\tan x_1}\right). \tag{45}$$

Analogamente: le prime due derivate di T sono

$$2\mathrm{M}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}-\frac{1}{2x}\right) \qquad \text{e} \qquad 4\mathrm{M}\left(\frac{1}{(2x)^2}-\frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right),$$

e, nel nostro caso, sono ambedue positive; quindi, al crescere di x, T cresce e cresce pure la derivata prima, sarà dunque

$$2\mathrm{M}\Delta x\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x_0}-\frac{1}{2x_0}\right)<\Delta \mathrm{T}<2\mathrm{M}\Delta x\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x_1}-\frac{1}{2x_1}\right). \tag{46}$$

Anche qui però conviene trasformare queste limitazioni in altre più adatte al calcolo numerico. Per ciò cominciamo dall'osservare che

$$\lim_{x=0}\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right\}=\frac{1}{3}, \tag{47}$$ $$\lim_{x=0}\left\{\frac{1}{x\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x^2}\right\}=\frac{1}{6}, \tag{48}$$

come si può vedere applicando tre volte di seguito la regola dell'Hospital. Ricordiamo poscia che, oltre le (39) e (40), si ha anche

$$a-\frac{a^3}{3!}<\operatorname{sen} a<a-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}, \tag{49}$$

e con facili trasformazioni si avrà

(50) $\frac{1}{a}-\frac{1}{\tan a}<\frac{40a+a^3}{120-2a^2}$, (51) $\frac{1}{\operatorname{sen} 2a}-\frac{1}{2a}<\frac{a}{3-2a^2}$.

Sarà dunque

(52) $$\frac{M\Delta x}{6}\times x_0<\delta_S<\frac{M\Delta x}{2}\times\frac{40x_1+x_1^3}{120-2x_1^2},$$

(53) $$\frac{M\Delta x}{3}\times x_0<\delta_T<M\Delta x\times\frac{x_1}{3-2x_1^2}.$$

§ **48.** Ed ora, per avere dei limiti per r'_S ed r'_T, bisogna osservare che ambedue gli errori d_S e g_S, come ambedue gli errori d_T e g_T, affettano Lx'', per cui (§ 32, Oss. III), essi produrranno in x'' un errore rispettivamente eguale a $(d_S+g_S):\Delta y$ e a $(d_T+g_T):\Delta y$; a ciascuno di questi ultimi si aggiunge poi l'errore g'_L, per cui sarà

$$r'_S=\frac{d_S+g_S}{\Delta y}+g'_L, \qquad r'_T=\frac{d_T+g_T}{\Delta y}+g'_L.$$

Nelle nostre ipotesi, considerando dapprima il caso in cui x'' sia compreso fra 16'40'' e 30', dalle (52), (53) si ha

$$0{,}0170130<\delta_S<0{,}0306258, \qquad 0{,}0340261<\delta_T<0{,}0612502,$$

da cui, essendo

$$241\leqslant\Delta y\leqslant 435$$

(perchè x'' è compreso fra 1000'' e 1800''), si ricava

$$0{,}0000391<\frac{\delta_S}{\Delta y}<0{,}0001271, \qquad 0{,}0000782<\frac{\delta_T}{\Delta y}<0{,}0002542.$$

Inoltre colle prime limitazioni trovate nel § 46 per γ_S e γ_T (essendo ora $\Delta x=10''$) si ha

$$0{,}0000009<\frac{\gamma_S}{\Delta y}<0{,}0000018, \qquad 0{,}0000019<\frac{\gamma_T}{\Delta y}<0{,}0000036;$$

e finalmente (sempre per i limiti fra i quali ora si suppone compreso x'') dalla (39) si ha

$$0{,}0000069<\gamma'_L<0{,}0000126.$$

Ma ciascuno degli errori d_S e d_T può essere tanto per eccesso che per difetto, gli errori g_S e g_T sono rispettivamente per difetto e per eccesso, l'errore g'_L è sempre per eccesso; quindi, indicando, al solito, con ρ'_S e ρ'_T dei limiti superiori inabbassabili di r'_S ed r'_T, ρ'_T sarà eguale a $(\gamma_T+\delta_T):\Delta y+\gamma'_L$, mentre che ρ'_S, essendo nelle nostre ipotesi $\delta_S:\Delta y+\gamma'_S$ maggiore di $\gamma_S:\Delta y+\delta_S$ (come risulta dalle precedenti limitazioni), sarà eguale al primo di questi valori. Si conclude che per x'' compreso fra 16'40'' e 30', si ha

$$0{,}0000442<\rho'_S<0{,}0001388, \qquad 0{,}0000870<\rho'_T<0{,}0002704.$$

Mentre che dalla (26), sempre tenendo conto dei limiti fra i quali ora si suppone compreso x'', si ha

$$0{,}0045977<\lambda'<0{,}0082988;$$

quindi i limiti superiori trovati per ρ'_S e ρ'_T sono certamente minori di 6 centesimi del limite inferiore di λ' (§ 40).

Bisogna però ricordare che nei valori numerici di tutti questi limiti si considera come cifra delle unità l'ultima cifra di x_0, ossia la quinta cifra di x'' (§ 10), mentre nel caso ora considerato la parte intera di x'' ha quattro cifre sole, volendo quindi esprimere quei valori in secondi, si avrà

$$0'',00000442 < \rho'_S < 0'',00001388, \qquad 0'',00000870 < \rho'_T < 0'',00002704$$
$$0'',00045977 < \lambda' < 0'',00082988.$$

§ **49.** Consideriamo ora il caso in cui x'' sia compreso fra $0''$ e $1000''$. I limiti di γ_S e di γ_T, essendo ora $\Delta x = 50''$, sono quelli dati dalle seconde limitazioni trovate per questi valori nel § 46; per cui, essendo ora

$$43 \leqslant \Delta y \leqslant 435,$$

si ha

$$0,0000244 < \frac{\gamma_S}{\Delta y} < 0,0002473, \qquad 0,0000488 < \frac{\gamma_T}{\Delta y} < 0,0004946.$$

E i limiti di γ'_L, essendo ora x'' compreso fra $0''$ e $1000''$, sono dati da (§ 41)

$$0,0000012 < \gamma'_L < 0,0000126.$$

Restano dunque a trovare solo i nuovi limiti di δ_S e di δ_T.

Per ciò si cominci dall'osservare che per x'' compreso fra $100''$ e $1000''$ si ha

$$0,0017013 < \delta_S < 0,0170132, \qquad 0,0034026 < \delta_T < 0,0340267;$$

e quindi

$$0,0000039 < \frac{\delta_S}{\Delta y} < 0,0003956, \qquad 0,0000078 < \frac{\delta_T}{\Delta y} < 0,0007913.$$

Volendo ora le stesse limitazioni per x'' compreso fra $10''$ e $100''$, fra $1''$ e $10''$,... basterà dividere per 10, per 100,... gli estremi di queste ultime due limitazioni. Infatti, per i limiti inferiori ciò risulta evidente dalle (52) e (53); e per i limiti superiori basta notare che i limiti superiori delle stesse (52) e (53) si possono mettere sotto le forme

$$\frac{M\Delta x}{2} x_1 \times \left(\frac{40 + x_1^2}{120 - 2x_1^2}\right) \qquad \text{e} \qquad M\Delta x\, x_1 \times \left(\frac{1}{3 - 2x_1^2}\right),$$

e che le funzioni fra parentesi calano al calare di x_1; per cui i limiti ottenuti nel modo ora indicato saranno a più forte ragione maggiori dei corrispondenti valori di δ_S e di δ_T.

Ed ora è facile, seguendo il procedimento del precedente §, vedere che si ha successivamente

per $100'' < x'' < 1000''$, $0,0000283 < \rho'_S < 0,0006429$, $0,0000578 < \rho'_T < 0,0012985$
„ $10'' < x'' < 100''$, $0,0000247 < \rho'_S < 0,0002869$, $0,0000507 < \rho'_T < 0,0005764$
„ $1'' < x'' < 10''$, $0,0000244 < \rho'_S < 0,0002583$, $0,0000500 < \rho'_T < 0,0005154$
. . . .

E, al limite, per x tendente a zero, siccome i limiti di δ_T e δ_T tendono a zero, e invece quelli di γ_S e γ_T restano sempre gli stessi, si ha

$$0{,}0000244 < \rho'_S < 0{,}0002473, \qquad 0{,}0000500 < \rho'_T < 0{,}0005072.$$

Mentre che dalla (26), in questo caso, si ha

$$0{,}0045977 < \lambda' < 0{,}0465117;$$

quindi i limiti superiori trovati per ρ'_S e ρ'_T sono certamente minori di 3 decimi del limite inferiore di λ' (§ 40).

Bisogna però ricordare, anche qui, che in tutti questi limiti si considera per cifra delle unità la quinta cifra di x'', e che quindi, volendo esprimere i limiti stessi in secondi, bisogna dividerli per 100, 1000, 10000,...

Osservazione I. — Il metodo precedente per x minore di 2″ coincide, come vedremo, col metodo del § 30 (quando, s'intende, si considerino *sette* cifre decimali soltanto).

Osservazione II. — Analoga alla Oss. I del § 44. Così, p. es., se x è compreso fra 1″ e 10″, per la ricerca inversa di logseno si ha

$$0'',046221 \times 10^{-5} < \rho'_S + \lambda' < 0'',467630 \times 10^{-5}$$

mentre che, essendo la parte intera di x'' di una sola cifra, si ha

$$\mu' = 0'',05 \times 10^{-5};$$

quindi, generalmente, μ' sarà minore della somma $\rho'_S + \lambda'$, senza essere minore di un decimo della somma stessa (§ 11).

Osservazione III. — Analoga alla Oss. II del § 44. Così, p. es., nelle tavole dello Schrön (*) non si trova una tavola di logseni e logtangenti di 1″ in 1″; quindi, dovendosi (nella applicazione del metodo dei logaritmi rapporti) servire delle solite tavole di 10″ in 10″, i limiti di δ_S e di δ_T sono, circa, decupli di quelli suindicati. Inoltre il metodo stesso si estende fino ad $x = 3^0$ e in fondo ad ogni pagina è indicato l'approssimazione che si può raggiungere. Ora, per $x = 2^0 48'$ ($= 10080''$) e per un logtangente, l'approssimazione indicata è 0″,008, mentre si ha $\mu' = 0'',00005$ (perchè la parte intera di x'' è di cinque cifre, mentre che, essendo Δy di *tre* cifre e x_0 di *sei* l'arco cercato si ha con nove cifre); quindi, seguendo il procedimento indicato, si avrebbe certamente una cifra almeno illusoria. E si noti che nel limite indicato dalla tavola non si considera che l'errore d_T (come facilmente si verifica), e quindi non si tiene conto degli errori g_T e g'_L.

Osservazione IV. — Analoga alla Oss. III del § 44; perchè, da quanto precede, risulta che i limiti superiori di γ_S e γ_T e i limiti superiori e inferiori di δ_S e δ_T calano dividendo x'' per una potenza di 10; mentre quelli di γ'_L sono sempre gli stessi.

Osservazione V. — Per vedere anche qui che le nostre limitazioni (52) e (53) *non potranno mai subire un abbassamento sensibile, qualunque sia il metodo che si possa seguire per la loro ricerca*, si osservi che per $x_1 = 30'$ e $x_0 = 29'59''$ si ha

$$0{,}0306 < \delta_S < 0{,}0307, \qquad 0{,}0612 < \delta_T < 0{,}0613.$$

(*) *Tables de logarithmes.* Ed. Gauthier Villars, Parigi, 1894; p. 187.

OSSERVAZIONE VI. — Riprendendo il caso considerato nella Oss. II al § 46, cerchiamo dei limiti inferiori anche per ρ'_s e ρ'_T.

Considerando, anche ora, come cifra delle unità la ottava cifra decimale, si ha, come allora,

$$\gamma_s > 0{,}1531 \quad \text{e} \quad \gamma_T > 0{,}3062;$$

ma, nelle stesse ipotesi, si ha

$$\delta_s > 1{,}7013 \quad \text{e} \quad \delta_T > 3{,}4026,$$

e siccome

$$\Delta y \geqslant 435,$$

si avrà

$$(\gamma_s + \delta_s) : \Delta y > 0{,}004263, \qquad (\gamma_T + \delta_T) : \Delta y > 0{,}008526.$$

Per cui, trascurando l'errore g_L ed osservando che la parte intera di x'' ha cinque cifre sole, si ha

$$\rho'_s > 0'',0004263, \qquad \rho'_T > 0'',0008526.$$

Mentre che dalla (32) e (34) per x maggiore di $2°46'40''$ si ha

$$\gamma'_{Ls} < 0'',0000126, \qquad \gamma'_{Lt} < 0'',0000125.$$

Anche nella ricerca inversa dunque il limite superiore dell'errore che si commette ricorrendo ai logaritmi rapporti è maggiore del limite superiore dell'errore che si commette usando la solita tavola di $1''$ in $1''$ (e, per quanto si è detto nella Oss. precedente e nella Oss. I al § 46, questi limiti sono inabbassabili); e si noti bene che non si è tenuto conto del fatto che il valore di λ' nel primo caso è doppio del valore di λ' nel secondo.

È quindi strano che la ragione, per la quale la tavola dei logaritmi dei numeri qualche volta è spinta fino a 10800, paia (*) solo quella di potere usare i logaritmi rapporti anche da $2°46'40''$ $(=10000'')$ a $3°$ $(=10800'')$.

§ **50.** Non restano più da studiare che gli errori dovuti al metodo indicato nel § 30.

Nella ricerca diretta l'errore, che è dovuto a questo metodo e che indicheremo con r_s ed r_T, consta di due errori:

1° quello dovuto all'ammettere le (14);

2° quello dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali nel calcolo di Lx''.

Il secondo è il solito errore g_L già studiato al § 41; resta quindi a studiarsi il primo che indicheremo con d_s e d_t.

Per ciò osserviamo che d_s e d_t sono rispettivamente per eccesso e per difetto e ricordiamo ([N₂], § 20) che per un determinato arco x essi, in valore assoluto, sono, sempre rispettivamente, minori

$$\text{di} \quad \frac{Mx^2}{2} \times \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{e di} \quad \frac{2}{M(2x)^2}\left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right).$$

(*) CAILLET, l. c. *Avertissement*, pag. v; — HOUEL, l. c. *Avertissement*, pag. v.

Ricordiamo inoltre che ambedue questi limiti sono sempre positivi e che ambedue crescono al crescere di x.

Da tutto questo e dalla (37) e (38) risulta che, indicando con δ_s e δ_t i valori assoluti di d_s e d_t, per un determinato arco x si ha

$$(54) \qquad \frac{Mx^3}{6} < \delta_s < \frac{Mx^3}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$(55) \qquad \frac{M(2x)^3}{12} < \delta_t < \frac{M(2x)^3}{2}\left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right).$$

Anche qui però conviene trasformare i limiti superiori in altri più adatti al calcolo; e perciò dalle (41) e (42) si ha senz'altro, per un determinato arco x,

$$(56) \qquad \frac{Mx^3}{6} < \delta_s < \frac{Mx^3}{2} \times \frac{1}{3 - x^2},$$

$$(57) \qquad \frac{Mx^3}{3} < \delta_t < Mx^3 \times \frac{15 + x^2 + 2x^4}{45 - 6x^2 + 32x^4}.$$

§ **51.** Ed ora per avere i limiti di r_s e di r_t basta osservare che, per quanto s'è detto nel § prec., si ha

$$r_s = d_s + g_L, \qquad r_t = d_t + g_L.$$

Nelle nostre ipotesi (§ 30), essendo x minore di 3', dalle (56) e (57) si ha

$$\delta_s < 0{,}0055123 \qquad \delta_t < 0{,}0110245,$$

e dalla (29) si ha

$$0{,}0000542 < \gamma_L < 0{,}0054287.$$

Ma gli errori g_L e d_t sono ambedue per difetto, mentre l'errore d_s è per eccesso; quindi, indicando con ρ_s e ρ_t dei limiti superiori inabbassabili di r_s ed r_t, ρ_t sarà eguale a $\delta_t + \gamma_L$, mentre ρ_s, essendo il limite superiore di γ_L minore del limite superiore di δ_s, sarà eguale a quest'ultimo. Si avrà dunque

$$\rho_s < 0{,}0055123, \qquad \rho_t < 0{,}0164532.$$

Ed ora, ricordando che in questo caso $\lambda = 1$ (§ 39), si conclude che il limite superiore dell'errore in questione è sempre minore di 2 centesimi di λ (§ 40).

Osservazione I. — Anche per le (56) e (57), si può arrivare alla solita conclusione (§ 42, Oss. IV; § 44, Oss. V; § 46, Oss. I; § 49, Oss. V). Così, per $x = 3'$ si ha

$$0{,}00551223 < \delta_s < 0{,}00551224, \qquad 0{,}01102446 < \delta_t < 0{,}01102448.$$

Osservazione II. — Dalle limitazioni trovate nella Oss. prec. si deduce che, se, invece di cinque cifre decimali, se ne volessero tenere sette, questo metodo non si potrebbe più seguire, perchè per x eguale a 3' si avrebbe già

$$\delta_s > 0{,}551, \qquad \delta_t > 1{,}102.$$

Osservazione III. — Si noti che δ_s e δ_t non rappresentano (in valore assoluto) dei limiti superiori inabbassabili dei corrispondenti errori (come accade per γ_L, γ'_L, γ_{Ls}, γ'_{Ls}, γ_{Lt}, γ'_{Lt}, γ_S, γ_T, δ_S, δ_T); ma rappresentano invece i valori assoluti degli errori stessi.

§ **52.** Nella ricerca inversa l'errore che è dovuto allo stesso metodo e che indicheremo con r'_s ed r'_t, consta pure di due errori:

1° quello dovuto all'ammettere il solito principio nella ricerca inversa di Lx'';

2° quello dovuto al supporre il seno e la tangente eguale all'arco. Il primo è il solito errore g'_L studiato nel § 41; resta quindi a studiare il secondo, che indicheremo con e_s ed e_t.

Per ciò osserviamo che e_s ed e_t sono rispettivamente per difetto e per eccesso; osserviamo poscia che dalla (39) e (49), indicando con ε_s ed ε_t i valori assoluti di e_s e di e_t, per un determinato arco x si ha

$$\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} < \varepsilon_s < \frac{x^3}{3!},$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{4!} < \varepsilon_t < \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!}\right) : \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right);$$

da cui, intendendo che x'', ε_s ed ε_t rappresentino l'arco e i valori assoluti precedenti tutti espressi in secondi,

$$\frac{x^2}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20}\right) x'' < \varepsilon_s < \frac{x^2}{6}\, x''. \tag{58}$$

$$\frac{x^2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) x'' < \varepsilon_t < \frac{x^2}{3}\left(\frac{40 + x^2}{40 - 20x^2}\right) x''. \tag{59}$$

§ **53.** Ed ora, per avere i limiti cercati di r'_s e di r'_t, basta osservare che, per quanto s'è detto nel § prec., si ha

$$r'_s = g'_L + e_s, \qquad r'_t = g'_L + e_t.$$

Nelle nostre ipotesi, considerando dapprima il caso in cui x'' sia compreso fra 1'40" e 3', dalla (58) e (59) si ha

$$0'',0000039 < \varepsilon_s < 0'',0000229, \qquad 0'',0000078 < \varepsilon_t < 0'',0000457,$$

e dalla (30), essendo x'' compreso fra 100" e 180", si ha

$$0'',0000069 < \gamma'_L < 0'',0000126,$$

dove si è spostata la virgola di un posto a sinistra, perchè nei valori dati dalla (30) la cifra delle unità è l'ultima cifra di x_0, ossia (per il tipo di tavole che stiamo considerando) la quarta cifra di x'', mentre che, nel nostro caso, la parte intera di x'' non ha che tre cifre sole.

Ma gli errori g'_L ed e_t sono ambedue per eccesso, mentre l'errore e_s è per difetto; quindi, indicando con ρ'_s e ρ'_t dei limiti superiori inabbassabili di r'_s e di r'_t, ρ'_t, sarà eguale a $\gamma'_L + \varepsilon_t$; mentre che ρ'_s, essendo il limite superiore di ε_s maggiore del limite superiore di γ'_L, e il limite inferiore di ε_s minore del limite inferiore di γ'_L, sarà compreso fra il limite superiore di ε_s e il limite inferiore di γ'_L. Si avrà dunque

$$0'',0000069 < \rho'_s < 0'',0000229, \qquad 0'',000147 < \rho'_t < 0'',0000583.$$

Mentre che dalla (28), essendo

$$24 \leqslant \Delta y \leqslant 44$$

(perchè x'' è compreso fra 100″ e 180″), si ha

$$0'',0033772 < \lambda' < 0'',0061959,$$

dove, come si è fatto per i limiti di γ'_L, si è spostata la virgola di un posto verso sinistra.

§ 54. Consideriamo ora il caso in cui x'' sia compreso fra 0″ e 100″. Se la parte intera di x'' avesse quattro cifre, ossia se la prima cifra di x'' fosse di ordine 3, si avrebbe sempre (§ 42),

$$0,00001250 < \gamma'_L < 0,00012513,$$

quindi, se la prima cifra di x'' è di ordine p si ha

$$0'',00001250 \times 10^{p-3} < \gamma'_L < 0'',00012513 \times 10^{p-3}.$$

In quanto ai limiti di ε_s e di δ_t, si può seguire una via analoga a quella del § 49. Per ciò si calcolino prima gli estremi delle limitazioni (58) e (59) per $x = 10''$ (gli estremi inferiori) e per $x = 100''$ (gli estremi superiori), poi si osservi che per x'' compreso fra 1″ e 10″, fra 0″,1 e 1″,... basta dividere gli estremi stessi per 10^3, per 10^6,... Infatti, al calare di x'', le quantità che compaiono fra parentesi nei due limiti inferiori della (58) e dalla (59) crescono, mentre quella che comparisce fra parentesi nel limite inferiore della (59) cala; per cui i limiti ottenuti nel modo ora indicato saranno a più forte ragione rispettivamente minori e maggiori dei corrispondenti valori di ε_s e di ε_t. Se quindi si attribuisce a p il significato precedente, si ha

$$0'',0000000039 \times 10^{3p-3} < \varepsilon_s < 0'',0000039175 \times 10^{3p-3},$$
$$0'',0000000078 \times 10^{3p-3} < \varepsilon_t < 0'',0000078349 \times 10^{3p-3}.$$

Ed ora, seguendo il procedimento del precedente §, si vede subito che

per $10'' < x'' < 100''$,	si ha	$0'',0000001250 < \rho'_s < 0'',0000039175,$
	e	$0'',0000001328 < \rho'_t < 0'',0000090862,$
e per $1'' < x'' < 10''$,	si ha	$0'',00000001250 < \rho'_s < 0'',00000012513,$
	e	$0'',00000001251 < \rho'_t < 0'',00000013297.$

E, al limite, per x'' tendente a zero, ε_s ed ε_t tendono a zero, e quindi ρ'_s e ρ'_t hanno gli stessi limiti di γ'_L.

Mentre che dalla (28), essendo ora

$$4 \leqslant \Delta y \leqslant 44,$$

si ha, attribuendo a p il significato precedente,

$$0'',033772 \times 10^{p-3} < \lambda' < 0'',371750 \times 10^{p-3};$$

per cui, confrontando i limiti superiori di ρ'_s e di ρ'_t col limite inferiore di λ', si vede che i primi sono sempre minori di 3 centesimi del secondo (§ 40).

Osservazione I. — Nel § 49 ci è parso più comodo e più sollecito considerare sempre come cifra delle unità la quarta cifra di x''; ma in quest'ultimo § abbiamo preferito esprimere tutti i limiti in frazioni decimali di secondo addirittura, perchè così ci è convenuto esprimere quelli di ε_s e di ε_t. Sarebbe però facile seguire un metodo uniforme per ambedue i casi.

Osservazione II. — Per dimostrare ora quanto si asserì nella Oss. I al § 59, si osservi che per x'' minore di $2''$ i logaritmi rapporti S e T, fino alla settima cifra decimale (arrotondata), sono precisamente eguali a $-$ LR'', e quindi le (13) coincidono colle (14)'.

Osservazione III. — Analoga alla Oss. II del § 42. Così, per x'' compreso fra $1'40''$ e $3''$ si ha

$$0'',00339 < \rho'_t + \lambda' < 0'',00626$$

e

$$\mu' = 0'',0005,$$

(perchè Δy ha due cifre e la parte intera di x'' ne ha tre); quindi μ' è certamente minore di $\rho'_t + \lambda'$, senza essere minore di un decimo della stessa somma (§ 11).

Osservazione IV. — Analoga alla Oss. III del § 42.

Osservazione V. — Anche per le (58) e (59) si può arrivare alla solita conclusione (§ 51, Oss. I). Così, per $x = 3'$ si ha

$$0'',0000228462 < \varepsilon_s < 0'',0000228463; \qquad 0'',0000456926 < \varepsilon_t < 0'',0000456927.$$

Osservazione VI. — Per ε_s ed ε_t si deve ripetere una osservazione analoga a quella fatta per δ_s e δ_t (§ 51, Oss. III).

CONCLUSIONE.

§ **55.** Lo studio della questione, che ci eravamo proposta (come cioè si debbano eseguire i calcoli numerici per la ordinaria interpolazione nelle tavole logaritmo-trigonometriche), ci ha condotti a considerazioni molto più estese di quelle che esso richiedeva, specialmente nei primi due capitoli e nella seconda parte del quarto. Crediamo però di non avere fatto cosa inutile.

L'argomento dei primi due capitoli ci pare di tale importanza pratica da dover costituire (opportunamente modificato) un nuovo capitolo della ordinaria *Aritmetica;* e questo perchè, essendo la teoria delle approssimazioni numeriche generalmente bandito dalle nostre scuole, non si ha nessun criterio ben definito per eseguire opportunamente le operazioni sui numeri che ordinariamente si presentano nelle applicazioni.

Inoltre, la seconda parte dell'ultimo capitolo (la quale potrebbe essere applicata a qualunque altro tipo di tavole logaritmo-trigonometriche si volesse considerare) completa le nostre ricerche in proposito; perchè nella nota [N_1] non considerammo tutti i metodi e ci riferimmo solo alle tavole del Caillet, e nella nota [N_2] ci occupammo solo della ricerca diretta. E anche l'importanza di questo studio ci pare sufficientemente dimostrata, non solo dalla applicazione che ha avuto alla nostra ricerca, ma per molte altre che se ne possono fare. Le osservazioni VI, del § 42, VI del § 44, II del § 46, VI del § 49 ne sono esempî notevoli; ma, esaminando i risultati ottenuti se ne possono aggiungere molte altre.

Così, per es., in un calcolo logaritmo-trigonometrico con cinque cifre decimali, quando si abbia una tavola di 1'' in 1'' per i primi tre gradi, non occorre affatto ricorrere ai logaritmi rapporti, che presentano sempre qualche difficoltà (per l'uso poco frequente che occorre di farne) e che, generalmente, richiedono uno spazio non trascurabile nelle tavole dei logaritmi dei numeri.

Come altro esempio: dalla Oss. II del § 49 risulta che in un calcolo logaritmo-trigonometrico con sette cifre decimali non si potrebbe per gli archi piccoli applicare il metodo del § 30. Ma da tutti i risultati ottenuti nei §§ 44, 45...49 si vede che quando si abbia una tavola di 1'' in 1'' per i primi cinque gradi, basta ricorrere ai logaritmi rapporti solo per archi minori di 30'.

Come ultimo esempio: i limiti inferiori degli errori d'interpolazione fanno vedere come errino tutti coloro, e sono molti, i quali asseriscono che per $\Delta x = 1''$ l'errore di interpolazione è trascurabile ([N_2], §§ 16, 17, 18, 19); e come nelle tavole si mettono spesso le colonne delle differenze tavolari anche dove l'interpolazione non si può fare ([N_3], §§ 8, 9, 10, 16...). Notevole fra questi il Bruhns (l. c.), il quale dà le tavolette delle parti proporzionali per x compreso fra 0' e 10', mentre per $x = 1'$ l'errore g_{L_s} può essere maggiore di 150 unità dell'ultimo ordine.

§ 56. Tutte le regole date nel terzo capitolo (e la cui ricerca, come abbiamo ora accennato, dette luogo a questo studio) si riducono, in sostanza, alle due, semplicissime, del § 42. E, per convincersi della loro opportunità, basta vedere l'incertezza e la varietà dei criteri che, in proposito, si trovano anche nei libri più noti e più pregevoli.

In una tavola di logaritmi di numeri a sette cifre, il Serret (*) dice che nella ricerca diretta basta, in generale, fermarsi al terzo prodotto parziale, mentre con questo criterio si può o tener conto di un prodotto inutile, o commetter un errore non trascurabile (§ 42, Oss. V); nella ricerca inversa poi stabilisce che (per la parte proporzionale) si debbano sempre prendere due cifre, mentre egli stesso (**) alle volte ne piglia *una* e alle volte *tre*. Il Todhunter (***) non stabilisce nessun criterio fisso, però essendo Δy di tre cifre, piglia per parte proporzionale ora *due*, ora *tre* cifre. Il Barbarin (****) poi, nello stesso caso, ne piglia indifferentemente o *una*, o *due*, o *tre*. E vogliamo anche citare il Goodwin (*****) il quale (in una tavola a *sei* cifre

(*) Serret, *Traité d'Arithmétique* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1875; pagg. 269, 270).

(**) Serret, *Traité de Trigonométrie* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1888; pagg. 115, 109).

(***) Todhunter, *Trigonometria piana*, versione del Prof. Vito (Ed. Pellerano, Napoli, 1875, pagg. 124, 126.

(****) Barbarin, *Recueil de calculs logarithmiques* (Ed. Nony, Parigi, 1893; pagg. 19, 38).

(*****) Goodwin, *Plane and spherical Trigonometry* (Ed. Longmans, Londra, 1891; pag. 74, 75). Libro di testo nella Scuola Navale di Greenwich.

decimali) in uno stesso esempio, essendo Δy di tre cifre, piglia *due* cifre quando fa il calcolo direttamente e ne piglia invece *tre* quando si serve delle tavolette ausiliarie calcolate sulla differenza media fra dieci differenze (§ 38, Oss.), mentre l'approssimazione che si può raggiungere in questo secondo modo è minore di quella che si può raggiungere nel primo (§ 44, Oss. VI).

Per la ricerca inversa, in una tavola di logaritmi trigonometrici a *sette* decimali e con $\Delta x = 10''$, il SERRET (l. c.), il BRIOT (*), il DE COMBEROUSSE (**), e molti altri stabiliscono di fermarsi, per tutte le funzioni, ai centesimi di secondo; e quelli che vogliono giustificare questo criterio si basano sul fatto che per il logaritmotangente l'errore totale di interpolazione ha per limite superiore $0'',03$: ma come si può poi adottare lo stesso criterio per il logaritmoseno, quando a 87^0, p. es., l'errore stesso può superare $1''$? Il VACQUANT (***), invece, stabilisce di fermarsi sempre ai decimi di secondo. Lo CHAUVENET (****) non stabilisce nessun criterio, ma nella ricerca inversa di logaritmo tangente e con Δy di tre cifre, si ferma ora alle unità, ora ai decimi, ora ai centesimi di secondo; e altrettanto si dica dell'F. J. (*****) e del LE COINTE (v*); il CASEY (v**) poi, nella stessa ricerca e con Δy di quattro cifre si ferma ora alle unità, ora ai centesimi di secondo; e l'HEISS (v***) nella ricerca inversa di logaritmoseno si ferma ai decimi avendo Δy di *quattro* cifre, si ferma invece ai centesimi avendo Δy di *due* cifre.

E si potrebbero citare moltissimi altri esempi.

§ **57.** E l'utilità dei criteri da noi stabiliti e giustificati (e la cui necessità, se può non apparire necessario per la ricerca diretta, è però evidente per la ricerca inversa), oltre ad avere una utilità pratica (perchè sopprime nei calcoli in questione tuttociò che condurrebbe a una approssimazione illusoria), ha anche una utilità didattica non trascurabile.

Sappiamo per lunga esperienza, che, se parecchi allievi eseguiscono (indipendentemente l'uno dall'altro) un calcolo logaritmico non semplicissimo, i risultati raggiunti sono quasi tutti differenti: e ciò non perchè siano stati commessi dei veri errori di calcolo, ma perchè nelle successive interpolazioni si sono seguiti criteri differenti. Mentre l'uniformità di procedimento, oltre essere comodissima per l'insegnante (e ciò per ovvie ragioni) sarebbe utilissima anche per gli allievi, i quali potrebbero condurre i calcoli con maggior sicurezza e con più facile controllo.

(*) BRIOT et BOUQUET, *Leçons de Trigonométrie* (Libr. DELAGRAVE, Parigi, 1887; pagg. 65, 66).

(**) DE COMBEROUSSE, *Cours de Mathématiques* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1893. Vol. II, pagg. 648, 651).

(***) VACQUANT, *Cours de Trigonométrie* (Ed. Masson, Parigi, 1894; pag. 145).

(****) CHAUVENET, *A Treatise on plane and spherical Trigonometry* (Ed. Lippincott, Filadelfia, 1891; pagg. 68, 70, 74).

(*****) F. J., *Compléments de Trigonométrie...* (Ed. Poussielgue, Parigi, 1886; pagg. 707, 709, 705).

(v*) LE COINTE, *Leçons sur la théorie des fonction circulaires ...* (Ed. Mallet, Parigi, 1858; pagg. 321, 323, 94).

(v**) CASEY, *Treatise on spherical Trigonometry* (Ed. Hodges, Dublino, 1889; pagg. 51, 61).

(v***) HEISS, *Ebene und sphärische Trigonometrie...* (Ed. Du Mont, Colonia, 1888; pag. 129).

§ 58. E, prima di porre fine a queste nostre considerazioni, vogliamo anche accennare a una osservazione notevole, che si può fare a proposito delle ricerche inverse. Questa ricerca è sempre fatta sopra un logaritmo che risulta da un calcolo fra numeri approssimati, quindi l'errore dal quale può essere affetto il logaritmo stesso è, generalmente, maggiore di quello che deriva dal solo arrotondamento (§ 17); e può sorgere il dubbio che i procedimenti stabiliti conducano a delle cifre illusorie.

Lo studio di questa nuova questione esce dal campo delle *Matematiche elementari*, e spetta alle varie scienze alle quali le *Matematiche* sono applicate (*), e nelle quali, appunto, si stabilisce quale possa essere l'errore *probabile* di un risultato. Ci sia però permesso di esprimere, in proposito, questa nostra opinione; a noi pare che la ricerca dell'*error probabile* del risultato di un calcolo abbia importanza solo quando di questo risultato si abbiano molti valori indipendenti, dai quali poi si voglia dedurre il *valore medio* (come spesso accade in *Astronomia* e in *Geodesia*); ma che per un calcolo, del cui risultato si ha un valore solo, sia molto più importante l'avere, dell'errore in questione, *un limite superiore* (**), anzichè un *valore probabile*. Così, p. es., l'ufficiale di rotta sarà, senza dubbio, molto più tranquillo se saprà di aver commesso un errore *certamente* minore di 2', che se saprà che il suo errore *probabilmente* non sorpassa 1'.

§ 59. L'argomento del quale ci siamo occupati in questo lavoro e negli altri affini (come tutto ciò che riguarda i calcoli numerici e le relative approssimazioni) è molto trascurato dagli studiosi, e noi vorremmo pure che altri seguisse il nostro esempio (perfezionando e completando quel che noi abbiamo potuto fare); poichè, se in questi ultimi tempi si è tanto sottilizzato sul rigore delle *Matematiche pure*, perchè non occuparsi affatto delle applicazioni numeriche, le quali, in sostanza, devono poi costituire lo scopo ultimo delle *Matematiche* stesse?

Livorno, gennaio-luglio 1904.

G. PESCI.

(*) Veggasi, p. es., in proposito: STADTHAGEN, *Ueber die Genauigkeit logarithmischer Berechnung* (Ed. Dümmlers, Berlino, 1888); FULST, *Ueber die Berechnung nautisch-astronomischer Aufgaben*... (Annalen der Hydrographie, aprile 1895 e maggio 1896); KOHLSCHÜTTER. *Vierstellige oder fünfstellige Logarithmen für nautische Tafeln?* (Marine Rundschau, Decembro, 1902).

(**) E un esempio della ricerca di questo limite lo demmo nelle due note *Sul calcolo delle rette d'altezza secondo il metodo di Marcq Saint-Hilaire* (" Rivista Marittima ", gennaio 1902 e aprile 1904).

LA TRASFORMAZIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI

e le proprietà metriche delle figure

(*Continuaz. e fine v. fasc. prec.*)

---

8. È noto che l'iperbole equilatera ha la proprietà che la distanza di ogni suo punto dal centro è media proporzionale fra le distanze che lo stesso punto ha dai fuochi, ossia, adottando le solite notazioni, per l'iperbole equilatera si ha la proprietà

$$|\overline{\mathbf{PF}}_1| \cdot |\overline{\mathbf{PF}}_2| = |\overline{\mathbf{PC}}|^2, \tag{33}$$

cioè, ponendo,

$$|\overline{PF}_1| = \rho_1 ; \qquad |\overline{PF}_2| = \rho_2 ; \qquad |\overline{PC}| = \rho_0$$

si ha

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_0^2. \tag{33 bis}$$

Applicando a questa la formula (1), supposto che il polo dell'inversione sia diverso da F_1, F_2 e C, avremo:

$$\frac{|\overline{P'F'}_1|}{|\overline{OF'}_1| \cdot |\overline{OP'}|} \cdot \frac{|\overline{P'F'}_2|}{|\overline{OF'}_2| \cdot |\overline{OP'}|} = \frac{|\overline{P'C'}|^2}{|\overline{OC'}|^2 \cdot |\overline{OP'}|^2},$$

ossia

$$|\overline{P'F'}_1| \cdot |\overline{P'F'}_2| = k \cdot |\overline{P'C'}|^2, \tag{34}$$

dove, per semplicità, si è posto

$$k = \frac{|\overline{OF'}_1| \cdot |\overline{OF'}_2|}{|\overline{OC'}|^2}. \tag{35}$$

Ponendo

$$|\overline{P'F'}_1| = \rho'_1 ; \qquad |\overline{P'F'}_2| = \rho'_2 ; \qquad |\overline{P'C'}| = \rho'_0$$

la (34) prende la forma

$$\rho'_1 \cdot \rho'_2 = k\rho_0'^2. \tag{34 bis}$$

Questa relazione esprime una proprietà metrica che può considerarsi come una generalizzazione di quella espressa dalla (33 bis) per l'iperbole equilatera, e che vale in generale per le inverse di questa curva; l'equazione di tali inverse è per la (12)

$$(x'^2+y'^2)^2(m^2-n^2-a^2)+2(x'^2+y'^2)(mx'-ny')+x'^2-y'^2=0. \tag{36}$$

Si noti poi che nella (34 bis) è $k=1$, cioè (35);

$$|\overline{OF'}_1| \cdot |\overline{OF'}_2| = |\overline{OC'}|^2,$$

quando il polo O è sulla iperbole, per la (33); cioè, come è noto, quando la trasformata è una strofoide (retta od obliqua).

Consideriamo il caso particolare in cui il pòlo sia il vertice $A \equiv (a, 0)$, cioè supponiamo $m = a$, $n = 0$, nel qual caso, come sappiamo, la trasformata è una strofoide retta.

La (36), ponendo $\frac{1}{2a} = \alpha$, diviene

$$x'(x'^2 + y'^2) + \alpha(x'^2 - y'^2) = 0.$$

Osserviamo che si ha

$$\overline{AF_1} = a(\sqrt{2} - 1), \quad \overline{AF_2} = -a(\sqrt{2} + 1), \quad \overline{AC} = -a$$

e perciò

$$\overline{AF'_1} = \frac{1}{a(\sqrt{2} - 1)} = 2\alpha(\sqrt{2} + 1);$$

$$\overline{AF'_2} = \frac{1}{-a(\sqrt{2} + 1)} = -2\alpha(\sqrt{2} - 1); \quad \overline{AC'} = \frac{1}{a} = -2\alpha, \tag{37}$$

e quindi la (35) dà $k = 1$, come già avevamo trovato, e la (34 bis) diviene

$$\rho'_1 \cdot \rho'_2 = \rho_0'^2$$

che è la stessa relazione (33 bis) che vale per l'iperbole equilatera. (Però va notato che mentre per l'iperbole equilatera C è il punto medio del segmento F_1F_2, nel caso della strofoide invece ciò non sussiste.)

La proprietà dimostrata ora per la strofoide rètta può enunciarsi nel modo seguente: *Sull'asse di una strofoide retta esistono tre punti* F'_1, F'_2, C', *tali che la distanza di un punto qualunque* P' *della curva da* C' *è media proporzionale fra le distanze che lo stesso punto* P' *ha da* F'_1, F'_2. Confrontando la (37) con la (26), si vede che i punti F'_1 e F'_2 sono quelli stessi che soddisfano alla relazione (25), trovata nel § precedente.

In quanto a C' per la (37) si vede che questo punto è il simmetrico del nodo (A), rispetto al vertice della strofoide.

Inversamente si può dimostrare che: *Dati tre punti in linea retta* M, N *ed* R, *il luogo dei punti* P *per i quali si abbia*

$$|\overline{PM}| \cdot |\overline{PN}| = |\overline{PR}|^2.$$

se è una curva razionale, è una iperbole equilatera quando R *è il punto medio del segmento* MN, *è una strofoide retta in tutti gli altri casi; in altre parole, l'iperbole equilatera e la strofoide retta sono, fra le curve razionali, le sole che godono di questa proprietà.*

Si ha infatti, posto $M \equiv (m, 0)$, $N \equiv (n, 0)$, $R \equiv (r, 0)$, lasciando per ora l'origine indeterminata:

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-n)^2 + y^2} = (x-r)^2 + y^2$$

e successivamente:

$$(x^2 + y^2 - 2mx + m^2)(x^2 + y^2 - 2nx + n^2) = (x^2 + y^2 - 2rx + r^2)^2;$$

$$2x(x^2 + y^2)(2r - m - n) + x^2(m^2 + n^2 + 4mn - 6r^2) +$$
$$+ y^2(m^2 + n^2 - 2r^2) - 2x(mn^2 + m^2n - r^3) + m^2n^2 - r^4 = 0. \tag{38}$$

Se la curva rappresentata dalla (38) deve essere razionale, o dovrà degenerare, oppure dovrà avere un punto doppio, e siccome, per la proprietà a cui deve soddisfare, la curva è certo simmetrica rispetto all'asse x, il punto doppio dovrà necessariamente trovarsi sopra quest'asse.

Nel primo caso, cioè se la (38) degenera, dovrà annullarsi il coefficiente del 1° termine, cioè sarà

$$m+n=2r\,.$$

(Ciò significa che R è medio del segmento MN).

In tal caso la (38) diviene:

$$-(x^2-y^2)\,.\,\frac{(m-n)^2}{2}-2rx\,(mn-r^2)+m^2n^2-r^4=0$$

che rappresenta un' iperbole equilatera.

Se invece la (38) non degenera, ma ha un punto doppio sull'asse x, siccome l'origine si è lasciata indeterminata, potremo disporre di m, n, r, in modo che l'origine sia nel nodo, dunque dovranno potersi annullare gli ultimi due termini della (38) e cioè dovrà essere:

$$mn\,(m+n)=r^3\,;\qquad m^2n^2=r^4\,,$$

cioè

$$mn=\pm r^2\,;\qquad m+n=\pm 2r\,.$$

Scegliendo il segno superiore, la cubica degenera, ciò che ora si esclude; scegliendo l'inferiore, si hanno i valori di m, n dall'equazione

$$Z^2+2rZ-r^2=0\,,$$

si ha cioè per m, n i valori $-r\,(1\pm\sqrt{2}\,)$.

Ponendo per es.: $m=-r\,(1+\sqrt{2}\,)$, $n=r\,(\sqrt{2}-1)$, la (38) diviene

$$x\,(x^2+y^2)-\frac{r}{2}\,(x^2-y^2)=0$$

che rappresenta una strofoide retta.

Si confrontino questi ultimi resultati con quelli precedentemente ottenuti (37).

Si può dimostrare direttamente (*) che i punti F'_1, F'_2, C' (o M, N, R, come ora gli abbiamo chiamati) sono *fuochi* della strofoide, quantunque la dimostrazione non sarebbe necessaria.

Infatti (**) le coordinate dei fuochi di una curva rappresentata dall'equazione $f\,(x,\,y)=0$, debbono soddirfare alle equazioni

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\cdot f\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot f,\end{cases}$$

che nel caso nostro, essendo

$$f\,(x,\;y)=x\,(x^2+y^2)+\alpha\,(x^2-y^2)=0,$$

(*) Non occorrebbe perchè è noto che nella trasformazione per raggi vettori reciproci ad un fuoco di una curva C corrisponde un fuoco della curva trasformata C'. (SALMON, *o. c.* pag. 355.)

(**) SALMON, *o. c.* pag. 177.

divengono

$$(3x^2+y^2+2\alpha x)^2-4y^2(x-\alpha)^2=8(x+\alpha).f$$
$$2y(3x^2+y^2+2\alpha x)(x-\alpha)=4y.f.$$

La 2ª è soddisfatta per $y=0$; sostituendo nella 1ª si ha

$$x^2(3x+2\alpha)^2=8x^2(x+\alpha)^2$$

cioè

$$x^2(x^2-4\alpha x-4\alpha^2)=0$$

la quale ha per radici

$$x_1=x_2=0, \qquad x_3=2\alpha(1+\sqrt{2}), \qquad x_4=-2\alpha(\sqrt{2}-1)$$

e questi valori coincidono appunto con quelli trovati per le coordinate dei punti C', F'_1 F'_2.

Prima di lasciare questo argomento, cioè, di considerare i fuochi di una strofoide, voglio dimostrare che *il nodo* A *di una strofoide è il coniugato armonico del fuoco* C' *rispetto ai fuochi* F'_1, F'_2, ossia che si ha

$$(F'_1\,F'_2\,C'\,A)=-1.$$

Infatti si ha (37):

$$\frac{\overline{F'_1C'}}{\overline{F'_2C'}}=\frac{-2\alpha-2\alpha(\sqrt{2}+1)}{-2\alpha+2\alpha(\sqrt{2}-1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$$

ed inoltre (26)

$$\frac{\overline{F'_2A}}{\overline{F'_1A}}=\frac{-2\alpha(\sqrt{2}+1)}{2\alpha(\sqrt{2}-1)}=-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=-(3+2\sqrt{2})$$

e quindi

$$\frac{\overline{F'_1C'}}{\overline{F'_2C'}}:\frac{\overline{F'_1A}}{\overline{F'_2A}}=-1.$$

Abbiamo escluso i casi particolari nei quali il polo dell' inversione fosse uno dei punti C, F_1 e F_2; trattiamo ora a parte questi casi.

Supponiamo dapprima che il polo sia il centro C dell' iperbole equilatera.

In tal caso, essendo $m=n=0$, la (36) diviene

$$(x'^2+y'^2)^2-\frac{1}{a^2}(x'^2-y'^2)=0 \tag{39}$$

che rappresenta una lemniscata di Bernoulli.

Applicando alla (33) le (1) (2) si ha

$$\frac{|\overline{P'F'_1}|}{|\overline{CP'}|\,.\,|\overline{CF'_1}|}\cdot\frac{|\overline{P'F'_2}|}{|\overline{CP'}|\,.\,|\overline{CF'_2}|}=\frac{1}{|\overline{CP'}|^2},$$

cioè

$$|\overline{P'F'_1}|\,.\,|\overline{P'F'_2}|=|\overline{CF'_1}|\,.\,|\overline{CF'_2}|. \tag{40}$$

Osservando che è

$$\overline{CF_1}=a\sqrt{2}, \qquad \overline{CF_2}=-a\sqrt{2},$$

si ottiene

$$\overline{CF'}_1 = \frac{1}{a\sqrt{2}}, \qquad \overline{CF'}_2 = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Ponendo

$$\rho'_1 = |\overline{PF'}_1|, \qquad \rho'_2 = |\overline{PF'}_2|, \qquad a\sqrt{2} = \frac{1}{c},$$

la (40) diviene

$$\rho'_1 \cdot \rho'_2 = c^2 \tag{40 bis}$$

e la (39)

$$(x'^2+y'^2)^2 - 2c^2(x'^2-y'^2) = 0.$$

I punti $F'_1 \equiv (c, 0)$ e $F'_2 \equiv (-c, 0)$ sono fuochi della lemniscata.

La (40 bis) esprime, come facilmente si vede, la notissima proprietà della lemniscata che cioè, il prodotto delle distanze focali è costante.

Supponiamo ora che il polo dell'inversione sia uno dei fuochi, per esempio F_1.

In tal caso si ha $m = a\sqrt{2}$, $n = 0$ e quindi la (36) diviene

$$\left(x'^2+y'^2+\frac{\sqrt{2}}{a}x'\right)^2 = \frac{1}{a^2}(x'^2+y'^2),$$

ossia, ponendo

$$\frac{\sqrt{2}}{a} = \beta, \tag{41}$$

$$(x'^2+y'^2+\beta x')^2 = \frac{\beta^2}{2}(x'^2+y'^2), \tag{42}$$

che rappresenta una conchiglia di Pascal speciale, nella quale il segmento addizionale è uguale all'apotema del quadrato iscritto nel cerchio direttore. Il nodo coincide col fuoco F_1 della iperbole.

Applicando alla (33) le (1) (2) si ha

$$\frac{1}{|\overline{P'F}_1|} \cdot \frac{|\overline{F'_2P'}|}{|\overline{F'_2F}_1| \cdot |\overline{P'F}_1|} = \frac{|\overline{C'P'}|^2}{|\overline{C'F}_1|^2 \cdot |\overline{P'F}_1|^2}. \tag{43}$$

Poichè si ha

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F_2F}_1 = 2a\sqrt{2}, \qquad \overline{CF}_1 = a\sqrt{2}, \\ &\text{sarà} \\ &|\overline{F'_2F}_1| = \frac{1}{2a\sqrt{2}}, \qquad |\overline{C'F}_1| = \frac{1}{a\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

e quindi, ponendo

$$|\overline{F'_2P'}| = \rho'_2, \qquad |\overline{C'P'}| = \rho'_1,$$

la (43) diviene, tenendo conto della (41):

$$\frac{\rho_1'^2}{\rho'_2} = \beta. \tag{45}$$

La (45) esprime la seguente proprietà della speciale conchiglia rappresentata dalla (42):

Sull'asse di una conchiglia in cui il segmento addizionale sia eguale all'apotema del quadrato iscritto nel cerchio direttore esistono due punti

F'_2 e C' tali che la distanza di un punto qualunque della curva dal punto C' è media proporzionale fra la distanza dello stesso punto da F'_2 e il diametro del circolo direttore.

Per le (44), (41) si ha:

$$\overline{F_1F'_2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} = -\frac{\beta}{4}; \qquad \overline{F_1C'} = -\frac{1}{a\sqrt{2}} = -\frac{\beta}{2}, \qquad (46)$$

che sono le ascisse dei punti F'_2, C', considerando il nodo F'_1 come origine

La 1ª delle (46) coincide con la (31), quando in questa si faccia $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

I punti F'_2 e F'_1 sono fuochi della conchiglia, C' (46) è il simmetrico di F'_1 rispetto ad F'_2.

Si noti poi che la distanza dei punti F'_2 e C' è in valore assoluto $\frac{1}{4}\beta$.

La proprietà trovata è caratteristica: Cerchiamo infatti il luogo geometrico dei punti P' tali che, essendo F'_2 e C' due punti qualunque, si abbia

$$\frac{|\overline{P'C'}^2|}{|\overline{P'F'_2}|} = 4\,|\overline{F'_2C'}|,$$

cioè cerchiamo *il luogo dei vertici di un triangolo* $P'\,F'_2\,C'$, *di cui uno dei lati sia fisso* (F'_2C') *e gli altri due sieno tali che il quadrato costruito su* $P'C'$ *sia quadruplo del rettangolo degli altri due lati.*

Prendendo per origine il simmetrico F_1 di C' rispetto a F'_2 e ponendo

$$\overline{F_1F'_2} = \overline{F'_2C'} = k,$$

si ha

$$(x-2k)^2 + y^2 = 4k\sqrt{(x-k)^2+y^2},$$

cioè

$$(x^2+y^2-4kx)^2 = 8k^2\,(x^2+y^2)$$

e facendo $k = \frac{-\beta}{4}$ la precedente si riduce alla (42). c. d. d.

9. Consideriamo una ellisse rappresentata dalla equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (47)$$

Mediante le (11) troviamo facilmente l'equazione della trasformata per raggi vettori reciproci; per brevità fermiamoci a considerare soltanto due casi particolari e cioè quando si prende come polo il centro o un fuoco. Nel 1º caso si ha $m = n = 0$; e quindi l'equazione della trasformata è:

$$(x'^2 + y'^2)^2 = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\ (*). \qquad (48)$$

Indicando con F_1 e F_2 i fuochi dell'ellisse (47), è noto che sussiste la relazione

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a. \qquad (49)$$

(*) Questa curva la cui equazione può scriversi $(x^2+y^2)^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2$, e che per la forma rammenta una particolare *cassiniana*, non ha ricevuto, almeno ch'io sappia, un nome particolare; essa può considerarsi anche come podaria di un'ellisse dal centro; la sua area è uguale alla media aritmetica delle aree dei cerchi descritti sugli assi di questa ellisse come diametri. LESCASES, (*Nouvelles Annales*, p. 486).

A questa applicando la (1), otterremo una relazione che esprimerà una proprietà della curva (48).

Si ha, cioè, indicando con O il centro dell'ellisse:

$$\frac{|\overline{\mathrm{P'F'_1}}|}{|\overline{\mathrm{OP'}}| \, . \, |\overline{\mathrm{OF'_1}}|} + \frac{|\overline{\mathrm{P_1F'_2}}|}{|\overline{\mathrm{OP'}}| \, . \, |\overline{\mathrm{OF'_2}}|} = 2a \tag{50}$$

e poichè si ha:

$$|\overline{\mathrm{OF_1}}| = |\overline{\mathrm{OF_2}}| = ae\,, \qquad \text{sarà} \qquad |\overline{\mathrm{OF'_1}}| = |\overline{\mathrm{OF'_2}}| = \frac{1}{ae}\,,$$

quindi, ponendo:

$$|\overline{\mathrm{P'F'_1}}| = \rho'_1\,, \qquad |\overline{\mathrm{P'F'_2}}| = \rho'_2\,, \qquad |\overline{\mathrm{OP'}}| = \rho'_0\,,$$

la (50) diverrà, ponendo $\frac{2}{e} = \mathrm{K}$,

$$\rho'_1 + \rho'_2 = \mathrm{K} \, . \, \rho'_0 \tag{50 bis}$$

(siccome è $e < 1$, sarà $\mathrm{K} > 2$).

La (50 bis) esprime la seguente proprietà: *Nel piano di una inversa di ellisse, essendo polo il centro, esistono tre punti in linea retta* $\mathrm{F'_1}$, $\mathrm{F'_2}$, O, *dei quali* O *è il punto medio del segmento* $\mathrm{F'_1F'_2}$, *tali che la somma delle distanze di un punto* P *qualunque della curva da* $\mathrm{F'_1}$ *ed* $\mathrm{F'_2}$, *sia proporzionale alla distanza di* P *da* O.

Questa proprietà è caratteristica. Infatti sieno $\mathrm{F'_1}$, $\mathrm{F'_2}$, O tre punti collineari e sia $\overline{\mathrm{F'_1O}} = \overline{\mathrm{OF'_2}} = d$; cerchiamo il luogo dei punti P', tali che sia

$$|\overline{\mathrm{P'F_1}}| + |\overline{\mathrm{P'F_2}}| = k \, . \, |\overline{\mathrm{P'O}}| \, .$$

Avremo, riferendoci ad un sistema di coordinate rettangolari di cui O sia l'origine e $\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}$ l'asse x:

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

e successivamente:

$$[(x^2 + y^2)(2 - k^2) + 2d^2]^2 = 4\,[(x^2 + y^2 + d^2)^2 - 4d^2x^2] = 0$$
$$k^2\,(k^2 - 4)(x^2 + y^2)^2 - 4d^2x^2\,(k^2 - 4) - 4d^2k^2y^2 = 0$$
$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{4d^2}{k^2(k^2 - 4)}\,[x^2\,(k^2 - 4) + k^2y^2] = 0\,. \tag{51}$$

La (51) rappresenta una inversa di ellisse (dal centro), se è $k^2 < 4$, cioè se è $k > 2$ (k è positivo).

Ponendo:

$$\frac{k^2 - 4}{4d^2} = b^2\,, \qquad \frac{k^2}{4\,d^2} = a^2,$$

la (51) diviene

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

che è identica alla 48. c. d. d.

Che debba essere soddisfatta la condizione $k > 2$ è naturale, perchè (50 bis) ogni mediana m_a d'un triangolo è minore della semisomma dopo altri due lati.

Se invece il polo dell'inversione è uno dei fuochi, per es.: $F_1 \equiv (ae, 0)$, la equazione della trasformata dell'ellisse (47), per le (11), sarà:

$$b^2\left(\frac{x}{x^2+y^2}+ae\right)^2+\frac{a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=a^2b^2$$

cioè

$$\left(x^2+y^2-\frac{ae}{b^2}x\right)^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2)$$

e ponendo

$$\frac{ae}{b^2}=\beta \qquad \frac{a}{b^2}=\alpha\,, \tag{52}$$

la precedente diviene

$$(x^2+y^2-\beta x)^2=\alpha^2(x^2+y^2)\,,$$

che rappresenta una Conchiglia di Pascal. Poichè è $e<1$, sarà $\beta<\frac{a}{b^2}$, cioè $\beta<\alpha$, quindi la conchiglia ha un punto isolato in F'_1.

Dalla (49), applicando le (1) (2), si ha la relazione

$$\frac{1}{|P'F_1|}+\frac{|P'F'_2|}{|F_1P'|\cdot|F_1F'_2|}=2a$$

e poichè è

$$\overline{F_1F'_2}=\frac{1}{2ae}\,, \tag{53}$$

ponendo

$$|\overline{PF_1}|=\rho'_1 \qquad |\overline{P'F'_2}|=\rho'_2\,,$$

la precedente diviene:

$$\frac{1}{2ae}+\rho^2=\frac{1}{e}\rho_1$$

e poichè è

$$\frac{1}{2ae}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\,, \tag{54}$$

si ha finalmente

$$\alpha\rho'_1-\beta\rho'_2=\tfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)\,. \tag{55}$$

Questa relazione esprime la seguente proprietà della *Conchiglia di Pascal acnodale:*

Sull'asse di una conchiglia di Pascal acnodale esistono due punti F_1 *e* F'_2 *tali che essendo* P' *un punto qualunque della curva,* α *e* β *rispettivamente le misure del segmento addizionale e del diametro del circolo direttore, si abbia la* (55).

L'ascissa di F'_2, se F_1 è l'origine, è (53) (54)

$$\overline{F_1F'_2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\,.$$

I punti F_1, F'_2 sono fuochi della conchiglia.

Questa proprietà è caratteristica per la conchiglia acnodale. La dimostrazione può farsi analoga a quella in fine del § 7.

È noto che in un'ellisse, (47), essendo MN e PQ due diametri ortogonali, di cui le misure siano rispettivamente α e β, si ha

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}. \tag{56}$$

Applicando alla (56) la formula (1), supponendo di trasformare l'ellisse per raggi vettori reciproci, essendo polo il centro, si ha

$$\alpha=\frac{\alpha'}{|\overline{OM'}|\,.\,|\overline{ON'}|}=\frac{\alpha'}{(\frac{1}{2}\,\alpha')^2}=\frac{4}{\alpha'}$$

$$\beta=\frac{\beta'}{|\overline{OP'}|\,.\,|\overline{OQ'}|}=\frac{\beta'}{(\frac{1}{2}\,\beta)^2}=\frac{4}{\beta'}$$

e quindi dalla (56) si ha l'altra

$$\frac{\alpha'^2}{16}+\frac{\beta'^2}{16}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}$$

e ponendo $a=\frac{1}{a'}$, $b=\frac{1}{b'}$,

$$\alpha'^2+\beta'^2=4\,(a'^2+b'^2).$$

Cioè: *in una inversa centrale di ellisse è costante la somma dei quadrati di due diametri ortogonali.*

Di questa proprietà diamo anche una dimostrazione diretta.

Sia

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=0$$

l'equazione di una inversa centrale di ellisse.

Sia

$$y=mx$$

una retta passante per l'origine; essa incontrerà la curva in due punti le cui coordinate sono:

$$\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2m}}{1+m^2},\qquad \frac{\pm m\sqrt{a^2+b^2m}}{1+m}.$$

Indicando con α la misura del diametro appartenente alla retta considerata si ha:

$$\alpha^2=\frac{4\,(a^2+b^2m^2)}{(1+m^2)^2}\cdot(1+m^2)=\frac{4\,(a^2+b^2m^2)}{1+m^2} \tag{57}$$

Se β è la misura del diametro perpendicolare ad α, basterà nella relazione precedente sostituire ad m, $-\frac{1}{m}$, e quindi:

$$\beta^2=\frac{4\,(a^2m^2+b^2)}{1+m^2}. \tag{58}$$

Dalle (57) (58) si ha:

$$\alpha^2+\beta^2=4\,(a^2+b^2).$$ c. d. d.

Monza, maggio 1904.

G. Cardoso-Laynes.

DERIVATA DI ORDINE QUALUNQUE DI ALCUNE FUNZIONI

1. Sia data una funzione di funzione

$$y = y(u) \qquad \text{con} \qquad u = u(x);$$

la derivata di ordine p di y rispetto ad x è data dalla formula(*)

$$\frac{d^p y}{dx^p} = p\,! \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k\,!} \frac{d^k y}{du^k} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!} \frac{d^r u}{dx^r} \tag{1}$$

ove rappresentiamo con

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \varepsilon_r$$

la somma di tutti i prodotti analoghi a $\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \varepsilon_{r_3} \ldots \varepsilon_{r_k}$ essendo $r_1, r_2, r_3, \ldots r_k$ numeri interi positivi uguali o disuguali, aventi per somma p.

La

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!} \frac{d^r u}{dx^r}$$

è dunque una somma il cui termine generale è

$$\left(\frac{1}{1\,!} \frac{du}{dx}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{2\,!} \frac{d^2 u}{dx^2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{1}{3\,!} \frac{d^3 u}{dx^3}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\frac{1}{p\,!} \frac{d^p u}{dx^p}\right)^{\alpha_p},$$

ove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$ è un sistema di soluzioni intere positive o nulle delle due equazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = k$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + px_p = p,$$

e la somma è estesa a tutti i sistemi di soluzioni intere positive o nulle delle predette equazioni. (**)

Noi ci proponiamo di esprimere la

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!} \frac{d^r u}{dx^r}$$

in funzione di p e k nei casi che u sia una funzione razionale intera del 2°, del 3° o del 4° grado.

Osservando che per una funzione razionale intera di grado n sono nulle tutte le derivate di ordine superiore all' n^o, se la u è una fun-

(*) CESÀRO, *Analisi algebrica:* Derivate successive delle funzioni di funzioni.

(**) Cfr. TEIXEIRA, *Sur les dérivées d'ordre quelconque.* " Giornale di Battaglini ", 1880.

zione razionale intera del 2°, 3° o 4° grado, i sistemi di equazioni da risolvere con numeri interi positivi o nulli sono rispettivamente

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = k \\ x_1 + 2x_2 = p \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = p \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = p \end{array}\right\}. \tag{4}$$

2. È subito visto che condizione di possibilità per il sistema (2) è che sia $k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)$, indicando con $\mathrm{E}(x)$ il massimo intero contenuto in x.

Sotto questa condizione, le soluzioni del sistema (2) sono

$$\begin{array}{l} x_1 = 2k - p \\ x_2 = p - k\,. \end{array}$$

Perciò, quando u è una funzione razionale intera del 2° grado

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

la

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!}\, \frac{d^r u}{dx^r}$$

si ridurrà a

$$\binom{k}{p-k}\left(\frac{1}{2!}\, \frac{d^2 u}{dx^2}\right)^{p-k}\left(\frac{du}{dx}\right)^{2k-p},$$

cioè si avrà

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!}\, \frac{d^r u}{dx^r} = \binom{k}{p-k}\alpha^{p-k}(2\alpha x + \beta)^{2k-p}. \tag{5}$$

Allora la (1) diviene

$$\frac{d^p y}{dx^p} = p! \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \binom{k}{p-k} \frac{1}{k!}\, \frac{d^k y}{du^k}\, \alpha^{p-k}\, (2\alpha x + \beta)^{2k-p} =$$

$$= \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{\mathrm{D}_{p,\, 2(p-k)}}{\overline{p-k}\,!}\, \frac{d^k y}{du^k}\, \alpha^{p-k}\, (2\alpha x + \beta)^{2k-p}, \tag{6}$$

denotando con $\mathrm{D}_{m,n}$ il prodotto

$$m\,(m-1)\,(m-2) \ldots (m-n+1)\,.$$

La (6) ci dà la derivata di ordine qualunque di una funzione

$$y = y\,(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

qualora si conosca la derivata di ordine qualunque di $y = y(u)$ rispetto ad u.

In particolare, prendendo per $y = y(u)$ la $y = \frac{1}{u}$, poichè

$$\frac{d^k y}{du^k} = \frac{(-1)^k\, k!}{u^{k+1}}$$

si ha

$$\frac{d^p\left(\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)}{dx^p} = \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} (-1)^k D_{k,p-k} \, . \, D_{p-k+1,k} \frac{\alpha^{p-k}(2\alpha x+\beta)^{2k-p}}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{k+1}}.$$

Così, prendendo $y = \cos u$, poichè

$$\frac{d^k \cos u}{du^k} = \cos(u + k\tfrac{1}{2}\pi).$$

si ha

$$\frac{d^p(\cos(\alpha x^2+\beta x+\gamma))}{dx^p} =$$

$$= \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!} \cos(\alpha x^2+\beta x+\gamma+k\tfrac{1}{2}\pi)\, \alpha^{p-k}(2\alpha x+\beta)^{2k-p}.$$

Se poi prendiamo $y = e^u$, si ha

$$\frac{d^p e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{dx^p} = e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!} \alpha^{p-k}(2\alpha x+\beta)^{2k-p}, \tag{7}$$

ed in particolare per $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$

$$\frac{d^p e^{x^2}}{dx^p} = e^{x^2} \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!} (2x)^{2k-p}. \tag{7'}$$

Nella (7) la sommatoria può essere ordinata per le potenze di x; infatti se si pone

$$C_r = \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!} 2^r \binom{2k-p}{r} \alpha^{p-k+r} \beta^{2k-p-r},$$

si ha per p pari

$$\frac{d^p e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{dx^p} = e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \sum_{r=0}^{p} C_r x^r,$$

e per p dispari

$$\frac{d^p e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{dx^p} = e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \sum_{r=1}^{p} C_r x^r.$$

3. Venendo alla risoluzione del sistema (3), è manifesto che la condizione di possibilità è che sia $k \geqslant E\left(\frac{p+2}{3}\right)$.

Sottraendo poi dalla seconda la prima equazione si ha

$$x_2 + 2x_3 = p - k$$

equazione soddisfatta in numeri interi e positivi (o nulli) da

$$x_2 = p - k - 2i$$

$$x_3 = i \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots E\left(\frac{p-k}{2}\right).$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (3) questi valori, si ha

$$x_1 = 2k + i - p$$

in cui però per i si devono prendere fra i suindicati numeri quelli per cui x_1 risulta positivo o nullo; e questi sono evidentemente

$$0, 1, 2, \ldots \mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right), \quad \text{se} \quad k > \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right),$$

o

$$p-2k,\ p-2k+1, \ldots \mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right), \quad \text{se} \quad k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Dopo ciò è possibile dare a

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!} \frac{d^r u}{dx^r}$$

la forma di una somma dipendente da un unico indice, qualora sia u una funzione razionale intera di 3° grado

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Osservando infatti che

$$\frac{du}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma,$$

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2 u}{dx^2} = 3\alpha x + \beta,$$

$$\frac{1}{3!} \frac{d^3 u}{dx^3} = \alpha,$$

si ha

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!} \frac{d^r u}{dx^r} = \sum_{i=\mathrm{I}_k}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right)} \frac{k!}{\overline{2k+i-p}!\ \overline{p-k-2i}!\ i!} (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^{2k+i-p} (3\alpha x + \beta)^{p-k-2i} \alpha^i,$$

ove è

$$\mathrm{I}_k = \begin{cases} p-2k & \text{se} \quad k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right) \\ 0 & \text{se} \quad k > \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right). \end{cases}$$

La (1) quindi nel caso presente diviene

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+2}{3}\right)}^{p} \frac{d^k y}{du^k} \sum_{i=\mathrm{I}_k}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right)} \frac{p!}{\overline{2k+i-p}!\ \overline{p-k-2i}!\ i!} \times$$

$$\times (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^{2k+i-p} (3\alpha x + \beta)^{p-k-2i} \alpha^i.$$

Questa formula ci dà la derivata di ordine qualunque rispetto ad x di una funzione $y = y(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$, quando si conosca la derivata di ordine qualunque di $y = y(u)$ rispetto ad u.

Come caso particolare, ponendo $y = e^u$ con $u = \alpha x^3$, si ha

$$\frac{d^p e^{\alpha x^3}}{dx^p} = e^{\alpha x^3} \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+2}{3}\right)}^{p} \alpha^k x^{3k-p} \sum_{i=\mathrm{I}_k}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right)} \frac{p!\, 3^{k-i}}{\overline{2k+i-p}!\ \overline{p-k-2i}!\ i!}.$$

4. Passiamo ora alla risoluzione del sistema (4), la possibilità del quale è espressa dalla condizione $k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p+3}{4}\right)$. Sottraendo dalla seconda la prima equazione si ha

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = p - k,$$

equazione che è soddisfatta, come facilmente si vede, da

$$\begin{aligned} x_2 &= p - k - 2l - 3m \\ x_3 &= l \\ x_4 &= m \end{aligned}$$

con m variabile da 0 a $\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)$; e per ogni m, l variabile da 0 a $\mathrm{E}\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)$. Sostituendo nella prima equazione di (4) questi valori, si ha

$$x_1 = 2k + l + 2m - p,$$

ove però per l ed m si devono prendere quelli, fra i suindicati numeri, per cui x_1 risulta positivo; cioè se $k < \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right)$ dovrà essere $m \geqslant p - 3k$ ed $l \geqslant 4k - p$, mentre se $k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right)$, potendo m prendere tutti i valori da 0 a $\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)$, dovrà essere $l \geqslant p - 2k$. Allora se è

$$u = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon,$$

poichè

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta, \\ \frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} &= 6\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma, \\ \frac{1}{3!}\frac{d^3u}{du^3} &= 4\alpha x + \beta, \\ \frac{1}{4!}\frac{d^4u}{dx^4} &= \alpha, \end{aligned}$$

sarà

$$\underset{p}{\overset{k}{\mathrm{S}}}\frac{1}{r!} = \sum_{m=M_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)} \sum_{l=L_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)} \frac{k!}{\overline{2k+l+2m-p}!\;\overline{p-k-2l-3m}!\;l!\;m!} \times$$
$$\times (4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta)^{2k+l+2m-p} (6\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma)^{p-k-2l-3m} (4\alpha x + \beta)^l \alpha^m,$$

ove è

$$\mathrm{M}_k = \begin{cases} p - 3k & \text{se} \quad k < \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right) \\ 0 & \text{se} \quad k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right), \end{cases}$$

e

$$L_k = \begin{cases} 4k-p & \text{se} \quad k < E\left(\frac{p}{3}\right) \\ p-2k & \text{se} \quad E\left(\frac{p}{2}\right) > k \geqslant E\left(\frac{p}{3}\right) \\ 0 & \text{se} \quad k \geqslant E\left(\frac{p}{2}\right); \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \sum_{k=E\left(\frac{p+3}{4}\right)}^{p} \frac{d^k y}{du^k} \sum_{m=M_k}^{E\left(\frac{p-k}{3}\right)} \sum_{l=L_k}^{E\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)} \frac{p!}{\overline{2k+l+2m-p}!\,\overline{p-k-2l-3m}!\,l!\,m!} \times$$

$$\times (4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta)^{2k+l+2m-p}(6\alpha x^2+3\beta x+\gamma)^{p-k-2l-3m}(4\alpha x+\beta)^l\alpha^m,$$

formula che dà la derivata d'ordine qualunque rispetto ad x di una funzione $y(\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon)$, quando si conoscano le derivate successive di $y(u)$ rispetto ad u.

Se in particolare si pone $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=0$, si trae

$$\frac{d^p e^{x^4}}{dx^p} =$$

$$= e^{x^4} \sum_{k=E\left(\frac{p+3}{4}\right)}^{p} x^{4k-p} \sum_{m=M_k}^{E\left(\frac{p-k}{3}\right)} \sum_{l=L_k}^{E\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)} \frac{p!\,3^{p-k-2l-3m}\,2^{3k+2l+m-p}}{\overline{2k+l+2m-p}!\,\overline{p-k-2l-3m}!\,l!\,m!}. \tag{8}$$

5. Alla determinazione della derivata p-esima di e^{x^4} si può giungere per altra via, la quale ci porta a stabilire delle identità che altrimenti sarebbe difficile dimostrare.

Possiamo porre

$$y = e^{u^2} \qquad \text{con} \qquad u = x^2,$$

ed allora per la (6), in cui si faccia $\alpha=1$, $\beta=0$,

$$\frac{d^p y}{du^p} = \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{D_{p,\,2(p-k)}}{\overline{p-k}!} \frac{d^k y}{du^k}(2x)^{2k-p}.$$

Ma per la (7')

$$\frac{d^k y}{du^k} = \frac{d^k e^{u^2}}{du^k} = e^{u^2} \sum_{s=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{k} \frac{D_{k,\,2(k-s)}}{\overline{k-s}!}(2u)^{2s-k} = e^{x^4} \sum_{s=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{k} \frac{D_{k,\,2(k-s)}}{\overline{k-s}!}(2x^2)^{2s-k}.$$

Quindi

$$\frac{d^p e^{x^4}}{dx^p} = e^{x^4} \sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{D_{p,\,2(p-k)}}{\overline{p-k}!} \sum_{s=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{k} \frac{D_{k,\,2(k-s)}}{\overline{k-s}!} 2^{k+2s-p}\,x^{4s-p}.$$

Il polinomio che moltiplica e^{x^4} può ancora essere ordinato per le potenze discendenti della x; e, ponendo per brevità

$$\overset{n}{\underset{m}{G}}(v,w) = \sum_{t=m}^{t=n} \frac{D_{v,\,2t}}{t!} \cdot \frac{D_{v-t,\,2(w-t)}}{\overline{w-t}!} 2^{2(v-w)-t},$$

si ha infatti

$$\frac{d^p e^{x^4}}{dx^p} = e^{x^4}\left\{ \sum_{h=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} \overset{h}{\underset{0}{G}}(p,h)\, x^{3p-4h} + \sum_{h=E\left(\frac{p}{2}\right)+1}^{E\left(\frac{3p}{4}\right)} \overset{2h-P}{\underset{E\left(\frac{p}{2}\right)}{G}}(p,h)\, x^{3p-4h} \right\}, \tag{9}$$

ove $P = p+1$, se p è divisibile per 4, e $P = p$, se p non è divisibile per 4.

Confrontando le (8) e (9), si traggono le identità

$$\sum_{m=M_{p-h}}^{E\left(\frac{h}{3}\right)} \sum_{l=L_{p-h}}^{E\left(\frac{h-3m}{2}\right)} \frac{p!\, 3^{h-2l-3m}\, 2^{2p-3h+2l+m}}{p-2h+l+2m!\, h-2l-3m!\, l!\, m!} = \begin{cases} \overset{h}{\underset{0}{G}}(p,h) \text{ se } h \leq E\left(\dfrac{p}{2}\right) \\ \overset{2h-P}{\underset{E\left(\frac{p}{2}\right)}{G}}(p,h) \text{ se } h < E\left(\dfrac{p}{2}\right). \end{cases}$$

Bologna, luglio 1904.

FILIPPO SIBIRANI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 658 E 665

658. *Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto fisso a tutti i circoli bitangenti a una conica.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia data una conica γ e un circolo c di centro C bitangente in M, N alla γ; sia P il polo di MN rispetto a γ e a c. Siccome la PC passa per il punto di mezzo di MN, passerà anche per il centro O di γ, quindi le direzioni di PC ed MN sono coniugate rispetto a γ, e poichè PC ed MN sono tra loro perpendicolari, la PC dovrà essere un asse di γ, cioè *il centro di* c *deve appartenere ad uno degli assi di* γ.

Ciò posto distinguiamo i seguenti tre casi.

1°. γ *è ellisse*. Sia:

$$b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1}$$

l'equazione di γ; supporremo che C appartenga all'asse delle x; poniamo quindi $C \equiv (x, 0)$; sia inoltre $A \equiv (\alpha, \beta)$ un punto fisso. L'equazione di un cerchio di centro C è data da:

$$(X - x)^2 + Y^2 - R^2 = 0. \tag{2}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la (2) sia bitangente alla (1) è che sia nullo il discriminante dell'equazione in X che si ottiene eliminando la Y tra le (1), (2); si deve quindi avere:

$$a^2x^2 - (b^2 - a^2)(R^2 - b^2 - x^2) = 0, \qquad \text{da cui} \qquad R^2 = b^2\frac{b^2 - a^2 + x^2}{b^2 - a^2},$$

quindi la (2) diventa:

$$(b^2 - a^2)\,[(X - x)^2 + Y^2] - b^2\,(b^2 - a^2 + x^2) = 0\,. \tag{3}$$

La polare di A rispetto alla (3) ha per equazione:

$$(b^2 - a^2)\,[\alpha X + \beta Y - (X + \alpha)\,x + x^2] - b^2\,(b^2 - a^2 + x^2) = 0\,. \tag{4}$$

È evidente che la (4) incontrerà la (3) nei punti di contatto delle tangenti condotte dal punto A alla (3). Sottraendo la (4) dalla (3) risulta:

$$X^2 + Y^2 - \alpha X - \beta Y - (X - \alpha)\,x = 0, \tag{5}$$

ed eliminando la x tra le (3), (5), si ottiene la *quartica circolare*

$$(b^2-a^2)Y^2[(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2]-b^2[(b^2-a^2)(X-\alpha)^2+(X^2+Y^2-\alpha X-\beta Y)^2]=0, \tag{6}$$

la quale è il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da A ai circoli bitangente a γ *aventi il centro sull'asse delle* x. Quando *il centro* C *giace sull'asse delle* y si ottiene l'equazione del luogo scambiando nella (6) X con Y, a con b, α con β.

La (6) ha evidentemente un punto doppio in A e un altro in $(\alpha, 0)$; inoltre essa passa per i fuochi di γ e per i punti di contatto delle tangenti condotte da A a γ.

2°. γ *è iperbole*. Per ottenere le equazioni del luogo basta cambiare segno a b^2 in quelle trovate nel caso precedente.

3°. γ *è parabola*. Sia:

$$Y^2 = 2\,pX \tag{7}$$

l'equazione di γ. La (2) è bitangente alla (7) quando

$$R^2 = 2\,px - p^2.$$

Allora la (2) diventa:

$$(X - x)^2 + Y^2 + p^2 - 2\,px = 0\,. \tag{8}$$

La polare di A rispetto alla (8) ha per equazione

$$\alpha X + \beta Y - x\,(X + \alpha) + x^2 + p^2 - 2\,px = 0\,. \tag{9}$$

Eliminando la x tra le (8), (9) si ottiene la quartica circolare

$$Y^2\,[(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2] + p^2\,(X - \alpha)^2 - 2p\,(X - \alpha)(X^2 + Y^2 - \alpha X - \beta Y) = 0$$

passante pel fuoco di γ, ecc.

665. *Il luogo del punto di mezzo delle corde di una cardioide che sono viste sotto un angolo costante* α *dal punto di regresso è una quartica della quale si domanda l'equazione e l'area. Nel caso in cui l'angolo costante è retto la quartica suddetta diviene un circolo.*

E.-N. Barisien.

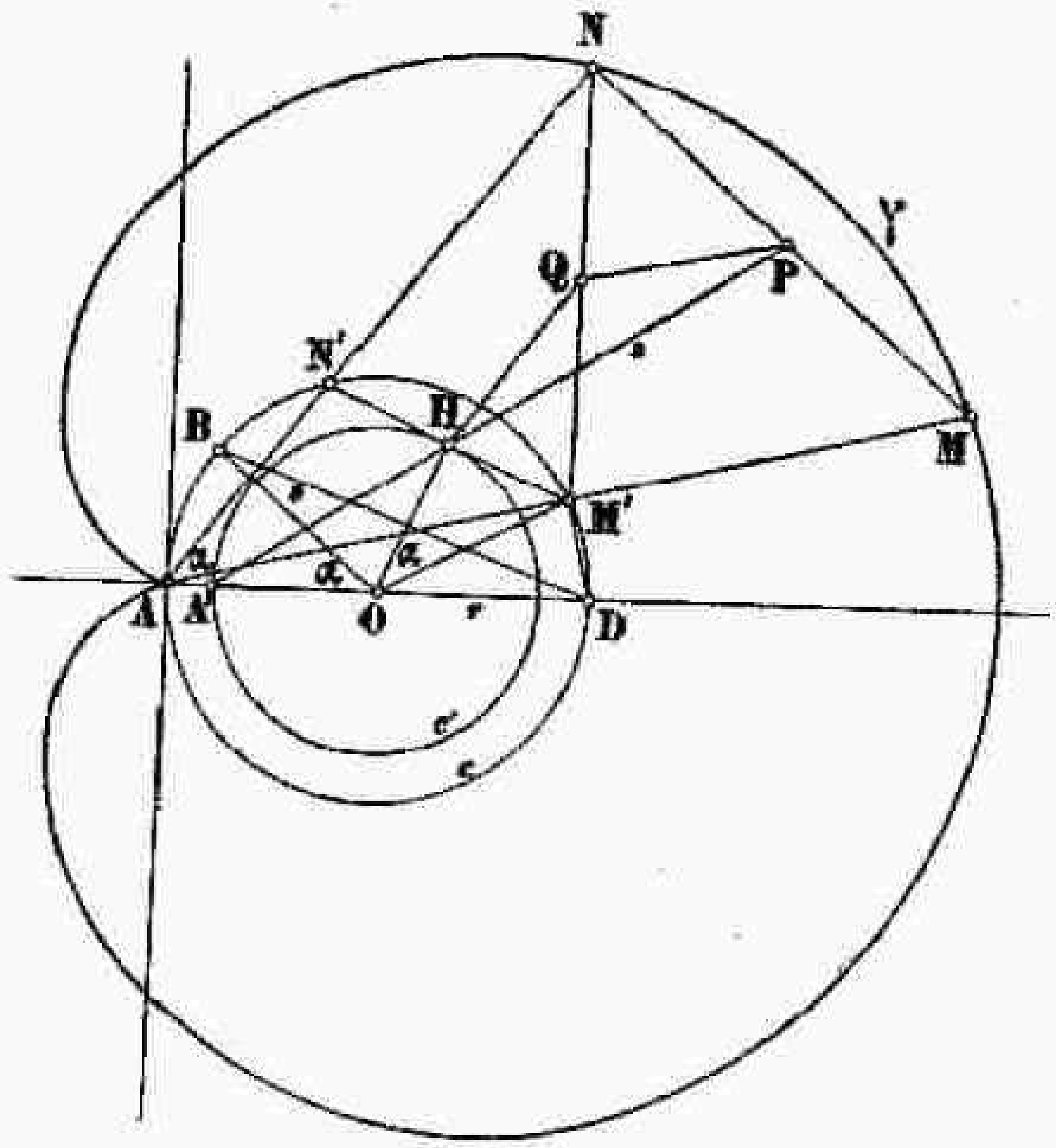
Risoluzioni del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

1ª. Geometrica. — Sieno: γ la cardioide data, A la sua cuspide, O ed r il centro e il raggio del cerchio c di cui la γ è concoide; D l'altro estremo del diametro di c passante per A; MN una corda di γ tale che sia $\widehat{MAN} = \alpha$; (*) P il punto di mezzo di MN; M', N' rispettivamente i punti in cui le rette AM, AN incontrano la c; B un punto di c tale che sia $\widehat{AOB} = \alpha$; A' la proiezione di B su AD; c' la circonferenza di centro O e raggio OA'.

Dimostreremo che *il luogo di P è una conchiglia di Pascal concoide di c′ rispetto al polo A′ ed al segmento addizionale* s = BD.

Sieno H e Q rispettivamente i punti medi di M′N′, M′N. I triangoli QPH, OBD sono uguali; infatti:

$$QP = \tfrac{1}{2}\,MM' = r = OB\,, \qquad QH = \tfrac{1}{2}\,NN' = r = OD\,;$$



inoltre, siccome le rette QP e QH sono rispettivamente parallele ad MM′ ed NN′, avremo anche:

$$\widehat{HQP} = \pi - \widehat{MAN} = \pi - \alpha = \widehat{BOD}\,.$$

Si deduce che

$$PH = BD = s\,. \tag{1}$$

Si ha:

$$\widehat{M'OH} = \widehat{M'AN'} = \widehat{BOA'},$$

quindi i triangoli rettangoli M′OH, BOA′ sono uguali, ossia OH = OA′ e per ciò M′N′ è tangente a c' in H. Dimostriamo ora che la PH passa per A′. Si ha:

$$\widehat{PHM'} = \widehat{QHM'} - \widehat{QHP} = \widehat{NN'M'} - \widehat{QHP} = \widehat{ADM'} - \widehat{QHP} =$$

$$\widehat{ADM'} - \widehat{ODB} = \widehat{BDM'} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BOM'} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{A'OH} = \widehat{A'HN'}\,;$$

da ciò si deduce che i punti A′, P, H sono in linea retta. Tenendo conto di questo ultimo risultato e della (1) si conclude che il luogo di P è proprio la *conchiglia di Pascal* suddetta.

Discussione. — Vediamo come varia il luogo Γ di P al variare di α da 0 a π. (*)

$\alpha = 0$. B ed A′ coincidono con A; $s = 2r$; c e c' coincidono. Si conclude che $\Gamma = \gamma$.

$\alpha = \frac{1}{2}\pi$. A′ coincide con O; c' si riduce al punto O; $s = r\sqrt{2}$. Γ diventa il cerchio di centro O e raggio $r\sqrt{2}$.

$\alpha = \frac{2}{3}\pi$. A′ è il punto medio di OD; s è uguale al diametro di c'; Γ è quindi una cardioide.

$\alpha = \pi$. B ed A′ coincidono con D; c e c' coincidono; $s = 0$; si ha quindi $\Gamma = c$.

(*) Basta considerare un α compreso tra 0 e π, perchè è evidente che due valori di α che diano per somma 2π generano uno stesso luogo.

$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \pi$. Γ è sempre una conchiglia di Pascal; se d' è il diametro di c' si ha rispettivamente, $s \gtrless d'$ secondochè l'angolo α soddisfa le prime due disuguaglianze o la terza.

Equazione ed area di Γ. — L'equazione di Γ in coordinate polari, prendendo A' per polo ed A'D per asse polare, è

$$\rho = s + 2\,\overline{\mathrm{OA}'}\cos\varphi\,,$$

ossia

$$\rho = 2r\cos\tfrac{1}{2}\alpha + 2r\cos\alpha\cos\varphi\,. \tag{2}$$

In generale l'area della curva $\rho = a + b\cos\varphi$ è data da:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}d\varphi + ab\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}b^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi\,(2a^2 + b^2),$$

quindi l'area S di Γ sarà:

$$\mathrm{S} = \tfrac{1}{2}\pi\,(8r^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + 4r^2\cos^2\alpha) = 2\pi\,r^2\,(\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1)\,.$$

2ª. Analitica. — Scegliamo la AD per asse delle x e la normale ad AD in A per asse delle y. Sia:

$$\widehat{\mathrm{MAD}} = \lambda\,, \qquad \mathrm{P} \equiv (x, y)\,.$$

Avremo:

$$\mathrm{AM} = 2r\,(1 + \cos\lambda)\,, \qquad \mathrm{AN} = 2r\,[1 + \cos(\lambda + \alpha)]\,;$$

$$\mathrm{M} \equiv (\mathrm{AM}\cos\lambda,\ \mathrm{AM}\,\mathrm{sen}\lambda)\,, \qquad \mathrm{N} \equiv [\mathrm{AN}\cos(\lambda+\alpha),\ \mathrm{AN}\,\mathrm{sen}(\lambda+\alpha)]\,;$$

$$x = \tfrac{1}{2}[\mathrm{AM}\cos\lambda + \mathrm{AN}\cos(\lambda+\alpha)] = r(1+\cos\lambda)\cos\lambda + r[1+\cos(\lambda+\alpha)]\cos(\lambda+\alpha),$$

$$y = \tfrac{1}{2}[\mathrm{AM}\,\mathrm{sen}\lambda + \mathrm{AN}\,\mathrm{sen}(\lambda+\alpha)] = r(1+\cos\lambda)\,\mathrm{sen}\lambda + r[1+\cos(\lambda+\alpha)]\,\mathrm{sen}(\lambda+\alpha).$$

Quindi:

$$\begin{cases} y\cos\lambda - x\,\mathrm{sen}\,\lambda = r\,[1 + \cos(\lambda+\alpha)]\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ x\,\mathrm{sen}\,(\lambda+\alpha) - y\cos(\lambda+\alpha) = r\,(1 + \cos\lambda)\,\mathrm{sen}\,\alpha, \end{cases}$$

cioè

$$\left.\begin{array}{c} (y - r\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha)\cos\lambda - (x - r\,\mathrm{sen}^2\alpha)\,\mathrm{sen}\lambda - r\,\mathrm{sen}\alpha = 0 \\ (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\alpha + r\,\mathrm{sen}\alpha)\cos\lambda - (y\,\mathrm{sen}\alpha + x\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\lambda + r\,\mathrm{sen}\alpha = 0 \\ \cos^2\lambda + \mathrm{sen}^2\lambda = 1 \end{array}\right\}. \tag{A}$$

Eliminando $\cos\lambda$ e $\mathrm{sen}\lambda$ dal gruppo (A) si trova l'equazione del luogo di P. Essa è

$$r^2[(1+\cos\alpha)\,x + y\,\mathrm{sen}\alpha - r\,\mathrm{sen}^2\alpha]^2 +$$
$$+ r^2[(1+\cos\alpha)\,y - x\,\mathrm{sen}\alpha + r\,\mathrm{sen}\alpha\,(1-\cos\alpha)]^2 = (x^2 + y^2 - 2\,rx + r^2\mathrm{sen}^2\alpha)^2,$$

ossia:

$$r^2\Big\{(1+\cos\alpha)\,[x - r(1-\cos\alpha)] + y\,\mathrm{sen}\alpha\Big\}^2 + r^2\Big\{(1+\cos\alpha)y - [x - r(1-\cos\alpha)]\,\mathrm{sen}\alpha\Big\}^2 =$$
$$= \Big\{[x - r(1-\cos\alpha)]^2 + y^2 - 2r[x - r(1-\cos\alpha)]\cos\alpha\Big\}^2;$$

eseguendo il trasporto di assi

$$x = \mathrm{X} + r\,(1 - \cos\alpha)\,, \qquad y = \mathrm{Y},$$

e semplificando, si ottiene

$$(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2\,r\mathrm{X}\cos\alpha)^2 = 4r^2\,(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\,. \tag{1}$$

Quest'equazione rappresenta evidentemente una conchiglia di Pascal.

Per $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ si hanno due cardioidi una delle quali (quella che corrisponde ad $\alpha = 0$) coincide con la data; per $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \pi$ si hanno due circonferenze.

Trasformata la (1) in coordinate polari si ottiene l'equazione (2) ottenuta colla dimostrazione precedente.

QUISTIONI PROPOSTE

682. Calcolare l'integrale

$$\int \sqrt{\sqrt{4x+a}-(2x-a)}\,dx\,.$$

683. Essendo ABC un triangolo isoscele dato (AB = AC), esiste un'iperbole, concentrica al circolo circoscritto ad ABC, che passa per B e C, per il centro dei circoli exiscritti contenuti negli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e per il punto di Gergonne corrispondente a questi circoli exiscritti.

I vertici reali di questa iperbole sono situati sull'altezza corrispondente al lato BC, se $B > 60°$. Calcolare la lunghezza dell'asse di questa iperbole in funzione degli elementi del triangolo.

684. Il luogo dei centri delle coniche che passano per i fuochi di una ellisse e sono tangenti ad essa in un punto dato, è una ellisse.

685. Si considerino due circoli fissi c, c' di centri O, O', e un diametro AB di c. Essendo P la proiezione di un punto M di c sul diametro AB, si descriva il circolo γ che ha per centro M e per raggio la media geometrica fra il raggio del circolo c e la lunghezza OP (o MP). Dimostrare che l'asse radicale di γ e c' inviluppa una conica

686. Essendo O il vertice, a l'asse, d l'assintoto di una *versiera* (cubica di Agnesi), e T il punto di contatto di una delle tangenti condotte da O alla curva, dimostrare che la parallela ad a condotta per T divide l'area compresa per la curva e le rette a, d in due parti equivalenti.

Si cerchi anche di dividere in due parti equivalenti l'area suddetta per mezzo di una retta parallela a d.

687. Dimostrare che la retta avente per equazione

$$2\lambda(\lambda+\mu)x+(\lambda^2-\mu^2+2\lambda\mu+a^2)y-a(\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu)=0,$$

essendo i parametri di μ legati dalla relazione

$$\lambda^2+\mu^2=b^2,$$

inviluppa una conica. Quando a varia, questa conica inviluppa una quartica, e quando b varia questa quartica inviluppa tre rette (*).

E.-N. BARISIEN.

(*) Queste *tre rette* sono le assintote della quartica, che restano invariabili qualunque sia il valore di b; una delle assintote è doppia.

BIBLIOGRAFIA

Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Tomo secondo, 1904.

Il secondo volume, testè pubblicato per cura della facoltà di scienze della R. Università di Roma, delle opere del Beltrami comprende le pubblicazioni dell'illustre scienziato che videro la luce dal 1867 al 1873 riferentisi principalmente alla geometria differenziale ed alla fisica matematica.

Ecco l'indice di questo volume:

27. — *Sulle proprietà generali delle superfici d'area minima.* (Memorie dell'Acc. di Bologna, 1867.)

28. *Sulla teoria generale delle superficie.* (Atti dell'Istituto Veneto, 1868.)

29. — *Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal sig. Christoffel nella teoria delle superficie.* (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1869.)

30. — *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* (Acc. di Bologna, 1868.)

31. — *Zur Theorie des Krummungsmasses.* (Math. Annalen, 1869.)

32. — *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche.* (Acc. di Bologna, 1869.)

33. — *Alcune formule per la teoria elementare delle coniche.* (Giornale di Matematiche, 1871.)

34. — *Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici.* (Nuovo Cimento 1871-72.)

35. — *Ricerche sulla cinematica dei fluidi.* (Acc. di Bologna, 1871-72-73-74.)

36. — *Intorno ad una trasformazione di Dirichlet.* (Giornale di Matematiche, 1872.)

37. — *Osservazioni sulla Nota del prof. L. Schlaefli alla memoria del sig. Beltrami " Sugli spazi di curvatura costante ".* (Annali di matematiche, 1871-73.)

38. — *Sulla teoria analitica delle distanze.* (Ist. Lombardo, 1872.)

39. — *Teorema di geometria pseudo-sferica.* (Giornale di Matematica, 1872.)

40. — *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudo-sferiche.* (Giornale di matematica, 1872.)

41. — *Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido.* (Giornale di matematica, 1872.)

42. — *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali.* (R. Ist. Lombardo, 1872.)

43. — *Sulle funzioni bilineari.* (Giornale di matematica, 1873.)

44. — *Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi, ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico.* (Annali di matematica, 1873.)

45. — *Comunicazione di una lettera di* Lagrange *a* F. M. Zanotti. (Accademia di Bologna, 1873.)

Carrara. — *I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza.* Studio storico critico. *Problema 3º.* Trisezione dell'angolo. (Estratto dalla rivista di fisica matematica e scienze naturali.)

Abbiamo già reso conto ai lettori del Periodico delle prime due parti di questa interessante opera (Anno XVIII, pag. 198 e Anno XIX, pag. 52). Questa terza parte ha gli stessi pregi delle altre due: esattezza storica e scientifica, chiarezza e lucidità di esposizione, che ne rendono la lettura facile e dilettevole.

Si compone di tre parti. Nella prima *(Preliminari polemici)* si parla di alcuni fra gl'innumerevoli tentativi fatti in tutti i tempi per risolvere il problema colla riga e col compasso, tentativi assolutamente illogici e assurdi dopo che ne era stata dimostrata l'impossibilità. L'elenco come ben si capisce non è completo.

Segue l'enumerazione di varie soluzioni approssimate ed un cenno sulle dimostrazioni d'impossibilità esposte da Petersen, Klein, Capelli, Conti ed altri.

La seconda parte tratta delle risoluzioni ideate dagli antichi, riducendo il problema alle intersezioni di coniche o alla inserzione di due medie geometriche, o facendo uso di altre curve come la quadratrice e la concoide.

Nella terza parte, che tratta del problema nell'epoca moderna, è data anzitutto la dimostrazione dell'impossibilità di risolvere il problema colla riga e col compasso, poi le soluzioni di Cartesio e Wolf mediante un circolo ed una conica, quella di Newton, la risoluzione mediante la concoide di Pascal, e per mezzo di vari istrumenti ideati in epoche abbastanza recenti, ecc.

Rouse Ball. — *Breve compendio di storia delle matematiche.* Versione dall'inglese con note aggiunte e modificazioni dei dott.ri Dionisio Gambioli e Giulio Puliti riveduta e corretta dal prof. G. Loria. II volume. Bologna, Zanichelli, 1904.

Nel n. VI, anno XVIII (pag. 342) abbiamo annunziato la pubblicazione del I volume della traduzione di questa opera del sig. Rouse Ball, e dato un breve cenno del contenuto e dei pregi di esso.

Il II volume, recentemente pubblicato, comprende la storia delle matematiche cominciando dalla invenzione della geometria analitica fatta da Cartesio (1635) fino ai giorni nostri.

Il traduttore prof. Gambioli ha aggiunto la biografia di alcuni matematici stranieri, e dei più insigni matematici italiani moderni in due appendici che sono un necessario complemento ad una traduzione italiana dell'opera del Rouse Ball.

Ed ora ci permettiamo di notare alcune mende dell'opera che a nostro avviso, i traduttori avrebbero fatto bene a togliere.

Talvolta il libro si riduce ad un'arida enumerazione di matematici, mentre per un sunto sarebbe opportuno che fossero messi in vista pochi nomi, quelli di coloro che stanno come pietre miliari sul cammino della scienza, facendo risaltare l'opera di essi.

In qualche punto l'A. si perde in storielle di poca importanza come le disgrazie coniugali di Kepler (Vol. I, pag. 267) o il chiodo a cui Poisson giovinetto era attaccato da suo padre (Vol. II, pag. 186) e simili; e viceversa parlando di Mercator si dimentica di dire che egli ideò quella proiezione di cui si serve tutto il mondo, dice poche parole su Delambre, Torricelli, Ruffini e sopratutto riassume le quattro pagine che egli dedica a *Galileo* colle seguenti parole:

„ Io penso che l'opera di Galileo può riassumersi bene dicendo che le sue „ ricerche sulla meccanica meritano alta lode, ma sebbene a lui si debbano gran „ parte delle prove che posero la teoria copernicana sopra una base soddisfacente, „ non fece egli stesso alcun progresso speciale nelle teorie astronomiche „.

E questo giudizio non può soddisfare nessuno, e tanto meno i compatriotti di colui che

... all'Angelo che tanta ala vi stese,
Sgombrò primo le vie del firmamento.

Infine crediamo che sarebbe stato molto utile (per non dire necessario) aggiungere un indice alfabetico dei nomi ricordati nell'opera e degli argomenti in essa trattati,

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo III.

È uscito il 3° volume di questa splendida raccolta, di cui già annunziammo l'inizio (v. Periodico anno XVII pag. 101, anno XVIII pag. 150). Contiene 11 note e memorie pubblicate dal 1887 al 1897 negli Annali di matematica, 25 pubblicate dal 1847 al 1894 nei Rediconti del R. Ist. Lombardo, 2 pubblicate nel 1855 nelle Memorie della Società italiana delle Scienze in Modena, 17 pubblicate dalla R. Acc. dei Lincei dal 1870 al 1886.

Queste memorie si riferiscono principalmente alla teoria delle forme algebriche, alle funzioni ellittiche ed iperellittiche alla risoluzione delle equazioni.

Vi sono pure le necrologie di Casorati, Betti, Colombani.

LORIA. — *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. — Theorie und Geschichte.* — Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von *Fritz Schütte.* — Leipzig. Teuebner 1902.

La Regia Accademia delle scienze di Madrid propose un premio per un elenco di tutte le curve di qualsiasi specie, che hanno un nome speciale, con brevi notizie sulla loro forma, sulla loro equazione e sullo scopritore di esse. Il concorso scadeva il 31 dicembre 1894, ma fu prorogato al 31 dicembre 1897, non essendo giunte risposte. Intanto *Hâton de la Goupillière* proponeva una quistione simile nell'*Intermédiaire des mathématiciens* (Vol. I, p. 37, 1894). Il prof. Loria vinse il concorso con una memoria, che ha dato origine alla grande opera (un bel volume di circa 750 pagine) pubblicato in lingua tedesca dal Teubner.

Tutti coloro che si dedicano alle matematiche devono esser molto grati al chiarissimo professore per avere condotta a termine un'opera di questa natura, e all'Accademia di Madrid per averla provocata.

Infatti in tutti i rami delle matematiche, dai tempi più remoti fino ai giorni nostri, si trovano numerosissimi esempi di curve, ideate per risolvere i problemi classici dell'antichità od altri problemi interessanti, o per rappresentare leggi fisiche, meccaniche ed altre, e non era possibile, fino ad oggi, avere notizia di queste curve, altro che frugando pazientemente in giornali, riviste, Atti di Accademie scientifiche, libri antichi e rari.

Per raccogliere questo enorme materiale occorreva una erudizione profondissima e una pazienza da benedettino; per ordinarlo, classificarlo e ridurlo in volume relativamente piccolo occorreva un acume e un intuito matematico di primo ordine.

Nessuno, crediamo, poteva riunire queste qualità in grado più eminente del prof. Loria, ed il lavoro da lui compiuto darà modo agli studiosi di verificare senza alcuna fatica, se qualche curva che a loro capiti sott'occhio per una ragione qualsiasi, rientra o no fra quelle conosciute.

Libri di questa natura sono assai rari e si pubblicano soltanto a lunghi intervalli, perchè, nel campo scientifico i più preferiscono lanciarsi alla conquista dell'ignoto, alla ricerca delle regioni inesplorate; la vertigine delle altezze dà all'audace cercatore, come all'ardito alpinista una specie di ebbrezza, che manca quando si fanno ricerche pazienti, lunghe, spesso noiose entro i volumi polverosi delle biblioteche.

Ma, come per l'esploratore è necessario raccogliere l'insieme delle sue scoperte, come all'alpinista piace di tanto in tantò volgere lo sguardo indietro per misurare l'altezza a cui è giunto, così è della più alta importanza nel campo delle scienze, un istante di sosta per raccogliere quanto è stato fatto sopra un dato argomento dall'umanità tutta intera e misurarne l'importanza.

L'opera è divisa in sette parti come segue:

I. — *Luoghi piani e solidi.* (Rette, circoli, coniche) (3 capitoli).
II. — *Curve del terz'ordine* (14 capitoli).
III. — *Curve del quart'ordine* (16 capitoli).
IV. — *Curve algebriche speciali di ordine superiore al quarto* (6 capitoli).
V. — *Curve algebriche speciali d'ordine qualunque* (19 capitoli).
VI. — *Curve trascendenti* (25 capitoli).
VII. — *Curve dedotte da altre* (12 capitoli).

Come si vede da questo indice le curve sono classificate prendendo per base la loro rappresentazione analitica.

Invece nei numerosi capitoli, in cui si divide ciascuna parte, è adottato come criterio principale l'ordinamento storico e cronologico.

Un'analisi del libro, o richiederebbe uno spazio assai maggiore di quello di cui possiamo disporre, o si ridurrebbe ad un arido e insignificante elenco di nomi, per conseguenza crediamo più opportuno limitarci a segnalare ai nostri lettori la pregevole opera per invogliarli allo studio di essa.

I lettori di questa rivista hanno avuto un saggio dell'opera nei due articoli dell'egregio autore intitolati: *Osservazioni sopra le coordinate polari* (Vol. XV, p. 7) e *Le radiali di una curva algebrica* (Vol. XVII, p. 30) i cui concetti fondamentali sono riprodotti nel libro.

In un'opera di questa importanza e di questa mole non possono mancare le mende, e le omissioni. Ci auguriamo che l'edizione tedesca valga a preparare la via ad una edizione italiana.

Vogliamo pure sperare che l'illustre autore voglia compiere l'opera e rendere un altro segnalato servigio ai cultori delle discipline geometriche pubblicando un lavoro dello stesso genere sulle superficie.

K.

IL III CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

(Heidelberg, 8-13 agosto 1904)

Quando, durante l'ultima adunanza generale di questo memorabile convegno di dotti, il prof. Schwarz, con parola calda e convinta, propose un voto di plauso a coloro che, con abnegazione superiore ad ogni elogio, quella riunione avevano sapientemente organizzata in tutti i suoi particolari più minuti, sì da ottenere un risultato pressochè perfetto, il concorde applauso, con cui l'assemblea accolse siffatta proposta, provò che egli erasi fatto interpetre di un sentimento che tutti condividevano. Tuttavia a un solo punto del piano generale del Congresso, secondo il convincimento universale, sarebbe stato necessario qualche ritocco, ed è nell'orario delle sedute, il quale rese impossibile il prendere parte od assistere ai lavori di più d'una sezione. Di tale piccolo nèo facciamo qui menzione, non per vano desiderio di critica e nemmeno per ammonire gli organizzatori dei congressi futuri, ma soltanto per rendere edotti i lettori del *Periodico* del perchè ci troviamo nell'assoluta impossibilità di esporre con profondità ed ampiezza quanto fecero i matematici nella loro terza generale riunione, nell'attesa degli Atti di essa, ci è forza restringerci ad una semplice cronaca degli avvenimenti!

Al III Congresso internazionale presero parte 310 matematici; e cioè: 155 *tèdeschi*, 25 *francesi*, ed altrettanti *russi*, 24 *austro-ungheresi*, 12 *inglesi*, ed altrettanti *nord-americani*, 11 *italiani*, [cioè: Capelli (Napoli), Castelnuovo (Roma), Galvani (Bologna), Guccia (Palermo), Levi-Civita (Padova), Loria (Genova), Morera (Torino), Segre (Torino), Vacca (Genova), Vailati (Como) e Volterra (Roma)], 10 *danesi*, ed altrettanti *norvego-svedesi*, 9 *svizzeri*, 5 *olandesi*, 2 *belgi*, 2 *rumeni*, 2 *greci*, 1 *sud-americano*, 1 *spagnolo* ed 1 *giapponese;* finalmente 2 di residenza ignota ed 1 abitante di Sofia.

La concordia che permanente regnò fra tante persone, fu veramente mirabile, ed era oggetto di soddisfazione e curiosità il vedere, affratellati dalla ricerca del vero, rivali di ieri come nemici di oggi, concordia che nulla turbò e potè solo venire eclissata dalla signorile cordialità delle accoglienze preparate dai matematici tedeschi ai loro colleghi di fuori.

Il Congresso comprendeva sei sezioni, cioè: I *Aritmetica ed Algebra*, II *Analisi*, III *Geometria*, IV *Matematica applicata*, V *Storia*, VI *Pedagogia*. Queste ebbero per organizzatori rispettivamente: I Kneser e Lüroth; II Hilbert e Schwarz; III Brill, Meyer e Schur; IV Hauck, Klein e Runge; V Cantor e Stäckel; VI Schubert e Treutlein.

A presiedere le sedute delle varie sezioni furono per acclamazione chiamati: I Netto, Seliwanoff; II Hadamard, Levi-Civita, Lindelöf, Mittag-Läffler; III Geiser, Guichard, Morley, Segre, Zeuthen; IV Börrch, Finsterwalder, Hadamarr, Klein, Vleck, Volterra; V Braunmühl, Loria, Tannery, Zeuthen; VI Fehr, Greenhill, Gubler, Schotten.

Le comunicazioni fatte furono rispettivamente 13, 14, 21, 15, 10, 20, di cui *sette* da italiani, cioè: Capelli, nelle Sez. I e II; Levi-Civita, nella IV; Loria, nelle V e VI; Vailati, nella V, e Volterra, nella IV. Non vanno poi dimenticate le conferenze generali, tenute dal Painlevé (in francese), dal Greenhill (in inglese), dal Segre (in italiano) e dal Wirtinger (in tedesco).

Nella seduta inaugurale il Königsberger commemorò degnamente Jacobi, mentre in altre sedute generali vennero presentati il I volume della grande *Enciclopedia* " delle quattro accademie " nonchè il primo fascicolo della traduzione francese di essa, ed una storia della società matematica tedesca; vennero inoltre fatti voti per l'insegnamento della storia delle matematiche e perchè l'Istituzione Carnegie accordi i fondi necessari alla pubblicazione delle opere complete di Eulero.

Da ultimo va ricordato l'interessantissima esposizione di modelli ed apparati matematici, la quale, assieme alle conferenze illustrative, costituì una delle maggiori attrattive del Congresso.

Nella seduta di chiusura il prof. Volterra, in nome dell'Accademia dei Lincei e del Circolo matematico di Palermo, propose l'Italia come sede del IV Congresso; l'entusiasmo col quale tale proposta venne accolta ed approvata, dimostrò, non solo il fascino che il bel paese esercita dovunque, ma anche l'alta stima e la profonda simpatia di cui godono all'estero i matematici Italiani; *a Roma, dunque, nella Primavera 1908!* erano le parole che echeggiavano nel momento doloroso della separazione. In quell'occasione verrà conferito per concorso un premio di L. 3000, al migliore lavoro sulla teoria delle curve algebriche, con un fondo posto generosamente a disposizione del Circolo matematico di Palermo, dal prof. Guccia (*).

(*) Il programma di tale concorso verrà presto pubblicato.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 ottobre 1904

TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI AD N UNITÀ

INTRODUZIONE.

L'ampliamento di un campo numerico coll'introduzione di nuovi numeri deve essere in ogni caso suggerito dalla necessità di rendere sempre possibili talune operazioni sopra numeri del campo, ed è certo molto utile che la estensione sia fatta di guisa che le leggi formali delle operazioni restino nel nuovo campo, per quanto è possibile, conservate. È questo il principio detto da HANKEL della *permanenza delle regole di calcolo* (¹).

Così dal campo dei numeri interi, con la scorta di questo principio, si arriva mediante successivi ampliamenti, al campo dei numeri razionali, e poi a quello dei numeri reali, nei quali campi le operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione) sono sempre possibili e godono delle medesime leggi che valgono pei numeri interi.

L'impossibilità di estrarre la radice quadrata di un numero negativo condusse all'introduzione dei *numeri complessi*, che risultano associando all'unità reale 1 un'altra unità i definita dalla proprietà

$$i^2 = -1\,,$$

e anche in questo nuovo campo restano inalterate le leggi delle operazioni fondamentali.

Qui non è il caso di dire l'uso, veramente vasto e fecondo, che si fa e si è fatto dei numeri complessi dopo le ricerche celebri di EULERO e di GAUSS, ma occorre piuttosto far notare che i numeri complessi ebbero originariamente accoglienza, perchè una folla di teoremi acquistava con essi una validità generale e una espressione più semplice. Cosicchè mentre si studiava la natura dei numeri complessi, doveva naturalmente sorgere l'idea di ricercare se il processo di estensione del campo numerico si chiudesse coi trovati numeri,

(¹) Per il senso esatto di questo principio si legga l'articolo di G. PEANO, *Principio de Permanentia*, nella "Revue de Mathématique„ tomo 8º, anno 1903.

ovvero se altri se ne potessero definire, i quali, mentre dessero luogo ad una aritmetica generale con regole tutto affatto analoghe alle ordinarie, soddisfacessero altresì al medesimo scopo di utile generalizzazione e di semplificazione.

E Gauss stesso fece senza dubbio ricerche in questo senso, giacchè nel 1831 nella introduzione alla sua seconda memoria sui residui biquadratici, dopo di avere esposto il suo modo di concepire un numero complesso, così scriveva:

" L'Autore si è riservato di studiare in seguito completamente la questione che nella precedente memoria è soltanto accennata per incidenza, di trovare cioè le ragioni perchè le relazioni fra elementi, che rappresentano una varietà a più di due dimensioni, *non* possano fornire altre sorta di quantità *ammissibili* nell'aritmetica generale " [1].

Gauss dunque era convinto della *impossibilità* di una tale estensione, e probabilmente perchè si era accorto che l'introduzione di numeri complessi a più di due unità non poteva farsi senza ledere qualcuna delle leggi formali delle operazioni fondamentali.

La questione doveva certamente risorgere dopo che Hamilton, nel 1853 pubblicava la sua teoria dei *Quaternioni* [2], colla quale dava un importantissimo esempio di numeri complessi a 4 unità, non ammettenti però una moltiplicazione commutativa.

L'impossibilità dunque di definire una moltiplicazione che ammettesse tutte le leggi formali della moltiplicazione ordinaria cominciava a rendersi manifesta ai geometri. E così Grassmann nel 1862 [3], introducendo sotto il nome di *quantità estensive* numeri complessi generali, pensava di non fare nemmeno l'ipotesi che il prodotto di più numeri complessi di dato sistema appartenesse a questo stesso sistema, mentre d'altra parte Weierstrass, occupandosi per la prima volta della questione nel semestre d'inverno 1861-62 [4], metteva in luce un fatto di grandissima importanza, che segnalò poi nel 1863 in una lezione all'Università di Berlino, che cioè in ogni sistema di numeri complessi a più di due unità, il quale ammette una moltiplicazione commutativa, esistono sempre numeri diversi da zero il cui prodotto sia uguale allo zero.

Questo teorema pubblicato da Hankel nel 1867 [5], fu generalizzato da Frobenius nel 1878 [6], e da Peirce nel 1881 [7]; entrambi dimostrarono che, anche sacrificando la legge commutativa della moltiplicazione, tranne i quaternioni nessun altro sistema di numeri complessi

(1) Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum*, II (1831). Werke 2, p. 178.

(2) W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*. Dublin, 1853.

(3) Grassmann, *Ausdehnungslehre*, 1862.

(4) Così si rileva da una lettera inviata a Schwarz [vedi nota (1) pag. seg.]. Cfr. anche *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Teil I. Band I. Heft 2, A. 4: *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, von Study, p. 173.

(5) H. Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme*. Leipzig, 1867.

(6) Frobenius, *Journal für die r. u. a. Math.*, 84 (1878), p. 59.

(7) C. S. Peirce, *American Journal of Math.*, 4 (1881), p. 225.

a più di due unità poteva godere della proprietà che per l'annullamento di un prodotto sia necessario l'annullamento di uno dei fattori.

Questo fatto dimostrerebbe l'asserzione di GAUSS riportata dianzi dell'impossibilità di fondare un'aritmetica generale analoga all'ordinaria, se l'esistenza di numeri che rendono nullo un prodotto senza che nessuno di essi lo sia si ritenesse d'inciampo all'effettiva costruzione di una tale aritmetica.

Ma non è di questa opinione il WEIERSTRASS.

In una lunga lettera a SCHWARZ del 1883 (1) egli pone infatti la questione se l'esistenza di siffatti numeri, che chiama *divisori dello zero*, costituisse o no una sostanziale differenza tra l'aritmetica delle quantità formate da più di due unità e l'aritmetica ordinaria, e conclude che fra le due aritmetiche c'è anzi perfetta analogia, quando si faccia l'ulteriore ipotesi che una equazione algebrica allora *solo* possa ammettere infinite radici quando i suoi coefficienti si ottengano tutti da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per quantità arbitrarie. Il sistema risulta allora costituito dalle quantità complesse della forma

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m ,$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono numeri complessi ordinari, e le unità $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sottoposte alle condizioni

$$e_r \cdot e_r = e_r , \qquad e_r \cdot e_s = 0 . \qquad (r \neq s,\ r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Se con

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_m e_m$$

si indica un altro numero complesso appartenente a questo sistema, il prodotto ab risulta dato con legge semplicissima dall'uguaglianza

$$ab = \alpha_1 \beta_1 e_1 + \alpha_2 \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_m \beta_m e_m .$$

Le leggi della moltiplicazione sono evidentemente verificate, onde WEIERSTRASS conclude che è *possibile* l'introduzione di quantità complesse in un'aritmetica generale analoga all'ordinaria, ma la regola stessa colla quale si effettua la moltiplicazione dimostra chiaramente l'*inutilità* di questa introduzione: " l'aritmetica delle quantità complesse non può condurre ad alcun risultato che non possa derivarsi senz'altro dalla teoria delle quantità complesse ad una o a due unità ".

La lettera di WEIERSTRASS segna il punto di partenza di una serie di ricerche fatte da SCHWARZ, HÖLDER, PETERSEN e DEDEKIND (2). Anzi DEDEKIND arriva al sistema di WEIERSTRASS mettendosi sotto ipotesi

(1) *Göttingen Nachrichten*, 1884, p. 396. Vedi anche *Mathematische Werke* von KARL WEIER-STRASS: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen*, Zweiter Band, pp. 311-332; e le osservazioni di H. A. SCHWARZ relative a questa lettera, Gött. Nachr. 1884, p. 516 e Math. Werke von K. WEIERSTRASS, II, pp. 332-339.

(2) H. A. SCHWARZ, *Gött Nachr.*, p. 516; O. HÖLDER, 1886, p. 241, J. PETERSEN, 1887, p. 489. DEDEKIND, 1885, p. 141 e 1887, p. 1.

un po' più generali, e confrontando le proprietà di questo sistema con le analoghe dei numeri algebrici, la cui natura è stata studiata da tempo, conclude che un sistema di numeri complessi che ammetta le leggi dell'aritmetica ordinaria non è nè impossibile, nè superfluo, ma sibbene *privo del carattere di novità*.

Tolti dunque questi sistemi, restano sistemi che presentano sostanziali differenze col sistema delle quantità complesse ordinarie, con tutto ciò essi non sono privi di interesse, e la concisione e la semplicità che il loro mezzo apporta in talune teorie ne consiglia lo studio. Si son fatte perciò delle ricerche per esaminarne la struttura e per classificarli specialmente col sussidio della teoria dei gruppi di trasformazione; queste ricerche si devono a STUDY (1), LIE (2), SCHEFFERS (3), FROBENIUS (4), HILBERT (5), ed altri.

In Italia veruna pubblicazione è comparsa su questo argomento, cosicchè ho creduto opera non vana pubblicare una trattazione sistematica della teoria dei numeri complessi ad n unità, argomento sul quale ho riferito alla Scuola di Magistero annessa all'Università di Palermo, e che mi fu suggerito dal Ch.mo prof. GIOVANNI MAISANO, che dirige le conferenze della classe di matematica.

Mi prefiggo di non uscire dai limiti della pura Analisi Algebrica, e in questa parte, nella quale, dopo la definizione dei numeri complessi col metodo di HAMILTON, e i teoremi generali sui sistemi di numeri complessi che ammettono una moltiplicazione associativa e una divisione bilaterale passo alla dimostrazione del surricordato teorema di FROBENIUS sopra i quaternioni, io seguirò un lavoro del GRISSEMANN (6), al quale è anche ispirato un capitolo della pregevole e recente opera dei proff. STOLZ e GMEINER, *Theoretische Arithmetik* (Leipzig, 1902), che mi è stata in questa parte guida ottima e sicura.

Corpi associativi - Corpi hankeliani.

§ 1. — DEFINIZIONI PRELIMIMARI - OPERAZIONI FONDAMENTALI.

1. Definizione di numero complesso d'ordine n.

DEFINIZIONE I. — Un sistema di n numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ si dirà un *numero complesso d'ordine* n. Denotando con a questo numero complesso, si scriverà

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{1}$$

(1) E. STUDY, *Gött Nachr.*, 1889, p. 237; 1898, p. 1.

(2) S. LIE, *Vorlesungen über endliche continuierliche Gruppen*, bearbeiten von G. SCHEFFERS, Leipzig, 1893 (Kap. 21).

(3) G. SCHEFFERS, *Math. Annalen*, 39 (1891), p. 293.

(4) FROBENIUS, *Berl. Ber.* 1896 p. 601.

(5) D. HILBERT, *Gött Nachr.*, 1896, p. 179. Si vegga anche L. KRONECKER, *Berl. Ber.* 1888, I, pp. 429, 447, 557, 595; II, p. 983.

(6) F. GRISSEMANN, *Monatshefte für Math. und Phys.* XI, Jahrg. p. 137-147.

e i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si diranno *le coordinate* o *le componenti* del numero complesso a.

Definizione II. — Il numero complesso colle coordinate tutte nulle si chiamerà il *complesso zero,* o semplicemente *zero.* Esso in tutta la teoria rappresenta quella parte che ha lo zero nei numeri reali, si rappresenterà quindi col solito simbolo 0:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

2. Eguaglianza e sue leggi.

Definizione III. — Due numeri complessi si dicono *eguali,* quando le coordinate dell'uno sono rispettivamente *eguali* alle coordinate dell'altro, cioè si porrà

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

quando sussistono le n eguaglianze

$$\alpha_r = \beta_r. \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

Come conseguenza di questa definizione risultano subito i seguenti teoremi:

L'eguaglianza dei numeri complessi è

1°. *Riflessiva:* $a = a$.

2°. *Simmetrica:* se è $a = b$, sarà $b = a$.

3°. *Transitiva:* da $a = b$, e $b = c$ segue $a = c$.

4°. *Un numero complesso è uguale a zero soltanto quando son nulle tutte le sue coordinate.*

3. Addizione e sue proprietà.

Definizione IV. — L'addizione nei numeri complessi resta definita dall'eguaglianza

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Essa risulta evidentemente

1°. *Uniforme:* cioè a risultato unico.

2°. *Commutativa:* cioè $a + b = b + a$.

3°. *Associativa:* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

4°. *Lo zero è il modulo* (o il *numero indifferente*) *dell'addizione:* $a + 0 = 0 + a = a$.

5°. *Se è* $a = b$, *sarà anche* $a + c = b + c$, *e inversamente.*

4. Sottrazione.

Risulta subito dalla definiz. IV il seguente teorema:

Dati due numeri complessi $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, *esiste ed è individuato un numero complesso* c *tale che sia*

$$b + c = a.$$

Esso è il numero complesso

$$(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n).$$

DEFINIZIONE V. — Questo numero complesso si chiama la *differenza* dei due numeri a e b, e si scrive $c = a - b$.

5. Attribuzione di un coefficiente (reale) ad un numero complesso.

DEFINIZIONE VI. — Col simbolo ρa o $a\rho$, ove ρ è un numero reale e a un numero complesso si intende rappresentare il numero complesso le cui coordinate sono uguali alle coordinate di a moltiplicate per ρ:

$$\rho a = a\rho = (\rho a_1, \rho a_2, \ldots, \rho a_n).$$

Si dice che al numero a si è *attribuito* il coefficiente (reale) ρ.

Denotando, come facciamo d'ora innanzi, con lettere greche numeri reali, seguono da questa definizione le seguenti proprietà

1° $$1a = a,$$
2° $$\rho(\sigma a) = (\rho\sigma)a,$$
3° $$(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m)a = \rho_1 a + \rho_2 a + \ldots + \rho_m a,$$
4° $$\rho(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = \rho a_1 + \rho a_2 + \ldots + \rho a_m,$$
5° $$0a = 0.$$

Quest'ultima proprietà si enuncia: *Attribuendo ad un numero complesso il coefficiente zero si ottiene il complesso zero.* Ed è chiaro che si ha viceversa: *Se attribuendo un coefficiente ad un numero complesso diverso da zero si ottiene per risultato zero, questo coefficiente deve essere esso stesso uguale a zero.*

6. Definizioni delle unità. Ulteriore rappresentazione di un numero complesso.

DEFINIZIONE VII. — I numeri complessi di cui una coordinata è uguale a 1 e le altre sono tutte nulle diconsi *unità*.

Le unità sono in numero di n:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots 0, 1).$$

Dalla definiz. V risulta

$$\begin{aligned} (\alpha_1, 0, 0, \ldots 0) &= \alpha_1 e_1 \\ (0, \alpha_2, 0, \ldots 0) &= \alpha_2 e_2 \\ &\cdots\cdots \\ (0, 0, 0, \ldots \alpha_n) &= \alpha_n e_n, \end{aligned}$$

e però, addizionando, si ha

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

cioè *un numero complesso si può rappresentare come la somma dei numeri complessi che si ottengono attribuendo come coefficienti alle unità* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *le sue coordinate.*

Questa è la forma definitiva sotto la quale si rappresenterà d'ora innanzi un numero complesso d'ordine n.

Le definizioni e le proprietà precedenti possono in conseguenza presentarsi sotto altra forma, per es., la proposizione 4ª del n. 3 può anche enunciarsi così:

Fra le unità non può intercedere alcuna relazione lineare omogenea (a coefficienti reali).

Il sistema degli ∞^n numeri complessi con le unità $e_1, e_2, \ldots e_n$, in virtù delle precedenti definizioni, si riproduce mediante addizione e sottrazione. Esso costituisce dunque un *modulo di numeri complessi* (DEDEKIND), e le unità $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ne costituiscono una *base.*

Questo modulo non cambia, quando si prendano come base n altri numeri di esso $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definiti dalle n uguaglianze

$$a_r = \alpha_{r1}e_1 + \alpha_{r2}e_2 + \ldots + \alpha_{rn}e_n, \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

purchè il determinante $|\alpha_{rs}|$ sia diverso da zero, perchè allora ogni unità e_r, e quindi ogni numero complesso, si può esprimere come un numero complesso con le unità $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

7. Moltiplicazione.

Perchè un modulo di numeri complessi colle unità $e_1, e_2, \ldots, e_n$ si riproduca anche per moltiplicazione e divisione, cioè costituisca (secondo DEDEKIND) un *corpo* di numeri, devono le altre due operazioni razionali, la moltiplicazione e la divisione, essere definite in modo che i risultati di queste operazioni siano numeri complessi appartenenti al dato sistema. Ciò sarà fatto colle seguenti definizioni.

DEFINIZIONE VIII. — *a)* Gli n^2 prodotti $e_r \,.\, e_s$ $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ siano definiti dalle uguaglianze

$$e_r \,.\, e_s = \lambda_{rs}^{(1)}e_1 + \lambda_{rs}^{(2)}e_2 + \ldots + \lambda_{rs}^{(n)}e_n.$$

b) $$(\alpha_r e_r) \,.\, (\beta_s e_s) = (\alpha_r \beta_r)(e_r \,.\, e_s).$$

c) Il prodotto $a \,.\, b$ risulti definito (in base alla legge distributiva) dalla uguaglianza

$$a \,.\, b = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r \,.\, \sum_{s=1}^{n} \beta_s e_s = \sum_{r,s}^{1\ldots n} (\alpha_r e_r) \,.\, (\beta_s e_s)$$

e perciò, in virtù delle definiz. *b)* ed *a)*:

$$a \,.\, b = \sum_{r,s,t}^{1\ldots n} \alpha_r \beta_s \lambda_{rs}^{(t)} e_t\,.$$

Per distinguere un coefficiente da un fattore noi adoperiamo il punto come segno della moltiplicazione.

La moltiplicazione così definita gode evidentemente delle seguenti proprietà:

1°. $$(\rho a) \,.\, (\sigma b) = (\rho\sigma)(a \,.\, b)\,.$$

2°. Se è $a = b$, è anche $a \,.\, c = b \,.\, c$, e $c \,.\, a = c \,.\, b$.

3°. $$0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0\,.$$

Quest'ultima proprietà deve considerarsi come distinta dalla 5ª del n. 5, perchè qui lo zero è considerato non come coefficiente ma come fattore, cioè *il prodotto di due numeri complessi, di cui uno almeno è uguale a zero, è esso stesso uguale a zero.* La proposizione reciproca, come vedremo in seguito, in generale non sussiste.

4°. *Sussiste la legge distributiva:*

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c , \qquad c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b .$$

Infatti dalla definiz. VIII segue

$$(a+b) \cdot x = \sum_r (\alpha_r + \beta_r) e_r \cdot \sum_s \gamma_s e_s = \sum_{r,s} [(\alpha_r + \beta_r)\gamma_s](e_r \cdot e_s) = \sum_{r,s} (\alpha_r \gamma_s + \beta_r \gamma_s)(e_r \cdot e_s).$$

D'altra parte

$$a \cdot c + b \cdot c = \Sigma (\alpha_r \gamma_s)(e_r \cdot e_s) + \Sigma (\beta_r \gamma_s)(e_r \cdot e_s) = \Sigma (\alpha_r \gamma_s + \beta_r \gamma_s)(e_r \cdot e_s) ,$$

dunque

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c .$$

Nella stessa maniera si dimostra la seconda uguaglianza.

Non sussiste in generale la legge commutativa e associativa.

Infatti perchè la moltiplicazione riuscisse commutativa occorrerebbe (e sarebbe anche sufficiente) che fossero commutativi i prodotti delle unità. Ma da

$$e_r \cdot e_s = e_s \cdot e_r$$

segue (definiz. VIII *a)*)

$$\lambda_{rs}^{(t)} = \lambda_{sr}^{(t)} ,$$

relazione che in generale non è verificata.

Così, perchè la moltiplicazione riuscisse associativa bisognerebbe che fosse

$$(e_r \cdot e_s) \cdot e_t = e_r \cdot (e_s \cdot e_t)$$

ciò che conduce alla relazione in generale non soddisfa

$$\sum_{u,v} \lambda_{rs}^{(u)} \lambda_{ut}^{(v)} = \sum_{u,v} \lambda_{st}^{(u)} \lambda_{ru}^{(v)} .$$

8. Divisione.

La moltiplicazione non essendo in generale commutativa dà luogo a due operazioni inverse

Definizione IX. — La operazione che ha per oggetto di trovare (quando esiste) un numero complesso x tale che sia

$$x \cdot b = a \tag{1}$$

dicesi *divisione anteriore di* a *per* b, *ed* x *il quoziente anteriore.*

La operazione che ha per oggetto di trovare (quando esiste) un numero complesso y tale che sia

$$b \cdot y = a \tag{2}$$

dicesi *divisione posteriore* di a per b, ed y *il quoziente posteriore.*

Perchè esista un numero

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

che sia quoziente anteriore di a per b occorre e basta che le ξ_r verifichino le n equazioni lineari

$$\xi_1 \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{1s}^{(t)} + \xi_2 \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{2s}^{(t)} + \ldots + \xi_n \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{ns}^{(t)} = \alpha_t . \qquad (t = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

Consideriamo il determinante di questo sistema:

$$\Delta(b) = \left| \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{rs}^{(t)} \right| . \qquad (r, t = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Due casi possono darsi:

1° o il determinante $\Delta(b)$ è *identicamente nullo*, e allora il sistema (3) è o indeterminato o impossibile: diremo in ogni caso che il dato sistema di numeri complessi *non* ammette la divisione anteriore;

2° ovvero il determinante $\Delta(b)$ *non è identicamente nullo*, e allora per ogni b, per il quale è $\Delta(b) \neq 0$, la divisione è possibile ed uniforme. In questo caso diremo che il sistema *ammette* la divisione anteriore.

Analoghe considerazioni possono ripetersi per la divisione posteriore. Si dice che un sistema di numeri complessi ammette o no una divisione posteriore secondo che il determinante

$$\Delta'(b) = \left| \sum_{r=1}^{n} \beta_r \lambda_{rs}^{(t)} \right| \qquad (s, t = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

non è ovvero è identicamente nullo.

I sistemi di numeri complessi, così come sono stati definiti, possono dunque dividersi in 3 categorie:

1°. Sistemi che ammettono una divisione *bilaterale* (cioè che ammettono tanto una divisione anteriore che una divisione posteriore).

2°. Sistemi con divisione *unilaterale* (cioè sistemi che ammettono soltanto una divisione anteriore ovvero soltanto una divisione posteriore).

3°. Sistemi *senza* divisione.

9. Moduli della moltiplicazione.

Definizione X. — Un numero e si chiamerà un *modulo anteriore della moltiplicazione*, se qualunque sia il numero x del sistema si ha

$$e \, . \, x = x.$$

E un numero f si dirà un *modulo posteriore* della moltiplicazione quando, essendo x un numero qualunque del sistema si ha

$$x \, . \, f = x.$$

Intorno ai moduli della moltiplicazione è assai utile la conoscenza dei seguenti teoremi.

Teorema I. — *Un sistema di numeri complessi che possiede un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione, ammette la divisione posteriore (anteriore).*

Se il sistema ammette un modulo anteriore della moltiplicazione

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_n e_n ,$$

devono essere verificate identicamente le n equazioni

$$\xi_1 \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r1}^{(t)} + \xi_2 \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r2}^{(t)} + \ldots + \xi_n \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rn}^{(t)} = \xi_t , \qquad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

e per questo occorre che sia

$$\sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rt}^{(t)} = 1, \qquad \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rs}^{(t)} = 0 \qquad (s \neq t)\ (r, t = 1, 2, \ldots, n).$$

Ma allora si ha [8, (5)]

$$\Lambda'(e) = \left| \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rs}^{(t)} \right|_{s,t} = 1,$$

cioè il determinante della divisione posteriore non è identicamente nullo, e però il sistema ammette la divisione posteriore.

Ne risultano i seguenti corollari.

Corollario I. — *Un sistema, che ammette una divisione unilaterale anteriore (posteriore), non può possedere un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione.*

Corollario II. — *Un sistema, che possiede un modulo anteriore e un modulo posteriore della moltiplicazione, ammette una divisione bilaterale.*

Teorema II. — *Se un sistema ammette un modulo anteriore* e *e un modulo posteriore* f *della moltiplicazione, questi saranno eguali. Oltre* e *non esiste alcun altro modulo anteriore, e oltre* f *alcun altro modulo posteriore.*

Infatti, essendo e un modulo anteriore, si ha

$$e \,.\, f = f,$$

ed essendo f un modulo posteriore, si ha

$$e \,.\, f = e$$

e però

$$e = f.$$

Ogni altro modulo anteriore e', dovendo essere eguale a f, sarebbe eguale a e, e ogni altro modulo posteriore f', dovendo essere eguale a e, sarebbe eguale a f.

Michele Cipolla.

(Continua)

I DETERMINANTI DI ORDINE INFINITO E DI SPECIE SUPERIORE

È noto che da qualche tempo sono stati presi in considerazione i cosidetti determinanti di specie superiore ed i determinanti di ordine infinito.

La teoria dei primi fu fatta intravvedere dal Vandermonde a proposito di un problema sul giuoco degli scacchi, e quella dei secondi dall'astronomo Hill per un problema di astronomia riguardante il perigeo lunare.

La particolareggiata bibliografia su tali ricerche si può leggere nel pregevole trattato « I Determinanti » del prof. Pascal.

Aggiungerò solo che nel 1897 il Cazzaniga, negli *Annali di Matematica,* trattò i determinanti d'ordine infinito e ne espose con chiarezza i principali fondamenti.

Ora io ho appunto per iscopo lo studio di quei determinanti che, essendo di specie superiore sono anche di ordine infinito.

I. — Definizioni.

1°. Consideriamo un gruppo infinito secondo q di quantità

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = -\infty \ldots +\infty).$$

Se nell'iperspazio corrispondente al numero q formiamo la matrice colla regola ordinaria essa la chiameremo la rappresentazione di un *determinante di ordine infinito e di specie* q.

2°. Sia la matrice

$$[a_{i_1 i_2 \ldots i_q}] \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = -n \ldots 0 \ldots +m).$$

Essa definisce q determinanti di specie q i quali, come è noto, sono differenti fra di loro se q è dispari, ed uguali fra di loro se q è pari.

Designeremo questi determinanti mediante il simbolo

$$D_{mn}^{(r)} \qquad (r = 1\, 2 \ldots q)$$

ove r rappresenta il gruppo fisso.

Ora se il valore del determinante $D^{(r)}_{mn}$ per valori infinitamente crescenti di m ed n tende ad un limite determinato questo limite lo indicheremo con $D^{(r)}$ ovvero con

$$[a_{i_1 i_2 \ldots i_q}]^{(r)} \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = -\infty \ldots + \infty).$$

Se il limite non esiste il determinante si dirà *divergente*; se invece cambia con la legge colla quale m ed n tendono all' infinito, il determinante si dirà *indeterminato*.

3°. Applicando il noto criterio per la ricerca del limite di una funzione, risulta:

Il determinante $D^{(r)}$ è convergente quando per ogni σ piccolo ad arbitrio si può determinare un numero positivo N tale che la disuguaglianza

$$|D^{(r)}_{m+p\ n+q} - D^{(r)}_{m\,n}| < \sigma$$

resti verificata per tutti i valori di m ed n maggiori di N e per qualunque valore positivo di p e q.

E dovendo essere indifferente la legge con la quale m ed n tendono all' infinito, supporremo sempre $m = n$ e

$$D^{(r)}_{m\,n} = D^{(r)}_{m}; \qquad D^{(r)} = \lim D^{(r)}_{m}.$$

In un determinante infinito di specie q l'elemento $a_{00\ldots0}$ sarà detto *origine*.

Gli elementi

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q}\ (i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$

si diranno *principali* e la diagonale che li contiene *diagonale principale*.

Un determinante resta definito quando si fissa l'origine e la diagonale principale.

II. — Proprietà fondamentali.

1°. *Il valore di un determinante convergente non cambia quando si prenda per origine un elemento diagonale arbitrario.*

Ed infatti ciò non è che una conseguenza di quanto abbiamo detto precedentemente poichè tutto si riduce a far crescere con un'altra legge i numeri m ed n.

2°. Si dimostrano poi analogamente a quanto concerne i determinanti quadratici di ordine infinito i seguenti teoremi:

I. — *In un determinante infinito convergente, di specie dispari non si possono cambiare gli strati di un gruppo con gli strati di un altro.*

II. — *Se si scambiano fra loro due strati paralleli di un determinante convergente di ordine infinito, esso cambia di segno a meno che il determinante non sia di specie dispari ed i due stati paralleli non siano del gruppo fisso.*

Di qui si deduce:

Se un determinante convergente di ordine infinito ha due strati paralleli uguali, od equimultipli, esso è nullo a meno che il determinante non sia di specie dispari e gli strati uguali non appartengano al gruppo fisso.

III. — *Se in un determinante convergente si moltiplicano gli strati del primo gruppo rispettivamente per delle quantità*

$$\alpha'_i \, (i = 1\,2 \ldots \infty);$$

gli strati del secondo gruppo per delle quantità

$$\alpha''_i \, (i = 1\,2 \ldots \infty) \ldots \text{ ecc.}$$

tali che i prodotti infiniti

$$p' = \pi_i \, \alpha'_i\,; \qquad p'' = \pi_i \, \alpha''_i \ldots \text{ ecc.}$$

siano assolutamente convergenti e diversi da zero, otterremo

$$D'^{(r)} = p' \, p'' \ldots D^{(r)}$$

essendo D^r *l'antico determinante e* D'^r *il nuovo.*

3°. *Ogni determinante convergente di cui gli indici degli strati dei vari gruppi si estendono da* $-\infty$ *a* $+\infty$ *può essere trasformato in un altro dello stesso valore nel quale i detti indici si estendono da* 1 *ad* ∞.

Ed infatti trasportando tutti gli strati di ogni gruppo aventi indice negativo in modo che nel nuovo determinante $D'^{(r)}$ la successione

$$1, 2, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots$$

degli strati di ogni gruppo sia data dalla successione:

$$0, -1, 1, -2, 2, \ldots, -n, n, \ldots$$

degli strati di $D^{(r)}$, risulterà un determinante

$$D'^{(r)} = [b_{i_1 i_2 \ldots i_q}]$$

in cui sarà:

$$i_1 \, i_2 \ldots i_q = 1\,2 \ldots \infty\,.$$

E siccome, qualunque sia q si avrà sempre:

$$D^{(r)}_{mm} = D^{(r)}_{2m+1}$$

(poichè anche nel caso in cui q è dispari il numero dei gruppi in cui uno scambio di due strati, cambia segno al determinante è sempre pari) resterà ora facile vedere l'uguaglianza

$$D'^{(r)} = D^{(r)}\,.$$

4°. In seguito potremo quindi supporre di trattare determinanti

$$D^{(\alpha)} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_q}] \quad (i_1 i_2 \ldots i_q = 1\, 2 \ldots \alpha)$$

e di più considereremo il primo gruppo, il gruppo fisso. In tal modo il determinante lo indicheremo addirittura colla lettera D.

III. — Criterio di convergenza - Determinanti normali.

1°. Chiameremo *normale* ogni determinante infinito tale che il prodotto degli elementi diagonali sia assolutamente convergente e così pure la serie q^{upla} degli elementi non-diagonali.

2°. *Ogni normale è convergente.* Infatti se il prodotto infinito

$$\pi\,(a_{i_1 i_2 \ldots i_q}) \qquad (i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$

è assolutamente convergente, ponendo

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q} = 1 + a'_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad (i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$
$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q} = a'_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad (\text{ove non è } i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$

si ricava che la serie semplice

$$\Sigma\,|\,a'_{i_1 i_2 \ldots i_q}| \qquad (i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$

è convergente, e così pure la serie q^{upla}

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_q} |\,a'_{i_1 i_2 \ldots i_q}| \qquad (\text{senza più nessuna restrizione per le } i)$$

ed il prodotto infinito

$$\overline{P} = \pi_{i_1} (1 + \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_q} |\,a'_{i_1 i_2 \ldots i_q}|).$$

Ora se in D_{m+p} e in $\overline{P}_{m+p}$, rispettivamente, poniamo certi elementi uguali a zero otteniamo rispettivamente D_m e $\overline{P}_m$. I termini che si annullano rappresentano quindi le differenze

$$D_{m+p} - D_m \qquad \text{e} \qquad \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m\,;$$

e siccome i termini che si annullano in $\overline{P}_{m+p}$ sono tutti positivi e solamente alcuni fra essi rappresentano, in valore assoluto, quelli che si annullano in D_{m+p}, possiamo concludere essere

$$|\,D_{m+p} - D_m\,| < \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m$$

e, essendo P convergente, lo sarà pure D c. d. d.

Come si vede la condizione di essere normale è solamente sufficiente per stabilire la convergenza del determinante.

Analoga dimostrazione a quella fatta per i determinanti quadratici richiede il seguente teorema:

Se in un normale di specie qualunque al posto degli elementi di un numero qualsivoglia, ma finito, di strati si pongono altri elementi ad arbitrio, ma inferiori in valore assoluto ad un certo numero finito il nuovo determinante è ancora convergente.

IV. — Minori di un normale.

1°. In un determinante $D = [a_{i_1 i_2 \dots i_q}]$ scegliamo ad arbitrio un certo numero r di strati del primo gruppo e pure ad arbitrio altrettanti strati di ogni altro gruppo

Siano

$\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_r$	gli	strati	del	primo	gruppo	
$\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_r$	»	»	»	secondo	»	
$\gamma_1\ \gamma_2 \dots \gamma_r$	»	»	»	terzo	»	ecc.

e al posto degli elementi

$$a_{\alpha_{p_1} \beta_{p_2} \gamma_{p_3} \dots}$$

degli strati indicati poniamo l'unità se è

$$p_1 = p_2 = \dots = p_q$$

e poniamo lo zero se tali uguaglianze non hanno luogo.

Il determinante che così risulta lo chiameremo un *sottodeterminante* o *minore infinito di ordine* r e sarà indicato colla notazione:

$$D_r = \text{agg.}\ a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots}\ a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots} \dots a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \dots} = \begin{pmatrix} \alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_r \\ \beta_1\ \beta_2 \dots \beta_r \\ \gamma_1\ \gamma_2 \dots \gamma_r \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

in cui il posto della diagonale principale è quello stesso che essa occupa nel determinante D.

Gli strati considerati si incrociano in r^q elementi che non appartengono al minore considerato e che formano un *minore finito di ordine* r detto *aggiunto* dell'altro, e reciprocamente.

Quei minori sulla cui diagonale principale non compare alcun elemento non diagonale del determinante dato si chiamano *minori diagonali*. È evidente che:

Ogni minore infinito di un normale è normale.

2°. Il minore

$$D^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_r \\ \beta_1\ \beta_2 \dots \beta_r \\ \gamma_1\ \gamma_2 \dots \gamma_r \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

(in cui sussistono le relazioni: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$; $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r$; $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_r; \ldots$) del normale D è uguale al determinante $D'^{(r)}$ che si ottiene sopprimendo in D gli strati $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$ del primo gruppo; gli strati $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r$ del secondo gruppo, ecc., ... ed attribuendo poscia al nuovo determinante il segno $(-1)^s$, essendo s la somma delle inversioni che formano gli indici variabili nei termini principali dei due minori, uno infinito $D'^{(r)}$ e l'altro finito d'ordine r, quando essi termini si scrivano uno dopo l'altro e si dispongano gli indici fissi nell'ordine naturale.

Infatti osservando dapprima che $D'^{(r)}$ è pure convergente, perchè la diagonale principale del determinante $D'^{(r)}$, a meno di un numero finito di elementi resta sempre quello di D, poniamo

$$\alpha_r < m, \qquad \beta_r < m, \qquad \gamma_r < m \ldots$$

e indichiamo con $D^{(r)}_m$ il determinante che si ottiene da D_m ponendo l'unità in luogo degli elementi

$$a_{\alpha_{p_s}, \beta_{p_s}, \gamma_{p_s}, \ldots} \quad (s = 1, 2 \ldots r)$$

e zero per i restanti elementi degli strati considerati; indichiamo poi con $D'^{(r)}_m$ il minore di D^m ottenuto sopprimendo in esso gli stessi strati. Allora, dalla uguaglianza

$$D^{(r)}_m = D'^{(r)}_m (-1)^s$$

(vedi la mia memoria « I determinanti di specie superiore » nel periodico: *Le matematiche pure ed applicate,* tomo II, num. 8-9) per un m finito e dalle disuguaglianze

$$|D^{(r)} - D^{(r)}_m| < \frac{\sigma}{2}; \qquad |D'^{(r)} - D'^{(r)}_m| < \frac{\sigma}{2}$$

per σ piccolo a piacere ed m sufficientemente grande, il teorema è dimostrato.

3°. Se da un minore

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \; \beta_2 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \; \gamma_2 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

di un normale si deduce un altro minore

$$\begin{pmatrix} \alpha_{t_1} \; \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_r} \\ \beta_{v_1} \; \beta_{v_2} \ldots \beta_{v_r} \\ \gamma_{w_1} \; \gamma_{w_2} \ldots \gamma_{w_r} \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

con p_1 scambi di indici α, p_2 scambi di indici β, p_3 scambi di indici γ, ecc. il nuovo minore è uguale al primo moltiplicato per $(-1)^{p_1+p_2+\ldots+p_q}$ ovvero per $(-1)^{p_2+p_3+\ldots+p_q}$ secondo che q è pari o dispari. (Si noti bene che teniamo fisso il primo gruppo.)

Questo teorema è evidente quando si ponga mente che dal primo minore si può passare al secondo cogli stessi p_1 scambi degli strati $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_r$ fra di loro; gli stessi p_2 scambi degli strati $\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_r$ fra di loro, ecc.

4°. Il minore

$$\begin{pmatrix} 1\,2\ldots n \\ 1\,2\ldots n \\ 1\,2\ldots n \\ \ldots\ldots \end{pmatrix},$$

al crescere di n tende all'unità. La dimostrazione è affatto analoga a quella fatta per i determinanti quadratici.

5°. Un determinante qualunque finito potrà sempre porsi sotto forma di un determinante infinito normale continuando la sua diagonale principale con elementi uguali all'unità positiva e ponendo zero per gli altri elementi.

Così pure i determinanti infiniti

$$D = [a_{i_1 i_2 \ldots i_q}] \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = 1\,2\ldots\infty)$$

si possono ritenere come minori diagonali di quelli i cui strati vanno tutti da $-\infty$ a $+\infty$.

V. — Sviluppo di determinanti normali.

1°. Sia dato il determinante normale

$$D = [a_{i_1 i_2 \ldots i_q}] \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = 1\,2\ldots\infty)$$

e formiamo l'identità

$$\Delta_m = \Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + (\Delta_3 - \Delta_2) + \ldots + (\Delta_m - \Delta_{m-1})$$

ove

$$\Delta_r = [a_{i_1 i_2 \ldots i_q}] \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = 1\,2\ldots r).$$

Poniamo come prima

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q} = a'_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad (\text{ove non è } i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q} = 1 + a'_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad (i_1 = i_2 = \ldots = i_q)$$

$$\text{e} \qquad \Delta_r - \Delta_{r-1} = \nabla_r\,.$$

Allora se si riflette che il complemento algebrico di un elemento della diagonale principale è precisamente il complemento dell'elemento stesso preso col segno $+$, essendo in questo caso $V' = V_1 q$ un numero sempre pari (vedi la mia memoria sopracitata) si vede che si ottiene per ∇_r un determinante che diversifica dall'altro Δ_r soltanto per l'elemento $a_{rr\ldots r}$ sostituito in ∇_r coll'elemento $a'_{rr\ldots r}$.

Ora dico che nella espressione

$$D = \nabla_1 + \nabla_2 + \ldots + \nabla_m + \ldots$$

la serie del secondo membro converge assolutamente.

Infatti è facile vedere che la serie dei moduli è convergente, perchè paragonandola con la serie convergente a termini positivi

$$\overline{P} = \overline{\pi}_1 + (\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_1) + (\overline{\pi}_3 - \overline{\pi}_2) + \ldots + (\overline{\pi}_m - \overline{\pi}_{m-1}) + \ldots$$

ove è

$$\overline{\pi}_r = \pi^{r}_{i_1=1}(1 + \sum_{i_2 i_3 \ldots i_q} |a_{i_1 i_2 \ldots i_q}|)$$

si ha

$$|\Delta_m - \Delta_{m-1}| = |\nabla_m| \leq \overline{\pi}_m - \overline{\pi}_{m-1} \qquad \text{c. d. d.}$$

Ogni espressione $\overline{\pi}_m - \overline{\pi}_{m-1}$ può essere scritto come una somma di termini positivi; ogni termine di ∇_m è pure nell'espressione stessa contenuto sempre in valore assoluto, quindi se si esprime il determinante ∇_m come la somma algebrica di

$$M = (m\,!)^{q-1}$$

termini tutti presi col loro valore assoluto, la serie D resta ancora convergente. Posto quindi

$$\nabla_m = \sum_{k=1}^{M} \nabla_{mk}$$

la serie doppia

$$D = \sum_m \sum_k \nabla_{mk}$$

converge assolutamente.

2°. Estendiamo ora al caso nostro gli sviluppi che si possono fare per i determinanti finiti.

Raccogliamo nella serie (1) gli elementi degli strati $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$ che possiamo supporre appartenenti al primo gruppo fisso.

Allora avremo

$$D = \Sigma\, a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots} A_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots}}$$

in cui come si vede

$$A_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots}}$$

è il coefficiente del prodotto

$$a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots}.$$

Il sommatorio è esteso a tutti i sistemi (β) di r strati del secondo gruppo presi fra gli infiniti strati del gruppo stesso nel determinante D; a tutti i sistemi (γ) di r strati del terzo gruppo, ecc.

Ma se nella presente identità poniamo $a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} = 1$ e poniamo zero in luogo di tutti gli elementi degli strati individuanti l'elemento considerato, e la stessa operazione facciamo sull'elemento $a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots}$ e strati corrispondenti, ecc., otterremo

$$D^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} = A_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r}}.$$

Onde potremo scrivere

$$D = \Sigma\, a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Derivando avremo

$$\frac{\partial^r D}{\partial a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} \partial a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots \partial a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

il che mostra come si possa ottenere l'*aggiunto* o *complemento algebrico* del prodotto di più elementi.

Come casi particolari avremo

$$D = \sum_{(\beta\gamma\ldots)} a_{\alpha\beta\gamma\ldots} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial D}{\partial a_{\alpha\beta\gamma\ldots}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Se il determinante è di specie pari avremo

$$0 = \sum_{(\beta\gamma\ldots)} a_{\rho_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\rho_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots a_{\rho_r \beta_r \gamma_r \ldots} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_1 \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

in cui $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_r$ rappresentano un sistema di r strati del primo gruppo, che differisce dal sistema

$$a_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r .$$

Se il determinante è di specie qualunque si avrà

$$0 = \sum_{(\beta\gamma\ldots)} a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots k_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \nu_2 \ldots k_2 \ldots} a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots k_r \ldots} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \\ H_1 \ldots H_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

VI. — **Moltiplicazione.**

1°. *Il prodotto di due normali di specie* p *e* q *rispettivamente si può mettere sotto forma di un normale di specie* $p+q-1$.

Siano infatti

$$A = |a_{i_1 i_2 \dots i_p}| \qquad e \qquad B = |b_{j_1 j_2 \dots j_q}|$$

due normali, e scriviamo il determinante di specie $p+q-1$

$$C = |c_{k_1 k_2 \dots k_{p+q-1}}|$$

ponendo

$$c_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r j_1^r \dots j_{q-1}^r} = a_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r} \, b_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}.$$

Allora C è un determinante normale. (Ciò dimostrato resterà poi facile vedere che esso converge al valore A . B; vedi la mia Nota sopra citata.)

Ed invero supponendo sempre

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} = a'_{i_1 i_2 \dots i_p}$$
(ove non è contemporaneamente $i_1 = i_2 \dots = i_p$)

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} = 1 + a'_{i_1 i_2 \dots i_p}$$
(ove è contemporaneamente $i_1 = i_1 = \dots i_p$)

ed altrettanto per gli elementi *b* e *c*, avremo

$$\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma\, c'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} = \underset{\left(\text{ove non è} \begin{cases} r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r \\ r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r \end{cases}\right)}{\Sigma\, a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r} \, b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r \text{ e non è } r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma \left(1 + a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r}\right) b'_{r j_1^r \dots j_{p-1}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove è } r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r \text{ e non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r)}{\Sigma \left(1 + b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}\right) a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r}}$$

cioè

$$\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma\, c'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} =$$

$$= \underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma\, a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r} \, b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r)}{\Sigma\, a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r}} \qquad + \underset{(\text{ove non è } r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r).}{\Sigma\, b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} \qquad (1)$$

D'altra parte sarà

$$\Sigma\left(1 + c'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r j_1^r \ldots j_{q-1}^r}\right) = \Sigma\left(1 + a'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r}\right)\left(1 + b'_{rj_1^r \ldots j_{q-1}^r}\right) =$$
$$= \Sigma\left(1 + a'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r} + b'_{rj_1^r \ldots j_{q-1}^r} + a'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r}\, b'_{rj_1^r \ldots j_{q-1}^r}\right)$$
(qui è sempre $r = i_1^r = \ldots = i_{p-1}^r = j_1^r = \ldots = j_{q-1}^r$)

cioè

$$\Sigma\, c'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r j_1^r \ldots j_{q-1}^r} = \Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r} +$$
$$+ \Sigma\, b'_{rj_1^r \ldots j_{q-1}^r} + \Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-1}^r}\, b'_{rj_1^r \ldots j_{q-1}^r} \qquad (2)$$
(in cui è $r = i_1^r = \ldots = i_{p-1}^r = j_1^r = \ldots = j_{q-1}^r$).

Ma tanto in (1) che in (2) le serie del secondo membro convergono assolutamente, dunque convergono pure le serie che si trovano al primo membro ed il determinante di specie $p + q - 1$ formato colle c è normale c. d. d.

2°. *Il prodotto di due determinanti*

$$A = |a_{i_1 i_2 \ldots i_p}| \qquad \text{e} \qquad B = |b_{j_1 j_2 \ldots j_q}|$$

di specie p ***e*** q ***rispettivamente si può indicare mediante un normale*** C ***di specie*** $p + q - 2$ ***i cui elementi*** c ***sono dati dalla relazione***

$$c_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r} = \sum_{\lambda_r = 1}^{\infty} a_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}.$$

Anche qui ci basterà dimostrare che C è normale, per potere poi stabilire la formula $A \,.\, B = C$.

Infatti applicando gli indici alle lettere a, b, c, e facendo le solite posizioni si avrà

$$\underset{(\text{ove non è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, c'_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r}} = \underset{\left(\text{ove non è} \begin{cases} r = i_1^r = \ldots = i_{p-2}^r = \lambda_r \\ \lambda_r = i_{p-1}^r = \ldots = i_{p+q-3}^r \end{cases}\right)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}} +$$
$$+ \Sigma\left(1 + a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\right) b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r} +$$
(ove è $r = i_1^r = \ldots = i_{p-2}^r = \lambda_r$ e non è $\lambda_r = i_{p-1}^r = \ldots = i_{p+q-3}^r$)
$$+ \Sigma\left(1 + b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}\right) a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}$$
(ove è $\lambda_r = i_{p-1}^r = \ldots = i_{p+q-3}^r$ e non è $r = i_1^r = \ldots = i_{p-2}^r = \lambda_r$)

cioè

$$\underset{(\text{ove non è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, c'_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r}} = \underset{(\text{ove non è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r = \lambda_r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}} +$$
$$+ \underset{(\text{ove non è } r = i_1^r = \ldots = i_{p-2}^r = \lambda_r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}} \qquad + \underset{(\text{ove non è } \lambda_r = i_{p-1}^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}}$$

ma essendo convergenti assolutamente le tre serie del secondo membro, lo sarà pure quella del primo membro.

Inoltre si ha

$$\begin{array}{ll} \Sigma\left(1 + c'_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r}\right) & = \Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r} + \\ (\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r) & (\text{ove è } \lambda_r \mp r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r) \\ & + \Sigma\left(1 + a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\right)\left(1 + b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}\right) \\ & (\text{ove è } \lambda_r = r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r) \end{array}$$

cioè

$$\begin{array}{ll} \Sigma\, c'_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r} & = \Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r} + \\ (\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r) & (\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r) \\ + \Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r} & + \Sigma\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r} \\ (\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p-2}^r = \lambda_r) & (\lambda_r = i_{p-1}^r = \ldots = i_{p+q-3}^r) \end{array}$$

ed essendo le tre serie del secondo membro convergenti, lo sarà pure la serie del primo membro, dunque il determinante è *normale* c. d. d.

Genova. CALEGARI ADRASTO.

PER IL QUARANTESIMO D'INSEGNAMENTO DI "GIOVANNI GARBIERI„

Ebbi la fortuna di aver a maestro Giovanni Garbieri nel 1880. Io frequentavo allora il terzo anno della sezione fisico-matematica nel R. Istituto Tecnico di Roma, che era diretto con energia e rara competenza dal Rodrigues e noverava insegnanti valorosi come il Besso, lo Gnoli, il Morandi, il Torraca, il Porena, ecc., che io ricordo e ricorderò sempre con grande e riconoscente affetto.

Il Garbieri insegnava matematica nel primo biennio e Geometria proiettiva e descrittiva nel quarto anno e si era cattivata la stima dei colleghi e l'affetto degli allievi, di quella non meno necessario all'insegnante; affetto verace, sincero e disinteressato; chè il Garbieri, dai modi franchi e un po' risoluti, giusto ma rigoroso, era inesorabile coi negligenti e buono, come un padre, cogli studiosi. E i nostri professori lo additavano come esempio mirabile di ciò che possa il felice connubio del forte ingegno, colla tenacia dei propositi e la ferrea saldezza dell'animo. Si sapeva che il giovane professore "romagnolo„ già maestro nelle scuole comunali di Bologna, in mezzo alle difficoltà e alla lotta per vivere, pagato il tributo alla patria, aveva conseguita la laurea all'Università di Bologna; aveva lavorato, lottato solo, con tenacia, con energia indomabile, guadagnandosi la fiducia del

Beltrami (maestro venerato a Bologna) del Cremona, del Battaglini, i cui nomi gloriosi non erano sconosciuti ai giovani dell'Istituto di Roma; si sapeva della vita semplice ch'egli conduceva in una modesta stanzetta, lontano dai suoi cari, dedito interamente a quegli studi, che presto gli avrebbero fruttato il premio maggiore che si aspetta da uno studioso: una cattedra all'Università; premio ambíto, desiderato e che, forse in Italia, non è adeguato compenso alle fatiche ai disagi, allo sciupìo degli anni più belli della giovinezza.

L'autunno di quello stesso anno, offertomi per disegnare le figure degli elementi di Geometria intuitiva che il Garbieri compilava insieme con un altro valoroso insegnante, il Verger, io ebbi occasione di avvicinar meglio il maestro; appunto da allora maestro affettuoso e venerato. Quel compito, molto modesto, che io disimpegnava con amore, è tra i più lieti ricordi della mia gioventù, ben lontana oramai! Quanto non debbo a quei maestri, coi quali quasi ogni giorno io mi trovava; quanta e quale influenza sui miei studi, sul mio avvenire! quanti insegnamenti, continuati poi nei primi mesi dell'anno scolastico 80-81, nel quarto anno, allorchè il Garbieri, da pari suo, ci faceva gustare le prime bellezze degli aurei elementi di Geometria proiettiva del Cremona! Insegnamenti troppo presto cessati; perchè il Garbieri ai primi dell'81, lasciava l'Istituto di Roma per quello di Savona. Da allora in poi le vicende della vita mi hanno allontanato dal maestro, che volle tuttavia sempre amorevolmente seguire i miei passi. A me dunque, se non altro pel triste privilegio dell'età, a me sia concesso di parlare del maestro, dell'uomo di scienza, dell'educatore. Ed oggi, nel giorno lieto in cui Egli può, con sereno e legittimo orgoglio, rievocare la sua lunga, laboriosa carriera; in cui l'omaggio affettuoso dell'allievo è espressione calda di ammirazione, non interessato e convenzionale ossequio, per un forte intelletto, per un grande carattere; in questo giorno giungano alla modesta casetta di Nervi le felicitazioni sincere dei suoi scolari, di quanti ammirano l'ingegno e la indomabile volontà dei propositi.

Nominato maestro nelle scuole elementari di Bologna quaranta anni fa, ai primi di dicembre del 1864; ottenuta la laurea in matematica, passava il Garbieri ad insegnare Meccanica e Geometria descrittiva nell'Istituto Industriale di Reggio Emilia. Dal 1879 sino ai primi dell'81 insegnò in quello di Roma, che abbandonò poi per recarsi a Savona a dirigere l'Istituto Tecnico e Nautico. In Savona restava appena un anno, poichè ai primi dell'82 occupava, in seguito a concorso, la cattedra di Algebra nella Università di Padova.

Questo periodo della attività scientifica e didattica, trascorso nell'insegnamento primario e secondario e nella milizia, è forse il più laborioso, il più vario e quello che più rivela la forte fibra del Garbieri. In mezzo a vari e molteplici insegnamenti; tra i doveri, scrupolosamente adempiuti, della scuola, egli coltivava (e con quanti sacrifizi!) quegli studi che dovevano rivelare il suo ingegno e che risentono la potente e benefica influenza del Beltrami; studi che, specialmente, si riferiscono a due degli argomenti che il Garbieri ha poi sempre coltivati con amore; la teoria dei determinanti e quella delle forme.

È del 74 il suo primo lavoro, un libro bello ed utile: *I determinanti con numerose applicazioni*, scritto con tanta chiarezza, con tanta dovizia di buona e soda dottrina e destinato ad agevolare ai giovani la lettura dei libri classici del Brioschi e del Baltzer. Nel breve periodo di quattro anni pubblicava nel Giornale di Napoli, diretto dal Battaglini, che con rara abnegazione era, più che aiuto, provvidenza ai giovani matematici italiani, alcune eleganti e notevoli memorie sullo studio delle curve razionali; sulla trisezione dell'angolo e sui determinanti cubici e a più indici; e nel " Bullettino del Boncompagni „ alcune traduzioni dal tedesco sulle origini e i gradi di sviluppo del principio delle coordinate e uno studio storico critico sui determinanti.

La memoria sui determinanti cubici era stata riassunta e commentata innanzi all'Istituto Veneto dal Bellavitis, che del Garbieri aveva altissima stima; e il Bellavitis, grande, modesto e buono non disdegnava visitare il giovane matematico nella sua povera cameretta in Roma; poichè, come quel grande dichiarava, le occupazioni del Garbieri non avrebbero permesso di andare a trovar lui al Senato.

Il soggiorno in Roma fruttò lo studio sulle forme invariantive delle coniche, pubblicato nell'Annuario dell'Istituto Tecnico dell'80; e quello complementare sulle forme invariantive delle superficie di 2° grado vide la luce nell'Annuario dell'Istituto Tecnico e Nautico di Savona, ch'egli ha fondato.

In tutti questi lavori il Garbieri mostra rara perizia, uno studio incessante (e sempre coronato da successo) di esporre risultati nuovi, o anche noti, in modo semplice elegante e naturale.

Dell'opera sua, breve ma efficace, come preside dell'Istituto di Savona, per lui risorto a nuova vita, fa fede la dotta relazione dell'Annuario.

Una mal celata opposizione ai suoi metodi e alla sua energia e più ancora il vivo desiderio dell'insegnamento universitario, lo indussero a prender parte al Concorso banditosi per la cattedra rimasta vacante a Padova per la morte dell'illustre Bellavitis. Vinto il concorso, si trasferiva ai primi dell'82 a Padova e inaugurava il suo insegnamento con una breve e succosa prolusione: " Come l'Algebra s'introdusse e si svolse in Europa per opera degli Italiani „. Nel nuovo e più elevato ambiente, oltre a numerose memorie inserite negli Atti dell'Istituto Veneto sopra: alcune classi di funzioni simmetriche; le equazioni alle derivate parziali; l'eliminazione delle funzioni arbitrarie; i fasci e le schiere di superficie polari covarianti e i loro invarianti simultanei; le superficie inviluppi; dava principio, insieme coll'illustre prof. Capelli, a quel Corso di Analisi algebrica che sarebbe stato certamente il trattato classico di Algebra degli italiani, se, purtroppo, non si fosse arrestato al primo volume.

Non passò tranquillo il soggiorno del Garbieri a Padova; molti ancora rammenteranno alcuni incidenti, finiti in modo ben singolare, purtroppo non unici e nemmeno rari, e che anzi occorrono spesso a chi, contrariamente agli interessi dei negligenti, compie scrupolosamente il proprio dovere e, in mezzo alla indifferenza dei molti, cerca di opporsi alla brutta piaga delle vacanze abusive. E se il Garbieri usciva illeso ed illibato da una piccola tempesta; se poteva consolarsi dell'approvazione dei buoni, e di quella preziosa di Aristide Gabelli che applaudiva " con impeto il giorno, purtroppo raro, che un forte carattere si leva a dimostrare che vi è ancora chi sente la religione del dovere „; l'animo suo buono non potè non essere profondamente addolorato.

E forse non le sole esigenze del miglioramento economico e le mutate condizioni di famiglia indussero il Garbieri ad accettare nel 1889 l'invito della Facoltà di Scienze di Genova, che lo chiamava ad occupare la cattedra di Algebra e Geometria analitica lasciata dal Marsano.

A Genova, in cui ebbe successivamente l'incarico delle Applicazioni di Geometria descrittiva e di Statica grafica nella Scuola di Applicazione, se non ha lasciato i propri studi prediletti, e ne fanno fede, fra l'altro, l'Introduzione ad una Teorica dell'eliminazione, inserita nel Giornale di Napoli, e la nota sulla teoria della eliminazione tra due equazioni, negli Atti dell'Accademia Gioenia, il Garbieri volse più specialmente la sua attività ad un altro campo, in cui, se v'è in Italia chi lo eguaglia, nessuno certo lo supera. Il lungo, proficuo tirocinio nelle scuole elementari e secondarie, unito ai forti studi e a quel corredo svariato ed indispensabile di profonde cognizioni della scienza di cui si vogliono esporre i rudimenti, dovevano porgere al Garbieri, che tutte le forze del suo ingegno, dalla giovinezza alla forte maturità, aveva dedicate alla educazione dei giovani, occasione di raccogliere nuovi e forse più preziosi allori.

Quanto lavoro costi scrivere un libro elementare per i giovanetti, solo sa chi, con coscienza, a tal cimento si sia provato. " Bisogna, diceva il venerando e compianto Cremona, lasciare da canto i più cari studi; mettersi a litigare coll'abbicci della scienza; sciupare il meglio delle forze „. Quanto sia rimunerato in Italia, in generale, un tal lavoro è anche ben noto. Non pare tuttavia che tali difficoltà siano per disanimare giovani e vecchi autori; nè si può certo dire che la produzione, almeno per la quantità, non sia rigogliosa. Quella del Garbieri merita, senza contrasto, uno dei posti più onorevoli.

Dal 1884 sino ad oggi, per circa un ventennio i libri del Garbieri successivamente riveduti, migliorati, ampliati con amore, hanno subìto la prova del fuoco nelle nostre scuole.

Nelle auree norme ai maestri per insegnare l'Aritmetica e la Geometria nelle scuole elementari; nelle appendici ai vari suoi testi di aritmetica, rivive il vecchio e glorioso maestro di scuola. E alla scuola elementare, nella forte maturità pare che il Garbieri abbia voluto dedicare tanta e così gran parte di sè stesso. È dovuta al Garbieri l'idea originale (e ci basti questo solo pallido e fugace accenno) della fusione nel calcolo dei numeri razionali; idea sviluppata magistralmente nei recenti Elementi di Aritmetica Pratica che, nel loro genere, sono un vero capolavoro.

Alla scuola non ha mai cessato di prodigare pensieri, cure e studi. Soldato (era zappatore nel Genio) nel 1872, mentre faceva i suoi corsi all'Università, dà opera per l'istruzione dei condannati nelle carceri, e fa voti perchè l'istruzione dell'esercito fosse oggetto di studio da parte degli educatori; legato da fraterna amicizia col Bartoli (la cui perdita immatura addolora ancora gli studiosi) si fa divulgatore degli studi di quell'illustre fisico sulla misura del calore solare e si schiera con vigore e con arguzia tra i sostenitori di un nuovo indirizzo nello studio della Mineralogia a proposito di una nota questione per la Cattedra di Mineralogia nella Università di Pavia; un bel libro di un valoroso allievo, il prof. Virgilii, che a sussidio di studi sociali porta il contributo di una seria educazione matematica, gli porge occasione di parlare con cuore e con senno del problema agricolo; e finalmente nel Pensiero Italiano del gennaio 95 si leva con sante e vibrate parole (ma quanto intese?) contro il sovraccarico intellettuale delle nostre scuole; e in questo articolo il Garbieri esprimeva e sintetizzava tutto il nobile scopo e l'ardente desiderio di tutta la sua carriera: " Vedere, cioè i nostri figliuoli crescere laboriosi, onesti, istruiti e anche un tantino educati nel cuore e nel carattere ".

Il Garbieri, nei suoi eccellenti libri di testo, si firma professore ordinario nella Università di Genova, già maestro nelle scuole elementari di Bologna. Egli ricorda con giusto orgoglio le sue modeste origini; ed il suo nome è invero degno di figurare nel libro dello Smiles; esempio ai forti, incitamento a coloro che si lasciano abbattere dalle prime difficoltà.

La sua forte intelligenza sia ancora per lungo tempo onore, lustro e decoro della Scienza; la sua virtù maschia, il forte carattere siano sempre presenti agli insegnanti ed agli allievi di tutte le nostre Scuole.

Piedimonte Etneo, ottobre 1904.

ROBERTO MARCOLONGO.

DISTANZE DI ALCUNI PUNTI NOTEVOLI NEL TETRAEDRO

In questa breve nota ci proponiamo di trovare una formula generale la quale permetta di esprimere la distanza di un punto P dello spazio dal punto K_n [1] in funzione delle lunghezze degli spigoli, delle aree delle facce e delle distanze del punto P stesso dai vertici del tetraedro. Da questa formula, che è una estensione di quella trovata dal sig. THIRY, [2] trarremo una serie di relazioni importanti per la geometria del tetraedro. A questo scopo premettiamo il seguente

I. LEMMA. — *Se denotiamo in generale con* $K_n^{(i)}$ *quel punto della faccia opposta al vertice* A_i *nel quale essa viene incontrata dalla congiungente* A_i *con* K_n, *si ha:*

$$A_iK_n : K_nK_n^{(i)} = a_h^n + a_k^n + a_l^n : a_i^n \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

essendo h, k, l *la terna che rimane dopo scelto* i *fra* 1, 2, 3, 4.

Congiunto il punto P ed i sei punti P_{ik} con i vertici, l'applicazione del teorema di Menelao al triangolo $A_4P_{12}K_n^{(4)}$ fornisce subito la relazione:

$$A_4K_n^{(3)} \,.\, P_{12}A_3 \,.\, K_n^{(4)}K_n = K_n^{(3)}P_{12} \,.\, A_3K_n^{(4)} \,.\, K_nA_4\,,$$

dalla quale segue immediatamente:

$$A_4K_n : K_nK_n^{(4)} = (A_4K_n^{(3)} : K_n^{(3)}P_{12}) : (A_3K_n^{(4)} : A_3P_{12})\,. \tag{2}$$

Ora dal triangolo $A_1A_2A_4$ si ricava, per noti teoremi,

$$A_4K_n^{(3)} : K_n^{(3)}P_{12} = a_1^n + a_2^n : a_4^n, \tag{3}$$

e il triangolo $A_1A_2A_3$ dà, per ragione analoga,

$$P_{12}K_n^{(4)} : K_n^{(4)}A_3 = a_3^n : a_1^n + a_2^n$$

da cui, componendo e invertendo,

$$A_3K_n^{(4)} : A_3P_{12} = a_1^n + a_2^n : a_1^n + a_2^n + a_3^n\,. \tag{4}$$

La (2), tenuto conto delle (3), (4) diviene allora

$$A_4K_n : K_nK_n^{(4)} = a_1^n + a_2^n + a_3^n : a_4^n, \tag{5}$$

che è la formula (1) fattovi i uguale a quattro. Analogamente per gli altri casi.

---

[1] V. PICCIOLI, *Contributo alla "Geometria recente del tetraedro"*. "Periodico", anno XIX, pag. 201.
[2] THIRY, *Distances des points remarquables du triangle*. Bruxelles, 1891.

SCOLIO I. — Ponendo nella formula (1) n uguale a zero, troviamo che ogni mediana del tetraedro rimane divisa dal baricentro in due parti delle quali quella che va al vertice è tripla di quella che va alla base: resultato già noto sotto il nome di *teorema di Commandino*.

SCOLIO II. — Se poniamo n uguale a due, e supponiamo che il triedro avente per vertice A_4 sia trirettangolo, essendo:

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

dalla (5) segue che il segmento $A_4K_2^{(4)}$ è diviso per metà dal punto di LEMOINE.

2. Ciò posto, troviamo la relazione generale a cui abbiamo sopra accennato. E osserviamo subito che il triangolo A_2PP_{13} dà, applicandovi il teorema di STEWART,

$$a_2^n\overline{PA_2}^2 + (a_1^n + a_3^n)\overline{PP_{13}}^2 = \\ = (a_1^n + a_2^n + a_3^n)\overline{PK_n^{(4)}}^2 + \frac{a_2^n(a_1^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}\overline{A_2P_{13}}^2,$$

essendo il segmento A_2P_{13} diviso da $K_n^{(4)}$ nel rapporto $a_1^n + a_3^n : a_2^n$.

Ma il triangolo PA_1A_3, essendo il lato A_1A_3 diviso da P_{13} nel rapporto $a_3^n : a_1^n$, dà:

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 = (a_1^n + a_3^n)\overline{PP_{13}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n}{a_1^n + a_3^n}\overline{A_1A_3}^2.$$

Sommando queste due relazioni membro a membro, otteniamo:

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_2^n\overline{PA_2}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 = (a_1^n + a_2^n + a_3^n).\overline{PK_n^{(4)}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n}{a_1^n + a_3^n}\overline{A_1A_3}^2 + \\ + \frac{a_2^n(a_1^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}\overline{A_2P_{13}}^2.$$

Ora, il punto P_{13} dividendo il lato A_1A_3 del triangolo $A_1A_2A_3$ nel rapporto $a_3^n : a_1^n$, segue

$$a_1^n\overline{A_1A_2}^2 + a_3^n\overline{A_2A_3}^2 = (a_1^n + a_3^n)\overline{A_2P_{13}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n}{a_1^n + a_3^n}\overline{A_1A_3}^2.$$

Da quest'ultima sottraendo la precedente dopo averla moltiplicata per $\frac{a_2^n}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}$ e riducendo, si trae

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_2^n\overline{PA_2}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 = \\ = (a_1^n + a_2^n + a_3^n)\overline{PK_n^{(4)}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n\overline{A_1A_3}^2 + a_1^n a_2^n\overline{A_1A_2}^2 + a_2^n a_3^n\overline{A_2A_3}^2}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}, \quad (6)$$

formula che vale qualunque sia la posizione del punto P.

Essendo il lato $A_4K_n^{(4)}$ del triangolo $PA_4K_n^{(4)}$ diviso da K_n nel rapporto $a_1^n + a_2^n + a_3^n : a_4^n$, troviamo

$$(a_1^n + a_2^n + a_3^n)\overline{PK_n^{(4)}}^2 + a_4^n\overline{PA_4}^2 = $$
$$= (a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n)\overline{PK_n}^2 + \frac{a_4^n(a_1^n + a_2^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n}\overline{A_4K_n^{(4)}}^2,$$

e sommando questa con la precedente:

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_2^n\overline{PA_2}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 + a_4^n\overline{PA_4}^2 = \overline{PK_n}^2(a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n) +$$
$$+ \frac{a_1^n a_3^n\overline{A_1A_3}^2 + a_1^n a_2^n\overline{A_1A_2}^2 + a_2^n a_3^n\overline{A_2A_3}^2}{a_1^n + a_2^n + a_3^n} + \frac{a_4^n(a_1^n + a_2^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n}\overline{A_4K_n^{(4)}}^2.$$

La formula (6) sussistendo qualunque sia la posizione del punto P, varrà anche quando P coincide con A_4. Avremo allora

$$a_1^n\overline{A_4A_1}^2 + a_2^n\overline{A_4A_2}^2 + a_3^n\overline{A_4A_3}^2 =$$
$$= \overline{A_4K_n^{(4)}}^2(a_1^n + a_2^n + a_3^n) + \frac{a_1^n a_3^n\overline{A_1A_3}^2 + a_2^n a_3^n\overline{A_2A_3}^2 + a_1^n a_2^n\overline{A_1A_2}^2}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}.$$

Sommando infine la relazione ultima moltiplicata per la frazione $-\dfrac{a_4^n}{a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n}$, con quella precedentemente ottenuta, perveniamo dopo brevi calcoli alla formula domandata, la quale può scriversi in modo abbreviato:

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^n\overline{PA_i}^2}{\Sigma a_i^n} - \frac{\Sigma a_h^n a_k^n\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i^n)^2}, \tag{7}$$

o anche, ponendo

$$E_n = \frac{\Sigma a_h^n a_k^n\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i^n)^2},$$

sotto l'altra ancor più semplice

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^n\overline{PA_i}^2}{\Sigma a_i^n} - E_n.$$

3. *Posizioni speciali di* P. — Se facciamo coincidere il punto P col centro O della sfera circoscritta e indichiamo con R il raggio di questa sfera, troviamo:

$$\overline{OK_n}^2 = R^2 - E_n,$$

dalla quale segue che E_n rappresenta la potenza dei punti della sfera circoscritta rispetto a quella di raggio OK_n. Risultano inoltre le formule:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{\Sigma\overline{A_hA_k}^2}{16},$$

$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{\Sigma a_h a_k\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i)^2}, \qquad \overline{OK}^2 = R^2 - \frac{\Sigma a_h^2 a_k^2\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i^2)^2}.$$

Facendo invece coincidere P con K_r troviamo, se r è diverso da n,

$$\overline{K_r K_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^n \overline{K_r A_i}^2}{\Sigma a_i^n} - E_n \,, \text{(}^1\text{)}$$

da cui segue

$$\overline{GI}^2 = \frac{\Sigma a_i \overline{GA_i}^2}{\Sigma a_i} - E_0 \,, \qquad \overline{GK}^2 = \frac{\Sigma a_i^2 \overline{GA_i}^2}{\Sigma a_i^2} \,,$$

$$\overline{IK}^2 = \frac{\Sigma a_i^2 \overline{IA_i}^2}{\Sigma a_i^2} - E_2 \,,$$

mentre, se r è uguale ad n, risulta

$$\Sigma a_i^n \overline{K_n A_i}^2 = \frac{\Sigma a_h^n a_k^n \overline{A_h A_k}^2}{\Sigma a_i^n}$$

dalla quale

$$\Sigma \overline{GA_i}^2 = \frac{\Sigma \overline{A_h A_k}^2}{4} \,, \qquad \Sigma a_i \overline{IA_i}^2 = \frac{\Sigma a_h a_k \overline{A_h A_k}^2}{\Sigma a_i} \,,$$

$$\Sigma a_i^2 \overline{KA_i}^2 = \frac{\Sigma a_h^2 a_k^2 \overline{A_h A_k}^2}{\Sigma a_i^2} \,.$$

Vogliamo far notare da ultimo che la formula generale (7) si può facilmente trasformare nell'altra:

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^{2n} \overline{PA_i}^2 + \Sigma a_h^n a_k^n PA_h PA_h \cos \omega_{hk}}{(\Sigma a_i^n)^2} \,,$$

colla quale si può calcolare la distanza PK_n conoscendo quelle di P dai vertici, gli angoli che esse formano due a due, e l'area delle facce del tetraedro.

Arpino, aprile 1904.

ENRICO PICCIOLI.

SUI NUMERI PRIMI

1. Come conseguenza di una importante formula di TCHEBISCHEFF [2] sui numeri primi ho potuto stabilire una proposizione che mi sembra degna di nota, e che non so se sia conosciuta.

Si ha cioè: Esistono infinite coppie di numeri primi consecutivi la cui differenza supera un numero A dato, arbitrariamente grande.

[1] Da questa formula cambiando r con n, si deduce:

$$\frac{\Sigma a_i^n \overline{K_r A_i}^2}{\Sigma a_i^n} - E_n = \frac{\Sigma a_i^r \overline{K_n A_i}^2}{\Sigma a_i^r} - E_r \,.$$

[2] Accademia di Pietroburgo, 1850; *Journal de Liouville*, vol. XVII.

Si ricordi perciò la suaccennata formula di TCHEBISCHEFF:

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{x}{\varphi(x)}-\log x\right\}=-1$$

dove $\varphi(x)$ indica il membro dei numeri primi che non superano x.

Da essa evidentemente si ricava:

$$\lim_{x=\infty}\frac{x}{\varphi(x)}=\infty \tag{1}$$

da cui, facendo scorrere x per i successivi numeri primi p_r, si ricava:

$$\lim_{r=\infty}\frac{p_r}{r}=\infty. \tag{2}$$

Ciò posto si supponga che per due numeri primi consecutivi p_r, p_{r+1}, consecutivi, di cui il secondo almeno maggiore di un determinato numero primo p_{r_0}, si avesse sempre:

$$p_{r+1}-p_r\leqslant A;$$

allora facendo in questa disuguaglianza prendere ad r i valori r_0, $r_0+1,\ldots r_1$, e sommando, si avrebbe:

$$p_{r_1}-p_{r_0}\leqslant(r_1-r_0)A$$

da cui per un numero primo generico p_r si avrebbe pure:

$$\lim_{r=\infty}\frac{p_r}{r}\leqslant\lim_{r=\infty}\frac{p_{r_0}+(r-r_0)A}{r}=\lim_{r=\infty}\left\{A+\frac{p_{r_0}-Ar_0}{r}\right\}$$

ed infine:

$$\lim_{r=\infty}\frac{p_r}{r}\leqslant A$$

ciò che è in contraddizione colla (2), essendo A finito e costante.

Siccome noi possiamo prendere per p_{r_0} un numero primo arbitrariamente grande l'assurdo a cui siamo condotti dimostra il teorema enunciato."

2. Del resto allo stesso risultato si può giungere forse più facilmente servendosi dei principii della teoria delle congruenze. Infatti volendo ottenere due numeri primi consecutivi che differiscano di un numero maggiore di A, basterà ricercare A numeri interi consecutivi (A può supporsi sempre numero intero) non primi: allora il numero primo antecedente al primo di essi e il successivo differiranno di più di A. Si pongano perciò le congruenze lineari:

$$\begin{gathered}x\equiv 0\ (\text{mod. } p_{r_1})\\ x+1\equiv 0\ (\text{mod. } p_{r_2})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x+A-1\equiv 0\ (\text{mod. } p_{r_A})\end{gathered}$$

essendo $p_{r_1}, p_{r_2}\ldots p_{r_A}$, A numeri primi arbitrari. [1]

[1] Bene spesso tal numero di congruenze sarà evidentemente sovrabbondante.

Tale sistema di congruenze ha come si sa sempre una soluzione minima positiva x_0; la soluzione generica è:

$$x \equiv x_0 \pmod{p_{r_1} p_{r_2} p_{r_3} \dots p_{r_\lambda}}.$$

Può darsi che x_0 risulti primo, e cioè uguale a p_{r_1}; in ogni modo possiamo prendere per x ogni altro valore:

$$x = x_0 + \theta\, p_{r_1}, p_{r_2} \dots p_{r_\lambda} \qquad \text{con} \qquad \theta \geqslant 1.$$

Siccome possiamo sempre scegliendo convenientemente θ trovare un valore di x arbitrariamente grande, esistono infinite coppie di numeri primi soddisfacenti al nostro enunciato.

3. Dalla formula (2) si può dedurre, coll'applicazione di un teorema di DIRICHLET, (1) il risultato seguente:

Se si considera la serie convergente per tutti i valori positivi di ρ, divergente per $\rho = 0$.

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r^{1+\rho}}$$

allora al decrescere di ρ, il prodotto ρS tende a 0 ".

Si può porre a riscontro questo risultato col seguente:

Se si considera la serie convergente per tutti i valori positivi di ρ (divergente per $\rho = 0$)

$$S_1 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{1+\rho}}$$

il prodotto ρS_1 al decrescere di ρ tende a 1 "; risultato che si può facilmente dedurre dallo stesso teorema di DIRICHLET.

Livorno, 17 gennaio 1904.

GUIDO ASCOLI.

RICERCHE SOPRA UNA NUOVA ESPRESSIONE DI π IN FUNZIONE DI SOLI NUMERI PRIMI, e sulla fattoriale di un numero

1. In una mia nota precedente, (2) trovata per $n!$ l'espressione

$$n! = \prod_{p=2}^{p=p} p^{E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + \dots + E\frac{n}{p_p}}, \tag{1}$$

giungevo alla rappresentazione di π sotto la forma

$$\pi = \lim_{n=\infty} 2^{4n+1} \frac{1}{\mu'} \prod_{p=2}^{p=\mu} \frac{1}{p^{a_p}}, \tag{2}$$

(1) DIRICHLET, " Teoria dei numeri ", *Supplemento* II, 3ª ed. *Crelle's Journal*, vol. LIII.

(2) V. la mia memoria di ugual titolo della presente. *Periodico di Matematica*, Tomo XVI, 1900.

nelle quali p rappresenta il massimo numero primo contenuto in n; P_p la massima potenza di $p \leqq n$; μ il massimo numero primo $<2n$; μ' esiste soltanto quando $2n+1$ è numero primo ed in tal caso è ad esso uguale, e finalmente

$$a_p = 2\left\{\left(E\frac{2n}{p} - 2\,E\frac{n}{p}\right) + \left(E\frac{2n}{p^2} - 2\,E\frac{n}{p^2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(E\frac{2n}{P_p} - 2\,E\frac{n}{P_p}\right) + E\frac{2n}{pP_p}\right\} + Q_p$$

dove Q_p è l'esponente di p nella decomposizione di $2n+1$ in fattori primi.

In una mia nota posteriore, (1) dimostravo poi il teorema:

Se n *e* p *sono due numeri interi e positivi qualunque, tali però che si abbia* $n > p$, *si ha*

$$E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + \ldots + E\frac{n}{P_p} = \frac{n - S_p}{p-1} \tag{3}$$

dove $E\dfrac{n}{p}$ rappresenta la parte intera del quoziente della divisione di n per p ed S_p la somma delle cifre del numero n scritto nel sistema a base p.

Come corollario di questo, ottenevo per $n!$ l'espressione

$$n! = \prod_{p=2}^{p=p} p^{\frac{n-S_p}{p-1}}. \tag{4}$$

Nella presente nota mi propongo di ricercare come si modifica la (2), sostituendo nei calcoli fatti nella mia prima memoria, alla (1) la (4).

2. Credo intanto non inutile premettere alcuni teoremi, per quanto non abbiano attinenza diretta con la quistione che mi propongo trattare, che si deducono immediatamente dal teorema (3).

Teorema I. — *La differenza tra un numero scritto in un sistema a base* p, *e la somma delle cifre del numero stesso scritto in un sistema a base* q, *per* $q \gtreqless p$, *è divisibile per la base del secondo sistema diminuita di* 1, *ossia per* $q-1$. (2)

Infatti, essendo $\dfrac{n-S_p}{p-1}$ uguale alla somma di parti intere, è sempre un numero intero.

Teorema II. — *Il resto della divisione di due numeri è uguale alla somma delle cifre del dividendo scritto nel sistema avente a base il divisore.*

(1) V. la mia nota "Un nuovo teorema sulla funzione E di Legendre„ *Periodico di Matematica*, vol. XVIII, 1903.

(2) Si ricava di qui come corollario il noto teorema:
Un numero è divisibile per 9, quando è tale la somma delle sue cifre.
Basta infatti porre $p = q = 10$ ed avremo $\dfrac{n - S_{10}}{9} = E$.

Corollario. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero* N *sia primo è che, scritto il numero in qualunque sistema a base* p, *per* p *variabile da 2 al massimo numero primo* $\lesseqgtr \sqrt{\mathrm{N}}$, *la somma delle sue cifre non sia mai divisibile per* $\mathrm{p}-1$.

3. Premesso questo, principiamo a trattare la questione che forma l'oggetto della presente nota.

Nella prima delle due memorie citate, modificando opportunamente l'espressione di Wallis, ottengo

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \left(\frac{(n!)^2}{2n!}\right)^2. \tag{5}$$

Dalla (3) abbiamo poi

$$(n!)^2 = \prod_{p=2}^{p=n} p^{2\frac{n-S_p}{p-1}} = 2^{2n-2S_2} \cdot 3^{\frac{2n-2S_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-2S_p}{p-1}}. \tag{6}$$

Sostituendo, sempre nella (3), $2n$ in luogo di n, si ha

$$2n! = 2^{2n-S'_2} \cdot 3^{\frac{2n-S'_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-S'_p}{p-1}} \cdot p' \cdots \mu, \tag{7}$$

dove S'_p rappresenta la somma delle cifre del numero $2n$ scritto nel sistema a base p, p' è il numero primo successivo a p, e μ il più grande numero primo $\lesseqgtr 2n$. (Che gli esponenti dei numeri primi successivi a p, quando sussistono, sieno sempre eguali all'unità, lo dimostro nella citata memoria, § 9).

Per le (6) e (7) abbiamo allora

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n-2S_2} \cdot 3^{\frac{2n-2S_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-2S_p}{p-1}}}{2^{2n-S'_2} \cdot 3^{\frac{2n-S'_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-S'_p}{p-1}} \cdot p' \cdots \mu} =$$

$$= \frac{1}{2^{2S_2-S'_2} \cdot 3^{\frac{2S_3-S'_3}{2}} \cdots p^{\frac{2S_p-S'_p}{p-1}} \cdot p' \cdots \mu}. \tag{8}$$

4. Mi propongo ora di cercare quale relazione esiste fra $2S_p$ e S'_p, vale a dire fra il doppio della somma delle cifre di un numero n scritto in un sistema a base p e la somma delle cifre del doppio del numero scritto nello stesso sistema.

Sia dunque il numero n scritto nel sistema a base p

$$n_p = a_1 p^n + a_2 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sono le rispettive cifre: sarà

$$Sn_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \text{e} \qquad 2Sn_p = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_n.$$

Avremo poi

$$2n_p = 2a_1 p^n + 2a_2 p^{n-1} + \ldots 2a_n.$$

Supponiamo prima che tutte le cifre siano $< \frac{1}{2}p$, vale a dire, rappresentando con a una cifra qualunque, $a < \frac{1}{2}p$: sarà allora $2a < p$, e quindi, essendo anche $2a$ rappresentato con una sola cifra, sarà

$$2Sn_p = S2n_p\,.$$

Possiamo dunque intanto dire che, quando tutte le cifre sono $< \frac{1}{2}p$, il doppio della somma delle cifre del numero è eguale alla somma del doppio delle singole cifre.

Sia invece qualche $a \geqq \frac{1}{2}p$, ad es.

$$a_k = \tfrac{1}{2}p + b,$$

dove b può variare da 0 a $\frac{1}{2}p$ escluso. Sarà allora

$$2a_k = p + 2b$$

il doppio del valore assoluto della cifra a_k. Ma, essendo p la base del sistema e quindi sempre rappresentato con 10, la somma dei valori assoluti delle cifre di p è eguale ad 1: avremo dunque che la somma dei valori assoluti delle cifre del doppio di a_k è data da

$$1 + 2b.$$

In conclusione, la differenza fra il doppio del valore assoluto della cifra a_k e la somma dei valori assoluti delle cifre di a_k è data da

$$(p + 2b) - (1 + 2b) = p - 1.$$

Potendosi ripetere lo stesso per ogni cifra $a \geqq \frac{1}{2}p$, potremo enunciare il seguente

Teorema. — *La somma delle cifre del doppio di un numero scritto in un sistema a base qualunque, è uguale al doppio della somma delle cifre del numero stesso, meno il prodotto della base del sistema diminuita di un'unità, per il numero delle cifre del numero stesso uguali o maggiori della metà della base.*

Con le nostre notazioni, indicando con m il numero delle cifre di n che sono $\geqq \frac{1}{2}p$, avremo

$$S\,2n_p = 2\,Sn_p - m\,(p-1)\,. \tag{9}$$

5. Sostituiamo ora nella (8) alle espressioni $2S_2 - S'_2$ etc., i loro valori espressi per la (9) ed avremo

$$\frac{(n\,!)^2}{2n\,!} = 2^{-m_2}\,.\,3^{-m_3(3-1)}\ldots p^{-m_p(p-1)}\,.\,p'^{-1}\ldots \mu^{-1}\,,$$

dove, come abbiamo detto, $m_2, m_3, \ldots, m_p$ rappresentano il numero delle cifre di n scritto nei sistemi a base $2, 3, \ldots, p$ rispettivamente uguali o maggiori di $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \frac{1}{2}p$.

Posto questo, l'espressione (5) diventa

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \cdot 2^{-2m_2} \cdot 3^{-2m_3(3-1)} \ldots p^{-2m_p(p-1)} \cdot p'^{-2} \ldots \mu^{-2} =$$
$$= \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-m_2)+1} \cdot 3^{-2m_3(3-1)} \ldots p^{-2m_p(p-1)} \cdot p'^{-2} \ldots \mu^{-2}}{2n+1},$$

da cui, scomponendo $2n+1$ in fattori primi

$$2n+1 = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \ldots p^{\alpha_p} \cdot p'^{\alpha_{p'}} \ldots \mu^{\alpha_\mu} \cdot \mu'^{\alpha_{\mu'}} \text{ (1)}$$

ed osservando che, per essere $2n+1$ dispari, è sempre $\alpha_2 = 0$, e μ' poi esiste soltanto quando $2n+1$ è primo, ed in tal caso si ha appunto

$$2n+1 = \mu',$$

avremo finalmente

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-m_2)+1} \cdot 3^{-4m_3} \ldots p^{-2m_p(p-1)} \cdot p'^{-2} \ldots \mu^{-2}}{3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \ldots p^{\alpha_p} \cdot p'^{\alpha_{p'}} \ldots \mu^{\alpha_\mu} \cdot \mu'^{\alpha_{\mu'}}} =$$
$$= \lim_{n=\infty} 2^{2(2n-m_2)+1} \cdot 3^{-(4m_3+\alpha_3)} \ldots p^{-[2m_p(p-1)+\alpha_p]} \cdot p'^{-(2+\alpha_{p'})} \ldots \mu^{-(2+\alpha_\mu)} \cdot \mu'^{-\alpha_{\mu'}}, \quad (10)$$

dove, se esiste l'ultimo fattore $\mu'^{-\alpha_{\mu'}}$, si ha

$$\alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_\mu = 0;$$

in generale poi, gli esponenti $\alpha_{p'}, \ldots \alpha_{\mu'}$ non possono assumere altri valori che 0 ed 1.

MARIO LAZZARINI.

SU ALCUNI DETERMINANTI DI FUNZIONI COMPOSTE

1. È noto che il Wronskiano $W(f_1 \ldots f_n)$ delle funzioni $f_1 \ldots f_n$ dell'unica variabile x soddisfa alla relazione identica:

$$W(tf_1 \ldots tf_n) = t^n\, W(f_1 \ldots f_n) \quad (1)$$

che tanta analogia di forma ha colla proprietà caratteristica delle funzioni omogenee. In questa formola t indica una funzione qualunque di x; se si considerano invece n funzioni $t_1 \ldots t_n$ della stessa variabile x, e conseguentemente il wronskiano delle funzioni $t_1f_1 \ldots t_nf_n$, allora si ha, per la formola di Leibniz:

$$W(t_1f_1 \ldots t_nf_n) = \begin{vmatrix} t_1f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_nf_n \\ t_1f_1' + t_1'f_1 \ldots\ldots t_nf_n' + t_n'f_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (t_1+f_1)^{(n-1)} \ldots (t_n+f_n)^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

---

(1) Nella memoria gia più volte citata, dimostro che gli esponenti dei numeri primi successivi a p, quando esistono, sono tutti uguali ad 1; per omogeneità però, seguito a porre gli esponenti $\alpha_{p'}, \ldots, \alpha_\mu$.

Siccome si può scrivere simbolicamente $t_1f_1' + t_1'f_1 = (t_1 + f_1)'$, si vede che il wronskiano delle funzioni composte, a partire dalla seconda riga in poi, non differisce dal wronskiano degli elementi $t_1 + f_1 \dots t_n + f_n$; solo la prima riga vieta l'eguaglianza e quindi di esprimere in modo semplice il wronskiano delle funzioni composte.

Nè credo miglior via sviluppare le potenze simboliche e poi esprimere il determinante risultante in determinanti ad elementi monomi; la formola finale allora si complicherebbe: basta osservare che la i^{ma} linea del determinante ad elementi polinomi è costituita di polinomi di i termini e quindi il numero dei determinanti semplici è

$$1\, 2 \dots (n-1)\, n = n!.$$

Qui si presenta opportuno considerare i wronskiani delle derivate prime delle funzioni $f_1 \dots f_n$. Per questi determinanti che indicheremo con $V(f_1 \dots f_n)$ non sussiste più la (1) come è facile vedere; ma, se si considerano le n funzioni $t_1 \dots t_n$, si ha la identità

$$V(t_1f_1 \dots t_nf_n) = W[(t_1+f_1)' \dots (t_n+f_n)'] = V(t_1+f_1 \dots t_n+f_n).$$

Inoltre si può esprimere in modo semplice il wronskiano delle funzioni composte, giacchè si ha dalla (2)

$$W(t_1f_1 \dots t_nf_n) = t_1f_1V(t_2+f_2 \dots t_n+f_n) + \dots + t_nf_nV(t_1+f_1 \dots t_{n-1}f_{n-1});$$

quel wronskiano è dunque una combinazione lineare di n determinanti V.

L'annullarsi identico di $V(f_1 \dots f_n)$ cioè di $W(f_1' \dots f'_n)$ è condizione necessaria e sufficiente perchè sussista una relazione lineare omogenea tra le $f_1' \dots f_n'$, cioè $a_1f_1' + \dots + a_nf'_n = 0$ da cui segue $a_1f_1 + \dots + a_nf_n = c$ con c costante come $a_1 \dots a_n$. Dunque: *L'annullarsi identico di $V(f_1 \dots f_n)$ è condizione necessaria e sufficiente perchè tra le funzioni $f_1 \dots f_n$ sussista una relazione lineare non omogenea.*

2. Consideriamo ora l'jacobiano $\dfrac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}$: se t è un'altra funzione di $x_1 \dots x_n$, si ha la formola di Jacobi

$$\frac{\partial(tf_1 \dots tf_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = t^n \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} + t^{n-1} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial(f_1 \dots f_{i-1}\, t f_{i+1} \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}.$$

Ed ora viene naturale il cercare le funzioni t che annullino la seconda parte del secondo membro della formola di Jacobi; le funzioni t cioè tali che

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & \dots & f_n \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ossia:} \qquad K_1 \frac{\partial t}{\partial x_1} + \dots + K_n \frac{\partial t}{\partial x_n} = 0 \qquad (3)$$

dove K_i indica il determinante K (¹) delle $f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n$ rispetto alle variabili $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$.

Per integrare la (3) basta integrare il sistema di $n-1$ equazioni ordinarie

$$\frac{dx_1}{K_1} = \frac{dx_2}{K_2} = \dots = \frac{dx_n}{K_n};$$

se $\varphi_i(x_1 \dots x_n) =$ costante $(i = 1, 2 \dots n-1)$ ne è il sistema integrale allora l'integrale generale della (1) è $t = w(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1})$ essendo w simbolo di funzione arbitraria.

Tutte queste funzioni t verificano dunque la relazione

$$\frac{\partial (tf_1 \dots tf_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)} = t^n \frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)}.$$

In particolare, per $n = 3$, integrare la (3) equivale, come si sa, a cercare tutte le superficie che sono in ciascun punto $(x_1\, x_2\, x_3)$ toccate da una retta condotta per questo punto nella direzione $(K_1 K_2 K_3)$. Dunque: *Se* $t = 0$ *è una qualunque delle superficie che sono in ciascun punto* $(x_1\, x_2\, x_3)$ *toccate da una retta condotta per questo punto nella direzione* $(K_1\, K_2\, K_3)$, *allora si ha identicamente*

$$\frac{\partial (tf_1\, tf_2\, tf_3)}{\partial (x_1\, x_2\, x_3)} = t^3 \frac{\partial (f_1\, f_2\, f_3)}{\partial (x_1\, x_2\, x_3)}.$$

R. Occhipinti.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI
634, 647-648-678, 660, 669, 672, 674, 679, 680 e 681

634. *Pel punto comune a due rette, le quali s'incontrano fuori del foglio su cui si disegna, condurre la parallela ad una retta data.* G. Loria.

Risoluzione del sig. G. Loria.

Siano a, b, p le tre rette date. Si conduca una retta arbitraria perpendicolare alla retta p a cui quella cercata deve riuscire parallela, e se ne determinino le intersezioni A, B con le altre due rette date. Le perpendicolari calate da A su b e da B su a si taglino in O; la perpendicolare calata da O su AB è (in forza della nota proprietà delle altezze di un triangolo) la retta cercata. (²)

Osservazione. — Un concetto analogo serve a *congiungere un punto dato* O *al punto inaccessibile comune a due date rette* a, b. Si conducano infatti da O le perpendicolari alle rette a, b e se ne determinino le intersezioni B e A rispettivamente con b, a; la perpendicolare calata dal punto O alla AB è evidentemente la retta richiesta.

(¹) V. E. Pascal. *I determinanti*, pag. 293.
(²) Per altra soluzione meno elementare dello stesso problema, v. Bellavitis, *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova, 1851), p. 34.

Quando questo fascicolo stava per vedere la luce, alle ore 5 del 3 febbraio 1905,

RAFFAELLO GIUSTI

il nostro ben noto e stimato editore, si spengeva all'età di 62 anni in seguito a breve, fierissima polmonite.

Coll'animo profondamente commosso per l'improvvisa sciagura, invio dalle pagine di questo giornale l'estremo affettuoso saluto alla salma ancor calda del vecchio indimenticabile amico, all'onesto ed integro cittadino, che da umilissime origini, col lavoro indefesso, colla tenacità e la costanza dei propositi, coi sagaci ardimenti, non mai disgiunti dalla prudenza, seppe assurgere ad una posizione elevata come industriale e guadagnarsi nello stesso tempo non solo l'adorazione della sua numerosa famiglia, ma anche la stima e l'amicizia di quanti ebbero con lui rapporti di affari e d'interessi, e l'affetto dei molti operai che dalle sue fortunate imprese ritraggono lavoro continuo e ben rimunerato.

Nella sua giovinezza egli non fu che un povero diseredato della fortuna. Augusto Alfani nel suo aureo libro *Battaglie e Vittorie* pubblicato nel 1890, tratteggiava brevemente la sua biografia, ad esempio e incoraggiamento dei giovani, nei seguenti termini: "... Raffaello " Giusti povero ragazzo del contado lucchese, privo della mano destra, senza istruzione e senza un mestiere, ma ricco di volontà, " pertinace nell'idea di farsi uno stato, andò a Livorno e si mise a " fare il venditore ambulante di storie e libercoli, per la città e la " campagna. Avanzatosi, a forza di risparmi e privazioni d'ogni genere, un peculietto, pensò di cessare da quella vita girovaga: prese " in affitto in Livorno un bugigattolo e gli parve di esser diventato " un signore, tanto più perchè ciò eragli riuscito fare da sè, colla forza " del suo volere e serbandosi sempre galantuomo. Perseverando e cercando di acquistare via via nuove cognizioni utili per l'incremento " dell'arte sua, si accaparrò fama di bravo e onesto libraio: gli crebbe " la clientela, gli crebbe il guadagno, non gli scemò, sibbene andò in " esso moltiplicandosi la voglia di lavorare. Oggi, infatti, egli possiede " il più ricco negozio librario di quella città non solo, ma la sua libreria è una delle più riputate della Toscana e d'Italia.

" Oltre la libreria, possiede una tipografia dove egli ha abbondante " lavoro per conto altrui ed anche per conto proprio; essendo giunto " a possedere tante cognizioni e tanta esperienza da mettersi con " fortuna a fare l'editore.

" Il Giusti, ricco oggi di credito e di sostanze, è sempre buono, " sempre alla mano, come quando faceva il venditore ambulante di " storie, ma con un fare riservato e signorile che non ha nulla di " affettato; trova sempre nel lavoro consolazione e riposo, e nella " presente agiatezza riconosce con soddisfazione un compenso alla sua " costante ed onesta operosità ".

Le parole dell'Alfani dipingono al vero l'uomo nella bonaria semplicità, nella immutabile rettitudine dell'indole sua.

Aggiungerò che in questi ultimi anni il buon successo dovuto alla sua prudenza ed alla sua fermezza è andato sempre aumentando.

La sua *Collezione scolastica* è una delle più accreditate d'Italia, ed in essa sono pubblicati libri largamente diffusi in tutte le nostre scuole.

La sua *Biblioteca degli Studenti* è giunta, in breve periodo di tempo, a ben 121 volumetti, che contengono esposizioni brevi e compendiose dei più svariati rami del sapere, e può cominciare a gareggiare con la notissima e splendida collezione dei Manuali Hoepli.

La sua *Collezione letteraria* e la *Collezione scientifica* vantano opere poderose di scrittori illustri.

La sua tipografia, corredata di macchine perfette e recenti, e di una quantità grandissima di caratteri di ogni specie, ed in particolare di segni matematici, è una delle migliori d'Italia.

Ma ciò che torna a suo massimo elogio, si è che della prosperità della sua vasta azienda non godeva lui solo, ma ne godevano anche tutti i suoi collaboratori, specialmente i più umili. Infatti, se i lavoratori del libro godono a Livorno una posizione assai decorosa e soddisfacente, debbono esserne riconoscenti a Raffaello Giusti, poichè egli, primo fra gli stampatori livornesi, accettò nel 1895 la tariffa proposta dagli operai, e col suo esempio indusse anche gli altri a fare lo stesso.

Di lui, come padre e capo di famiglia, è somma gloria l'avere adorato ugualmente i numerosi figliastri e figli, che lo ricambiavano di venerazione e di affetto; lo averli allevati e avviati a buone professioni, in mezzo alle ristrettezze dei primi anni, in mezzo a disgrazie di ogni genere, che hanno costantemente amareggiati e resi più difficili i suoi trionfi industriali; l'averli educati, insieme alla sua fedele compagna nelle battaglie e nei trionfi, la buona signora Massima, alla religione del dovere e del lavoro; l'averne fatto dei forti e modesti lavoratori, che sapranno certo imitare le sue virtù.

Decorato degli ordini della Corona d'Italia e dei Santi Maurizio e Lazzaro, i suoi numerosi amici deploravano che non fosse stato fatto Cavaliere del Lavoro, ritenendo che ben pochi al pari di lui fossero degni dell'alta onorificenza.

Da pochi anni egli si era costruito un grazioso nido, ove contava vivere sereni gli ultimi anni della vita, che nessuno avrebbe preveduti sì brevi; e come un patriarca dei templi biblici si compiaceva nei giorni festivi di riunire attorno a sè i suoi numerosi discendenti, lieto di potersi godere un relativo riposo, ben meritato dopo tanto lavoro, avendo ormai potuto cedere ai figli giovani e forti la parte più gravosa degli affari, riservandone a sè solamente l'alta direzione.

La sorte crudele ha troncato i suoi sogni, lo ha rapito all'affetto della famiglia e degli amici, ed ormai di lui non resta che un dolce e lacrimato ricordo. *La buona e cara imagine paterna* di lui non si aggirerà più fra le scansie della sua ricca biblioteca, ma sarà lungamente ricordata da tutti come un esempio di costanza, di modestia e di virtù.

Livorno, 4 febbraio 1905.

G. LAZZERI.

SULL'UTILITÀ ED IMPORTANZA DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

PROLUSIONE

al Corso libero di "Storia della Geometria"

letto nella R. Università di Pisa il 14 gennaio 1905

I. In ogni tempo è stata riconosciuta la necessità e l'importanza dello studio della storia generale, che Cicerone chiamò giustamente *magistra vitae*. Ed infatti, poichè le leggi della natura sono eterne ed immutabili, poichè cause eguali debbono produrre eguali effetti, è chiaro che l'esempio di ciò che avvenne nelle età passate può essere di ammaestramento per il presente, può aiutarci ad imitare i nostri padri in ciò che di bello e di buono essi fecero e a schivare gli errori in cui caddero.

Ben a ragione dunque in tutti i paesi civili si vuole che ogni persona di media coltura sappia, almeno a grandi linee, per quali passaggi la famiglia umana dallo stato primitivo sia pervenuta allo stato presente di progredita civiltà; quali sono stati gli avvenimenti più salienti, quali le lotte più importanti in cui si sono cimentate le varie stirpi e dalle quali sono sorti via via nuovi assetti politici del nostro pianeta con prevalenza delle stirpi più forti e incivilite; quali i nomi degli uomini che, elevandosi sulla folla dei mediocri, hanno compiuto opere degne di esser ricordate con riconoscenza dai posteri; quali i nomi dei grandi guerrieri che, mettendosi alla testa di un popolo, lo han sollevato al massimo grado di potenza; degli scienziati che con importanti scoperte hanno migliorato il vivere civile; degli artisti e dei poeti sommi che hanno addolciti i costumi, che hanno eternato nei marmi, nei bronzi, nelle tele, nei carmi la bellezza che è il fulgore del vero.

Ben a ragione dunque, dico, l'insegnamento della storia generale fa parte integrante della istruzione secondaria presso tutti i popoli civili.

Per gli stessi motivi a chi si dedica ad una particolare disciplina è necessario lo studio della storia della disciplina stessa; vediamo infatti questa verità da tempo immemorabile riconosciuta per alcuni rami del sapere. Nella facoltà di lettere e filosofia quasi tutte le cattedre hanno o più o meno l'indole storica. Nella facoltà di legge, la storia del diritto romano, la storia del diritto italiano, l'esegesi dei testi giuridici romani, ed altre sono cattedre storiche.

A Roma è stata fondata da non molti anni una cattedra di storia dell'arte, destinata a far conoscere e far rifulgere in tutto il loro splendore i tesori artistici di cui ben a ragione va superbo il nostro paese.

Persino nelle scuole militari si fa una parte alla storia, sebbene si cerchi di condensare in poco tempo una grande quantità d'insegnamenti tecnici. Infatti per es. nell'Accademia Navale di Livorno fu istituita una cattedra di storia navale.

Solo nelle scienze fisiche, naturali e matematiche, la storia è tenuta meno in onore, quantunque da qualche tempo si noti un salutare risveglio anche in questo ramo dell'attività umana.

I ricercatori della storia della medicina, della fisica, della matematica sono ben pochi e isolati nel mondo, i libri che trattano queste materie sono poco numerosi. Qual è la causa di questa differenza di tendenze fra i cultori delle discipline letterarie e giuridiche e quelli delle discipline scientifiche?

È assai difficile rispondere in modo esauriente.

2. Forse tale differenza dipende dai diversi temperamenti degli uomini che si dedicano a dette discipline e che corrispondono alla diversa natura ed indole di queste.

Lo scienziato ricerca la verità assoluta, non si contenta del relativo, del presso a poco; vede la vetta luminosa del sapere che irraggia luce e calore benefici sull'umanità, e vuole raggiungere quella vetta, poco curandosi del cammino che già è stato fatto per accostarsi ad essa.

Ora nelle ricerche storiche l'assoluto non c'è.

Si narra che Walter Raleigh, l'ardito viaggiatore che scontò gli onori e la fortuna goduta largamente sotto il regno di Elisabetta colla persecuzione e la prigione sotto il regno di Giacomo I, durante il suo soggiorno forzato nella torre di Londra, si accinse a scrivere la sua celebre *Storia del mondo*. Un giorno interrotto dal rumore di un alterco, egli cercò di saperne la causa; interrogò, indagò, fece le più accurate ricerche; ma non riuscì dalle deposizioni varie e contraddittorie a fare scaturire la verità. Ed allora scoraggiato gittò via la penna, e rinunziò momentaneamente al suo proposito, pensando che, se non era riuscito a scoprire la verità sopra un avvenimento del quale era stato quasi testimonio, era temerario pretendere di scoprire il vero su avvenimenti prodottisi in località e tempi remoti.

Ed egli aveva ragione, se intendeva fare non l'istoria, ma la cronaca; se intendeva di narrare i fatti accaduti in tutti i loro più minuti particolari, di cercare le cause determinanti i vari avvenimenti. Ma non è questo il compito della storia. Tutti i grandi avvenimenti così nell'ordine politico e sociale, come nell'ordine scientifico, hanno questa particolarità, che mentre sono per un lato nell'ombra, sono dall'altro in piena luce; mentre s'ignorano per lo più le cause immediate, si conosce perfettamente come essi si svolsero, quali furono gli effetti, quali i legami fra i fatti successivi.

Una storia generale deve saper cogliere la parte luminosa degli avvenimenti, trascurando i particolari, deve dare il quadro compiuto, senza entrare nelle minuzie.

Il cronista narrerà che la guerra Russo-Giapponese scoppiò perchè la Russia occupava la Manciuria oltre i termini pattuiti, narrerà le lunghe trattative fra i governi dello Czar e del Mikado, narrerà l'assalto improvviso di Porto Arthur e simili cose. Per la storia futura questi particolari saran tutto al più delle cause occasionali, ma la vera causa sarà il conflitto inevitabile fra due civiltà, che hanno egualmente bisogno di espandersi, il cozzo di due popoli che tendono a dominare lo stesso territorio.

E quando l'onda dei secoli sarà trascorsa, quando saranno persino dimenticati i nomi dei principali attori dell'immane tragedia, quando gli episodi tragici della titanica lotta che fanno fremere noi contemporanei, a volta a volta, di orrore, di ammirazione, di entusiasmo saranno dimenticati, o tutto al più ricercati negli archivi dagli studiosi, resterà il fatto grande che al principio del secolo XX la razza gialla, scosso il torpore nel quale viveva da lunghi secoli in uno stato di civiltà relativa, in tutto stazionaria, assimilati in pochi anni i progressi della civiltà propria della razza bianca, iniziò il conflitto contro il popolo slavo, che aveva occupato le terre di cui essa aveva bisogno per dare sfogo alla popolazione ognora crescente di numero.

Distinto così ciò che è dimostrato dai fatti, da documenti irrefragabili, ciò che è assolutamente certo e indubitabile, da quello che è ipotetico o dubbio, frutto di argomentazioni più o meno ingegnose e soggettive, Walter Raleigh avrebbe potuto continuare, come difatti continuò, a scrivere la sua istoria. Anche lo spirito scettico dello scienziato può dunque darsi con piacere a ricerche di questo genere.

3. Una causa da qualcuno può essere ricercata nella fatica che si richiede per leggere un'opera matematica specialmente antica: « I grandi geometri, scrive il D'Alembert, conoscono questa specie « di pigrizia, che preferisce la pena di scoprire una verità alla fa- « tica poco gradevole di seguirla nell'opera di un altro. In generale « essi si leggono poco gli uni gli altri, e forse perderebbero a legger « molto; una testa piena d'idee prese a imprestito non ha più posto « per le sue proprie, e troppa lettura può soffocare il genio ».

In questo pensiero dal D'Alembert vi è un poco di vero unito ad alcunchè di paradossale, ma non credo si possa attribuire ad esso maggiore importanza di quella che merita.

4. Un'altra causa del poco amore degli scienziati alle ricerche storiche è forse il danno grandissimo recato in una certa epoca allo sviluppo delle medesime dalla tendenza degli scolastici a giurare sempre *in verba magistri*, a cercare ogni lume di sapere e di verità soltanto nel passato.

Dopo la splendida civiltà greca, che nelle varie manifestazioni dell'arte raggiunse le più eccelse vette dell'ideale, che nelle varie scienze fece conquiste mirabili, portandole rapidamente ad un'altezza straordinaria per quei tempi, che può vantare nomi come quelli di Euclide, di Apollonio, di Archimede, del quale il Leibniz disse che chi può apprezzarne le opere, ammirerà meno le opere dei moderni; dopo la civiltà greca, dico, l'umanità ha una lunga sosta e poi un regresso.

L'impero romano crolla, roso dalla tabe dei suoi vizi, minato dalle nuove verità proclamate dal Golgota. Seguono le tenebre del Medio Evo, ed il grande patrimonio di sapere, raccolto dai Greci, o si disperse o rimase nell'oblio.

I dominatori del mondo, che avevano un culto soltanto per le armi, si curarono ben poco della scienza del popolo che avevano soggiogato; la civiltà cristiana era troppo occupata nei suoi primordi nelle cose del cielo, perchè potesse occuparsi anche delle cose della terra. E fu grande ventura che tutto il prezioso fardello della scienza greca non fosse disperso, e, dopo aver migrato per molti secoli attraverso gli archivi dei conventi e le scuole arabe, potesse essere parzialmente ricostruito.

Il XII secolo preparò gli elementi necessari alla rinascenza delle lettere e delle arti; la filosofia d'Aristotile si diffuse rapidamente in Europa per opera specialmente di S. Tommaso d'Aquino, mentre prima la Chiesa colpiva d'anatema i peripatetici e bruciava vivi i discepoli del grande scienziato, forse per mantenere gli uomini sotto il giogo dei precetti della Scolastica.

Questa fu una felice rivoluzione della scuola, poichè sostituì all'anarchia filosofica e scientifica un gran dittatore.

Ma i filosofi si dettero al culto di Aristotile con soverchia fede, con illimitato feticismo, e disdegnando l'osservazione della natura, credettero che negli scritti di lui dovesse esser racchiuso tutto lo scibile umano passato, presente e futuro.

Quindi cercarono le spiegazioni di tutti i fenomeni, leggendo nelle opere di lui invece di leggere nell'unico libro che sa e può rispondere a tutte le domande, che è sempre aperto a chi sa leggere in esso, il libro della natura.

Mi limiterò a citare un solo esempio. [1] Aristotile aveva voluto dimostrare che l'aria è pesante fondandosi sopra un'esperienza falsa, affermando cioè che una vescica pesa più gonfiata d'aria che vuota. Tolomeo sosteneva il contrario; Temistio e Semplicio finalmente asserirono che il peso era eguale nei due casi.

I peripatetici discussero sottilmente quale fra gli autori avesse per i suoi meriti diritto a maggior fede; ma a nessuno venne in mente di prendere una bilancia ed una vescica e di verificare coi propri occhi.

Eppure Leonardo da Vinci [2] aveva avvertito: « Sicchè voi speculatori non vi fidate delli autori che anno solo col immaginatione voluto farsi interpreti tra la natura e l'omo, ma sol quelli che non coi cienni della natura ma cogli effetti delle sue esperienze hanno esercitato i loro ingegni. »

Così il predominio dell'opera di un uomo, per quanto grandissimo, circoscrisse per lungo tempo l'orizzonte del sapere, tarpò le ali al genio, oppose ostacoli grandissimi al progresso scientifico, ed occorse l'opera di molti alti intelletti per scuotere il giogo che sopra i più soggetti è più feroce, per sostituire alla rivelazione l'osservazione, alla logica scritta la logica dei fatti.

Prima di Tolomeo, Pitagora e i Pitagorici ritenevano che la terra girasse attorno al Sole; Copernico perfezionò questo concetto; ma sebbene l'osservazione ed i fatti parlassero assai chiaramente, il sistema di Copernico sembrò per molto tempo un'utopia ed occorse la costanza, la tenacia e il genio di Galileo per farlo rifulgere come verità indiscutibile.

Dato lo stato dello spirito scientifico moderno, sembra inverosimile che si possa discutere sopra un fatto scientifico, prendendo per fondamento della discussione argomenti in tutto estranei alla questione medesima, come qualche versetto della Bibbia o le opinioni di filosofi vissuti parecchi secoli prima. Eppure, leggendo le opere di Galileo, non si sa se si debba più ammirarne l'ingegno e la sapienza, o compiangere lo stato di cose in cui si trovava, vedendo lo sforzo continuo che deve fare per mettere d'accordo le sue illazioni logiche e scientifiche colla verità rivelata.

Certo al tempo di Galileo sarebbe stato più facile il far progredire la scienza, se tali preoccupazioni non fossero esistite, come è più facile costruire un edificio *ex-novo*, che non sulle rovine di un altro vecchio e rovinato.

In un certo periodo dunque si può ritenere che la conoscenza del passato sia stata d'inciampo al progresso della scienza, e forse, per reazione naturale, ciò è stata una delle cause della poca simpatia degli scienziati e specialmente dei matematici per le ricerche storiche.

---

(1) Padelletti. *Le opere scientifiche di Leonardo da Vinci,* " Annuario della R. Università di Napoli ", 1884-1885.

(2) Ms. v. I, p. 54. — Libri, v. III, p. 255.

5. Ma se questo è accaduto quando una folla di pregiudizi, di preconcetti era d'inciampo alla ricerca del vero, quando verità puramente convenzionali si elevavano alla dignità di assioma, non può più accadere ora che lo spirito positivo e liberamente critico, uscendo dal dominio ristretto delle verità matematiche, si è diffuso in tutti i rami delle conoscenze umane.

E già da qualche tempo si nota un potente risveglio nello studio della storia delle scienze.

Alle vecchie storie parziali del Bossut, del Montucla, del Libri, dello Chasles, si sono aggiunti la grande opera di Moritz Cantor, che raccoglie quanto si conosce sulla storia della matematica dalla più remota antichità fino ai tempi di Lagrange, e vari manuali pregevoli, quali sono quelli di Zeuthen, Rouse Ball, Cajori, Hoefer e Boyer.

Qualche giornale storico di piccole e modeste proporzioni, come la Biblioteca matematica di Eneström, ha preso le proporzioni di grande giornale, ed anche altri sono sorti.

Dovunque, e pure da noi in Italia si fanno nuove compiute edizioni delle opere dei grandi maestri; ne sono esempi notevoli l'edizione delle opere di Galileo, quella del codice atlantico di Leonardo da Vinci, e per fermarci ai più recenti, le collezioni delle opere di Beltrami, di Brioschi, di Betti, di Galileo Ferraris, che costituiscono monumenti più durevoli di quelli di bronzo e di marmo.

Ed ovunque si estendono i corsi di storia della matematica.

In Germania i primi corsi del genere furono cominciati circa trent'anni or sono; importantissimo fra tutti quello del Cantor, che dette origine alla grande opera, di cui sopra ho fatto cenno; ma in questi ultimi anni è straordinariamente aumentato il numero delle scuole superiori nelle quali tali corsi si svolgono regolarmente. Meritano speciale menzione i corsi tenuti da vari anni nell'Università di Breslavia da R. Sturm e nel Politecnico di Monaco (Baviera) da A. von Braunmühl, il quale ha anche istituito un *Seminario storico-matematico.*

In Belgio il governo creò sino dal 1884 un corso di storia delle scienze fisiche e matematiche alla Scuola normale annessa all'Università di Gand, della quale fu affidato l'incarico al Mansion. Nel 1890-91 una nuova legge soppresse la Scuola normale e trasportò i corsi di storia alla facoltà di scienze; rendendoli obbligatorii per gli aspiranti al grado di dottore in scienze fisiche e matematiche delle Università belghe. Da allora la storia delle scienze s'insegna anche a Liegi dal Le Paige, a Louvain dal La Vallée Poussin ed a Bruxelles.

Nella Russia il Bobynin, fino dal 1882, fa un corso regolare di storia delle matematiche all'Università di Mosca, ed in Inghilterra il Rouse Ball fa a Cambridge un corso dello stesso genere, che ha dato origine al noto manuale del quale recentemente è stata pubblicata una traduzione italiana dei proff. Gambioli e Puliti. Al Collegio di Francia venne fondata una cattedra di storia generale delle scienze che fu affidata a P. Lafitte, fido discepolo di Augusto Comte.

Nelle Università americane l'insegnamento in parola è largamente diffuso. Infatti nel decorso anno sono stati tenuti corsi di conferenze dal prof. Smith nell'Università di Colombia (New-York), dal Moritz nell'Università di Nebraska, dall'Epsteen nell'Università di Standford; e il prof. Macfarlane tenne sei conferenze sui matematici inglesi del secolo XIX.

Nello stesso anno furon pure fatte lezioni di storia dal Forster a Berlino, dal Wislicenius a Strasburgo, dall'Obenbrauch a Brunn, dall'Isely a Neuchâtel, dal Nesselman a Könisberg, dal Tannery a Parigi.

Infine negli ultimi congressi internazionali è stata solennemente riconosciuta l'importanza ed utilità degli studi storico-scientifici.

Il primo congresso internazionale per la storia delle scienze a Parigi, nel 1900, espresse il desiderio che nelle maggiori scuole superiori francesi ci fossero insegnanti di storia delle matematiche; nel secondo congresso internazionale per la storia delle scienze di Roma (1903), udita la relazione dei proff. Barduzzi, Giacosa e Loria, fu espresso il desiderio che nelle Università potessero farsi quattro corsi di storia delle scienze e cioè: 1° matematica e astronomia; 2° fisica e chimica; 3° scienze naturali; 4° medicina.

Nel 2° congresso internazionale dei matematici ad Heidelberg (agosto 1904) furono fatti voti per l'insegnamento della storia delle matematiche.

E finalmente nel 2° Congresso internazionale di filosofia tenuto a Ginevra dal 4 all'8 settembre 1904 la sezione di filosofia e storia delle scienze confermò i voti dei congressi di Roma e Heidelberg.

6. Tale risveglio è bello ed utile. « Niente, scrisse Guglielmo Libri,(1) è più ingiusto del disprezzo che si ostenta per la scienza imperfetta dei nostri avi. Senza i loro sforzi noi saremmo ancora « nell'ignoranza, e forse questo sapere di cui siamo sì superbi, è destinato a eccitare ben presto un sorriso di compassione presso una « posterità, ingiusta a sua volta. Nè gli uomini, nè le nazioni dovrebbero disprezzare la loro infanzia, e bisogna che i più possenti e i più gloriosi non dimentichino che avranno pure la loro « vecchiezza. Tutti i secoli, come tutti i popoli, contribuiscono ai « destini dell'umanità: ve ne sono dei più oscuri, dei più disgraziati; « ma è questo un motivo per compiangerli, non per disprezzarli ».

Dai fatti che ho sopra esposti apparisce che l'ingiusto disprezzo per la scienza degli avi, deplorato dal Libri, comincia a dileguarsi, ed è da sperare che il movimento in questo senso iniziato, lungi

(1) LIBRI, *Histoires des sciences mathématiques.* Tav. I, pag. XIX.

dall'arrestarsi, si faccia di giorno in giorno più rapido; è da sperarsi che diventi universale nei cultori delle matematiche il desiderio di conoscere non solo il presente ma, almeno nelle sue grandi linee, anche il passato, poichè un tale desiderio sarebbe perfettamente corrispondente alla natura umana.

Dinnanzi ad un'opera artistica, dinnanzi ad un grandioso e splendido edificio ogni uomo sente anzitutto il bisogno di ammirarli prima nel complesso, poi nei particolari; soddisfatto quel bisogno, ne sorge istintivamente un altro; quello di sapere con quali mezzi, con l'aiuto di quali artifici, l'artista ha superato tutte le difficoltà, ed ha soggiogato la materia bruta a piegarsi alla sua volontà, e adattarsi a trasformare in atto il suo pensiero.

La scienza matematica odierna è indubbiamente uno degli edifici più splendidi prodotti dal genio dell'uomo, è una delle creazioni più salde e incrollabili che onorino l'intelletto umano. Il giovane che si dedica a questi studi viene sapientemente guidato nei corsi universitari sulle eccelse vette per abbracciare con uno sguardo sintetico le conquiste fatte attraverso ai secoli.

Ma è ben naturale che egli, una volta acquistata la conoscenza complessiva delle parti fondamentali della sua scienza, si dimandi come esse si son formate, quali legami esistono fra di esse; che egli desideri di conoscere qualche cosa sulla vita e sulle opere di coloro, che più cooperarono alla costruzione del superbo edificio, e che come pietre miliari sul cammino del progresso, segnano le diverse grandi tappe percorse dal pensiero umano nell'arduo cammino del sapere.

Se è bello conoscere la storia degli assedi e delle battaglie che han contristato i popoli, gli ordinamenti politici dei vari paesi, i nomi dei grandi capitani e dei grandi principi, non è forse più bello conoscere la storia del pensiero umano, la storia dei grandi solitari che con slancio nobile e generoso si sono dedicati a combattere un solo grande nemico comune, l'ignoranza; che, attraverso a difficoltà d'ogni genere, si son dati con ogni lor possa a squarciare il velo che nasconde la verità; che mai hanno fatto spargere lacrime e sangue attorno a loro, ma solo hanno procurato del bene al genere umano colla conquista di qualche nuova verità?

7. La storia della scienza, sotto l'aspetto pratico e positivo avrebbe una utilità assai relativa se servisse soltanto ad appagare l'innato desiderio di conoscere e di sapere.

Ma essa ha anche una utilità pratica di prim'ordine. Ogni conquista della scienza ha sempre servito per preparare il terreno ad una conquista maggiore; ha servito a sollevare il genio umano sempre di più, in guisa da potere spiccare il volo verso altezze maggiori.

Così la conoscenza delle difficoltà superate per le successive conquiste può essere un utile ammaestramento per tentare con maggiore probabilità di vittoria la risoluzione dei problemi sempre nuovi che affaticano l'umanità.

8. Le considerazioni svolte fin qui possono adoperarsi per dimostrare l'utilità della storia della scienza in generale per qualsiasi disciplina. Esistono poi altri argomenti per dimostrare che tale utilità è più particolarmente sensibile e manifesta per la matematica.

Anzitutto la matematica è sotto un certo aspetto la più conservatrice fra tutte le scienze; mentre è sotto un altro la più ribelle.

È la più conservatrice. Se infatti Euclide o Archimede potessero sorgere dalla tomba, troverebbero che la geometria elementare che costituisce l'insegnamento delle scuole medie in tutto il mondo, è sostanzialmente la geometria che essi in parte crearono, in parte raccolsero dai loro predecessori; troverebbero che ciò che era la verità 2000 anni or sono, è vero oggi, sarà vero sempre.

In nessun'altra disciplina umana avviene lo stesso. Prima della chimica in forma scientifica e positiva, abbiamo avuto le aberrazioni e le utopie degli alchimisti, prima della fisica la metafisica, prima della medicina moderna, che negli esseri viventi, infinitamente piccoli, ha rintracciato le cause dei mali, abbiamo avuto i rimedi empirici, le stregonerie degli astrologhi; nè parlo del vivere civile e politico in cui l'idea del giusto, del vero e dell'onesto ha subìto radicali modificazioni; basta, per persuadersene, confrontar gli usi delle tribù selvaggie con quelli dell'uomo civile.

In tutte le scienze il sapere del passato si è perduto in un grande, immenso naufragio, e sono rimasti a galla soltanto pochi e miseri avanzi. Nella matematica invece e singolarmente nella geometria, nulla si è perduto, nulla si perderà, perchè ciò che è acquisito nelle scienze di dimostrazione è assolutamente perfetto; ciò che è acquisito nelle scienze di osservazione è indefinitamente perfettibile e per conseguenza variabile. Gli antichi popoli hanno cominciato a costruire le basi incrollabili del grandioso edificio; i successivi popoli lo hanno innalzato a poco a poco; costruendo con piena sicurezza sull'opera dei predecessori; vi sono stati periodi in cui l'edifizio ha progredito rapidissimamente, e vi sono stati periodi, talvolta anche lunghissimi, di sosta, ma non mai di regresso; nè mai una pietra collocata stabilmente al posto è stata gettata via; ed ora l'edificio è giunto ad una altezza sublime, la sua cima superba si perde nelle nubi, ma non è stato posto e non si porrà mai il coronamento. Excelsior, in alto sempre più in alto, sempre sicuri che la lima della critica non potrà mai intaccare il puro granito dell'edificio logico, con la piena certezza che nessuna nuova conquista sarà perduta.

9. Questo privilegio di indistruttibilità assoluta che spetta alle verità matematiche è conseguenza della loro stessa natura astratta e ideale. Tutte le scienze, le matematiche incluse, si fondano sui fenomeni naturali; ma i sensi spesso sono fallaci, le apparenze talvolta ingannano; un perfezionamento negli strumenti d'osservazione, che equivale a rendere più squisito ed acuto il potere dei sensi, basta talvolta a far trovare errate le osservazioni precedentemente fatte, e quindi a far crollare le conseguenze che da quelle si erano logicamente ricavate.

Ma nel campo della geometria i concetti che si ammettono come primitivi, le cose di cui si ammette nota l'esistenza senza poterle definire, le verità che si ammettono come indimostrabili sono le più semplici, sulle quali non può cadere dubbio di sorta. Le definizioni e gli assiomi di Euclide costituiscono per così dire la parte sperimentale della geometria; ma, si noti bene, gli enti che fanno oggetto delle ricerche geometriche, non sono gli oggetti reali; lo spazio, i corpi geometrici, la superficie, le linee, i punti geometrici sono pure astrazioni immaginate dalla mente dell'uomo, foggiate sugli oggetti che ci circondano tenendo conto soltanto di alcune delle loro proprietà.

L'edificio geometrico non è che la conseguenza di quelle pochissime verità stabilite come primitive, e sussiste finchè sussistono quelle.

Ora dal punto di vista puramente speculativo è indifferente stabilire un certo numero di postulati, purchè non siano contradditorii e gli uni non siano conseguenza degli altri.

Dal punto di vista pratico, se le nozioni ammesse come primitive, non corrispondono assolutamente alla realtà, è certo che i mezzi che sono o che possono venire a nostra disposizione non ci possono fare trovare differenze apprezzabili, fra lo spazio qual'è ammesso dai geometri, e lo spazio qual'è, almeno nei limiti dei nostri sensi, quindi le verità dimostrate dalla matematica hanno sempre una corrispondenza nei fatti, assoluta o quasi.

« Le verità geometriche, dice il d'Alembert, sono in certa guisa « gli assintoti delle verità fisiche, cioè il termine al quale queste « possono indefinitamente approssimarsi, senza mai arrivarvi esatta« mente ».

Per ciò poco importa che non ci sia un piano perfetto o una superficie sferica perfetta, ma basta che le sue proprietà si accostino tanto più a quelle dimostrate dalla geometria quanto meno la superficie considerata differisce da un piano o da una sfera geometrica.

La matematica è insomma ad un tempo la più ideale fra le scienze, perchè opera su pure astrazioni, e la più positiva, perchè i risultati che ottiene hanno piena e perfetta applicazione nella pratica.

Perciò più che per ogni altra scienza è utile per essa lo studio della storia, in quanto che niente di ciò che da essa è stato provato è da rigettarsi, tranne gli spropositi degli individui isolati.

10. La matematica, ho detto, è la più conservatrice di tutte le scienze perchè non abbandona mai alcuna delle conquiste fatte, perchè procede sicura sul suo cammino senza fare passi indietro, perchè può avere su questo delle soste ma non delle deviazioni.

Ma è anche la più ribelle, l'unica che non esita a mettere in dubbio anche le cose che sembrano più evidenti ed indiscutibili. Per quanto la cosa possa sembrare strana e contradditoria con la tendenza conservatrice sopra accennata, non è per questo meno vera, e basterà che io rammenti un fatto per dimostrarlo.

Sebbene le verità ammesse come primitive da Euclide siano in numero abbastanza limitato, non era da escludersi la possibilità di ridurre ancora tale numero. Era quindi naturale che si cercasse di far diventare teorema qualcuna di tali verità. Oggetto di tale tentativo è stato per venti secoli principalmente il famoso assioma XIII: « Se due rette in un piano tagliate da una terza formano due angoli interni coniugati la cui somma non è due angoli retti, esse s'incontrano da quella parte ove la somma suddetta è minore di due retti ». Postulato che si può trasformare nell'altro: « Da un punto di un piano non si può condurre più di una retta che non incontri una retta data ».

Gl'innumerevoli tentativi di dimostrazione, fatti in venti secoli, eran tutti errati o fondati sull'ammettere tacitamente qualche altra verità a quella equivalente. Ebbene, nella prima metà dello scorso secolo, vista l'inutilità di tutti i tentativi, sorse in qualcuno il dubbio che quell'assioma fosse indimostrabile, e si cercò di fare una geometria indipendente da quell'assioma, formulando tutte le ipotesi logicamente ammissibili, senza tenere alcun conto dei risultati dell'esperienza e della osservazione.

Il Lobatchewsky, il Boliay, il Gauss, mettendosi su questa via, provocarono una rivoluzione nel campo tranquillo dei matematici ben più ardita e profonda di quella provocata dagli enciclopedisti nel 1789.

Parve che si volesse negare l'evidenza, la luce al sole, che si stesse per demolire un edificio rimasto incrollabile e intatto all'urto dei secoli; che si volesse negare la verità di quelle nozioni matematiche che, riunite in un corpo di scienza, avevano quotidianamente la conferma della esperienza; che avevano non molto prima ricevuto la più luminosa, la più alta conferma della loro eccellenza colla scoperta di un astro, Nettuno, fatta a tavolino col calcolo dal Le Verrier (1846), e confermata poi colla più grande esattezza dal telescopio.

Si gridò, e parve giustamente, alla profanazione, al sacrilegio. Ebbene il resultato della grande rivoluzione fu che le tre ipotesi che si potevano fare sull'argomento portavano a tre diverse geometrie, che furono dette ellittica, iperbolica e parabolica, l'ultima delle quali era quella di Euclide; che queste tre geometrie erano egualmente giuste e rigorose dal punto di vista astratto e speculativo; che anche dall'aspetto pratico niente può autorizzarci a dire che il nostro spazio sia costruito secondo le leggi dell'una o dell'altra delle suddette geometrie, poichè la parte del medesimo che cade nel dominio dei sensi e delle misure che possiamo fare è infinitesimo in confronto dello intero spazio, e per parti infinitesime i tre spazi Euclideo e non Euclidei, si comportano nello stesso modo, precisamente come sopra una sfera di raggio grandissimo le proprietà delle figure appartenenti ad un elemento di superficie si possono considerare come identiche alle proprietà del piano. Infine il nostro Beltrami riuscì a dimostrare che i tentativi fatti per dimostrare il famoso postulato erano riusciti tutti vani per la buona ragione che era indimostrabile.

Così l'ardita innovazione, l'idea rivoluzionaria, lungi dal distruggere il vecchio edificio, ne consolidò le fondamenta; lungi dal demolire qualche cosa, aprì nuovi orizzonti, fece intravedere all'occhio meravigliato e desioso degli scienziati plaghe vergini ed inesplorate, nelle quali gli arditi ricercatori si slanciarono animosi, e raccolsero messe abbondante di scoperte e di gloria.

11. Contemporaneamente altri ricercatori più pazienti ripresero in esame i fondamenti stessi della geometria, li sottoposero alla prova di una acuta e sapiente critica, e ordinando con cura ciò che Euclide e i geometri euclidei ammettono esplicitamente come nozione primitiva e ciò che tacitamente ammettono, cercarono di stabilire sistemi di postulati da sostituire a quello di Euclide.

Comunque sia, sta in fatto che la temuta rivoluzione ha consolidato le fondamenta del grande edificio geometrico, ed ha permesso di perfezionarlo in qualche parte; sta in fatto che mentre la matematica è la scienza per eccellenza che non ha bisogno dell'aiuto delle altre, che nei bisogni più modesti e nei più elevati della vita serve a risolvere le più semplici e le più elevate questioni, che è di ausilio prezioso alle altre scienze, tanto che queste (secondo Leonardo da Vinci) non diventano scienza se non in quanto diventan matematica, ha portato anche la mente dell'uomo a spaziare nel campo del soprasensibile, a indagare e investigare spazi che sfuggono ai nostri sensi, appagando quella sete innata d'ideale che ha sempre affaticato il genere umano.

12. Senza accorgermene ho un poco deviato dall'argomento che mi ero proposto di dimostrare, che cioè l'utilità dello studio della storia per la geometria è ancora più grande che per le altre scienze, perchè tutto quello che è stato conquistato è, e resterà sempre vero, mentre le altre scienze son soggette per la loro natura a modificazioni e trasformazioni radicali, e talvolta anche a distruggere interamente in un'età tutta l'opera di un'età precedente.

13. Nè è da credersi che lo studio della storia della matematica serva unicamente a conoscere il passato, sia una escursione in una regione morta, ove non germoglia un fiore, ove non si può raccogliere un seme vitale per l'avvenire. Talvolta, fra le ingiallite pagine può esser nascosto il germe d'un'idea dimenticata, che con l'ausilio dei moderni mezzi di ricerca, ben più potenti di quelli di qualche secolo fa, può dare insperati frutti, e forse schiuder nuove vie agli arditi ricercatori del vero.

Le ricostruzioni fatte da Vieta, Fermat, Simson, Chasles... di antiche opere classiche perdute, come i famosi *Porismi* di Euclide, dei quali soltanto Pappo dà notizie concise e incompiute, se non corrispondono alla realtà storica, sono opere originali di valore.

Ma l'esempio più notevole è dato dalla costruzione dei fondamenti della moderna geometria proiettiva, raccogliendo, ordinando e compiendo delle proposizioni sparse in un'opera di uno scrittore del IV secolo, le collezioni matematiche di Pappo. Il teorema del birapporto costante delle sezioni prodotte da una retta qualunque in quattro rette di un fascio fu scoperto nelle collezioni suddette da Chasles, il quale chiama tale funzione *rapporto* o *funzione anarmonica*.

« La nozione di funzione anarmonica (così egli dice) (1) ci sembra « di natura tale da apportare una grande semplificazione in molte « teorie geometriche ». Egli non si era ingannato, anzi i risultati superarono le sue previsioni, poichè la geometria, che dopo la scoperta della geometria analitica fatta da Cartesio nel 1635, pareva diventata schiava dell'analisi, che sembrava incapace di muovere un passo innanzi senza l'ausilio di questa, acquistò nuovo vigore per i concetti già vecchi di quindici secoli almeno, rimessi all'onore del giorno per opera di Chasles ed altri sommi, e mostrò come le pure considerazioni geometriche possano competere in semplicità, rapidità ed eleganza, colle concezioni dell'analisi e in qualche caso superarle.

Da questo esempio, sebbene notevolissimo, non bisogna saltare alle esagerazioni di alcuni, i quali vogliono trovare nell'antichità i germi di tutte le scoperte. Non si può dire che Archimede sia l'inventore del calcolo integrale, perchè fece la quadratura del segmento parabolico, e risolvette altri problemi che, dati i mezzi di cui egli disponeva, presentavano difficoltà straordinarie, nè che Erone inventasse la macchina a vapore, ecc.

14. Ed ora, dopo aver parlato della utilità della storia delle matematiche in generale, consentite che dica ancora qualche parola sulla importanza di tale studio per i giovani che, uscendo dall'Università,

---

(1) CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le developpements des méthodes en Géométrie*, p. 35.

dovranno dedicare la loro attività, il loro ingegno, all'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, insegnamento così importante per la gran moltitudine dei cittadini colti e quindi per la nazione.

L'illustre Poincaré, in una conferenza tenuta nella scorsa primavera al Museo pedagogico di Parigi, (1) ha messo il dito sopra una piaga dell'insegnamento.

« Come va, egli disse, che tanti spiriti si rifiutano a comprendere le matematiche? Non vi è in ciò qualche cosa di paradossale? Come, ecco una scienza che non fa appello altro che ai principii fondamentali della logica, al principio di contradizione, per esempio, a ciò che fa per così dire lo scheletro del nostro intendimento, a ciò di cui non ci potremmo spogliare senza cessare di pensare, e vi sono delle persone che la trovano oscura! ed anche sono in maggioranza! Che essi sieno incapaci di inventare, passi; ma che essi non comprendano le dimostrazioni che vengono loro esposte, che essi restino ciechi quando noi presentiamo loro una luce, che ci sembra brillare d'un puro splendore, è una cosa che ha assolutamente del prodigioso.

« E tuttavia non occorre avere una grande esperienza di esami per sapere che questi ciechi non sono esseri straordinari? In ciò sta un problema che non è agevole risolvere ma che deve impensierire tutti coloro che si votano all'insegnamento. »

E su questo problema l'illustre professore francese con mirabile acume, originalità e profondità di vedute e, soprattutto con molto senso pratico, discute nella sua bella conferenza, che dovrebbe esser letta e meditata da quanti insegnano o si accingono a diventare insegnanti.

E alla discussione sulle linee generali del problema egli fa seguire delle proposte concrete sul modo d'insegnare le varie parti delle matematiche a seconda dei diversi gradi d'istruzione.

Non è qui il tempo e il luogo per riferire queste proposte concrete, e nemmeno per riassumere le considerazioni d'indole generale, ma mi sembra che si possa premere il sugo di tali concetti in questa formula.

La pretesa eccessiva difficoltà degli studi matematici, e il conseguente orrore che i più hanno per essi derivano da una sola causa; la difficoltà che trovano la maggior parte degli insegnanti a porsi al livello dei loro scolari, in modo da sviluppare le facoltà intellettuali dei giovani, varie secondo le età e le circostanze; nel non sapere approfittare opportunamente nei diversi gradi d'istruzione o delle facoltà d'intuizione o delle facoltà logiche che predominano a volta a volta.

---

(1) POINCARÉ. *Les définitions générales en mathématiques,* " L'Enseignement mathématique „. VI Année, p. 257.

Nella prima età il fanciullo possiede principalmente la facoltà d'intuizione. La sua mente acquista idee e cognizioni per mezzo dell'osservazione, per mezzo delle sensazioni che producon gli oggetti esterni.

Procedendo negli anni, cominciano a svilupparsi anche le facoltà logiche, per mezzo delle quali il giovane, fatto più maturo, desidera conoscere i legami e la dipendenza fra i vari fatti.

E similmente nella formazione e nello sviluppo di una scienza vi sono due stadi, nel primo dei quali prevale l'intuizione, nel secondo la logica. Nel primo si forma, per così dire, lo scheletro dell'edificio e si procede arditamente senza guardare a troppe sottigliezze; nel secondo si riprende in esame il già fatto, si consolidano si rafforzano i fondamenti e le varie parti; nel primo si lavora coll'ascia, nel secondo col cesello.

L'insegnamento matematico nelle scuole secondarie, oltre che preparazione per i pochi che seguiranno gli studi della facoltà matematica, dovrebbe avere per tutti l'ufficio altamente pedagogico ed educativo di coltivare e sviluppare quelle facoltà logiche e d'intuizione, cui ho accennato sopra, e che sono egualmente importanti; le prime servono in certa guisa a rendere atti a conoscere se le varie maglie di una catena sono egualmente solide e ben saldate; le seconde servono a fare scorgere da lungi la mèta e a scoprire la via più adatta per raggiungerla.

Mi piace riportare un paragone dello stesso Poincaré nella citata conferenza.

La nozione intuitiva è l'armatura, la centina su cui poggia un arco, la nozione logica, è l'arco stesso. Una volta costruito e consolidato l'arco, si può togliere la centina, e quello rimane saldo e incrollabile. Così costruito l'edifizio logico si può non tener più conto di quello che è frutto della intuizione. Ma come non si riesce a costruire l'arco senza l'appoggio della centina, non si riesce a fare entrare nelle menti dei giovanetti una scienza puramente logica senza il substrato della nozione intuitiva.

Ora avviene fatalmente che il giovane che dagli alti fastigi dei corsi universitari viene precipitato al modesto ufficio d'insegnare le matematiche ai giovanetti dei licei ed istituti tecnici, o peggio ancora del ginnasio o della scuola tecnica, malamente si piega a rinunziare a quelle tendenze che sono state il suo pane quotidiano, a rinunziare ad un poco di quell'esattezza che si richiede nei corsi superiori, a nascondere insomma un poco di quello che sa, e che per la sua mente evoluta ed affinata dal lungo studio, sembra così semplice e chiaro, e che per i ragazzi è invece oscuro e difficile, precisamente come una luce troppo viva abbarbaglia gli occhi di chi esce improvvisamente dalla oscurità.

L'adattare la propria energia, il proprio sapere, all'insegnamento secondario è insomma un'arte assai difficile, che ordinariamente non si acquista che con lunga pratica.

Ebbene lo studio della storia della matematica contribuisce senza dubbio ad acquistare tale arte.

Il Leibnitz paragonò l'umanità ad un individuo che impara sempre, ogni generazione assimilando rapidamente le cognizioni delle generazioni che la precedettero; la conoscenza delle varie metamorfosi della scienza matematica lungo il suo bimillenare sviluppo, della dipendenza fra le successive scoperte; il conoscere con quanta lentezza queste in generale si svolsero, quali furono i passi più difficili a superare, costituiscono senza dubbio una preziosa scuola di pedagogia matematica.

15. È tempo di raccogliere le vele e concludere.

Da quanto ho detto credo risulti sufficientemente dimostrato che, se è necessario per tutti avere delle nozioni di storia generale, se per i cultori di una data scienza è necessario conoscere la storia di questa, tale necessità è maggiore pei matematici; che le ricerche storiche non solo servono ad appagare l'innato desiderio di sapere, ma possono anche servire a rintracciare e mettere in luce, come gioielli preziosi, verità dimenticate e capaci di schiudere nuovi orizzonti ai ricercatori; che la conoscenza della storia delle matematiche può giovare ai giovani per diventare buoni insegnanti di scuole secondarie.

La dotta Germania ed il Belgio hanno prime dato al mondo l'esempio del rinnovato culto per gli studi storici scientifici; la giovane America con quell'ardimento e slancio che mette in tutte le cose le ha seguite nell'arringo; in tutti i paesi civili si è cominciato a seguirne l'esempio. Anche in Italia abbiamo valorosi cultori delle discipline storiche, come il Loria, il Favaro, il Vailati che fece a Torino un corso di storia della meccanica, l'Amodeo ed altri. Ed è giusto, è bello che ciò sia, poichè gli Italiani possono con legittimo orgoglio volger l'occhio al passato scientifico del nostro paese non meno che al passato artistico e letterario.

Sembra quasi che a compenso delle sventure e dei dolori che hanno afflitto il bel paese nelle sue varie vicende politiche e sociali attraverso i secoli, il genio italico dovesse brillare al disopra di tutti gli oppressori che hanno successivamente dilaniate le sue terre; che mentre gli altri popoli hanno avuto varie vicende di grandezza e di decadenza, il nostro paese avesse la sorte di occupare sempre nel campo intellettuale uno dei posti più belli fino dalla più remota antichità.

Non starò qui ad enumerare le antiche glorie scientifiche dell'Italia, ma permettetemi di accennare fuggevolmente ad alcuni fatti più salienti.

La scuola pitagorica, che nel IV secolo a. C. tenne il primato nel mondo, svolse la sua azione specialmente a Crotone ed a Taranto.

Il III secolo a. C., che fu giustamente detto il secolo d'oro della scienza, rifulse di uno splendore che non fu mai superato nei secoli successivi, specialmente per merito della gloriosa triade: Euclide, Archimede, Apollonio, ed il più geniale di quei tre grandi, Archimede, fu italiano.

E quando in mezzo alla prosperità dei liberi comuni l'Italia fu tutto un Maggio, quando le repubbliche marittime si proposero di costruire monumenti che potessero emulare gli antichi; e sorsero dovunque quei poemi di marmo che sono le vecchie cattedrali; all'alba del secolo in cui Arnolfo di Lapo dotava Firenze dei più splendidi edifizi di cui va giustamente altera; in cui Cimabue e Giotto facevano risorgere la pittura e Nicola Pisano la scultura; all'alba del secolo in cui il Notaio e fra Guittone d'Arezzo e fra Jacopone da Todi e il Guinicelli e il Cavalcanti scrissero i primi versi Italiani; all'alba del secolo che dette la luce al padre Dante, al fondatore del *dolce stil novo;* nel 1202 un modesto mercante pisano Leonardo Fibonacci pubblicava il suo *liber abaci*, col quale s' introdussero in Europa la scrittura dei numeri in cifre arabe, e le cognizioni di aritmetica e algebra che si erano svolte nelle scuole arabe e indiane nei secoli in cui l' Europa era avvolta nelle più folte tenebre dell' ignoranza. L'opere di Fibonacci schiusero alla scienza la via maestra dell'algebra alla quale nei secoli successivi altri italiani, come il Pacioli, il Maurolico, il Ferrari, il Cardani, il Tartaglia, il Ferro, il Benedetti ed altri fecero fare notevoli progressi.

Eppure in ricompensa dei segnalati servigi resi da Leonardo alla scienza, i contemporanei di lui gli applicarono il nomignolo di *bighellone*, forse perchè, assorbito dagli studi, egli non aveva tempo, nè voglia, nè attitudine per dedicarsi al commercio!

E nel secol d'oro dell'arte, detto anche secolo di Leone X, in mezzo ad una pleiade di artisti sommi, quali il Buonarroti ed il Sanzio, di poeti come l'Ariosto, di pensatori come Nicolò Machiavelli, rifulse di straordinario splendore la gloria di Leonardo da Vinci, il quale non solo emulò i suoi grandi contemporanei nella pittura, nella scultura, nell'architettura, ma fu anche musico, geometra, filosofo insigne, restauratore della scienza e della filosofia. Narra il Vasari che egli fu il più forte e il più bello dei suoi contemporanei; e sebbene le sue opere siano disordinate e in gran parte perdute, si sa che applicò la sua vastissima mente a tutte le più svariate questioni scientifiche colla massima originalità, e profondità di vedute.

Ed il giorno in cui Michelangiolo moriva nasceva Galileo, che sgombrò primo le vie del firmamento a Newton, ed il cui spirito veglia ancora come genio tutelare su questo tempio della scienza; sulla nostra gloriosa Università.

Ed anche quando Descartes colla scoperta della geometria analitica e Newton e Leibnitz colla scoperta del calcolo assicurarono ad altri paesi il primato della scienza matematica, l'Italia pure ebbe una pleiade di precursori e di continuatori e perfezionatori che non giova qui nominare.

Il secolo testè chiuso e che ha fatto tanto progredire le teorie matematiche, pur tacendo di tanti illustri viventi, può vantare nomi come quelli di Brioschi, Beltrami, Betti, Cremona, che lasciarono traccie luminose del loro ingegno e della loro dottrina.

16. Incoraggiato dal consiglio di autorevoli membri delle facoltà, inizio questo corso nel quale mi propongo di esporre una specie di sommario della storia della geometria in relazione con gli altri rami delle matematiche. Lo scopo principale che procurerò di raggiungere è quello di far conoscere lo stato delle cognizioni geometriche nelle varie età, il successivo sviluppo delle medesime, di fare insomma la storia delle idee piuttosto che delle persone.

Non mi dissimulo la gravità del compito che ho liberamente assunto, ed ignoro se le mie forze saranno sufficienti a sostenerlo; ma confido che il desiderio, in me vivissimo, di far cosa utile a voi, o giovani, che siete l'avvenire e la speranza, vi renda benevoli verso chi si propone di evocare dinanzi alla vostra mente le glorie del passato.

In questa fiducia invio il mio saluto augurale a voi, o giovani, ed ai vostri illustri maestri, alcuni dei quali, e ne sono superbo, furono pure i miei.

G. Lazzeri.

TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI AD N UNITÀ

(Continuaz. e fine, v. fasc. prec.)

§ 2. — Sistemi con una moltiplicazione associativa.

10. Proprietà generali di questi sistemi.

La moltiplicazione nel modo generale col quale è stata definita (n. 7) non è nè associativa, nè commutativa. Una moltiplicazione la quale gode della proprietà commutativa è anche associativa, ma una moltiplicazione associativa può non essere commutativa. Volendo dunque conservare un po' di generalità bisognerà cominciare lo studio di quei sistemi che ammettono una moltiplicazione associativa.

Ipotesi I. — *Il sistema ammette una moltiplicazione associativa.*

Per questo occorre e basta che siano associativi i prodotti delle unità, e perciò, come è stato detto al n. 7, il processo della moltiplicazione deve essere definito in maniera che sussistano le relazioni

$$\sum_{u,v} \lambda_{rs}^{(u)} \lambda_{ut}^{(v)} = \sum_{u,v} \lambda_{st}^{(u)} \lambda_{ru}^{(v)} . \qquad (r, s, t = 1, 2, \dots n).$$

Quando si tratti di un sistema di numeri complessi, che ammette una moltiplicazione associativa, i teoremi sopra i moduli della moltiplicazione, dati al n. 9, possono invertirsi. Si ha così il seguente teorema.

Teorema. — *Ogni sistema di numeri complessi, che ammette una moltiplicazione associativa e una divisione posteriore (anteriore), possiede almeno un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione.*

Infatti, se il sistema ammette la divisione posteriore, esiste un numero b del sistema tale che sia $\Lambda'(b) \neq 0$. Allora esiste uno e un sol numero e tale che sia

$$b \,.\, e = b \,.$$

Se a è un numero arbitrario del sistema, si ponga

$$y = e \,.\, a \,.$$

Per la supposta legge associativa si ha

$$b \,.\, y = b \,.\, (e \,.\, a) = (b \,.\, e) \,.\, a = b \,.\, a \,.$$

Ma, essendo $\Lambda'(b) \neq 0$, l'equazione

$$b \,.\, y = b \,.\, a$$

ammette una sola radice, che è

$$y = a \,.$$

Si ha dunque, qualunque sia a,

$$a = e \,.\, a$$

e però il numero e è un modulo anteriore della moltiplicazione.

Corollario. — *Un sistema che ammette una moltiplicazione associativa e non possiede un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione, non può ammettere una divisione posteriore (anteriore).*

11. Elevazione a potenza.

Definizione XI. — Se m è un numero intero positivo, maggiore dell'unità, ed a un numero complesso qualunque, si dirà *potenza* m^{esima} *di* a, e si indicherà con a^m, il prodotto di m numeri uguali ad a.

Per convenzione

$$a^1 = a \,.$$

Se a appartiene ad un sistema con moltiplicazione associativa, sussisteranno le due proprietà

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n} \,, \tag{1}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \,, \tag{2}$$

dove tanto m che n sono numeri interi positivi diversi da zero.

È importantissimo il seguente teorema:

Teorema — *Ogni numero* x *di un sistema con* n *unità con moltiplicazione associativa soddisfa ad una equazione algebrica a coefficienti reali di grado non superiore ad* n + 1.

Sia

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n ,$$

e poniamo

$$x^r = \xi_{r1} e_1 + \xi_{r2} e_2 + \ldots + \xi_{rn} e_n \qquad (r = 1, 2, \ldots n); \tag{3}$$

saranno le ξ_{rs} funzioni intere di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, i cui coefficienti sono funzioni intere dei numeri $\lambda_{rs}^{(i)}$, che compaiono nella definizione della moltiplicazione (n. 7, def. VIII *a*)).

Consideriamo il determinante del sistema (3)

$$\Xi = | \xi_{rs} | ,$$

il quale è una funzione intera delle coordinate di x, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Se Ξ non è identicamente nullo, esisterà un numero g del sistema per il quale Ξ non è nullo, e allora per mezzo del sistema (3) le unità e poi con esse tutti i numeri del sistema si esprimono per le potenze $g, g^2, \ldots, g^n$.

In particolare

$$g^{n+1} = \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \ldots + \alpha_n g^n .$$

Se invece Ξ è identicamente nullo, la coesistenza dell'equazioni (3) porta con sè una relazione lineare omogenea fra le potenze $x, x^2, \ldots x^n$ della forma

$$\beta_1 x^n + \beta_2 x^{n-1} + \ldots + \beta_n x = 0,$$

nella quale non tutte le β possono essere identicamente nulle, tranne che x non sia eguale a zero, ciò che escludiamo.

In generale ogni numero x del sistema soddisfa ad una equazione della forma

$$\varphi_0 x^{m+1} + \varphi_1 x^m + \ldots + \varphi_{m-1} x^2 + \varphi_m x = 0 \quad (1 \leqslant m \leqslant n), \tag{4}$$

dove $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sono funzioni intere di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ e φ_0 non è identicamente nulla.

Definizione XII. — L'equazione di grado minimo cui soddisfa un numero x scelto arbitrariamente nel sistema si chiama *l'equazione caratteristica del sistema* (Scheffers) e il suo grado il *grado* (Scheffers) o il *rango* (Molien) del sistema.

§ 3. — Corpi associativi.

12. Proprietà generali.

Il procedimento della moltiplicazione può essere definito in maniera che nessuno dei determinanti della divisione $\Lambda(b)$, $\Lambda'(b)$ (n. 8) sia identicamente nullo. In tal caso, come sappiamo, si dirà che il sistema ammette la divisione bilaterale. Noi d'ora innanzi supporremo che il sistema goda anche di questa proprietà:

IPOTESI II. — *Il sistema ammette una divisione bilaterale.*

Un tal sistema lo diremo un *corpo* di numeri complessi (DEDEKIND), e diremo per brevità *corpo associativo* un corpo di numeri complessi con moltiplicazione associativa.

TEOREMA I. — *In un corpo associativo di numeri complessi esiste sempre un modulo unico della moltiplicazione*, cioè uno ed un solo numero e, che è nel tempo stesso modulo anteriore e modulo posteriore della moltiplicazione. Ciò segue senz'altro dal teor. del n. 10 e dal teor. II del n. 9.

Questo modulo può assumersi come unità del sistema. Infatti posto

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_n e_n ,$$

e non può avere le coordinate tutte nulle, tranne che il corpo non sia formato dal solo numero zero, ciò che escludiamo per semplicità; e però una coordinata almeno, per es. ε_n, sarà diversa da zero. Potremo allora prendere come nuove unità i numeri $e, e_1\, e_2 \ldots e_{n-1}$, perchè il determinante della trasformazione risulta evidentemente diverso da zero. Fra i numeri del corpo vi sono i numeri αe, dove α è un numero reale qualunque. Questi numeri formano di per sè un corpo, il quale non differisce dal corpo dei numeri reali, tranne che in esso l'unità, anzichè essere rappresentata con **1**, è rappresentata con e. Noi possiamo perciò, senza ledere la generalità del campo, rappresentare con **1** il modulo e, e potremo, in base a questa convenzione, concludere:

TEOREMA II. — *In un corpo associativo è sempre contenuto il corpo dei numeri reali.*

TEOREMA III. — *Un corpo associativo del primo ordine coincide col corpo reale.*

Un numero complesso a di un corpo associativo sarà d'ora innanzi indicato sotto la forma

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} .$$

È chiaro poi che il numero αa può anche considerarsi come il prodotto del numero reale α per il numero a, quindi, rendendosi ormai inutile la distinzione tra coefficiente e fattore, può sopprimersi il punto come segno della moltiplicazione e scrivere ab in luogo di $a \, . \, b$.

TEOREMA IV. — *Dato un numero complesso* a, *per il quale tanto* $\Lambda(a)$ *quanto* $\Lambda'(a)$ *sono diversi da zero, esiste uno ed un solo numero che moltiplicato tanto a destra che a sinistra di* a *dà un prodotto uguale all'unità reale.*

Infatti, essendo tanto $\Lambda(a)$ che $\Lambda'(a)$ diversi da zero, esistono due numeri a' e a_1 tali che sia

$$aa' = 1 , \qquad a_1 a = 1 ;$$

moltiplicando ambo i membri della seconda a destra per a', si ha, per la prima uguaglianza,

$$a_1 = a' .$$

Definizione XIII. — Il numero complesso, che moltiplicato sia a destra che a sinistra di a dà un prodotto uguale all'unità reale, dicesi *l'inverso* o *il reciproco* di a.

Esso si denota con a^{-1}.

Convenendo di porre

$$a^0 = 1\,, \qquad a^{-n} = (a^{-1})^n, \qquad (n \text{ intero}) \tag{3}$$

le proprietà (1), (2) dell'elevazione a potenza (n. 11) facilmente si estendono al caso di esponenti interi, nulli o negativi.

Facilmente si dimostra la proprietà

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}\,,$$

cioè che *l'inverso di un prodotto di numeri, ciascuno dei quali ammette il proprio inverso, è uguale al prodotto degli inversi dei singoli fattori scritti in senso inverso.*

§ 4. — Corpi hankeliani.

13. Divisori dello zero.

In un corpo associativo, i determinanti della divisione $\Lambda(b)$, $\Lambda'(b)$, pur non essendo identicamente nulli, possono annullarsi per speciali numeri del sistema, e certamente si annullano per $b=0$. È importante notare che un numero b, che annulla uno dei determinanti, annulla anche l'altro. Se è $b=0$, il teorema è evidente, sia dunque b un numero diverso da zero e sia $\Lambda(b)=0$.

Esisteranno infiniti numeri x diversi da zero tali che sia

$$xb = 0\,, \tag{1}$$

giacchè il sistema (3) nelle coordinate di x è un sistema lineare omogeneo col determinante uguale a zero.

Se fosse $\Lambda'(b) \neq 0$, si potrebbe trovare un numero y che soddisfi l'equazione

$$yb = 1\,.$$

Moltiplicando a sinistra per x si avrebbe in virtù di (1),

$$0 = x$$

che è assurdo. Dunque è anche $\Lambda'(b) = 0$.

Definizione XIV. — Un numero appartenente ad un corpo associativo che rende nullo uno, e quindi l'altro, dei determinanti della divisione si chiama *un divisore dello zero* (Weierstrass).

Un corpo associativo ammette per lo meno un divisore dello zero, cioè lo stesso zero.

14. Corpi hankeliani.

Definizione XV. — Un corpo associativo che non ammette divisori dello zero, oltre lo zero, lo diremo un corpo *hankeliano*.

Il corpo dei numeri reali e il corpo dei numeri complessi ordinari sono corpi hankeliani.

Pei corpi hankeliani vale il seguente teorema generale, assai importante.

TEOREMA. — *Il rango di un corpo hankeliano d'ordine* n *è al massimo uguale a 2; in altri termini, un numero* x, *che non sia reale, appartenente ad un corpo hankeliano d'ordine* n, *verifica una equazione di 2° grado a coefficienti reali.*

Si ha che ogni numero x diverso da zero è radice di una certa equazione di grado m, a coefficienti reali (n. 11, teor.):

$$\varphi_0 x^{m+1} + \varphi_1 x^m + \ldots + \varphi_m x = 0\,.$$

E poichè x è diverso da zero e appartiene ad un corpo hankeliano, sarà anche

$$\varphi_0 x^m + \varphi_1 x^{m-1} + \ldots + \varphi_m = 0. \tag{1}$$

Si consideri il polinomio di variabile reale ξ

$$F(\xi) = \varphi_0 \xi^m + \varphi_1 \xi^{m-1} + \ldots + \varphi_m\,. \tag{2}$$

Si sa dal teorema fondamentale dell'algebra, che esso è uguale a un prodotto di fattori reali del primo o del secondo grado:

$$F(\xi) = \prod_{r=1}^{r=k} (\xi - \alpha_r)^{\mu_r} \cdot \prod_{s=1}^{s=l} [(\xi - \beta_s)^2 + \gamma_s^2]^{\nu_s}, \qquad (\sum_{r=1}^{k} \mu_r + \sum_{s=1}^{l} \nu_s = m) \tag{3}$$

dove le γ sono numeri reali *diversi da zero.*

Possiamo sostituire, tanto nel primo che nel secondo membro, x a ξ, perchè infatti il primo membro diventa il polinomio

$$\varphi_0 x^m + \varphi_1 x^{m-1} + \ldots + \varphi_m$$

e il secondo membro, quando si pensi che le potenze di x si moltiplicano con la medesima regola che le potenze del numero reale ξ [n. 11, (1)], e la moltiplicazione di un numero complesso per numeri reali è commutativa e associativa, risulterà identico al detto polinomio. Ma d'altra parte esso è nullo per la (1), quindi si avrà anche

$$\prod_{r=1}^{r=k} (x - \alpha_r)^{\mu_r} \cdot \prod_{r=1}^{r=l} [(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2]^{\nu_s} = 0\,.$$

Ma in un corpo hankeliano un prodotto non può esser nullo, se non è nullo uno dei fattori, dunque x, se non è reale, deve annullare uno dei fattori del secondo grado:

$$(x - \beta)^2 + \gamma^2 = 0\,, \qquad (\gamma \neq 0) \tag{4}$$

Così il teorema resta dimostrato.

Se ne deduce il

COROLLARIO. — *In un corpo hankeliano le unità (diverse dall'unità reale) possono essere scelte in maniera che i loro quadrati siano uguali a* -1.

Si ponga

$$\frac{1}{\gamma} = \sigma\,, \qquad -\frac{\beta}{\gamma} = \tau\,,$$

la (4) diviene

$$(\sigma x + \tau)^2 = -1\,, \qquad (\sigma \neq 0) \tag{5}$$

Dovendo ogni numero x non reale del sistema verificare una equazione di questa forma, per ogni unità e_r si avrà una equazione della forma

$$(\sigma_r e_r + \tau_r)^2 = -1, \qquad (\sigma^r \neq 0) \; (r = 1, \ldots, n-1) \tag{6}$$

Ponendo dunque

$$u_r = \sigma_r e_r + \tau_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{7}$$

e notando che, essendo le σ_r diverse da zero, il determinante della trasformazione è diverso da zero, potremo prendere come nuove unità le u_r, che per la (6) godono della proprietà

$$u_r^2 = -1, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

15. Caso $n = 2$. Per $n = 2$, posto $u_1 = i$, si ha $i^2 = 1$, e si ottiene il corpo dei numeri complessi ordinari. Esso, com'è noto, possiede una moltiplicazione, oltre che associativa, anche commutativa, e tranne lo zero non possiede altri divisori dello zero.

Dunque:

Teorema. — *Oltre il corpo dei numeri complessi ordinari non v' è altro corpo hankeliano a due unità.*

16. Caso $n > 2$.

Posto

$$x = u_r + u_s, \qquad (r \neq s)$$

non può la somma $u_r + u_s$ essere reale, altrimenti le unità sarebbero dipendenti linearmente. Epperò $u_r + u_s$ soddisferà una equazione del tipo (4):

$$(v_r + u_s)^2 - 2\beta\,(u_r + u_s) + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \tag{9}$$

e analogamente

$$(u_r - u_s)^2 - 2\beta'\,(u_r - u_s) + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0. \tag{10}$$

Ora si ha per (8):

$$\begin{aligned} (u_r + u_s)^2 &= -2 + (u_r u_s + u_s u_r) \\ (u_r - u_s)^2 &= -2 - (u_r u_s + u_s u_r). \end{aligned} \tag{11}$$

Addizionando e tenendo presente (9) e (10), si ha

$$2\,(\beta + \beta')\,u_r + 2\,(\beta - \beta')\,u_s = \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 = 4.$$

Ora questa relazione non può sussistere, per l'indipendenza lineare delle unità, se non quando sia

$$\beta + \beta' = 0, \qquad \beta - \beta' = 0, \qquad \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 - 4 = 0,$$

cioè

$$\beta = \beta' = 0, \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 = 4.$$

Non potendo nè γ, nè γ' essere nulli, sarà

$$0 < \gamma^2 < 4, \qquad 0 < \gamma'^2 < 4. \tag{12}$$

Intanto la (9) diventa

$$(u_r + u_s)^2 + \gamma^2 = 0$$

e quindi la 1ª delle (11) fornisce

$$u_r u_s + u_s u_r = 2 - \gamma^2.$$

Per la 1ª delle (12), $2-\gamma^2$ è in valore assoluto minore di 2, quindi si può porre:

$$u_r u_s + u_s u_r = \gamma_{rs} \qquad (r \neq s\,,\ r, s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{13}$$

con

$$\gamma_{rs}^2 < 4\,. \tag{14}$$

Ed ora poniamo

$$v_1 = u_1\,, \qquad v_r = \alpha_r u_1 + \beta_r u_r\,, \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1)$$

dove i $2n-4$ coefficienti α_r, β_r restano ancora a determinarsi.

Per assumere le v come nuove unità occorre eseguire questa determinazione in modo che le β risultino diverse da zero.

Intanto si ha per la (8):

$$v_r^2 = (\alpha_r u_1 + \beta_r u_r)^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r\beta_r\,(u_1 u_r + u_r u_1),$$

e per la (13)

$$v_r^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r\beta_r\gamma_{1r}\,.$$

Poi in virtù della stessa (13)

$$v_1 v_r + v_r v_1 = -2\alpha_r + \beta_r\gamma_{1r}\,.$$

È possibile determinare α_r e β_r in modo che sia

$$\left.\begin{array}{r} v_r^2 = -1 \\ v_1 v_r + v_r v_1 = 0 \end{array}\right\}. \tag{15}$$

Infatti, se $\gamma_{1r} = 0$, si soddisfa a queste condizioni prendendo

$$\alpha_r = 0\,, \qquad \beta_r = \pm 1,$$

col che risulterà $v_r = \pm u_r$; se invece è $\gamma_{1r} \neq 0$, si ottengono per la determinazione di α_r e β_r le due equazioni

$$-1 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r\beta_r\gamma_{1r}\,,$$
$$0 = -2\alpha_r + \beta_r\gamma_{1r}\,.$$

La seconda dà

$$\beta_r = \frac{2\alpha_r}{\gamma_{1r}}$$

per il che la 1ª diviene

$$\alpha_r^2\left(1 - \frac{4}{\gamma_{1r}^2}\right) = -1\,.$$

Ora essendo $\gamma_{1r}^2 < 4$, quest'ultima fornisce due valori *reali* diversi da zero per α_r, ai quali corrisponderanno valori *reali diversi da zero* per β_r. Possono dunque scegliersi nel supposto corpo hankeliano come unità i numeri $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$, colle proprietà (15).

Intanto essendo

$$v_1 v_r = -v_r v_1\,,$$

si giunge alla conclusione notevolissima, segnalata da Hankel:

Teorema. — *Un corpo hankeliano a più di due unità non può possedere una moltiplicazione commutativa.*

In altri termini:

Se un corpo associativo a più di due unità ammette una moltiplicazione commutativa possiede divisori dello zero (oltre lo zero).

17. Caso $n=3$.

Sia $n=3$, e si ponga
$$v_1v_2=\xi_0+\xi_1v_1+\xi_2v_2$$
con le definizioni
$$v_1^2=-1\,,\qquad v_2^2=-1\,,\qquad v_1v_2=-v_2v_1\,.$$
Si ha
$$(v_1v_2)\,v_2=(\xi_0+\xi_1v_1+\xi_2v_2)\,v_2=\xi_0v_2+\xi_1(\xi_0+\xi_1v_1+\xi_2v_2)-\xi_2=$$
$$=(\xi_1\xi_0-\xi_2)+\xi_1^2v_1+(\xi_0+\xi_1\xi_2)\,v_2\,.$$
Ma per la legge associativa
$$(v_1v_2)\,v_2=v_1(v_2v_2)=-v_1$$
e però le ξ devono verificare le seguenti condizioni
$$\xi_1\xi_2-\xi_2=0\,,\qquad \xi_1^2=-1\,,\qquad \xi_0+\xi_1\xi_2=0\,.$$
Ma la seconda è inammissibile perchè ξ_1 dev'essere reale, dunque:

TEOREMA. — *Non esistono corpi hankeliani con 3 unità.*

18. Caso $n>3$.

Sia $n>3$. Fra le unità $v_1\,,\,v_2\,,\ldots,v_{n-1}$ intercedono le relazioni
$$v_r^2=-1 \qquad (r=1,2,\ldots,n-1) \tag{1}$$
$$v_1v_r=-v_rv_1 \qquad (r=2,3,\ldots,n-1) \tag{2}$$
$$v_rv_s+v_sv_r=\gamma_{rs} \qquad (r\neq s\,;\ r,s=2.\,3,\ldots,n-1) \tag{3}$$
dove è
$$\gamma_{rs}^2<4. \tag{4}$$
Poniamo
$$i_1=v_1\,,\qquad i_2=v_2\,,\qquad i_r=\alpha_rv_2+\beta_rv_r \qquad (r=3,\ldots,n-1).$$
Restano ancora a determinarsi le α_r e β_r, e poichè le $i_1\,,\,i_2\,,\ldots i_{n-1}$ devono prendersi come nuove unità, questa determinazione deve farsi in guisa che le β_r risultino diverse da zero.

Si noti dapprima che accanto alla relazione
$$i_1i_2+i_2i_1=v_1v_2+v_2v_1=0 \tag{5}$$
si ha per $r>2$,
$$i_1i_r+i_ri_1=v_1(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)+(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)\,v_1=$$
$$=\alpha_r(v_1v_2+v_2v_1)+\beta_r(v_1v_r+v_rv_1),$$
e quindi per le (2)
$$i_1i_r+i_ri_1=0 \qquad (r=3,4,\ldots,n-1). \tag{6}$$
Ora intanto si ha, per $r>2$,
$$i_r^2=(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)^2=-(\alpha_r^2+\beta_r^2)+\alpha_r\beta_r\gamma_{2r}$$
$$i_2i_r+i_ri_2=v_2(\alpha_rv_2+\beta_rv_2)+(\alpha_rv_2+\beta_rv_2)\,v_r=-2\alpha_r+\beta_r\gamma_{2,r}\,,$$
e ragionando in modo analogo che al n. 14, possono determinarsi valori reali di α_r e valori reali diversi da zero di β_r in maniera che siano soddisfatte le relazioni
$$i_r^2=-1,\qquad i_2i_r+i_ri_2=0.$$

Intanto per $r > 2$ si ha

$$(i_1 i_2 i_r)^2 = (i_1 i_2 i_r)(i_1 i_2 i_r) = (i_1 i_2)(i_r i_1)(i_2 i_r) = (i_1 i_2)(i_1 i_r)(i_r i_2) =$$
$$= (i_1 i_2 i_1)(i_r i_r) i_2 = -(i_1 i_2 i_1) i_2 = -(i_1 i_2)(i_1 i_2) = (i_2 i_1)(i_1 i_2) =$$
$$= i_2 (i_1 i_1) i_2 = -(i_2 i_2) = 1.$$

Ne segue

$$(i_1 i_2 i_r - 1)(i_1 i_2 i_r + 1) = 0,$$

e quindi, in virtù dell'ipotesi che il corpo è hankeliano,

$$i_1 i_2 i_r = \pm 1.$$

Moltiplicando ambo i membri per i_r, si ha

$$i_1 i_2 = \pm i_r. \qquad (7)$$

Di quà segue, per $n > 4$,

$$i_3 = \pm i_4 = \pm i_5 = \ldots = \pm i_{n-1},$$

e questo risultato è assurdo perchè le unità non possono essere linearmente dipendenti, dunque

Teorema. — *Non esistono corpi hankeliani con più di quattro unità.*

Resta ora a studiare il caso $n = 4$.

19. Caso $n = 4$. I Quaternioni di Hamilton.

Per $n = 4$, la formola (7) dà

$$i_1 i_2 = \varepsilon i_3 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Da questa si ricava facilmente

$$i_2 i_3 = \varepsilon i_1, \qquad i_3 i_1 = \varepsilon i_2.$$

Si può supporre $\varepsilon = 1$, perchè se è $\varepsilon = -1$, basterà prendere come nuove unità

$$j_1 = -i_1, \qquad j_2 = -i_2, \qquad j_3 = -i_3,$$

e si otterrà

$$j_1 j_2 = j_3.$$

Dunque un corpo hankeliano con quattro unità non può essere altro che il sistema con le unità, $1, i_1, i_2, i_3$ sottoposte alle condizioni

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, \qquad i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3, \qquad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1,$$
$$i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2.$$

Se questo sistema sia effettivamente un corpo hankeliano resta ancora a dimostrarsi.

1°. *La moltiplicazione è associativa.* Basterà dimostrare che è associativo il prodotto delle unità.

Si ha infatti dapprima

$$(i_r i_r) i_r = -i_r, \qquad \text{e} \qquad i_r (i_r i_r) = -i_r$$

poi osservando che, se r, s, t sono diversi tra di loro:

$$i_r i_s = \varepsilon i_t, \qquad i_s i_t = \varepsilon i_r, \qquad i_t i_r = \varepsilon i_s, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

si ha

$$
\begin{aligned}
(i_r i_s)\, i_s &= \varepsilon i_t i_s = \varepsilon(-\varepsilon i_s i_t) = = i_r, \qquad \text{ed} \qquad i_r(i_s i_s) = -i_r;\\
(i_s i_r)\, i_s &- - \varepsilon i_t i_s = i_r, \qquad \text{ed} \qquad i_s(i_r i_s) = \varepsilon i_s i_t = i_r;\\
(i_s i_s)\, i_r &= -i_r, \qquad \text{ed} \qquad i_s(i_s i_r) = -\varepsilon i_s i_t = -i_r;\\
(i_r i_s)\, i_t &= \varepsilon i_t i_t = -\varepsilon. \qquad i_r(i_s i_t) = \varepsilon i_r i_r = = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dunque il sistema ammette una moltiplicazione.

2°. *Il sistema non possiede divisori dello zero, oltre zero, cioè un prodotto è nullo allora solo che lo sia almeno uno dei fattori.*

Sia infatti

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$$

un numero del sistema diverso da zero.

Si indichi con Ka il *coniugato* di a, cioè il numero che si ottiene da a cambiando il segno ai coefficienti delle unità i_1, i_2, i_3, cioè

$$\mathrm{K}a = \alpha_0 - \alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2 - \alpha_3 i_3 .$$

Il prodotto di un numero a per il suo coniugato Ka è un numero reale positivo, che si chiama la *norma* di a:

$$\mathrm{N}a = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 .$$

Sia ora

$$ab = 0,$$

moltiplicando per Kb si ha

$$ab\,\mathrm{K}b = 0,$$

donde

$$a\,\mathrm{N}b = 0 .$$

Ma poichè Nb è reale, o è $a = 0$, ovvero N$b = 0$, cioè $b = 0$.

Il sistema non ammette dunque divisori dello zero oltre lo zero, e però ammette anche la divisione bilaterale.

Se a è un numero diverso da zero, l'inverso di a, a^{-1}, è il numero $\frac{\mathrm{K}a}{\mathrm{N}a}$, infatti

$$a\frac{\mathrm{K}a}{\mathrm{N}a} = \frac{\mathrm{N}a}{\mathrm{N}a} = 1 .$$

Ciò posto, il quoziente della divisione anteriore di a per b, cioè il numero x che verifica l'equazione

$$xb = a,$$

è evidentemente

$$x = \frac{a\,.\,\mathrm{K}b}{\mathrm{N}b},$$

e il quoziente della divisione posteriore di a per b, cioè il numero y che soddisfa all'equazione

$$by = a,$$

è evidentemente

$$y = \frac{\mathrm{K}b\,.\,a}{\mathrm{N}b}.$$

Il sistema così ottenuto è il sistema dei *Quaternioni* di HAMILTON, che costituisce il più importante sistema di numeri complessi dopo il sistema dei numeri complessi ordinari. Esso è un corpo hankeliano.

Tenendo presente i risultati ai num. 15, 17, 18 possiamo concludere col

TEOREMA DI FROBENIUS. — *Il corpo dei numeri reali, il corpo dei numeri complessi ordinari, e quello dei quaternioni di* HAMILTON *sono gli unici corpi hankeliani.*

MICHELE CIPOLLA.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE GEOMETRICA

1. Consideriamo l'equazione generale di grado n

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{1}$$

e supponiamo che abbia per radici

$$x_i = r\rho^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

allora si ha subito per il coefficiente a_k della (1)

$$(-1)^k a_k = r^k \Sigma \rho^{i_1+i_2+\ldots+i_k},$$

dove $i_1 i_2 \ldots i_k$ è una qualunque delle $\binom{n}{k}$ combinazioni semplici degli esponenti $0, 1, 2, \ldots n-1$, alle quali si estende il sommatorio; posto $c_k = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$, possiamo scrivere l'espressione del coefficiente generale della (1)

$$(-1)^k a_k = r^k \Sigma \rho^{c_k}. \tag{3}$$

2. Consideriamo alcune di queste espressioni tra le più semplici, onde eliminare la r e procurarci una equazione in ρ da cui poter dedurre la ragione della progressione e conseguentemente la r.

Anzitutto

$$-a_1 = r\frac{1-\rho^n}{1-\rho}; \quad (4) \qquad\qquad a_2 = r^2 \Sigma \rho^{c_2}. \quad (5)$$

Inoltre

$$(-1)^{n-2} a_{n-2} = r^{n-2} \Sigma \rho^{c_{n-2}} = r^{n-2} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma \left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}.$$

Ora si ha identicamente

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \ldots + \frac{1}{\rho^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^{2.2}} + \ldots + \frac{1}{\rho^{2(n-1)}} + 2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2},$$

dunque

$$2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}=\left(\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho^n}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho}}\right)^2-\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho^{2n}}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho^2}}=\rho^{2(1-n)}\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}-\frac{1+\rho^n}{1+\rho}\right)\frac{1-\rho^n}{1-\rho}=$$

$$=2\rho^{2(1-n)}\frac{\rho}{1+\rho}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho}=2\rho^{2(1-n)}\frac{\rho}{1+\rho}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}-\rho^{n-1}\right);$$

sostituendo in a_{n-2}, si ha

$$(-1)^{n-2}a_{n-2}=r^{n-2}\rho^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}\frac{\rho}{1+\rho}\cdot\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}-\rho^{n-1}\right)$$

e, tenendo conto della (4)

$$(-1)^{n-2}a_{n-2}=r^{n-3}\rho^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}\frac{\rho}{1+\rho}\left(\frac{a_1}{r}+\rho^{n-1}\right)a_1;$$

infine

$$(-1)^{n-2}a_{n-2}=r^{n-4}\rho^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}a_1^2\frac{\rho}{1+\rho}+r^{n-3}\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1\frac{\rho}{1+\rho}. \quad (6)$$

Consideriamo ancora altre espressioni fra le (3)

$$(-1)^{n-1}a_{n-1}=r^{n-1}\Sigma\rho^{c_{n-1}}=r^{n-1}\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_1}=r^{n-1}\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\rho^{1-n},$$

e, tenendo conto della (4)

$$(-1)^{n-2}a_{n-1}=r^{n-2}\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1. \quad (7)$$

Finalmente l'espressione di a_n è data da

$$(-1)^n a_n=r^n\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (8)$$

Troviamo ora una relazione fra a_{n-2}, a_n ed a_2, che ci sarà utile per qualche semplificazione che faremo in seguito. Quadrando la (4) scritta così

$$-a_1=r(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{n-1}), \quad (8)'$$

si ha

$$a_1^2=r^2(1+\rho^2+\rho^4+\ldots+\rho^{2(n-1)}+2\Sigma\rho^{c_2}),$$

quindi, per la (5)

$$a_1^2=r^2\frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}+2a_2, \qquad \text{epperò} \qquad \frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}=\frac{a_1^2-2a_2}{r^2};$$

ora abbiam trovato

$$2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}=\rho^{2(1-n)}\left\{\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)^2-\frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}\right\};$$

dunque

$$2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}=\rho^{2(1-n)}\left\{\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)^2-\frac{a_1^2-2a_2}{r^2}\right\}=$$

$$=\rho^{2(1-n)}\left(\frac{a_1^2}{r^2}-\frac{a_1^2-2a_2}{r^2}\right)=2\rho^{2(1-n)}\frac{a_2}{r^2};$$

sostituendo in a_{n-2} e tenendo conto della (8), risulta la relazione cercata

$$a_{n-2} = a_n^{\frac{n-4}{n}}\, a_2 . \tag{9}$$

Ed ora eliminiamo la r fra le (4) e (5) col quadrare la (4) scritta come in (8)'; allora si ottiene

$$a_2\, \rho^{n+1} - (a_1^2 - a_2)\, \rho^n + (a_1^2 - a_2)\, \rho - a_2 = 0 . \tag{10}$$

Per mezzo di questa noi possiamo procurarci una equazione di 3° grado in ρ da cui faremo dipendere la risoluzione della (1).

La (6), tenuto conto della (8) si può scrivere

$$a_{n-2} + \left(a_{n-2} - a_1^2\, a_n^{\frac{n-4}{n}}\right) \rho + a_1\, a_n^{\frac{n-3}{n}}\, \rho^{\frac{n+1}{2}} = 0 ,$$

oppure, per la (9)

$$a_2 + (a_2 - a_1^2)\, \rho + a_1\, a_n^{\frac{1}{n}}\, \rho^{\frac{n+1}{2}} = 0 .$$

Elevando a quadrato risulta l'equazione in ρ

$$a_1^2\, a^{\frac{2}{n}}\, \rho^{n+1} - (a_1^2 - a_2)^2 \rho^2 + 2\, a_2\, (a_1^2 - a_2)\, \rho - a_2^2 = 0 . \tag{11}$$

Eliminando fra questa e la (10) ρ^{n+1} e indi ρ^{n-1} fra l'equazione risultante e la (11) si ottiene l'equazione del 3° grado in ρ

$$\rho^3 + \frac{a_1^2 a_n^{\frac{2}{n}} - 2\, a_2^2 - (a_1^2 - a_2)^2}{a_2}\, \rho^2 + \\ + \frac{a_2^2 - a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} + 2(a_1^2 - a_2)^2}{a_1^2 - a_2}\, \rho - 1 = 0 \tag{12}$$

da cui dipende la risoluzione della (1) perchè, trovato ρ, r si deduce immediatamente dalla (8) e quindi si deducono tutte le radici della (1).

Poniamo

$$\frac{a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} - 2a_2^2 - (a_1^2 - a_2)^2}{a_2} = \mathrm{A} , \qquad \frac{a_2^2 - a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} + 2(a_1^2 - a_2)^2}{a_1^2 - a_2} = \mathrm{B}$$

allora risolvendo la (12) si ottiene

$$\rho = -\frac{\mathrm{A}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27+9\mathrm{AB}-2\mathrm{A}^3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{12(3\mathrm{B}-\mathrm{A}^2)(9\mathrm{A}+\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{B})+9(9+\mathrm{AB})^2}} + \\ + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27+9\mathrm{AB}-2\mathrm{A}^3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12(3\mathrm{B}-\mathrm{A}^2)(9\mathrm{A}+\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{B})+9(9+\mathrm{AB})^2}} . \tag{13}$$

Noi intanto abbiam dimostrato che:

La risoluzione di un'equazione di grado n *che ammette le radici in progressione geometrica, si riduce alla risoluzione di un'equazione di 3° grado.* (1)

---

(1) Per n pari ed $\frac{1}{2}n \leqslant 3$, cioè $n \leqslant 6$, invece che la (12) convien risolvere la (10) che, essendo reciproca, si riduce appunto ad un'equazione di grado $\frac{1}{2}n$; per n dispari ed $\frac{1}{2}(n-1) \leqslant 3$, cioè $n \leqslant 7$ convien pure risolvere la (10).

La (13), unita alla $r = \dfrac{-a_n^{\frac{1}{n}}}{\rho^{\frac{n-1}{2}}}$ costituisce il sistema risolutivo della (1).

3. È ora indispensabile procurarci un criterio mediante il quale si possa, data un'equazione, decidere se abbia, o pur no, le radici in progressione geometrica.

A tal uopo cominciamo ad esaminare alcune proprietà della trasformata della (1) colla sostituizione

$$y = x\sqrt[n]{(-1)^n a_n}. \tag{14}$$

Questa trasformata è

$$\varphi(y) = (-1)^n a_n y^n + (-1)^{n-1} a_1 a_n^{\frac{n-1}{n}} y^{n-1} + \ldots - a_{n-1} a_n^{\frac{1}{n}} y + a_n = 0,$$

e le sue radici sono nient'altro che le radici della (1) divise per

$$\sqrt[n]{(-1)^n a_n},$$

cioè sono

$$\frac{r}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}},\ \frac{r\rho}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}}, \ldots \frac{r\rho^{n-2}}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}},\ \frac{r\rho^{n-1}}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}};$$

ma

$$(-1)^n a_n = r^n \rho^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

dunque due radici qualsiasi equidistanti dalle estreme sono

$$\frac{r\rho^k}{r\rho^{\frac{n-1}{2}}},\ \frac{r\rho^{n-k-1}}{r\rho^{\frac{n-1}{2}}},\qquad \text{cioè}\qquad \rho^{\frac{2k-n+1}{2}},\ \frac{1}{\rho^{\frac{2k-n+1}{2}}};$$

sono dunque reciproche; per n dispari si ha poi la radice media che è, in conseguenza, uguale ad *uno*. Possiamo concludere da ciò che:

Se l'equazione (1) *ha le radici in progressione geometrica di ragione* ρ, *la sua trasformata colla sostituzione* (14) *è equazione a radici reciproche e queste radici sono le potenze*

$$\rho^{\frac{1-n}{2}},\ \rho^{\frac{3-n}{2}}, \ldots \rho^{\frac{n-3}{2}},\ \rho^{\frac{n-1}{2}}$$

della ragione della progressione, le quali formano pure una progressione geometrica di ragione ρ.

Reciprocamente:

Se la trasformata $\varphi(y) = 0$ *della* (1) *colla sostituzione* (14) *ha per radici le potenze*

$$\rho^{\frac{1-n}{2}},\ \rho^{\frac{3-n}{2}}, \ldots \rho^{\frac{n-3}{2}},\ \rho^{\frac{n-1}{2}}$$

l'equazione primitiva ha le radici in progressione geometrica di ragione ρ.

Perchè infatti le radici della (1) sono

$$\sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{1-n}{2}},\ \sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{3-n}{2}}, \ldots \sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{n-3}{2}},\ \sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{n-1}{2}}.$$

4. Da questi due teoremi segue che basta cercare le condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare i coefficienti a della (1) perchè la sua trasformata colla sostituzione (14) ammetta le radici della forma

$$x^{n-1},\ x^{n-3},\dots x^{3-n},\ x^{1-n}. \tag{15}$$

Anzitutto la $\varphi(y)=0$ deve essere equazione a radici reciproche, quindi i coefficienti equidistanti dagli estremi devono essere uguali in valore assoluto; ma questa condizione che è necessaria, non è sufficiente per concludere che l'equazione primitiva $f(x)=0$ ha le radici in progressione geometrica.

Qui conviene osservare che la equazione $\varphi(y)=0$ ha le radici della forma (15) se, e soltanto, se sono soddisfatte per uno stesso valore di x le n equazioni

$$\varphi(x^{n-1})=0,\ \varphi(x^{n-3})=0,\dots \varphi(x^{3-n})=0,\ \varphi(x^{1-n})=0$$

che scriveremo così

$$\varphi_1=0,\ \varphi_3=0,\dots \varphi_{2n-3}=0,\ \varphi_{2n-1}=0.$$

Supponiamo n pari $=2p$; allora queste equazioni si ripartiscono in due gruppi di p equazioni ciascuno

$$\left.\begin{matrix}\varphi_{2p-1}=0, & \varphi_{2p+3}=0,\dots \varphi_{4p+1}=0\\ \varphi_1=0, & \varphi_3=0,\dots \varphi_{1+2(p-1)}=0\end{matrix}\right\}.$$

Soddisfatte le prime p equazioni, le altre lo saranno se, e soltanto se i coefficienti della $\varphi(y)=0$ equidistanti dagli estremi sono uguali in valore assoluto; espresse dunque queste condizioni, non resta che a soddisfare alle prime p equazioni le quali, considerate due a due, richiedono come condizione necessaria e sufficiente per la loro compatibilità l'annullarsi dei risultanti R_{hk} dei sistemi di equazioni ottenuti considerando due a due le equazioni del primo gruppo. Per semplificare i calcoli si potrà tener conto della equazione (12) che è di 6° grado in $\rho^{\frac{1}{2}}$, e che potrà servire o ad abbassare di grado le equazioni $\varphi_i=0$ oppure a semplificare le eliminazioni accoppiandola ad ogni equazione $\varphi_i=0$ del primo gruppo e quindi costruendo le risultanti $R_{hk}=0$ di ogni coppia. Se n è dispari $=2p+1$, allora $2p$ delle equazioni $\varphi_i=0$ si ripartiscono come nel caso di n pari e l'altra che è la $\varphi(1)=0$ esprime già da per sè stessa una condizione esplicita cui devono soddisfare i coefficienti a della $f(x)=0$.

5. In conclusione, avuta un'equazione $f(x)=0$, per vedere se ha le radici in progressione geometrica si costruisca dapprima la trasformata colla sostituzione (14); se questa trasformata non ha i coefficienti equidistanti dagli estremi uguali in valore assoluto, si concluderà che la equazione proposta *non ha* le radici in progressione geometrica; se invece la trasformata ha i coefficienti equidistanti dagli estremi uguali in valore assoluto, si concluderà che l'equazione data *può avere* le radici in progressione geometrica; per accertarsene si vedrà se i cofficienti a della $f(x)=0$ soddisfano le condizioni $R_{hk}=0$.

Se la prova riesce favorevole, si applicheranno all'equazione data, le esposte formole risolutive.

Applicazione alle equazioni del 3° e 4° grado.

6. Cominciamo col cercare le condizioni perchè l'equazione generale del 3° grado $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ abbia le radici in progressione geometrica.

La sua trasformata colla sostituzione $x=-y\sqrt[3]{a_3}$ è

$$\varphi(x)=-a_3x^3+a_1a_3^{\frac{2}{3}}y^2-a_2a_3^{\frac{1}{3}}y+a_3=0,$$

che deve ammettere anzitutto la radice $y=1$, dunque

$$a_1a_3^{\frac{2}{3}}=a_2a_3^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{cioè} \qquad a_3=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3;$$

se si considerano poi le altre equazioni

$$\varphi(y)=0, \qquad \varphi\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

e fra esse si elimina la y si ritrova, come è naturale, la condizione

$$a_3=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3.$$

Dunque:

Perchè l'equazione generale del 3° grado abbia le radici in progressione geometrica occorre e basta che il termine noto sia uguale al cubo del rapporto tra il coefficiente dell'incognita al 1° grado e quello dell'incognita al 2° grado.

Esempi. — L'equazione le cui radici sono 1, 2, 4, è

$$x^3-7x^2+14x-8=0;$$

si ha dunque

$$a_1=-7, \qquad a_2=14, \qquad a_3=-8$$

e la condizione cui nel teorema precedente è verificata.

L'equazione $x^3+2x^2+6x+27=0$ ha coefficienti che verificano la condizione cui nel teorema precedente, dunque deve avere le radici in progressione geometrica.

Per trovare la ragione ρ basta risolvere l'equazione (10) [che in questo caso è preferibile alla (12)], la quale è, nel nostro caso

$$6\rho^4+2\rho^2+2\rho-6=0;$$

liberandola dalle radici $\rho=\pm 1$, diventa $3\rho^2+\rho+3=0$, da cui

$$\rho=\frac{-1\pm i\sqrt{35}}{6};$$

la r si determina dalla relazione $3 = -r\rho$, che dà

$$r = \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{2};$$

le tre radici dell'equazione in discorso son dunque

$$r = \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{2}, \qquad r\rho = -3, \qquad r\rho^2 = \frac{1 \mp i\sqrt{35}}{2}.$$

7. Passiamo ora all'equazione generale del 4° grado

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0;$$

la sua trasformata colla sostituzione $x = y\sqrt[4]{(-1)^4 a_4}$ è

$$\varphi(y) = a_4 y^4 - a_1 a_4^{\frac{3}{4}} y^3 + a_2 a_4^{\frac{1}{2}} y^2 - a_3 a_4^{\frac{1}{4}} y + a_4 = 0$$

e questa deve ammettere le radici della forma

$$x^3, \qquad x, \qquad x^{-1}, \qquad x^{-3}.$$

Trovata la condizione affinchè ammetta le radici della forma x^3, x, le altre due le ammetterà se, e solamente, se

$$a_1 a_4^{\frac{3}{4}} = a_3 a_4^{\frac{1}{4}}, \qquad \text{cioè} \qquad a_3 = a_1 a_4^{\frac{1}{2}}, \qquad a_4 = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2. \tag{16}$$

Per trovare l'altra condizione bisogna dunque eliminare la x fra le due equazioni

$$\begin{cases} x^{12} - a_1 a_4^{-\frac{1}{4}} x^9 + a_2 a_4^{-\frac{1}{4}} x^6 - a_3 a_4^{-\frac{3}{4}} x^3 + 1 = 0 & (17) \\ x^4 - a_1 a_4^{-\frac{3}{4}} x^3 + a_2 a_4^{-\frac{1}{2}} x^2 - a_3 a_4^{-\frac{3}{4}} x + 1 = 0. & (18) \end{cases}$$

Dividiamo la (17) per x^6 e la (18) per x^2 e poniamo

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

con che

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2; \qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z;$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2; \qquad x^6 + \frac{1}{x^6} = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2;$$

allora sostituendo col tener conto naturalmente della (16), risulta

$$z^6 - 6z^4 - a_1 a_4^{-\frac{1}{4}} z^3 + 9z^2 + 3\, a_1 a_4^{-\frac{1}{2}} z + \left(a_1 a_4^{-\frac{1}{2}} - 2\right) = 0 \tag{19}$$

$$z^2 - a_1 a_4^{-\frac{1}{4}} z + \left(a_2 a_4^{-\frac{1}{2}} - 2\right) = 0. \tag{20}$$

Prima di formare la risultante fra queste due equazioni, possiamo abbassare di grado la (19) per mezzo dell'equazione (10) che, come abbiam detto in nota, è preferibile, nel caso che ci occupa alla (12);

l'equazione (10) si scrive colle attuali posizioni (liberandola dapprima della radice $\rho=1$, e indi ponendo $\frac{2a_2-a_1^2}{a_2}=b$):

$$z^4+(b-4)z^2+(2-b)=0;$$

sottraendo da questa, moltiplicata per z^2, la (19) risulta

$$(b+2)z^4\, a_1a_4^{-\frac{1}{4}}z^3-(b+7)z^2-3\,a_1a_4^{-\frac{1}{4}}z+\left(2-a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right)=0;$$

sottraendo ora da questa la (20) moltiplicata per $z^2(b+2)$ risulta

$$a_1a_4^{-\frac{1}{4}}(3+b)z^3+\left\{b\left(1-a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right)-3-2\,a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right\}z^2-$$
$$-3\,a_1a_4^{-\frac{1}{4}}z+\left(2-a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right)=0.$$

Finalmente sottragghiamo da questa la (20) moltiplicata per

$$a_1a_4^{-\frac{1}{4}}(3+b)z;$$

risulta

$$\left\{b\left(1-a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right)-3-2\,a_2a_4^{-\frac{1}{2}}+a_1^2a_4^{-\frac{1}{2}}(3+b)\right\}z^2+$$
$$+a_1a_4^{-\frac{1}{4}}\left\{3\left(1-a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right)+b\left(2-a_3a_4^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}z+\left(2-a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right)=0.$$

Ed ora otterremo la condizione cercata formando la risultante fra questa e la (20). Questa risultante è

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_1a_4^{-\frac{1}{4}} & a_2a_4^{-\frac{1}{2}}-2 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1a_4^{-\frac{1}{4}} & a_2a_4^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & 2-a_2a_4^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & 2-a_2a_4^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}=0 \qquad (21)$$

dove si è posto per brevità,

$$\mathrm{A}=\frac{6a_1^2a_3a_4^{-\frac{1}{2}}-a_2-a_1^2-4a_3^2a_4^{-\frac{1}{2}}-a_1a_4^{-\frac{1}{2}}}{a_2};$$

$$\mathrm{B}=a_1a_4^{-\frac{1}{4}}\,\frac{7a_2-5a_2^2a_4^{-\frac{1}{2}}-2a_1^2+a_1^2a_2a_4^{-\frac{1}{2}}}{a_2}.$$

La (21) insieme alla (16) costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione generale del 4° grado abbia le radici in progressione geometrica.

Finalmente credo utile notare che la relazione (16) nel caso generale si può dedurre, come la (9), dalle relazioni (3). Se infatti, si sostituisce nella (7) ad $r^{n-2}\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ il valore $(-1)^{n-2}a^{\frac{n-2}{n}}$ ricavato dalla (8) si ottiene

$$a_n=\left(\frac{a_{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Roberto Occhipinti.

CONTRIBUTO ALLA "GEOMETRIA RECENTE DEL TRIANGOLO SFERICO"

Nella presente nota mi propongo di far vedere come anche per il triangolo sferico esistano dei punti aventi proprietà analoghe ai punti notevoli della geometria del triangolo rettilineo, e come ad esso si possa estendere l'importante teorema di Stewart, nonchè la formula che permette di calcolare la distanza sferica di un punto notevole da un altro della medesima superficie, note che siano le distanze sferiche di questo dai tre vertici del triangolo. Per ciò ritengo opportuno prender le mosse invece che dal triangolo sferico dato, dal triedro che lo proietta dal centro della sfera.

1. Proponiamoci la questione seguente:

Condurre pel vertice V di un triedro $V.A_1A_2A_3$ *un raggio tale che i seni dei tre triedri risultanti siano ordinatamente proporzionali alle potenze* n-*esime dei seni delle facce.*

Supposto il problema risoluto, e detto VP il raggio in questione, si indichi in generale con ω_s il piano di VP e dello spigolo VA_s del triedro. Se con α_{13}, α_{23} indichiamo gli angoli che i raggi VA_1 e VA_2 formano con ω_3 dovremo avere, tenuta presente la definizione di seno di un triedro:

$$\text{sen}\,\alpha_{13} : \text{sen}\,\alpha_{23} = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3 . \tag{1}$$

Se i punti A_1, A_2, A_3 li supponiamo alla medesima distanza dal vertice del triedro, ciò che nulla toglie alla generalità, e se con P_{12} indichiamo il punto ove ω_3 è incontrato da A_1A_2, conducendo A_2R e A_1T rispettivamente da A_2 e A_1 perpendicolari ad ω_3, potremo scrivere la (1) sotto la forma:

$$A_1T : A_2R = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3 ,$$

da cui si passa facilmente all'altra:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3 . \tag{2}$$

Il piano ω_3 uscente da VA_3 è così individuato dalla condizione di dover passare per il punto P_{12}, la determinazione del quale è ricondotta al noto problema elementare di dividere un segmento in due parti che stiano fra loro in un rapporto dato. E se costruiamo tre piani ω_1, ω_2 e ω_3, basandoci sulla proporzione (2), questi, è subito visto, passeranno per la medesima retta.

Rimane così provata l'esistenza e insieme con essa l'unicità d'un raggio soddisfacente alla condizione proposta: questo raggio è tale che i seni degli angoli che esso fa con i piani delle facce sono proporzionali alle potenze $(n-1)$-esime dei seni delle facce stesse.

DEFINIZIONE. — Al raggio che decompone il triedro in tre altri i cui seni stiano fra loro come le potenze n-esime dei seni delle facce, daremo il nome di *raggio di ordine n* e lo indicheremo con k_n.

Si noti inoltre che i triangoli A_1VP_{12} e A_2VP_{12} che costituiscono il triangolo isoscele A_1VA_2 dànno la proporzione:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = \text{sen } A_1\widehat{V}P_{12} : \text{sen } A_2\widehat{V}P_{12} \tag{3}$$

e che da questa e dalla (2) si ricava

$$\text{sen } A_1\widehat{V}P_{12} : \text{sen } A_2\widehat{V}P_{12} = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3. \tag{4}$$

Ne segue che ciascun piano che da uno spigolo proietta il raggio d'ordine n divide la faccia opposta in due angoli i cui seni stanno fra loro come le potenze ennesime dei seni delle faccie adiacenti.

Trasportando questi resultati al triangolo sferico potremo enunciare il seguente

TEOREMA. — *Gli archi di circolo massimo che uscendo dai vertici di un triangolo sferico dividono i lati opposti in parti tali che i loro seni sono proporzionali alle potenze* **n**-*esime dei seni dei lati adiacenti, passano per due punti* K_n *e* K'_n *di cui uno è sempre interno al dato triangolo, l'altro interno al suo opposto.* (1)

I seni delle distanze sferiche di ciascuno di essi dai lati sono proporzionali alle potenze (n—1)-*esime dei seni dei lati medesimi.*

Poichè vale per il triangolo sferico il teorema di Ceva col suo reciproco, (2) potremo chiamare questi archi di circolo massimo *ceviane sferiche di ordine n*. In particolare per n eguale a zero avremo le *mediane sferiche* il cui punto d'incontro è il *baricentro* K_0; per n eguale ad uno, le *bisettrici sferiche* il cui punto d'incontro è il *centro del circolo inscritto* K_1; per n eguale a due, le *simediane sferiche* il cui punto d'incontro è il *punto* K_2 *di Lemoine*.

2. Vogliamo in questo paragrafo calcolare il coseno dell'arco di circolo massimo AD che congiunge A col punto D del lato BC sapendo che:

$$\text{sen BD} : \text{sen DC} = m : n. \tag{5}$$

A questo scopo osserviamo che i triangoli ABD, ACD dànno, applicando il teorema d'Eulero:

$$\begin{cases} \cos c = \cos AD \,.\, \cos BD + \text{sen } AD \,.\, \text{sen } BD \,.\, \cos ADB \\ \cos b = \cos AD \,.\, \cos CD + \text{sen } AD \,.\, \text{sen } CD \,.\, \cos ADC. \end{cases}$$

---

(1) Di questi punti che sono diametralmente opposti noi non considereremo che il punto K_n a meno che non si avverta esplicitamente il contrario.

(2) Ne consegue l'esistenza tanto dei punti di Gergonne (uno interno e l'altro esterno al triangolo sferico dato) a cui corrisponde un unico raggio di Gergonne nel triedro, come quella dei punti di Nagel cui corrisponde il raggio di Nagel.

Da queste formule si ottiene facilmente, avuta presente la (5):

$$\frac{\cos c - \cos AD \cdot \cos BD}{\cos b - \cos AD \cdot \cos CD} = -\frac{m}{n}$$

ovvero

$$\cos AD \cdot (m \cos DC + n \cos BD) = m \cos b + n \cos c. \qquad (6)$$

Posto ora:

$$\operatorname{sen} BD + \operatorname{sen} DC = S,$$

dalla (5) si ottengono le:

$$\operatorname{sen} BD : S = m : m + n, \qquad S : \operatorname{sen} DC = m + n : n$$

e indi

$$m = \frac{m+n}{S} \cdot \operatorname{sen} BD, \qquad n = \frac{m+n}{S} \cdot \operatorname{sen} DC.$$

Mettendo questi valori di m ed n nella (6) troviamo la formula:

$$(m+n) \operatorname{sen} a \cdot \cos AD = S \cdot (m \cos b + n \cos c). \qquad (7)$$

Rimangono ora a calcolarsi sen BD e sen DC. A questo scopo osserviamo che sussistendo fra BD e DC la relazione

$$BD + DC = a$$

e la (5), avremo in virtù di note formule:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} DC = \dfrac{n \operatorname{sen} a}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos a}} \\ \operatorname{sen} BD = \dfrac{m \operatorname{sen} a}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos a}}, \end{cases}$$

dove al radicale va attribuito il segno positivo. Sostituendo questi valori nella (7) si ricava subito:

$$\cos AD = \frac{m \cos b + n \cos c}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos a}} \qquad (8)$$

che è la formula domandata. (¹) Essa corrisponde al teorema di Stewart, come del resto è facile persuadersi facendo uso del procedimento indicato nel § 186 della Trigonometria del Ch.^{mo} Prof. Pesci.

Se vi poniamo:

$$m = \operatorname{sen}^p c, \qquad n = \operatorname{sen}^p b$$

otteniamo:

$$\cos AD = \frac{\operatorname{sen}^p b \cdot \cos c + \operatorname{sen}^p c \cdot \cos b}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2p} b + \operatorname{sen}^{2p} c + 2 \operatorname{sen}^p b \cdot \operatorname{sen}^p c \cdot \cos a}} \qquad (9)$$

formula che serve al calcolo delle ceviane sferiche dei diversi ordini.

3. Andiamo ora a trovare la formula che dà la distanza di un punto del triangolo sferico da un altro punto della superficie mede-

---

(¹) A questa formula si poteva pervenire anche in altro modo usufruendo dei resultati ottenuti pel tetraedro. Vedasi il mio "Contributo alla Geometria recente del tetraedro „- *Periodico di Matematica*. Livorno. Vol. XIX, Fasc. V.

sima quando sian note le distanze di esso dai tre vertici. Cominciamo dal cercare innanzi tutto in qual rapporto ciascuna delle tre ceviane viene divisa dal punto che esse hanno in comune. Indichiamo perciò con A', B', C' i punti ove i lati c, a, b vengono incontrati da tre ceviane che escono dai vertici opposti A, B, C rispettivamente ed aventi a comune il punto O.

Il teorema di Menelao [1] applicato al triangolo BAB' tagliato dalla trasversale COC', dà

$$\text{sen}\, BC' . \text{sen}\, AC . \text{sen}\, OB' = \text{sen}\, AC' . \text{sen}\, BO . \text{sen}\, CB'$$

da cui si ricava

$$\frac{\text{sen}\, BO}{\text{sen}\, OB'} = \frac{\text{sen}\, BC'}{\text{sen}\, AC'} \cdot \frac{\text{sen}\, AC}{\text{sen}\, CB'} . \tag{10}$$

Ma se poniamo:

$$\begin{cases} \text{sen}\, AB' : \text{sen}\, B'C = q : p \\ \text{sen}\, BC' : \text{sen}\, C'A = s : r \\ \text{sen}\, CA' : \text{sen}\, A'B = n : m , \end{cases} \tag{11}$$

poichè è:

$$\text{sen}\, AC = \text{sen}\,(AB' + B'C) = \text{sen}\, AB' . \cos B'C + \cos AB' . \text{sen}\, B'C$$

sarà:

$$\frac{\text{sen}\, AC}{\text{sen}\, CB'} = \frac{q}{p} . \cos B'C + \cos AB' .$$

Per ricavare ora $\cos B'C$ e $\cos AB'$ osserviamo che essendo insieme alla prima delle (11) verificata la:

$$AB' + B'C = b,$$

segue facilmente:

$$\cos B'C = \frac{q + p \cos b}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos b}} , \qquad \cos AB' = \frac{p + q \cos b}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos b}} ,$$

e quindi per la (10):

$$\frac{\text{sen}\, BO}{\text{sen}\, OB'} = \frac{s}{r} \cdot \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos b}}{p} . \tag{12}$$

che è la formula cercata.

Supposto che O sia il punto notevole K_n si trova, ponendo nella (12)

$$r = \text{sen}^n\, b, \qquad s = \text{sen}^n\, a, \qquad p = \text{sen}^n\, a, \qquad q = \text{sen}^n\, c,$$

$$\frac{\text{sen}\, BK_n}{\text{sen}\, H_n B'} = \frac{\sqrt{\text{sen}^{2n}\, a + \text{sen}^{2n}\, c + 2\, \text{sen}^n\, a . \text{sen}^n\, c . \cos b}}{\text{sen}^n\, b} . \tag{13}$$

Ciò premesso, prendiamo nel triangolo sferico ABC un punto H e congiungiamolo con i tre vertici. Tiriamo poi per A la AK_nA' e uniamo infine K_n con H e H con A'.

---

(1) Anche il teorema di Menelao sussiste col suo reciproco. Questo, e il teorema di Ceva di cui abbiam fatto cenno sopra erano già noti e quindi non ne abbiamo data la dimostrazione la quale del resto risulta dalla proporzione (3).

Dal triangolo BHC osservando che il lato BC è diviso da A′ in modo che:

$$\operatorname{sen} BA' : \operatorname{sen} A'C = \operatorname{sen}^n c : \operatorname{sen}^n a,$$

si ricava pel teorema di Stewart:

$$\cos A'H = \frac{\operatorname{sen}^n c \,.\, \cos CH + \operatorname{sen}^n b \,.\, \cos BH}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} c + \operatorname{sen}^{2n} b + 2 \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}} . \tag{14}$$

Ora dal triangolo AHA′, il punto K_n dividendo AA′ in modo che

$$\operatorname{sen} AK_n : \operatorname{sen} K_nA' = \sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a} : \operatorname{sen}^n a$$

segue pel medesimo teorema:

$$\cos HK_n = \\ = \frac{\cos A'H \sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a} + \operatorname{sen}^n a \cos AH}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} a + \operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a + 2 \operatorname{sen}^n a \sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a} \cos AA'}} .$$

In questa sostituendo per $\cos A'H$ il valore dato dalla (14) e per $\cos AA'$ quello che pel teorema di Stewart si ottiene dal triangolo ABC e che è

$$\cos AA' = \frac{\operatorname{sen}^n c \,.\, \cos b + \operatorname{sen}^n b \,.\, \cos c}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}} ,$$

ne risulta la formula richiesta:

$$\cos HK_n = \frac{\operatorname{sen}^n a \cos AH + \operatorname{sen}^n b \cos BH + \operatorname{sen}^n c \cos CH}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} a + \operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2\,[\operatorname{sen}^n a \operatorname{sen}^n b \cos c + \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a + \operatorname{sen}^n c \operatorname{sen}^n a \cos b]}} \tag{15}$$

che sotto forma più semplice può scriversi

$$\cos HK_n = \frac{\Sigma \operatorname{sen}^n a \,.\, \cos AH}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^{2n} a + 2\, \Sigma \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}} . \tag{16}$$

Da questa formula si traggono diverse relazioni notevoli dando ad H varie posizioni sulla sfera.

Intanto se scriviamo la formula stessa per un altro punto L, dividendo poi la (16) per quella scritta, membro a membro si trova:

$$\frac{\cos HK_n}{\cos LK_n} = \frac{\Sigma \operatorname{sen}^n a \,.\, \cos AH}{\Sigma \operatorname{sen}^n a \,.\, \cos AL} .$$

Ora, se HK_n è minore di LK_n sarà $\cos HK_n > \cos LK_n$ e quindi la somma che figura al numeratore sarà maggiore di quella che figura al denominatore. (1) La somma:

$$\Sigma \operatorname{sen}^n a \cos AH$$

sarà dunque *massima*, quando H coincide con K_n. E il valore che essa prende in tale caso sarà, per la (16):

$$\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^{2n} a + 2\, \Sigma \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}.$$

---

(1) Per la conclusione a cui tendiamo è evidentemente lecito supporre che gli archi HK_n e LK_n siano inferiori a un quadrante.

In particolare, per $n=0, 1, 2$ si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} \cos AK_0 + \cos BK_0 + \cos CK_0 = \sqrt{3+2[\cos a + \cos b + \cos c]} \\ \Sigma \operatorname{sen} a \cos AK_1 = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 a + 2\Sigma \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos a} \\ \Sigma \operatorname{sen}^2 a \cos AK_2 = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 a + 2\Sigma \operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c \,.\, \cos a}. \end{cases}$$

Si noti ancora la relazione generale:

$$\Sigma \operatorname{sen}^n a \cos AH = 0, \tag{17}$$

che ha luogo quando H è un punto del circolo massimo che ha per polo K_n, la quale consegue dalla formula (16). In particolare è:

$$\cos AH + \cos BH + \cos CH = 0,$$

se la distanza di H da K_0 è di un quadrante. I punti poi tali che la somma medesima sia costante sono situati sopra un circolo il cui centro è K_n. La (16) ci fornisce allora il coseno del raggio di detto circolo.

Della lunga serie di formule che si possono dedurre della (16) ci limitiamo a citare le seguenti:

$$(18)\quad \begin{cases} \cos OK_0 = \dfrac{3\cos R}{\sqrt{3+2\Sigma \cos a}} \\ \cos OK_1 = \dfrac{\cos R \,.\, \Sigma \operatorname{sen} a}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 a + 2\Sigma \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \cos c}} \\ \cos OK_2 = \dfrac{\cos R \,.\, \Sigma \operatorname{sen}^2 a}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 a + 2\Sigma \operatorname{sen}^2 a \,.\, \operatorname{sen}^2 b \,.\, \cos c}}, \end{cases}$$

che si ottengono facendo coincidere H col centro O del circolo circoscritto.

Tutte queste formule e quelle che potrebbero aversi con procedimento analogo hanno le loro corrispondenti in geometria del triangolo rettilineo. Così per es. alle tre relazioni (18) corrispondono rispettivamente le:

$$\begin{cases} \overline{OG}^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9} \\ \overline{OI}^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} \\ \overline{OK}^2 = R^2 - 3\left(\dfrac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \end{cases}$$

alle quali si perviene col procedimento di cui si è fatto cenno precedentemente.

Notiamo finalmente che poichè in virtù di un teorema generale, [1] da una formula di trigonometria sferica si ottiene la corrispondente in trigonometria pseudosferica cambiando R in $R\,.\sqrt{-1}$, restan dimostrati oltre che l'esistenza dei punti notevoli nel triangolo pseudosferico

---

[1] Vedasi p. es. in *Geometria differenziale* del Ch.^{mo} prof. Bianchi. Pisa, 1894. Cap. XVI, pag. 408.

anche il teorema di Stewart e la formula che dà il coseno iperbolico della distanza di un punto notevole da un altro punto qualsivoglia in funzione dei coseni iperbolici delle distanze di quest'ultimo dai vertici (1).

ENRICO PICCIOLI.

Cortona, ottobre 1904.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 658, 675, 676 E 677

658. *Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto fisso a tutti i circoli bitangenti a una conica.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia O l'origine degli assi che supporremo paralleli a quelli della conica data c. Allora l'equazione di c sarà della forma:

$$\psi_0 = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 . \tag{1}$$

I. — *Il punto dato* P *sia un punto proprio.*

Senza togliere generalità al problema supporremo che P coincida con O. Indicando con α, β, γ tre variabili,

$$\psi_0 - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0 \tag{2}$$

rappresenterà una conica bitangente alla (1).

Affinchè la (2) rappresenti un cerchio è necessario e sufficiente che sia

$$a_{11} - \alpha^2 = a_{22} - \beta^2 , \quad (3) \qquad \alpha\beta = 0 . \quad (4)$$

La polare di P rispetto alla (2) è data da

$$\psi_1 - \gamma (\alpha x + \beta y + \gamma) = 0, \tag{5}$$

essendo

$$\psi_1 = a_{13} x + a_{23} y + a_{33}$$

una funzione indipendente dalle variabili α, β, γ. Eliminando queste variabili tra le equazioni (2), (3), (4), (5) si ottengono i luoghi

$$(\psi_0 - \psi_1)^2 = (a_{11} - a_{22}) x^2 \psi_0 , \qquad (\psi_0 - \psi_1)^2 = (a_{22} - a_{11}) y^2 \psi_0 .$$

II. — *Il punto dato* P *sia il punto improprio della retta*

$$y = mx . \tag{6}$$

Il diametro della (2) coniugato alla direzione della (6) ha per equazione

$$\psi_2 - (\alpha + m\beta) (\alpha x + \beta y + \gamma) = 0, \tag{7}$$

essendo

$$\psi_2 = (a_{11} x + a_{13}) + m (a_{22} y + a_{23})$$

(1) Non sarebbe, a mio parere, malfatto riunire per terne le formule di geometria piana, sferica e pseudosferica corrispondenti a un medesimo teorema. A questo gioverebbe moltissimo l'eccellente trattato di *Trigonometria piana e sferica* del Ch.^{mo} prof. Pesci.

una funzione indipendente dalle variabili α, β, γ. Eliminando queste variabili tra le equazioni (2), (3), (4), (7) si ottengono i luoghi

$$\psi_2^2 = m^2 (a_{22} - a_{11}) \psi_0 \qquad (8)$$

$$\psi_2^2 = (a_{11} - a_{22}) \psi_0 . \qquad (9)$$

Le (8), (9) rappresentano evidentemente due coniche bitangenti alla (1).

675. *Esiste un circolo ed uno solo rispetto al quale un triangolo dato è autoconiugato; questo circolo ha per centro l'ortocentro del triangolo. Si determini il raggio del circolo in funzione delle misure dei lati del triangolo, e si cerchino altre proprietà del circolo stesso.*

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

In un cerchio la perpendicolare alla polare condotta per il polo passa per il centro; quindi i cerchi γ ai quali sia autoconiugato un triangolo ABC devono avere per centro l'ortocentro H. Sia $\overline{AX}$ un'altezza di ABC, ρ il raggio di uno dei cerchi γ. Avremo evidentemente:

$$\rho = \sqrt{\overline{HA} \,.\, \overline{HX}}\,; \qquad (1)$$

si deduce che esiste un solo cerchio γ autoconiugato ad ABC. Il raggio ρ è reale, immaginario o nullo, secondo che H è esterno o interno ad $\overline{AX}$, oppure coincide con A, cioè secondo che ABC è ottusangolo, acutangolo o rettangolo. Inoltre, essendo H il centro radicale dei cerchi γ_a, γ_b, γ_c aventi per diametri i lati del triangolo ABC, per la (1), ρ^2 sarà la potenza di H rispetto a questi cerchi.

Calcolo di ρ. — Siano a, b, c i lati di ABC; R il raggio ed O il centro del circumcerchio Γ, A' il punto medio di BC. Abbiamo

$$\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 = 2\left(\overline{HA'}^2 + \tfrac{1}{4} a^2\right), \quad \text{cioè} \quad \overline{HA'}^2 - \tfrac{1}{4} a^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 - a^2\right). \quad (2)$$

Il primo membro della (2) è la potenza di H rispetto a γ_a quindi

$$\rho^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 - a^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{HC}^2 + \overline{HA}^2 - b^2\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 - c^2\right) = \tfrac{1}{3}\Sigma\, \overline{HA}^2 - \tfrac{1}{4}\Sigma a^2$$

ma

$$\Sigma\, \overline{HA}^2 = 12R^2 - \Sigma a^2, \text{ (1)}$$

dunque

$$\rho^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma a^2.$$

Altre proprietà di γ:

1ª. *Il cerchio* γ *taglia ortogonalmente i cerchi* γ_a, γ_b, γ_c.

Infatti, il quadrato del raggio di γ è la potenza del suo centro H rispetto a γ_a, γ_b, γ_c.

2ª. *Si ha la formula* $\overline{OH}^2 - \rho^2 = R^2 + \rho^2$, *cioè la potenza di* O *rispetto a* γ *è uguale alla somma dei quadrati dei raggi di* Γ *e* γ.

3ª. *L'asse radicale* s *di* Γ *e* γ *è la polare del baricentro di* ABC *rispetto a* γ.

Il punto $(s, \overline{BC})$ è il centro radicale di Γ, γ, γ_a; quindi giacerà sull'asse radicale s_a di γ, γ_a; ma, per la proprietà 1ª, s_a è la polare di A' rispetto a γ, quindi (s, BC) sarà il polo di $\overline{AA'}$. Siccome poi la s contiene i poli delle mediane di ABC rispetto a γ, essa sarà la polare del baricentro di ABC rispetto a γ stesso.

---

(1) Si ha: $\overline{HA} = 2\overline{OA'}$, quindi

$$\Sigma\, \overline{HA}^2 = 4\Sigma\, \overline{OA'}^2 = 4\Sigma\,(R^2 - \tfrac{1}{4}a^2) = 12R^2 - \Sigma a^2.$$

Sia D la proiezione di O su AX; dal triangolo OAH si ha

$$\overline{OH}^2 = R^2 + \overline{AH}^2 - 2\overline{AH}\,.\,\overline{AD} = R^2 + 2\overline{AH}(\tfrac{1}{2}\,AH - \overline{AD}) = R^2 + 2\overline{AH}\,.\,\overline{XH} = R^2 + 2\rho^2.$$

676. *Dimostrare la formula*

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

BRAMBILLA.

Risoluzione del sig. Barisien di Costantinopoli.

Per semplicità poniamo $\frac{\pi}{7}=x$. Si ha

$$\operatorname{sen}5x=16\operatorname{sen}^5x-20\operatorname{sen}^3x+5\operatorname{sen}x$$
$$\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x\,.$$

La relazione proposta diviene dunque

$$16\operatorname{sen}^5x-24\operatorname{sen}^3x+7\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{7}}{2}. \tag{1}$$

D'altra parte è

$$\operatorname{sen}7x=7\operatorname{sen}x-56\operatorname{sen}^3x+112\operatorname{sen}^5x-64\operatorname{sen}^7x\,.$$

Poichè è $7x=\pi$, questa relazione diviene, facendo sparire il fattore $\operatorname{sen}x$, che non è nullo,

$$64\operatorname{sen}^6x-112\operatorname{sen}^4x+56\operatorname{sen}^2x-7=0\,. \tag{2}$$

Se ora poniamo $\operatorname{sen}x=y$, la quistione si riduce a dimostrare che le due equazioni

$$16y^5-24y^3+7y=\frac{\sqrt{7}}{2}, \tag{3}$$
$$64\,y^6-112\,y^4+56\,y^2-7=0 \tag{4}$$

sono equivalenti.

Elevando la (3) a quadrato essa diventa

$$1024\,y^{10}-3072\,y^8+3200\,y^6=1344\,y^4+196\,y^2-7=0\,,$$

ovvero

$$(64\,y^6-112\,y^4+56\,y^2-7)(16\,y^4-20\,y^2+1)=0\,.$$

Il primo fattore è il primo membro dell'equazione (4), che dà $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. Il secondo fattore dà valori immaginari per y, considerati come $\operatorname{sen}x$.

La relazione proposta è dunque vera.

OSSERVAZIONE. — Ecco altre relazioni interessanti che si deducano dalla quistione proposta

$$\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$$
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$$
$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$
$$64\cos\frac{7\pi}{7}-112\cos\frac{5\pi}{7}+56\cos\frac{3\pi}{7}-7\cos\frac{\pi}{7}-1=0$$
$$16\cos\frac{3\pi}{14}\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}\left(1-4\operatorname{sen}\frac{2\pi}{14}\right)=\sqrt{7}.$$
$$64\cos\frac{6\pi}{7}+64\cos\frac{5\pi}{7}-112\cos\frac{4\pi}{7}-96\cos\frac{3\pi}{7}+64\cos\frac{2\pi}{7}+32\cos\frac{\pi}{7}-9=0$$
$$4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{7}-1\right)=\sqrt{7}$$
$$16\left(\cos\frac{\pi}{7}+1\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{7}-1\right)\left(2\cos\frac{\pi}{7}-1\right)^3+7=0\,.$$

Altra risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

677. *Sia M un punto variabile sopra un'ellisse che ha per fuochi F, F'. Il luogo dei centri di similitudine del circolo inscritto nel triangolo MFF' e di un circolo fisso si compone di due coniche.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sieno I ed R il centro e il raggio del cerchio inscritto in MFF'; e poniamo:

$$\overline{FM} = m\,, \qquad \overline{F'M} = 2a - m\,, \qquad \overline{FF'} = 2c\,;$$

avremo:

$$R = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)[c^2 - (m-a)^2]}}{a+c}.$$

Le coordinate di I rispetto agli assi dell'ellisse sono:

$$x = \tfrac{1}{2}(\overline{FM} - \overline{F'M}) = m - a; \qquad y = R = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)[c^2 - (m-a)^2]}}{a+c};$$

eliminando m tra queste due equazioni si ottiene evidentemente il luogo di I il quale è l'ellisse:

$$(a+c)^2 y^2 = (a^2 - c^2)(c^2 - x^2). \tag{1}$$

Sia ora $C = (\alpha, \beta)$ il centro ed r il raggio del circolo fisso dato; $P = (x, y)$ sia un punto della (1). Facendo assumere ad r il doppio segno, le coordinate dei centri di similitudine del cerchio fisso di centro C e raggio r con quello di centro P e raggio uguale all'ordinata y di P sono date da:

$$X = \frac{rx + \alpha y}{r+y}, \qquad Y = \frac{r+\beta}{r+y}\,y.$$

Da queste equazioni si ricava:

$$x = \frac{(r+\beta)X - \alpha Y}{r+\beta - Y}, \qquad y = \frac{rY}{r+\beta-Y}.$$

Sostituendo con questi valori nella (1) si trova l'equazione del luogo

$$r^2(a+c)^2 Y^2 = (a^2-c^2)\left\{c^2(r+\beta-Y)^2 - [(r+\beta)X - \alpha Y]^2\right\}. \tag{2}$$

Siccome r può assumere il doppio segno il luogo (2) si comporrà di due coniche.

QUISTIONI PROPOSTE

691. L'area limitata dalla curva

$$(x+y+a)^4 - 64(x+a)(y+a) = 0$$

è eguale a $4\pi a^2$.

692. Essendo M un punto variabile sopra una ellisse o una iperbole, P, Q le proiezioni di M sugli assi, S la proiezione di M su PQ si trovino le aree delle tre curve:

1ª luogo dei punti S;

2ª inviluppo della retta MS;

3ª inviluppo della retta PQ.

693. Siano F. F′ i fuochi di una ellisse ed M un punto variabile sulla medesima. Si considerino il circolo inscritto al triangolo MFF′ e quello exinscritto contenuto nell'angolo $\widehat{FMF'}$.

1. L'inviluppo di ciascuno di questi circoli è una quartica podaria dal centro dell'ellisse.

2. Il luogo dei punti d'incontro di ciascuno dei circoli suddetti colla retta che congiunge il centro dell'ellisse al punto M è una sestica, della quale si domanda l'area.

694. Essendo date le due curve

$$\rho = A \cos \omega \qquad (1) \qquad\qquad \rho = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \qquad (2)$$

si costruisca la curva che si ottiene aumentando (o diminuendo) ogni raggio vettore della curva (1) di una lunghezza eguale al raggio vettore corrispondente della curva (2), e quella che si ottiene aumentando (o diminuendo) ogni raggio vettore della curva (2) di una lunghezza eguale al raggio vettore della curva (1). Dimostrare che le aree delle due curve così ottenute sono eguali.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Riboni G. — *Elementi di aritmetica per le scuole secondarie.*

È un trattato di aritmetica che al pregio della chiarezza, come poteva aspettarsi da chi ha pratica dell'insegnamento secondario, unisce quello, più difficile a conseguire in un libro elementare, del rigore scientifico.

L'A. consigliato dall'esperienza, fa precedere i numeri decimali e il sistema metrico decimale alla trattazione delle frazioni ordinarie; per tal modo può fin dal principio addestrare i giovani con gli esercizi sui decimali e sulle misure.

Notevole è poi l'aver espressamente collegato il concetto di frazione e quello di divisione, facendo osservare come l'aver definito e messo in calcolo le parti aliquote dell'unità permette di eseguire con esattezza ogni divisione. Così i giovani lettori possono rendersi conto del trattato sulle frazioni, poichè intendono facilmente come sia necessario saper fare anche su questi numeri le ordinarie operazioni di calcolo.

Nel capitolo VI, sulle grandezze proporzionali l'A., dopo aver dato chiaramente il concetto di proporzionalità, insiste, per la soluzione dei vari problemi, specialmente sul metodo di riduzione all'unità, come il più facile e il più persuasivo, senza però tralasciare di esporre anche quello delle proporzioni.

E mentre tutto è scritto in quella forma semplice e piana che invita gradevolmente alla lettura, non è mai perduta d'occhio, neppure per un istante, la precisione scientifica che rende pregevole questo volumetto.

Che se poi, come l'A. mostra di pensare, egli sarà riuscito troppo *razionale*, sarà il caso di dire che in quella sua esposizione così chiara questo è un bel difetto.

E. Maioli.

Tolomei Giulio. — *Problemi di fisica.* Seconda edizione con un'appendice contenente i problemi dati all'esame di ammissione alla R. Accademia Navale. Firenze, Success. Le Monnier, 1902.

I problemi di fisica costituiscono senza dubbio una ginnastica intellettuale di prim'ordine. Essi infatti sono la prima e più naturale applicazione delle matematiche per i giovani delle scuole secondarie, e servono a mostrare a questi come le teorie matematiche servano a risolvere importanti quesiti della vita pratica. Sarebbe quindi naturale che da noi, come in altri paesi, fossero addestrati i giovani alla risoluzione di tali problemi; ma, come osserva giustamente l'autore, nella prefazione, ciò non si fa in alcuna scuola.

I giovani volenterosi potranno dunque ritrarre grande profitto dalla lettura di questo libro che, pubblicato per la prima volta nel 1891 ha meritamente avuta la fortuna di giungere ora alla seconda edizione.

I problemi disposti ordinatamente si riferiscono alle materie svolte nei programmi dei Licei ed Istituti tecnici; e servono a completare le relative teorie, ove sono di solito svolte in modo manchevole ed imperfetto.

Una maggiore estensione è data alle applicazioni di elettricità, e sono svolte sotto forma di problemi molte quistioni della elettrotecnica, che ha ormai tanta importanza nella vita pratica.

K.

L'INCHIESTA SUL METODO DI LAVORO DEI MATEMATICI

L'ottima rivista l'*Enseignement mathématique* ha iniziata un'inchiesta sul metodo di lavoro dei matematici, e si rivolge agli studiosi di tutto il mondo, pregandoli di rispondere alle 29 domande che esso indirizza loro per mezzo di un apposito quistionario, nella fiducia che dall'insieme delle risposte possano scaturire degli insegnamenti e consigli utili ai giovani matematici ed all'insegnamento. Il Periodico di matematica è ben lieto di associarsi a quest'opera, ed invia ai suoi lettori il quistionario in parola con preghiera di prenderne cognizione, ed inviarlo colle relative risposte, a uno dei redattori:

Prof. C.-A. Laisant, 162, Avenue Victor Hugo, Paris.

Prof. H. Fehr, 19, rue Gevray, Genève.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 febbraio 1905

LE DEFINIZIONI GENERALI IN MATEMATICA [1]

I. Debbo oggi intrattenervi sulle definizioni generali nelle matematiche; così almeno dice il programma, ma non mi sarà possibile limitarmi a questo argomento, quanto esigerebbe la regola dell'unità di azione; non potrò trattarlo senza parlare un poco su altre questioni vicine, e se sarò quindi costretto a camminare di tanto in tanto sui sentieri di destra e di sinistra, vi prego di volermi accordare la vostra indulgenza.

Che cos'è una buona definizione? Pel filosofo, o per lo scienziato, è una definizione che si applica a tutti gli oggetti definiti e ad essi soli; è quella che soddisfa le regole della logica. Nell'insegnamento però, non si tratta di questo; una buona definizione è quella che vien compresa dagli scolari.

Perchè avviene che tante intelligenze ricusino di comprendere le matematiche? Non vi è in ciò alcunchè di paradossale? Ecco una scienza che fa appello ai soli principî fondamentali della logica, al principio di contraddizione, per esempio, a ciò che forma per così dire lo scheletro del nostro intendimento, a ciò di cui non potremmo spogliarci senza cessare di pensare, e si trovano persone che la dicono oscura! e sono anche in maggioranza! Che essi sieno incapaci d'inventare, passi; ma che essi non comprendano le dimostrazioni che vengono loro esposte, che essi restino ciechi, quando noi presentiamo loro una luce che ci sembra brillare d'un puro splendore, è una cosa che ha assolutamente del prodigioso.

Eppure non occorre essere molto pratici di esami per sapere come quei ciechi non sono affatto esseri eccezionali! Ecco un problema di non facile soluzione, ma che deve preoccupare tutti coloro che vogliono darsi all'insegnamento.

---

(1) Questa conferenza, letta al Museo pedagogico di Parigi nella primavera del 1904, fu pubblicata nell'ottima rivista *L'enseignement mathématique* del luglio 1904. Le considerazioni acutissime e profonde svolte dall'illustre autore sull'insegnamento della matematica, interessano i professori italiani non meno di quelli francesi, e siamo certi che i lettori del *Periodico* saranno al pari del sottoscritto, riconoscenti all'illustre prof. Poincaré ed ai direttori dell'*Enseignement mathématique* proff. Laisant e Fehr di avere gentilmente accordato il permesso di pubblicare una traduzione dell'articolo in questo giornale.

(*Nota di* G. LAZZERI.)

Che significa capire? Questa parola ha lo stesso significato per tutti? Comprendere la dimostrazione di un teorema, vuol forse dire esaminare successivamente tutti i sillogismi di cui si compone e constatare che è corretto, conforme alle regole del giuoco? Ed anche capire una definizione, significa semplicemente riconoscere di sapere già il senso di tutti i termini adoperati e constatare ch'esso non implica contraddizione di sorta?

Sì, per alcuni i quali, dopo fatta tale constatazione, diranno: ho capito. No, per la massima parte. Quasi tutti sono molto più esigenti, vogliono sapere, non solo se tutti i sillogismi di una dimostrazione sono corretti, ma perchè si incatenano in un certo ordine, piuttosto che in un altro. Finchè sembrano loro generati dal capriccio, e non da un'intelligenza costantemente conscia dello scopo da raggiungere non credono aver compreso.

Certo non si rendono bene conto essi stessi di ciò che vogliono, e non saprebbero formulare il loro desiderio, ma se non restano soddisfatti, sentono che qualche cosa manca loro. Allora che avviene? Sul principio scorgono ancora le evidenze che si mettono loro sott'occhio; ma poichè queste non si collegano che per un filo troppo sottile alle precedenti ed alle seguenti, passano dal loro cervello senza lasciarvi traccia, vengono tosto dimenticate, e dopo aver brillato un istante, ricadono subito in una notte eterna. Quando saranno più innanzi, non scorgeranno più neppure quella effimera luce, poichè i teoremi si appoggiano gli uni sugli altri e quelli che occorrerebbero sono già dimenticati; è così che divengono incapaci a comprendere le matematiche.

Non è sempre colpa del loro professore; spesso la loro intelligenza, cui occorre scorgere il filo conduttore, è troppo pigra per cercarlo e per trovarlo. Ma per venir loro in aiuto, occorre prima comprender bene che cosa li trattiene.

Altri si domanderanno sempre: a che cosa ciò è utile; non intenderanno se non si troveranno intorno, in pratica od in natura, la ragione d'essere di tale o tal'altra nozione matematica. Sotto ogni parola, vogliono mettere un'imagine sensibile; occorre che la definizione evochi tale imagine, che ad ogni stadio della dimostrazione la vedano trasformarsi ed evolversi. A questa sola condizione, comprenderanno e ricorderanno. Costoro si illudono spesso da loro stessi; non ascoltano i ragionamenti, guardano le figure; credono aver compreso ed hanno solo veduto.

2. Quante tendenze diverse! Occorre combatterle? Occorre utilizzarle? E volendo combatterle, quale bisognerebbe favorire? A coloro che si contentano della pura logica si deve dimostrare che hanno visto le cose sotto un unico aspetto? Oppure a coloro che non restano tanto facilmente soddisfatti si deve dire che ciò che chiedono non è necessario?

In altre parole, dobbiamo obbligare i giovani a mutare l'indole dell'intelligenza loro? Un simile tentativo sarebbe inutile; non possediamo la pietra filosofale che ci permetterebbe di cambiare gli uni negli altri i metalli preziosi confidatici; la sola cosa che possiamo fare è di lavorarli adattandoci alle loro proprietà.

Molti fanciulli, ai quali pure bisogna insegnare le matematiche, sono incapaci di divenir matematici; ed i matematici stessi non sono tutti plasmati nello stampo medesimo. Basta leggerne le opere per distinguerli in due diverse qualità d'intelligenze, quelle dei logici come per esempio Weierstrass, e degli intuitivi come Riemann. La differenza è uguale tra i nostri allievi. Gli uni preferiscono risolvere i loro problemi *analiticamente*, come essi dicono, gli altri *geometricamente*.

È perfettamente inutile cercar di cambiarvi qualche cosa, e del resto sarebbe ciò desiderabile? È bene vi siano logici ed intuitivi; chi oserebbe decidere se preferirebbe che Weierstrass non avesse mai scritto, oppure che Riemann non fosse esistito? Bisogna quindi rassegnarci alla diversità delle intelligenze, meglio ancora, bisogna rallegrarcene.

3. Poichè la parola comprendere ha differenti significati, le definizioni meglio comprese dagli uni non converranno agli altri. Abbiamo quelle che cercano di far nascere un'imagine, e quelle in cui ci si limita a combinare forme vuote, perfettamente intelligibili, ma puramente intelligibili, cui l'astrazione ha tolto ogni materia.

Non so se sia proprio necessario citar degli esempi. Citiamone però, e prima di ogni altro la definizione delle frazioni ci fornirà un esempio estremo. Nelle scuole primarie, per definire una frazione viene tagliata una mela o una torta; viene tagliata mentalmente, s'intende, e non in realtà, perchè non credo che il bilancio dell'istruzione elementare permetta simili prodigalità. Alla scuola normale superiore, invece, o nelle Facoltà, verrà detto: una frazione, è l'insieme di due numeri interi separati da una linea orizzontale: verranno definite convenzionalmente le operazioni che possono subire tali simboli; verrà dimostrato che le regole di queste operazioni sono le stesse che nel calcolo dei numeri interi, e si constaterà finalmente che, facendo secondo tali regole la moltiplicazione della frazione pel denominatore, si ritrova il numeratore. Ciò va benissimo, perchè ci si rivolge a giovani, da lungo tempo famigliarizzati colla cognizione delle frazioni a furia di aver diviso mele ed altri oggetti, e la cui intelligenza raffinata da una forte educazione matematica, è a poco a poco giunta a desiderare una definizione puramente logica. Ma quale sarebbe lo sbalordimento di un principiante cui si volesse servirla?

Di questa specie sono anche le definizioni che trovansi in un libro giustamente ammirato e molte volte premiato, i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert. Vediamo infatti come principia: *Pensiamo tre sistemi di cose che chiameremo punti, rette e piani*. Che sono queste "cose"? non lo sappiamo, e non dobbiamo saperlo; sarebbe anzi dannoso che cercassimo di saperlo; quel che abbiamo diritto di sapere, è quanto ce ne dicono gli assiomi, questo per esempio: *Due punti differenti determinano sempre una retta*, seguito dal commento: *invece di determinano, possiamo dire che la retta passa per questi due punti, o che congiunge questi due punti, o che i due punti sono collocati sulla retta*. Sicchè, " essere collocato sopra una retta „ è semplicemente definito come sinonimo di " determinare una retta „. È questo un libro di cui ho buonissima opinione, ma che non raccomanderei ad uno studente di liceo. Potrei del resto, farlo senza timore, poich'egli non andrebbe troppo oltre colla sua lettura.

Ho preso esempi estremi, e nessun maestro potrebbe pensare di andare così lontano. Ma pur rimanendo bene al di quà di simili modelli, non si espone egli forse allo stesso rischio?

Siamo in una quarta classe; il professore detta: il circolo è il luogo dei punti del piano che si trovano ad ugual distanza da un punto interno chiamato centro. Il buon studente scrive questa frase sul suo quinterno; il cattivo vi disegna delle figurine; ma nè l'uno nè l'altro ha compreso; il professore prende allora il gesso e traccia un cerchio sulla lavagna. " Ah! pensano gli scolari, perchè non lo diceva subito: un circolo è un tondo, avremmo capito „. Certo, ha ragione il professore. La definizione degli allievi non avrebbe avuto valore, poichè non avrebbe potuto servire a dimostrazione alcuna, e specialmente perchè non avrebbe potuto dar loro la salutare abitudine di analizzare i propri concetti. Ma bisognerebbe dimostrar loro che non capiscono ciò che credono capire, condurli a rendersi conto della grossolanità del loro concetto primitivo, a desiderare essi stessi che venga epurato e dirozzato.

4. Tornerò su tutti questi esempi: ho solo voluto dimostrarvi i due concetti opposti: esiste fra loro un contrasto violento. Questo contrasto, ci viene spiegato dalla storia della scienza. Se leggiamo un libro scritto cinquant'anni or sono, la massima parte dei ragionamenti che contiene, ci sembrerà sprovvista di rigore.

Si ammetteva a quell'epoca che una funzione continua non potesse cambiar di segno senza annullarsi; attualmente ciò viene dimostrato. Si ammetteva che le regole ordinarie del calcolo fossero applicabili ai numeri incommensurabili; attualmente ciò vien dimostrato. Si ammettevano tante altre cose, che a volte erano false.

Ci si fidava dell'intuizione; ma ormai si è capito ogni giorno meglio del precedente che l'intuizione non può darci il rigore, e neppure la certezza. Essa ci insegna per esempio che ogni curva ha una tangente, cioè che ogni funzione continua ha una derivata, e ciò è falso. E poichè si teneva alla certezza, è bisognato rendere sempre più piccola la parte della intuizione.

Come è avvenuta questa necessaria evoluzione? Non si è tardato ad accorgersi che il rigore non avrebbe potuto stabilirsi nei ragionamenti, se non fosse stato prima introdotto nelle definizioni.

Per molto tempo gli argomenti di cui si occupano i matematici sono stati mal definiti; si credeva conoscerli, perchè venivano rappresentati coi sensi o l'imaginazione; ma non se ne aveva che un'imagine grossolana e non un'idea precisa sulla quale il ragionamento potesse aver presa.

Su ciò i logici hanno dovuto portare i loro sforzi. Lo stesso pel numero incommensurabile.

La vaga idea di continuità, che dobbiamo all'intuizione, si è risoluta in un complicato sistema di ineguaglianze tra numeri interi. Così sono definitivamente svanite tutte quelle difficoltà che spaventavano i padri nostri, allorchè riflettevano ai fondamenti del calcolo infinitesimale.

Ora non rimangono in analisi che numeri interi, o sistemi finiti od infiniti di numeri interi, legati tra loro da un sistema di uguaglianze ed ineguaglianze. Le matematiche, come è stato detto, si sono aritmetizzate.

5. Ma si crede forse che le matematiche abbiano raggiunto il rigore assoluto senza far sacrifici? Niente affatto; ciò che hanno acquistato in rigore, l'hanno perduto in obiettività. Hanno dovuto scostarsi dalla realtà per acquistare questa perfetta purezza. Si può percorrere liberamente tutto il loro dominio, altra volta pieno di ostacoli, ma tali ostacoli non sono scomparsi. Sono stati solo trasportati alla frontiera, e bisognerà tornare a vincerli, se si vuol superare tale frontiera per penetrare nel regno della pratica.

Si possedeva una nozione vaga, fatta di elementi disparati, gli uni *a priori*, gli altri frutti di esperienze più o meno digerite; si credeva conoscerne, mediante l'intuizione, le proprietà principali. Oggi gli elementi empirici vengono scartati per non conservare che quelli *a priori*; una delle proprietà serve alla definizione, e tutte l'altre ne vengono dedotte con un ragionamento rigoroso. Va benissimo; ma resta a provarsi che tale proprietà, divenuta definizione, appartiene proprio agli oggetti reali fattici conoscere dall'esperienza, e da' quali avevamo attinta la nostra vaga cognizione intuitiva. Per dimostrarlo, bisognerà ben ricorrere all'esperienza, o fare uno sforzo d'intuizione, e se non si potesse dimostrare, i nostri teoremi sarebbero perfettamente rigorosi, ma perfettamente inutili.

La logica partorisce a volte dei mostri. Da un mezzo secolo si è visto sorgere una folla di funzioni bizzarre, che sembrano fare ogni sforzo per somigliare il meno possibile alle oneste funzioni, buone a qualcosa. Non più continuità, oppure continuità, ma non derivate, ecc. Non basta; sotto l'aspetto logico, queste funzioni strane sono le più generali; quelle che si incontrano senza averle cercate non appariscono più che come un caso particolare. Non rimane loro che un piccolissimo cantuccino.

Altravolta quando inventavasi una nuova funzione, era per qualche scopo pratico; oggi si inventano espressamente per rendere difettose le dimostrazioni dei padri nostri, e non se ne caverà mai altro.

Se la logica fosse l'unica guida del pedagogo, bisognerebbe cominciare dalle funzioni più generali, cioè dalle più bizzarre. Occorrerebbe mettere il principiante alle prese con quel museo teratologico. Se non lo fate, potrebbero dire i logici, non raggiungerete il rigore che a tappe.

6. Sì, forse, ma non si può trattare così alla leggiera colla realtà, e non parlo solo della realtà del mondo sensibile, che pure ha il suo valore, poichè i nove decimi de' vostri scolari vi domandano le armi, unicamente per combattere contro di lei. Vi è una realtà più sottile, che forma la vita degli esseri matematici, ed è tutt'altra cosa che la logica.

Il nostro corpo è formato di cellule e le cellule di atomi; tali cellule ed atomi sono dunque tutta la realtà del corpo umano? Il modo nel quale queste cellule sono disposte, e dal quale risulta l'unità dell'individuo non è esso pure una realtà molto più interessante?

Un naturalista che non avesse mai studiato l'elefante altro che al microscopio conoscerebbe abbastanza quest'animale?

Lo stesso è in matematica. Allorchè il logico avrà scomposto ogni dimostrazione in una folla di operazioni elementari, tutte corrette, non possiederà ancora la completa realtà; quel non so che il quale forma l'unità nella dimostrazione gli sfuggirà completamente.

Negli edifici innalzati dai nostri maestri, a che serve ammirare l'opera del muratore se non possiamo comprendere il piano dell'architetto? Ora questa veduta d'insieme, non può venirci data dalla pura logica, e bisogna chiederla all'intuizione.

Prendiamo per esempio l'idea di funzione continua. Non è in principio che una imagine sensibile, un rigo tracciato col gesso sulla lavagna. Poco a poco si epura; si adopera per costruire un sistema completo d'ineguaglianze, che riproduce tutte le linee dell'immagine primitiva; allorchè tutto è terminato, si è tolta l'armatura come dopo la costruzione di una volta; questa rappresentazione grossolana, appoggio ormai inutile, è scomparsa e non è rimasto che l'edificio stesso, irriprovevole all'occhio del logico. Eppure se il professore non richiamasse l'imagine primitiva, se non ristabilisse momentaneamente la centina, come farebbe l'allievo ad indovinare per qual capriccio tutte quelle ineguaglianze si sono sovrapposte in tal modo le une sulle altre? La definizione sarebbe logicamente corretta, ma non gli dimostrerebbe la vera realtà.

7. Eccoci dunque costretti a tornare indietro; è certo penoso per un maestro dovere insegnare ciò che non lo soddisfa pienamente; ma la soddisfazione del maestro non è lo scopo unico dell'insegnamento; occorre prima pensare a ciò che è l'intelligenza dell'allievo ed a ciò che si vuole ch'egli divenga.

Gli zoologi pretendono che lo sviluppo embrionale di un animale riassuma in un tempo brevissimo tutta la storia de' suoi antenati dei tempi geologici. Sembra avvenga lo stesso delle intelligenze. L'educatore deve far ripassare il fanciullo di dove i suoi padri sono passati; più rapidamente, ma senza omettere tappa alcuna. Su questo argomento, la storia della scienza dev'essere la nostra prima guida.

I nostri padri credevano sapere che cosa fosse una frazione, o la continuità, o l'area d'una superficie curva; ma noi ci siamo accorti che non lo sapevano. Così i nostri allievi credono saperlo quando cominciano a studiare seriamente le matematiche. Se, senza altra preparazione io dico loro: “No, non lo sapete; ciò che credete capire, non lo capite; bisogna ch'io vi dimostri ciò che vi sembra evidente„; e se nella dimostrazione mi appoggio su premesse che sembrano loro meno evidenti della conclusione, che penseranno questi infelici? Penseranno che la scienza matematica non sia che un ammasso arbitrario di sottigliezze inutili; oppure se ne disgusteranno, o ci si divertiranno come ad un giuoco, ed arriveranno ad una condizione di spirito simile a quello dei sofisti greci.

Più tardi, invece, quando l'intelligenza dell'allievo, familiarizzata col ragionamento matematico, sarà maturata da questa lunga frequenza, i dubbi nasceranno spontaneamente e la vostra dimostrazione sarà allora la benvenuta. Susciterà ancora dubbi nuovi, e le questioni si presenteranno successivamente al giovanetto, come si presentavano successivamente ai nostri padri, fino a quando il rigore perfetto potrà solo soddisfarlo. Non basta dubitare di tutto, bisogna sapere perchè si dubita.

8. Scopo principale dell'insegnamento matematico è lo sviluppo di certe facoltà dell'intelligenza, fra le quali, l'intuizione non è la meno preziosa. Per mezzo di quest'ultima il mondo matematico rimane a contatto con quello reale, e quand'anche le matematiche pure potessero farne a meno, bisognerebbe pur sempre ricorrervi per colmare l'abisso che separa il simbolo dalla realtà. Al pratico occorrerà sempre, e per ogni geometra puro vi devono essere cento pratici.

L'ingegnere deve ricevere una completa educazione matematica, ma a che cosa deve servirgli? a vedere i varî aspetti delle cose ed a vederli presto; egli non ha tempo di cercare il pel nell'uovo. Bisogna che negli aspetti fisici complessi che gli si presentano, riconosca subito i punti ne' quali potrà servirsi degli istrumenti matematici che gli abbiamo dato. Come potrà farlo, se lasceremo tra gli uni e gli altri quel profondo abisso scavato dai logici?

9. Accanto ai futuri ingegneri, altri allievi, meno numerosi, debbono alla loro volta divenire maestri; debbono quindi andare fino al fondo; una cognizione profonda e rigorosa dei principî fondamentali è per loro indispensabile prima di ogni altra. Questa non è però una ragione per non coltivare in essi l'intuizione; poichè si formerebbero una falsa idea della scienza, se non l'osservassero mai che da un lato, e non potrebbero d'altronde sviluppare nei loro scolari una qualità che non possiedono essi stessi.

Anche al geometra puro, questa facoltà è necessaria, poichè colla logica si dimostra, e coll'intuizione si inventa. È bene saper criticare, ma è meglio saper creare. Voi sapete distinguere se una combinazione è corretta; ma ciò non giova a nulla se non possedete l'arte di scegliere fra tutte le combinazioni possibili. La logica ci insegna che su tale o tal'altra strada siamo sicuri di non trovare ostacoli; non però quale è quella che ci conduce allo scopo. Bisogna per ciò vedere lo scopo da lontano, e la facoltà che ci insegna a vedere è l'intuizione. Senza questa il geometra sarebbe simile ad uno scrittore forte in grammatica, ma senza idee. Ora, come si svilupperebbe questa qualità, se appena si mostra si scaccia e proscrive, se si impara a non fidarsene prima di sapere ciò che ha di buono?

E qui, permettetemi di aprire una parentesi per insistere sull'importanza dei compiti scritti. I componimenti scritti non hanno forse assai importanza in certi esami, alla Scuola Politecnica, per esempio. Mi si dice che vieterebbero l'ingresso a buonissimi scolari che sanno benissimo il loro corso, lo capiscono perfettamente, ma sono incapaci di farne la minima applicazione. Ho detto or ora che la parola comprendere ha varî sensi: questi non capiscono che nella prima maniera, ed abbiamo veduto come questo non basti a formare nè un ingegnere, nè un geometra. Ebbene, poichè bisogna fare una scelta, preferisco scegliere coloro che capiscono tutto.

10. Ma l'arte di ragionar giusto non è essa pure una qualità preziosa, che il professore di matematiche deve coltivare prima di tutto? Mi guardo bene dal dimenticarlo; bisogna preoccuparsene e fino dal principio. Sarei desolato vedendo degenerare la geometria in non so quale tachimetria di bassa lega, e non sottoscrivo affatto le dottrine estreme di certi *Oberlehrer* tedeschi. Ma si hanno abbastanza occasioni di esercitare gli allievi al ragionamento corretto nelle parti delle matematiche, in cui gl'inconvenienti che ho segnalati non si presentano. Si hanno lunghe concatenazioni di teoremi in cui la logica assoluta ha regnato fino dal principio e, dirò così, naturalmente; in cui i primi geometri ci hanno dato modelli che bisognerà sempre imitare ed ammirare.

Nell'esposizione dei primi principî bisogna evitare troppa sottigliezza, che ivi sarebbe più scoraggiante e del resto inutile. È impossibile dimostrar tutto e definir tutto: ἀνάγχη σθῆναι ha detto Aristotile, e bisognerà sempre prendere in prestito dall'intuizione; non importa farlo un po' prima od un po' dopo, o magari chiederle un po' più o un po' meno, purchè adoperando correttamente le premesse che ci ha fornito, impariamo a ragionare giusto.

II. È possibile soddisfare tante opposte condizioni? È particolarmente possibile quando bisogna dare una definizione? Come trovare un enunciato conciso che soddisfaccia contemporaneamente le regole intransigenti della logica, il nostro desiderio di includere il posto della nuova cognizione nell'insieme della scienza, ed il nostro bisogno di pensare mediante imagini? Generalmente non lo troveremo, ed è perciò che non basta enunciare una definizione; bisogna prepararla e giustificarla.

Che voglio dire con questo? Sapete quel che è stato detto spesso: ogni definizione implica un assioma, poichè afferma l'esistenza di ciò che si definisce. La definizione non sarà quindi giustificata, dal punto di vista puramente logico, che quando sarà stato *dimostrato* che non ne consegue contradizione, nè nei termini, nè colle verità precedentemente ammesse.

Ma non basta; la definizione viene enunciata come una convenzione; ma la massima parte degl'intelletti si ribellerà se vorrete imporgliela come convenzione *arbitraria*. Non avrà pace finchè non avrete risposto a varie domande.

Le definizioni matematiche sono il più spesso, come ha dimostrato il sig. Liard, vere costruzioni edificate in ogni loro parte con nozioni più semplici. Ma perchè avere così riunito questi elementi mentre tante altre combinazioni erano possibili? Per capriccio forse? Altrimenti, perchè questa combinazione avrebbe più diritti all'esistenza di tutte le altre? A qual bisogno rispondeva? Come si è previsto che avrebbe parte importante nello sviluppo della scienza, ed abbrevierebbe i nostri ragionamenti ed i nostri calcoli? Esiste in natura qualche oggetto familiare, che ne sia, direi quasi, l'imagine incerta e grossolana?

Nè basta; se risponderete in modo soddisfacente a tutti questi quesiti, vedremo bene che il neonato aveva diritto al battesimo; ma neanche la scelta del nome è arbitraria; bisogna spiegare da quali analogie si è stati guidati, e che se nomi analoghi sono stati dati a cose differenti, tali cose, almeno, non differiscono che nella materia e si avvicinano nella forma; finalmente che le proprietà loro sono analoghe e per così dire parallele.

A tal prezzo tutte le tendenze potranno essere soddisfatte. Se l'enunciato è assai corretto da poter piacere al logico, la giustificazione contenterà l'intuitivo. Ma c'è da fare ancor meglio: ogni volta che ciò sia possibile, la giustificazione precederà l'enunciato e lo preparerà; si verrà condotti all'enunciato generale dallo studio di alcuni esempi particolari.

Inoltre, ogni parte dell'enunciato di una definizione ha per iscopo di distinguere l'oggetto da definirsi da una classe di altri oggetti vicini. La definizione non sarà compresa, se non quando avrete mostrato, non solo l'oggetto definito, ma quelli vicini da' quali conviene distinguerlo, avrete fatto intendere la differenza ed aggiunto esplicitamente: ecco perchè enunciando la definizione ho detto questo o quest'altro.

Ma è tempo di uscire dalle generalità e di esaminare come i principî un po' astratti testè esposti possano venire applicati in aritmetica, geometria, analisi e meccanica.

(Continua) POINCARÉ.

SUL LUOGO DI UN PUNTO UNIVOCAMENTE COORDINATO
ad una coppia di punti mobili

1. Siano $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ due punti appartenenti alle due curve

$$\varphi_1(x, y) = 0$$
$$\varphi_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

rispettivamente, fra i quali interceda una relazione espressa mediante un'equazione fra le loro coordinate

$$\psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0\,. \tag{2}$$

Supponiamo che alla coppia di punti P_1, P_2 sia univocamente coordinato un punto P_3, con che intendiamo che le coordinate x_3, y_3 di P_3 siano in un modo univoco legate alle coordinate di P_1 e P_2 da due equazioni

$$\theta_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 0$$
$$\theta_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 0\,. \tag{3}$$

Per trovare il luogo del punto P_3 quando P_1 e P_2 si muovono sulle curve (1) soddisfacendo alla relazione (2), basta eliminare x_1, y_1, x_2, y_2, fra le cinque equazioni

$$\varphi_1(x_1, y_1) = 0 \qquad \varphi_2(x_2, y_2) = 0$$
$$\psi = 0 \qquad \theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0\,. \tag{4}$$

È a notarsi che se $\varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta_1, \theta_2$ sono razionali intere, la curva luogo del punto P_3 è algebrica e di un ordine non maggiore al prodotto dei gradi delle funzioni stesse.

Volendosi che entrambi i punti P_1 e P_2 si muovano sulla stessa curva

$$\varphi(x, y) = 0$$

è ovvio che basta sostituire nel sistema (4) alle prime due equazioni le altre due

$$\varphi(x_1, y_1) = 0 \qquad \varphi(x_2, y_2) = 0 .$$

Nei paragrafi successivi troveremo il luogo di P_3 prendendo determinate curve per le (1) e speciali relazioni per le (2) e le (3).

2. Supponiamo che P_3 formi con P_1 e P_2 un triangolo simile ad un triangolo dato T: in questo caso le (3) sono lineari, come subito si vede. Si osservi intanto che se α è l'angolo che la retta cui appartengono P_1 e P_2 fa colla direzione positiva dell'asse x, l'angolo che colla stessa direzione fa la retta per P_1 e P_3 differirà da α di un angolo β, perfettamente noto, noti essendo gli angoli di T.

Indicando con l la lunghezza del segmento P_1P_2, con ρ il rapporto del segmento P_1P_3 a P_1P_2, si ha allora

$$x_3 = x_1 + \rho\, l \cos(\alpha + \beta) = x_1 + \rho\,(x_2 - x_1)\cos\beta - \rho\,(y_2 - y_1)\,\mathrm{sen}\,\beta$$

ed in modo analogo si trova

$$y_3 = y_1 + \rho\,(x_2 - x_1)\,\mathrm{sen}\,\beta + \rho\,(y_2 - y_1)\cos\beta$$

cioè

$$\begin{aligned} x_3 &= m x_1 + n y_1 + p x_2 + q y_2 \\ y_3 &= m' x_1 + n' y_1 + p' x_2 + q' y_2 \end{aligned} \tag{5}$$

con $m, m', p, p', n, n', q, q'$ coefficienti noti.

Se poi P_3 appartiene alla retta per P_1P_2 ed i segmenti P_1P_3 e P_2P_3 hanno il rapporto λ, le relazioni (5) divengono

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{1-\lambda}\, x_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\, x_2 \\ y_3 &= \frac{1}{1-\lambda}\, y_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\, y_2 \end{aligned} \tag{5'}$$

3. Supponiamo che P_1 si muova sopra la parabola

$$y^2 = 2px$$

e P_2 sulla tangente al vertice, cioè sull'asse y; sia poi P_3 il punto della retta P_1P_2 tale che sia $\overline{P_3P_1} = \lambda \,.\, \overline{P_3P_2}$, e di più il segmento P_1P_2 abbia la lunghezza costante k, cioè sia

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = k^2. \tag{6}$$

Allora, essendo P_3 legato a P_1, P_2 dalle due relazioni (5'), il luogo di P_3 stesso è la quartica

$$[(\lambda - \lambda^2)^2 x_3^2 + (1-\lambda)^2 y_3^2 + 2\,(2\lambda^2 - \lambda + 1)\, x_3 - k^2\lambda^2]^2 = 8 x_3 y_3^2.$$

Se P_1, P_2 si muovono sopra le due rette

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

e P_3 è legato a P_1, P_2 dalle relazioni (5), il luogo di P_3 è la curva, la cui equazione

$$\begin{aligned} \psi\,(L_1x_3 + M_1y_3 + N_1,\quad L_2x_3 + M_2y_3 + N_2,\quad L_3x_3 + M_3y_3 + N_3, \\ L_4x_3 + M_4y_3 + N_4) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

si ottiene ponendo nella (2) i valori che per x_1, y_1, x_2, y_2 si ricavano dal far sistema delle (5) e delle

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

Giova osservare che se il primo membro della (2) è razionale intero di grado r, la curva (8) è algebrica di ordine r.

Così la (8) rappresenta una retta se per la (2) si prende

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = k \tag{9}$$

cioè se si vuole che la somma delle componenti lungo gli assi x, y del segmento $P_1\,P_2$ sia costante.

Se per la (2) si prende

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{y_1 - y_2} - k = 0 \tag{10}$$

ossia se si vuole che la somma delle inverse delle componenti, lungo gli stessi assi, del segmento P_1P_2 sia costante, la (8) rappresenta una conica e più precisamente una iperbole (¹) perchè, posto

$$L_{(i,j)} = L_i - L_j\,,\ \text{ecc.}$$

essa diviene

$$\begin{aligned} kL_{(1,3)}L_{(2,4)}x_3^2 + kM_{(1,3)}M_{(2,4)}y_3^2 + k\,(L_{(1,3)}M_{(2,4)} + L_{(2,4)}M_{(1,3)})\,x_3y_3 + \\ + [(kN_{(2,4)} - 1)\,L_{(1,3)} + (kN_{(1,3)} - 1)\,L_{(2,4)}]\,x_3 + \\ + [(kN_{(2,4)} - 1)\,M_{(1,3)} + (kN_{(1,3)} - 1)\,M_{(2,4)}]\,y_3 + kN_{(1,3)}N_{(2,4)} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Se per la (2) si prende la (6), la (8) diviene

$$\begin{aligned} (L^2_{(1,3)} + L^2_{(2,4)})\,x_3^2 + (M^2_{(1,3)} + M^2_{(2,4)})\,y_3^2 + 2x_3y_3\,(L_{(1,3)}M_{(1,3)} + L_{(2,4)}M_{(2,4)} + \\ + 2\,(N_{(1,3)}L_{(1,3)} + N_{(2,4)}L_{(2,4)})\,x_3 + 2\,(M_{(1,3)}N_{(1,3)} + M_{(2,4)}N_{(2,4)})\,y_3 - k^2 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

equazione di un'ellisse.

Una quartica rappresenta la (8) se la retta per P_1 e P_2 deve essere tangente ad una data conica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{13}$$

(¹) In questi due ultimi risultati sta la dimostrazione della quistione 689 proposta in questo Giornale dal sig. Barisien. È ovvio che si può sostituire, nella quistione citata, ai poligoni regolari dei poligoni simili ad uno dato.

perchè, in tal caso, la (12) diviene

$$A_{33}(x_1y_2-x_2y_1)^2+A_{22}(x_1-x_2)^2+A_{11}(y_1-y_2)^2+2A_{23}(x_1y_2-x_2y_1)(x_2-x_1)+ \\ +2A_{13}(x_1y_2-x_2y_1)(y_1-y_2)+2A_{12}(x_2-x_1)(y_1-y_2)=0, \qquad (14)$$

dove A_{rs} indica il complemento algebrico di $a_{r,s}$ nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

E poichè la (14) diviene del 3° grado in x_1, y_1, x_2, y_2 se $A_{33}=0$, ne discende che la (8) rappresenta una cubica se la conica (13) è una parabola.

Si supponga, in particolare, che la conica (13) sia l'elisse col centro nell'origine e gli assi coincidenti coi coordinati

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (13')$$

e le rette (7) siano gli assi x e y; allora la (14) si riduce a

$$x_1^2y_2^2-b^2x_1^2-a^2y_2^2=0$$

e la (8) mediante le (5) diviene

$$(x_3q'-y_3q)^2(my_3-m'x_3)^2 \\ -(mq'-m'q)^2[b^2(x_3q'-y_3q)^2+a^2(my_3-m'x_3)^2]=0 \qquad (15)$$

equazione che si riduce a quella di una kreuzcurva

$$(1-\lambda)^2x_3^2y_3^2-b^2\lambda^2x_3^2-a^2y_3^2=0 \qquad (15')$$

se P_3 appartiene alla retta per P_1P_2 e valgono le (5').

Se la conica è l'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (13'')$$

la (8) diviene

$$(x_3q'-y_3q)^2(my_3-m'x_3)^2+ \\ +(mq'-m'q)[b^2(x_3q'-y_3q)^2-a^2(my_3-m'x_3)^2]=0 \qquad (16)$$

la quale si riduce all'equazione di una kohlenspitzencurva

$$(1-\lambda)^2x_3^2y_3^2+b^2\lambda^2x_3^2-a^2y_3^2=0$$

se P_3 appartiene alla retta per P_1P_2.

Se la conica è l'iperbole equilatera

$$xy=k \qquad (13''')$$

la (8) diviene

$$(x_3q'-y_3q)(my_3-m'x_3)[(x_3q'-y_3q)(my_3-m'x_3)-4k(mq'-m'q)^2]=0$$

che ci rappresenta la coppia di rette

$$x_3q'-y_3q=0 \qquad my_3-m'x_3=0$$

e l'iperbole
$$(x_3 q' - y_3 q)(m y_3 - m' x_3) - 4k (m q' - m' q)^2 = 0$$
che ha quelle rette per assintoti e che si riduce ad equilatera se la retta per $P_1 P_2$ contiene P_3.

Infine se la conica (13) è la parabola
$$y^2 = 2\alpha x \tag{13^{IV}}$$
la (8) ci rappresenta insieme alla retta
$$x_3 q' - q y_3 = 0$$
la parabola
$$(m y_3 - m' x_3)^2 = \tfrac{1}{2} \alpha (m q' - m' q)(x_3 q' - q y_3)$$
la quale ha lo stesso vertice e lo stesso asse della (13^{IV}) se P_3 giace sulla retta per P_1, P_2. (1)

4. Il punto P_3 sia il punto d'incontro della retta per P_1 di coefficiente angolare m_1 e della retta per P_2 di coefficiente angolare m_2; in questo caso le coordinate di P_3 sono legate a quelle di P_1 e P_2 dalle relazioni.
$$\begin{aligned} x_3 (m_2 - m_1) - y_2 + y_1 - m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0 \\ y_3 (m_1 - m_2) - m_1 m_2 (x_1 - x_2) + m_1 y_1 - m_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Se, in particolare, si suppone che la retta per P_1 sia parallela all'asse y e quella per P_2 parallela all'asse x, si ha allora
$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ y_3 &= y_2. \end{aligned} \tag{17'}$$

Se poi P_1 e P_2 si muovono nel cerchio
$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{18}$$
mantenendo fra loro un'eguale distanza k, il luogo di P_3 è la quartica bicircolare.
$$[r^2 (x_3^2 + y_3^2) - (2r^2 - k^2)^2]^2 + 4 (2r^2 - k^2)^2 x_3^2 y_3^2 = 0.$$

Se P_1 e P_2 appartengono al cerchio (18) e sono allineati con un punto di coordinate α, β, il luogo di P_3 è la quartica
$$\begin{aligned} &(r^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 (r^2 - x_3^2 - y_3^2)^2 = \\ &\quad = 4 (x_3 + \alpha)(y_3 + \beta) [r^2 (\alpha\beta + \alpha x_3 + \beta y_3) + x_3 y_3 (\alpha^2 + \beta^2)] = 0 \end{aligned}$$
la quale si riduce manifestamente al cerchio stesso se il punto (α, β) coincide coll'origine.

Se poi P_1, P_2 appartengono alla parabola
$$y^2 = 2px$$
e sono allineati col fuoco, P_3 si muove sulla curva del 5° ordine.
$$p y_3^2 (2x_3 - p)^2 = 2x_3 (2y_3^4 + p^4 + 2p^2 y_3^2).$$

(1) Questi risultati si possono riguardare in certo modo come una generalizzazione dei risultati contenuti nella nota del sig. Cardoso-Laynes: "Sopra una trasformazione delle curve piane". *Periodico di Matematica*, 1903.

Se P_1 e P_2 si muovono sugli assi x e y rispettivamente, appartenendo ad una tangente mobile alla conica (13), il luogo di P_3 è la quartica

$$A_{33}x_3^2y_3^2 + A_{22}x_3^2 + A_{11}y_3^2 - 2A_{23}y_3x_3^2 - 2A_{13}x_3y_3^2 + 2A_{12}x_3y_3 = 0 \quad (19)$$

che ha un punto doppio nell'origine.

Se la conica è l'elisse (13') la curva (19) si riduce, com'è noto, alla kreuzcurva

$$x^2y^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0$$

e se è l'iperbole (13") alla kohlenspitzencurva

$$x_3^2y_3^2 - b^2x_3^2 + a^2y_3^2 = 0;$$

e se, come ultimo caso, la conica (13) è il cerchio

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

la (19) oltre alla retta $x = 0$ rappresenta la cubica

$$y_3^2(x_3 - 2r) = r^2x$$

detta da Newman curva *tunnel*.

5. Supponiamo che P_3 sia la proiezione di un punto fisso del piano, che, per semplicità, supporremo l'origine, sulla retta per P_1 e P_2; allora le coordinate di P_3 sono legate a quella di P_1 e P_2 dalle due relazioni

$$\begin{aligned} x_3[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] - (x_2y_1 - y_2x_1)(y_1 - y_2) &= 0 \\ y_3[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] - (x_2y_1 - y_2x_1)(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Suppongasi che P_1, P_2 appartengono all'elisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

e si prenda per la (2) la relazione

$$x_1x_2 = y_1y_2;$$

allora P_3 si muove sulla lemniscata iperbolica di Both [1]

$$(x^2 + y^2)^2 = \mu^2x^2 - \nu^2y^2,$$

avendo posto

$$\mu = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \qquad \nu = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

La (21) si riduce alla coppia di rette

$$y = x \qquad y = -x$$

se in luogo di un'ellisse si ha un cerchio col centro nell'origine.

Se i punti P_1 e P_2 si muovono rispettivamente sugli assi x, y si ha

$$x_1 = \frac{y_3^2 + x_3^2}{x_3}, \qquad y_1 = x_2 = 0, \qquad y_2 = \frac{y_3^2 + x_3^2}{y_3}$$

(1) LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente ebene curven*. Lipsia, 1902.

e se i detti punti soddisfano alla condizione (2), il luogo di P_3 è la curva

$$\psi\left(\frac{y_3^2+x_3^2}{x_3},\ 0,\ 0,\ \frac{y_3^2+x_3^2}{y_3}\right)=0. \tag{22}$$

Si osservi che la (22) è la podaria rispetto all'origine della curva la cui equazione si ottiene eliminando x_1, y_2, fra la (2), la

$$\frac{X}{x_1}+\frac{Y}{y_2}=1.$$

e la

$$Yx_1^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-Xy_2^2\frac{\partial\psi}{\partial y_2}=0.$$

Si prenda in particolare per la (2) la (9); allora la (22) diviene

$$(x_3^2+y_3^2)(y_3-x_3)-kx_3y_3=0$$

equazione di una strofoide.

Se per la (2) si prende la (10), la (22) diviene

$$k(y_3^2+x_3^2)-(y_3+x_3)=0$$

equazione di un cerchio di raggio $\frac{1}{\sqrt{2}k}$ e centro nel punto di coordinate $\frac{1}{2k}$, $\frac{1}{2k}$: se si prende invece la (6), la (22) diventa

$$(x_3^2+y_3^2)^3=k^2x_3^2y_3^2$$

equazione di una rodonea di Guido Grandi, detta rosone a quattro rami [1], la quale è podaria rispetto all'origine dell'asteroide

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}.$$

Se per la (2) si prende la (14), la (22) dà

$$A_{33}(x_3^2+y_3^2)^2-2(A_{23}y_3+A_{13}x_3)(x_3^2+y_3^2)+ \\ +A_{22}y_3^2+2A_{12}x_3y_3+A_{11}x_3^2=0$$

che è la podaria della conica (13) rispetto all'origine.

Se vuolsi che P_1 e P_2 formino come un punto fisso $M(a, b)$ un triangolo di area costante k, la (22) diviene

$$(y_3^2+x_3^2)^2-(x_3^2+y_3^2)(by_3+ax_3)-2kx_3y_3=0$$

e se il segmento P_1P_2 è visto dallo stesso punto sotto angolo γ costante, la (22) diviene l'equazione della strofoide

$$(x_3^2+y_3^2)[y_3(a\operatorname{tg}\gamma-b)+x_3(b\operatorname{tg}\gamma-a)]+(a^2+b^2)\operatorname{tg}\gamma\,.\,x_3y_3=0.$$

Bologna, gennaio, 1905.

FILIPPO SIBIRANI.

---

(1) BRIOT et BOUQUET, *Géometrie analytique*, 1878.

TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI AD N UNITÀ

(vedi fascicoli III-IV)

Corpi commutativi di Weierstrass.

1. Sappiamo che se un corpo associativo a più di due unità ammette una moltiplicazione commutativa, deve possedere divisori dello zero oltre lo zero (v. fasc. IV, n. 14).

In un corpo siffatto una equazione algebrica può ammettere infinite radici senza che sia identicamente nulla.

Infatti, se k è un divisore dello zero, esistono infiniti numeri l per i quali si ha

$$kl = 0\,. \tag{1}$$

Se a e b sono due numeri del corpo, e b non è un divisore dello zero, per ogni numero l esiste un sol numero x che verifica l'equazione

$$a + bx = l\,. \tag{2}$$

Posto allora

$$a' = ak\,, \qquad b' = bk\,, \tag{3}$$

si ha, moltiplicando l'equazione (2) per k, e ricordando la (1),

$$a' + b'x = 0\,. \tag{4}$$

Questa equazione, avendo i coefficienti indipendenti da l, è soddisfatta dagl'infiniti valori di x, che corrispondono agl'infiniti valori di l.

E più generalmente, se è possibile risolvere l'equazione

$$a + bx + cx^2 + \ldots + hx^m = l\,,$$

per infiniti valori di l per i quali è $kl = 0$, l'equazione

$$a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^m = 0,$$

ove è

$$a' = ak\,, \qquad b' = bk\,, \qquad c' = ck\,, \ldots, \qquad h' = hk$$

ammetterà infinite radici.

Una equazione dunque, i cui coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero, moltiplicando questo per numeri arbitrari del sistema può ammettere infinite radici.

2. Ipotesi di Weierstrass.

Weierstrass, osservando che questa proprietà è analoga a quella che una equazione algebrica ammette infinite radici, quando i suoi coefficienti sono tutti uguali a zero, nell'intento di fondare un'aritmetica analoga all'ordinaria, pone l'ipotesi che il corpo ammetta una moltiplicazione commutativa e sia tale che ogni equazione algebrica possa ammettere infinite radici *solamente* quando i suoi coefficienti si deducano da uno stesso divisore dello zero, moltiplicandolo per numeri arbitrari.

Un tale sistema lo chiameremo un *corpo commutativo di Weierstrass*.

3. Le proprietà fondamentali di questi sistemi si deducono dai seguenti teoremi.

Teorema I. — *Il rango di un corpo commutativo di Weierstrass è uguale all'ordine* n.

Sia m il rango del sistema e

$$\varphi_0 x^m + \varphi_1 x^{m-1} + \ldots + \varphi_m = 0$$

l'equazione fondamentale del sistema.

Sappiamo che $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sono funzioni razionali intere delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ di x, e inoltre φ_0 non è identicamente nulla. Possiamo quindi considerare i rapporti

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad \Phi_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \ldots, \Phi_m = \frac{\varphi_m}{\varphi_0}, \qquad (1)$$

e supporre che, per le coordinate $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ del numero x' del sistema, prendano i valori

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \qquad (2)$$

rispettivamente.

Noi dimostreremo che se fosse $m < n$, esisterebbero infiniti sistemi di valori per $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, nell'intorno del punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi_n)$, pei quali i rapporti (1) assumerebbero i medesimi valori (2), e che quindi ci sarebbero infinite radici dell'equazione

$$x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \ldots + \gamma_m = 0,$$

a coefficienti reali (e perciò appartenenti al sistema) e non deducibili da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per numeri arbitrari del sistema, (¹) e ciò sarebbe contro l'ipotesi che il sistema sia un corpo commutativo di Weierstrass.

Devesi dunque dimostrare che il sistema

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots . \xi_n) - \gamma_1 = 0, \\ \Phi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \gamma_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n) - \gamma_m = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

(¹) Il primo coefficiente 1, per es., non può dedursi da un divisore k dello zero, in modo che sia

$$1 = ak,$$

perchè moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per un numero l diverso da zero, e tale che sia $kl = 0$, si dedurrebbe $l = 0$.

per $m < n$ è soddisfatto da infiniti sistemi di valori (reali) per $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si consideri la matrice jacobiana

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_1}, & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_n} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_1}, & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial\xi_1}, & \frac{\partial\Phi_m}{\partial\xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial\Phi_m}{\partial\xi_n} \end{matrix} \right\|$$

e nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ sia $\mu \leqslant m$ la caratteristica di questo sistema; potremo, per es., supporre che nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ sia diverso da zero il determinante jacobiano d'ordine μ

$$J = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu)}. \tag{4}$$

Allora è noto (¹) che delle funzioni

$$\Phi_1 - \gamma_1, \ \Phi_2 - \gamma_2, \ldots, \Phi_m - \gamma_m$$

soltanto le prime μ sono indipendenti e le altre $m - \mu$ sono funzioni delle prime.

Allora il sistema

$$\Phi_1 - \gamma_1 = 0, \quad \Phi_2 - \gamma_2 = 0, \ldots, \Phi_\mu - \gamma_\mu = 0, \tag{5}$$

essendo soddisfatto dal sistema di valori $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, ed essendo evidentemente continue le derivate parziali dei primi membri rispetto a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ e diverso da zero il determinante jacobiano (4) nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, è atto (²) a definire implicitamente le variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ come funzioni continue delle rimanenti nell'intorno del punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, cioè nell'intorno di questo punto esistono infiniti sistemi di valori di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ che verificano il sistema (5).

Se è $m = \mu$, allora il teorema è dimostrato; ma se è $\mu < m$ dimostreremo che ogni sistema di valori di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, nell'intorno di $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, che verifica il sistema (5) verifica anche le rimanenti equazioni

$$\Phi_{\mu+1} - \gamma_{\mu+1} = 0, \ \Phi_{\mu+2} - \gamma_{\mu+2} = 0, \ldots, \Phi_m - \gamma_m = 0. \tag{6}$$

Infatti per $r > \mu$ ogni funzione $\Phi_r - \gamma_r$, come si è osservato, è funzione delle prime μ, cioè si ha

$$\Phi_r - \gamma_r = \Psi_r(\Phi_1 - \gamma_1, \ \Phi_2 - \gamma_2, \ldots, \Phi_\mu - \gamma_\mu)$$
$$(r = \mu+1, \ \mu+2, \ldots, m)$$

e nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_m)$, nel quale tanto il sistema (5) che il sistema (6) è soddisfatto, si ha

$$\Psi_r(0, \ 0, \ldots, 0) = 0,$$

(¹) CESÀRO. *Elementi di calcolo infinitesimale*, p. 136 n. 29.
(²) CESÀRO, *Op. cit.*, p. 133, n. 26.

e però anche in un altro punto dell'intorno di $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, nel quale è soddisfatto il sistema (5), si avrà

$$\Phi_r - \gamma_r = 0,$$

cioè è anche soddisfatto il sistema (6).

Così il teorema risulta completamente dimostrato.

Definizione. — Un numero g del sistema, che soddisfa ad una equazione di grado n, e non ad una equazione di grado inferiore lo diremo un numero *generante* il sistema, poichè potendosi allora prendere come unità i numeri

$$g,\ g^2, \ldots, g^{n-1},$$

ogni numero a del sistema può mettersi sempre sotto la forma

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \ldots + \alpha_{n-1} g^{n-1}.$$

Il polinomio $A(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \ldots + \alpha_{n-1}\xi^{n-1}$, che si cambia in a quando si muti ξ in g, lo chiameremo il polinomio *corrispondente* ad a.

Teorema II. — *L'equazione caratteristica del sistema non può ammettere (nel campo dei numeri complessi ordinari) radici multiple.*

Sia

$$F(\xi) \equiv \xi^n + \gamma_1\xi^{n-1} + \ldots + \gamma_n = 0 \tag{7}$$

l'equazione cui soddisfa il numero g generante il sistema.

Se essa ammettesse una radice multipla d'ordine λ, $F(\xi)$ sarebbe divisibile per la potenza $f^\lambda(x)$ di un fattore $f(x)$ reale e di grado non superiore al secondo; si avrebbe quindi

$$F(\xi) = f^\lambda(\xi) \,.\, Q(\xi).$$

Indicando allora con $f_1(\xi)$ una funzione intera a coefficienti reali arbitrari, di grado minore di quello di $f^{\lambda-1}(\xi)$, poniamo

$$F_1(\xi) = f(\xi) f_1(\xi) Q(\xi),$$

sarà allora $F_1^\lambda(\xi)$ divisibile per $F(\xi)$, cioè

$$F_1^\lambda(\xi) = F(\xi) \,.\, Q_1(\xi).$$

Se ora mutiamo ξ in g, e osserviamo che g verifica la (7), denotando con x il numero corrispondente a $F_1(\xi)$, quest'ultima eguaglianza si trasforma nell'altra

$$x^\lambda = 0.$$

Per l'arbitrarietà dei coefficienti di $f_1(\xi)$, la funzione $F_1(\xi)$ è indeterminata, e quindi esisterebbero infiniti valori di x verificanti la (8), ciò che è in contradizione coll'ipotesi che il sistema sia un corpo commutativo di Weierstrass. L'equazione caratteristica non può dunque avere radici multiple.

4. In base a questo teorema possiamo supporre la funzione $F(\xi)$ decomposta in fattori reali, del primo o del secondo grado, tutti diversi tra loro

$$F(\xi) = f_{11}(\xi) f_{12}(\xi) \ldots f_{1k}(\xi) \,.\, f_{21}(\xi) f_{22}(\xi) \ldots f_{2h}(\xi)\,, \quad (k + 2h = n)$$

dove il primo indice mostra se il fattore sia del primo o del secondo grado.

Consideriamo le funzioni

$$\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \quad (r=1,2,\ldots,k), \qquad \frac{F(\xi)}{f_{2s}(\xi)} \quad (s=1,2,\ldots,h),$$

e siano

$$u_{1s}\,, \qquad u_{2s}$$

i numeri del sistema corrispondenti a queste funzioni. Sia poi $A(\xi)$ il polinomio corrispondente a un numero a.

Decomponendo la funzione razionale fratta $\frac{A(\xi)}{F(\xi)}$ in somma di funzioni semplici, si ottiene, com'è noto,

$$\frac{A(\xi)}{F(\xi)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_{1r}}{f_{1r}(\xi)} + \sum_{s=1}^{h} \frac{\alpha_{2s} + \alpha'_{2s}\,\xi}{f_{2s}(\xi)},$$

dove α_{1r}, α_{2s} e α'_{2s} sono costanti reali.

Moltiplicando per $F(\xi)$ e poi mutando ξ in g, si ottiene

$$a = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{1r}\,u_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\alpha_{2s} + \alpha'_{2s}\,g)\,u_{2s}\,.$$

I numeri della forma $\alpha_{1r}\,u_{1r}$ corrispondenti a tutti i valori reali di α_{1r} costituiscono un corpo C_{1r} ad una unità (u_{1r}), e i numeri della forma $(\alpha_{2s} + \alpha'_{2s}\,g)\,u_{2s}$ per tutti i valori reali di α_{2s} e α'_{2s} costituiscono un campo C_{2s} a due unità $(u_{2s}, g u_{2s})$. Dunque.

Teorema. — *Un numero qualunque* a *del sistema considerato può essere rappresentato come somma di* k *numeri*

$$a_{11}\,,\ a_{12}\,,\ldots,\ a_{1k}\,,$$

appartenenti ai campi parziali ad una unità

$$C_{11}\,,\ C_{12}\,,\ldots,\ C_{1k}$$

e di h *numeri*

$$a_{21}\,,\ a_{22}\,,\ldots,\ a_{2h}$$

appartenenti ai campi parziali a due unità

$$C_{21}\,,\ C_{22}\,,\ldots,\ C_{2h}\,,$$

cosicchè si ha

$$a = (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1k}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2h}).$$

5. Dimostriamo i seguenti notevoli teoremi.

Teorema I. — *Il prodotto di due numeri appartenenti a campi parziali differenti è nullo. Il prodotto di due numeri appartenenti ad uno stesso campo è un numero di questo campo.*

1°. Siano a_{1r} e b_{1s} $(r \neq s)$ due numeri appartenenti ai campi parziali ad una unità C_{1r}, C_{1s}; sarà

$$a_{1r} = \alpha_{1r}\,u_{1r}\,, \qquad b_{1s} = \beta_{1s}\,u_{1s}\,,$$

e le funzioni corrispondenti saranno

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}, \qquad \beta_{1s}\frac{F(\xi)}{f_{1s}(\xi)}.$$

Il prodotto di queste due funzioni, poichè è $r \neq s$, è evidentemente divisibile per $F(\xi)$. Quindi si ha

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1s}\frac{F(\xi)}{f_{2s}(\xi)} = F(\xi) \,.\, Q(\xi) \,.$$

Mutando ξ in g si ottiene subito

$$a_{1r}\, b_{1s} = 0 \,.$$

In modo analogo, per $r \neq s$,

$$a_{2r}\, b_{2s} = 0 \,,$$

e poi, anche se è $r = s$,

$$a_{1r}\, b_{2s} = 0 \,.$$

2°. Siano ora a_{1r} e b_{1r} due numeri appartenenti a uno stesso campo parziale a una unità C_{1r}, e siano $\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$, $\beta_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$ le funzioni corrispondenti.

Dividiamo il prodotto di queste due funzioni per $F(\xi)$, e sia $Q(\xi)$ il quoziente ed $R(\xi)$ il resto; si avrà

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} = F(\xi) \,.\, Q(\xi) + R(\xi) \,.$$

Poichè tanto il primo membro che il primo termine del secondo membro sono divisibili per $\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$, anche $R(\xi)$ è divisibile per $\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$; ma questa funzione è di grado $n-1$ e $R(\xi)$ non può essere di grado superiore ad $n-1$, dunque $R(\xi)$ è uguale al prodotto di $\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$ per una costante reale γ_{1r}

$$R(\xi) = \gamma_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \,.$$

Il cambiamento di ξ in g fornisce dunque

$$\alpha_{1r}u_{1r} \,.\, \beta_{1r}u_{1r} = \gamma_{1r}u_{1r}$$

cioè il prodotto di due numeri appartenenti ad un campo parziale C_{1r} ad una unità è un numero di questo campo.

Con dimostrazione analoga, il prodotto di due numeri appartenenti ad un campo C_{2s} a due unità è un numero di questo campo.

In particolare, per $r \neq s$,

$$u_{1r} \,.\, u_{1s} = 0, \qquad (1) \qquad\qquad u_{2r} \,.\, u_{2s} = 0 \qquad (2)$$

e, anche per $r = s$,

$$u_{1r} \,.\, u_{2s} = 0. \qquad (3)$$

TEOREMA II. — *Il prodotto di due numeri appartenenti ad uno stesso campo parziale non può essere nullo, se non è nullo uno dei fattori.*

Infatti se è

$$a_{1r} b_{1r} = 0,$$

dall'eguaglianza, che risulta per le funzioni corrispondenti ad a_{1r}, b_{1r}, precedentemente notata,

$$\alpha_{1r} \frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1r} \frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} = F(\xi) \cdot Q(\xi) + R(\xi);$$

si deduce che $R(\xi)$ si annulla quando al posto di ξ si pone g, ma quest'annullamento non può avvenire se non identicamente, altrimenti g soddisferebbe ad una equazione algebrica a coefficienti reali di grado inferiore ad n. Allora si ha

$$\alpha_{1r} \frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1r} \frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} = F(\xi) \cdot Q(\xi).$$

Dividendo per $F(\xi)$ e moltiplicando per $f_{1r}^2(\xi)$, si ottiene

$$\alpha_{1r}\beta_{1r} F(\xi) = f_{1r}^2(\xi)\, Q(\xi).$$

Ma $F(\xi)$, non possedendo radici multiple, non può ammettere il fattore $f_{1r}(\xi)$ a quadrato, e quest'eguaglianza non può sussistere, se non è nullo uno dei fattori α_{1r}, β_{1r}, cioè o è nullo a_{1r}, o è nullo b_{1r}.

In modo analogo si dimostra che se è $a_{2s} b_{2s} = 0$, deve essere nullo a_{2s} ovvero b_{2s}.

6. I moduli della moltiplicazione nei campi parziali.

Consideriamo l'unità reale 1. Essa, come ogni numero del sistema, può rappresentarsi sotto la forma

$$1 = \sum_r \mu_{1r} u_{1r} + \sum_s (\mu_{2s} + \mu'_{2s} g)\, u_{2s}. \tag{4}$$

Per ottenere questa rappresentazione si ricorrerà alla decomposizione della frazione $\dfrac{1}{F(\xi)}$ in somma di funzioni semplici. Da questa decomposizione risulta che nessuna delle componenti può essere nulla, cioè che tutte le μ_{1r} sono diverse da zero e che non possono essere nulle contemporaneamente μ_{2s} e μ'_{2s}. Ciò può anche dimostrarsi così:

Se fosse $\mu_{1r} = 0$, moltiplicando ambo i membri di (4) per un numero arbitrario a_{1r} del campo C_{1r} si otterrebbe, per le formole (1), (2), (3),

$$a_{1r} = 0,$$

e però tutti i numeri del campo C_{1r} sarebbero nulli, ciò che è assurdo; e se fosse $\mu_{2s} = \mu'_{2s} = 0$, moltiplicando ambo i membri della (4) per un numero arbitrario a_{2s} del campo C_{2s}, si otterrebbe

$$a_{2s} = 0,$$

il che è pure assurdo.

Poniamo

$$v_{1r} = \mu_{1r} u_{1r}\,, \qquad v_{2s} = (\mu_{2s} + \mu'_{2s} g)\, u_{2s}\,; \tag{5}$$

la (4) diviene

$$1 = \sum_{r=1}^{k} v_{1r} + \sum_{s=1}^{l} v_{2s}\,. \tag{6}$$

Teorema. — *Le componenti dell'unità reale sono i moduli della moltiplicazione nei campi parziali.*

Difatti, moltiplicando ambo i membri di (6) per a_{1r} si ottiene

$$a_{1r} = v_{1r} a_{1r}\,, \tag{7}$$

e moltiplicando ambo i membri di (6) per a_{2s}, si ottiene

$$a_{2s} = v_{2s} a_{2s}\,. \tag{8}$$

In particolare

$$v_{1r}^2 = v_{1r}\,, \qquad v_{2s}^2 = v_{2s}\,. \tag{9}$$

7. Poichè nella prima delle (5) è μ_{1r} diverso da zero, può v_{1r} assumersi come unità del campo C_{1r}, in luogo di u_{1r}. In base poi alle proprietà di v_{1r} [formola (7) e la 1ª delle formole (9)] si deduce subito che il campo C_{1r} non differisce dal campo dei numeri reali, tranne che per la rappresentazione dell'unità.

Se si vuole assumere come unità del campo C_{2s} il numero v_{2s}, bisognerà assumere come seconda unità ogni altro numero $\bar{v}_{2s}$ del campo, purchè le sue coordinate non siano proporzionali alle coordinate di v_{2s}; ciò è sempre possibile perchè le coordinate di v_{2s} non sono entrambe nulle. Ciò posto, ogni numero di C_{2s} potrà esprimersi mediante v_{2s} e $\bar{v}_{2s}$, e perciò sarà

$$\bar{v}_{2s} = \sigma_{2s} v_{2s} + \bar{\sigma}_{2s} \bar{v}_{2s}\,. \tag{10}$$

E poichè, come è noto,

$$v_{2s} = v_{2s}^2\,, \qquad \bar{v}_{2s} = \bar{v}_{2s} v_{2s}\,,$$

la (10) può scriversi anche così

$$\bar{v}_{2s}^2 = \sigma_{2s} v_{2s} + \bar{\sigma}_{2s} v_{2s} \bar{v}_{2s}\,.$$

Donde

$$(\bar{v}_{2s} - \tfrac{1}{2}\,\bar{\sigma}_{2s}\, v_{2s})^2 = (\tfrac{1}{4}\,\bar{\sigma}_{2s}^2 + \sigma_{2s})\, v_{2s}^2\,.$$

Il numero $\frac{1}{4}\bar{\sigma}_{2s}^2 + \sigma_{2s}$ dev'essere negativo. Infatti, se fosse nullo o positivo, risulterebbe nullo il prodotto dei due numeri, appartenenti allo stesso campo C_{2s},

$$\bar{v}_{2s} - \left(\tfrac{1}{2}\,\bar{\sigma}_{2s} - \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\bar{\sigma}_{2s}^2 + \sigma_{2s}}\right) v_{2s}\,, \quad \bar{v}_{2s} - \left(\tfrac{1}{2}\,\bar{\sigma}_{2s} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\bar{\sigma}_{2s}^2 + \sigma_{2s}}\right) v_{2s}\,,$$

senza che lo sia uno almeno di essi (5, Teor. II).

Posto dunque

$$-\tau_{2s}^2 = \tfrac{1}{4}\,\bar{\sigma}_{2s}^2 + \sigma_{2s},$$

la (11) diventa

$$(\bar{v}_{2s}\ \tfrac{1}{2}\,\bar{\sigma}_{2s}\, v_{2s})^2 = -\,\tau_{2s}^2 v_{2s}^2, \tag{12}$$

e perciò, posto

$$w_{2s} = \frac{1}{\tau_{2s}} \bar{v}_{2s} - \frac{\sigma_{2s}}{2\tau_{2s}} v_{2s} ,$$

si ha

$$w_{2s}^2 = - v_{2s} . \tag{13}$$

Può evidentemente assumersi come unità del campo C_{2s} il numero w_{2s}, e allora ogni numero del campo può esprimersi mediante v_{2s} e w_{2s}.

La proprietà $v_{2s}^2 = v_{2s}$, e la (13) permettono di concludere che il campo C_{2s} non differisce dal corpo dei numeri complessi ordinari, tranne che per la rappresentazione delle unità. Potremmo per es. porre

$$w_{2s} = i v_{2s}$$

con $i^2 = -1$, allora ogni numero a del sistema può mettersi sotto la forma

$$a = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{1r} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\alpha_{2s} + \alpha'_{2s} i) v_{2s} .$$

Posto poi

$$b = \sum_{r=1}^{k} \beta_{1r} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\beta_{2s} + \beta'_{2s} i) v_{2s} ,$$

il prodotto ab risulterà dato da

$$ab = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{1r} \beta_{1r} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\alpha_{2s} + \alpha'_{2s} i)(\beta_{2s} + \beta'_{2s} i) v_{2s} ;$$

cioè le componenti del prodotto sono i prodotti delle componenti dei fattori.

La moltiplicazione risulta evidentemente associativa, commutativa, distributiva.

Il prodotto ab è nullo se sono nulle tutte le sue componenti e perciò, se nessuna delle componenti di b è nulla, deve essere nulla a.

Invece se qualcuna delle componenti di b è nulla, devono essere nulle tutte le componenti di a che corrispondono alle altre componenti di b. I divisori dello zero sono dunque tutti i numeri le cui componenti non sono tutte diverse da zero.

Se b non è un divisore dello zero, si ha

$$\frac{a}{b} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_{1r}}{\beta_{1r}} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} \frac{\alpha_{2s} + i\alpha'_{2s}}{\beta_{2s} + i\beta'_{2s}} v_{2s} .$$

Dunque il sistema è un corpo commutativo.

Esso verifica inoltre all'ipotesi di Weierstrass che una equazione algebrica a coefficienti appartenenti al campo non può ammettere infinite radici se non quando i suoi coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero con moltiplicazione per numeri del campo.

Difatti, siano $a, b, \ldots, l$ numeri del sistema, e si voglia determinare un numero x tale che sia

$$a + bx + cx^2 + \ldots + lx^m = 0.$$

Se con x_μ, $a_\mu, \ldots, l_\mu$ indichiamo le componenti di x, $a, \ldots, l$ nel campo C_μ (a una o a due dimensioni), allora l'espressione del primo membro dell'equazione nel campo C_μ ha la componente

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \ldots + l_\mu x_\mu^m,$$

e però l'equazione si decompone nelle seguenti $k + h = r$ equazioni

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \ldots + l_\mu x_\mu^m = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r).$$

Una equazione di questa forma, nella quale i coefficienti sono numeri reali o complessi ordinari ha infinite radici solo quando tutti i coefficienti siano nulli.

Quindi l'equazione (14) ammette infinite radici solo quando per un valore almeno di μ sia

$$a_\mu = b_\mu = \ldots = l_\mu = 0 .$$

Si supponga che ciò avvenga per gli ultimi $r - \rho$ valori di μ, e sia perciò

$$a = \sum_{\mu=1}^{\rho} a_\mu, \qquad b = \sum_{\mu=1}^{\rho} b_\mu, \ldots, \; l = \sum_{\mu=1}^{\rho} l_\mu .$$

Prendasi ora un numero

$$h = \sum_{\mu=1}^{\rho} h_\mu$$

dove h_μ è un numero di C_μ diverso da zero; potremo sempre determinare numeri $a', b', \ldots, l'$ tali che si abbia

$$a = ha', \qquad b = hb', \ldots, \; l = hl'.$$

Infatti sia a'_μ la componente di a'_μ in C_μ, allora è

$$ha' = \sum_{\mu=1}^{r} h_\mu a'_\mu$$

e quindi dev'essere $a'_\mu = \dfrac{h_\mu}{a_\mu}$ per $\mu = 1, 2, \ldots \rho$, mentre a'_μ per $\mu > \rho$ può assumersi arbitrariamente.

In modo analogo si determinano $b', \ldots, l'$. Quindi si ha che nel caso che l'equazione (14) ammetta infinite radici, i coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per numeri del sistema.

Dunque il corpo commutativo considerato verifica all'ipotesi di Weierstrass.

Se dunque l'esistenza dei divisori dello zero non si vuole considerare come una sostanziale differenza fra l'aritmetica delle quantità complesse generali e quella delle quantità complesse ordinarie, e si vuole che una equazione algebrica possa ammettere infinite radici solo quando i suoi coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per numeri del sistema, si perviene ad un corpo le cui proprietà aritmetiche presentano molta analogia colle proprietà aritmetiche del corpo reale o del corpo dei numeri complessi ordinari, però la sua struttura e l'algoritmo stesso delle operazioni dimostra manifestamente l'inutilità della sua introduzione. *L'aritmetica di un tal corpo non può condurre ad alcun risultato che non si possa derivare senz'altro dalla teoria dei numeri reali o dei numeri complessi ordinari.*

Palermo, gennaio, 1905. MICHELE CIPOLLA.

SOPRA LA RAPPRESENTAZIONE DELLE PROIETTIVITÀ
nello spazio a tre dimensioni

È noto che esistono ∞^3 proiettività tra due forme di prima specie sovrapposte. Esse formano una varietà lineare, la quale può essere quindi posta in relazione collo spazio ordinario. Mi propongo di studiare qui questa rappresentazione, notando poi in special modo le varietà ad una od a due dimensioni (linee o superfici) che corrispondono all'insieme delle proiettività aventi date particolarità.

1. Siano r, r' due forme di prima specie sovrapposte, e si stabilisca sul loro comune sostegno un sistema di coordinate proiettive di cui siano A_1, A_2 gli elementi fondamentali, E l'elemento unità.

L'equazione della più generale proiettività tra r ed r' quando siano x, x' le coordinate di due punti omologhi, sarà:

$$a_{11}x_1x_1' + a_{12}x_1x'_2 + a_{21}x_2x'_1 + a_{22}x_2x'_2 = \sum_{i,k}^{1,2} a_{ik}x_ix_k = 0.$$

Ogni proiettività tra le due forme viene quindi a dipendere da quattro parametri omogenei a_{ik}, i quali possono evidentemente servire a stabilire la corrispondenza tra le proiettività e i punti dello spazio ordinario.

Basta per questo stabilire un sistema di coordinate proiettive nello spazio ordinario, e far corrispondere alla proiettività:

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik}x_ix'_k = 0$$

il punto $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$.

2. Alla retta ed al piano dello spazio S_3, corrispondono due varietà lineari che potremo chiamare rispettivamente *sistemi lineari di proiettività di prima e di seconda specie,* o più brevemente *fascio e rete* di proiettività.

Della prima di queste varietà si può dare una proprietà assai semplice.

Se $\omega_1 \equiv (a_{ik})$, $\omega_2 \equiv (b_{ik})$ sono due proiettività del fascio, un'altra proiettività generica del fascio ha la forma:

$$\omega \equiv (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}),$$

ed è rappresentata dall'equazione

$$\lambda \Sigma a_{ik} x_i x'_k + \mu \Sigma b_{ik} x_i x'_k = 0,$$

la quale è sempre soddisfatta dalle coppie x_i, x'_i che annullano contemporaneamente le quantità $\Sigma a_{ik} x_i x'_k$, $\Sigma b_{ik} x_i x'_k$, cioè che corrispondono alle coppie comuni alle proiettività ω_1, ω_2. Queste coppie sono generalmente due, sicchè si conclude:

In generale, un fascio di proiettività è formato da tutte le proiettività che mutano due determinati elementi della forma r *in due elementi pure determinati dalla forma* r'.

Evidentemente poi, nei casi di eccezione si può dire:

Formano pure un fascio di proiettività tutte le proiettività aventi a comune una data coppia di elementi, e quella sola.

Simili deduzioni si possono fare nei casi in cui tutte le proiettività del fascio sono degeneri.

3. C'interessa ora indicare quali sono le proiettività fondamentali nel nostro sistema di coordinate proiettive.

Le $\Gamma_1 \equiv (1, 0, 0, 0)$, $\Gamma_4 \equiv (0, 0, 0, 1)$ sono involuzioni degeneri di cui i punti singolari sono rispettivamente A_1 e A_2; ciò si vede dalle loro equazioni

$$x_1 x'_1 = 0, \qquad x_2 x'_2 = 0.$$

Le $\Gamma_2 \equiv (0, 1, 0, 0)$, $\Gamma_3 \equiv (0, 0, 1, 0)$ di equazioni:

$$x_1 x'_2 = 0, \qquad x'_1 x_2 = 0$$

sono degeneri, non involutorie, e le loro coppie di elementi singolari sono (A_1, A_2), (A_2, A_1).

La $\Sigma \equiv (1, 1, 1, 1)$ di equazione:

$$x_1 x'_1 + x_1 x'_2 + x_2 x'_1 + x_2 x'_2 = (x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2) = 0$$

è degenere involutoria e il suo elemento singolare è il punto $(1, -1)$ coniugato armonico di E rispetto ad $A_1 A_2$.

Si noti a questo proposito la proiettività $I = (0, 1, -1, 0)$ o $(0, -1, 1, 0)$. La sua equazione:

$$x_1 x'_2 - x_2 x'_1 = 0$$

cioè

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x'_1}{x'_2}$$

mostra che la I muta in se stessi tutti i punti della forma cioè è la proiettività identica.

Se M è un punto qualunque dello spazio, la retta IM è evidentemente il luogo delle proiettività aventi per elementi uniti quelli di M.

Anche il piano unità:

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$$

può avere una semplice caratterizzazione, in quanto, quando le a soddisfino a tale condizione, il punto $E \equiv (1, 1)$ è punto unito per la proiettività:

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik} x_i x'_k = 0 ;$$

E viceversa; sicchè tal piano è il luogo delle proiettività che ammettono E come punto unito. In particolare I vi appartiene.

4. I problemi che ora andremo risolvendo possono tutti comprendersi sotto l'enunciato seguente:

Determinare il luogo delle proiettività tra r *ed* r' *il cui invariante assoluto (birapporto dei punti uniti con due punti omologhi) è dato da* $\frac{\lambda}{\mu}\left(o\ \frac{\mu}{\lambda}\right)$.

È evidente che l'essere $\frac{\lambda}{\mu}$ o $\frac{\mu}{\lambda}$ il valore del birapporto non dipende che dall'ordine in cui si considerano i punti uniti.

Si supponga che in una tale proiettività siano (m_1, n_1), (m_2, n_2), (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) i punti uniti e una coppia di punti omologhi.

L'equazione della proiettività sarà:

$$\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x'_1}{x'_2}\right) = \frac{\lambda}{\mu},$$

che, ridotta alla forma:

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik} x_i x_k = 0,$$

ci dà:

$$a_{11} \equiv (\lambda - \mu)\, m_2 n_2, \quad a_{12} = \mu m_2 n_1 - \lambda m_1 n_2,$$
$$a_{21} = \mu m_1 n_2 - \lambda m_2 n_1, \quad a_{22} = (\lambda - \mu)\, m_1 n_1.$$

Eliminando tra queste equazioni m_1, m_2, n_1, n_2, si avrà l'equazione del luogo cercato.

Si ottiene facilmente:

$$(\lambda + \mu)^2 a_{11} a_{22} = (\lambda a_{12} + \mu a_{21})(\lambda a_{21} + \mu a_{12}) \tag{1}$$

equazione di secondo grado, che rappresenta quindi una quadrica, e che, come era prevedibile, non muta se $\frac{\lambda}{\mu}$ si cambia in $\frac{\mu}{\lambda}$.

5. Prima di passare ai diversi casi particolari, sarà bene dare alla (1) un'altra forma.

Si ha infatti sviluppando:

$$(\lambda + \mu)^2 a_{11} a_{22} = (\lambda^2 + \mu^2)\, a_{12} a_{21} + \lambda\mu\, (a^2_{12} + a^2_{21})$$

cioè:

$$(\lambda+\mu)^2 (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + \lambda\mu\, (a_{12} - a_{21})^2 = 0,$$

che, posto

$$(\lambda + \mu)^2 = \Lambda, \qquad \lambda\mu = \mathrm{M},$$

prende la forma:

$$\Lambda\, (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + \mathrm{M}\, (a_{12} - a_{21})^2 = 0. \qquad (1')$$

Si vede di qua che al variare di $\frac{\lambda}{\mu}$ le quadriche rappresentate dalla (1) descrivono un fascio di quadriche. Inoltre poichè per $\Lambda = 0$, $\mathrm{M} = 1$ si ottiene la quadrica:

$$(a_{12} - a_{21})^2 = 0,$$

che è degenere in un piano doppio, si vede anche che il fascio (1′) è quello formato dalle quadriche tangenti alla

$$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0$$

nei punti della conica in cui essa vien segata dal piano $a_{12} - a_{21} = 0$.

6. Ricerchiamo ora quali siano le quadriche del fascio che rappresentano alcune classi notevoli di proiettività.

a) Involuzioni. — Per esse può porsi $\lambda = 1$, $\mu = -1$ e quindi $\Lambda = 0$, $\mathrm{M} = -1$. Si ottiene così la quadrica:

$$(a_{12} - a_{21})^2 = 0 \qquad (2)$$

che, come abbiamo osservato si scinde in due piani coincidenti. Evidentemente esso è il piano $\Gamma_1\Gamma_4\Sigma$.

b) Proiettività degeneri. — $\lambda = 0$, $\mu = 1$ da cui $\Lambda = 1$, $\mathrm{M} = 0$. Si ha la quadrica propria:

$$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0. \qquad (3)$$

c) Involuzioni degeneri. — Sono rappresentate dai punti comuni alla quadrica (3) col piano doppio (2) cioè dai punti di una certa conica K, contata due volte, che non è altro che la curva base del fascio.

Poichè tali proiettività non hanno un determinato invariante assoluto, è naturale che esse siano comuni a tutte le quadriche del fascio.

d) Proiettività paraboliche. — Si può porre $\lambda = 1$, $\mu = 1$, e quindi $\Lambda = 4$, $\mathrm{M} = 1$. Si ottiene il cono quadrico di equazione:

$$(a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22} = 0. \qquad (4)$$

Il suo vertice è il punto (0, 1, —1, 0), che come vedemmo rappresenta l'*identità* I. Ciò mette in luce la proprietà di essa di avere come punti uniti tutti i punti della forma, che corrisponde a quella di appartenere a tutte le generatrici del cono.

e) Proiettività cicliche di ordine n. — Si può porre $\frac{\lambda}{\mu} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, e quindi:

$$\lambda = e^{\frac{k\pi i}{n}}, \qquad \mu = e^{\frac{-k\pi i}{n}}$$

da cui:

$$\Lambda = 4\cos^2\frac{k\pi}{n}, \qquad M = 1.$$

L'equazione della quadrica corrispondente prende la forma:

$$4\cos\frac{k\pi}{n}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + (a_{12} - a_{21})^2 = 0 \tag{5}$$

od anche, con la trasformazione $4\cos\frac{k\pi}{n} = 2 + 2\cos\frac{2k\pi}{2}$:

$$(a^2_{12} + a^2_{21} - 2a_{11}a_{22}) + 2\cos\frac{2k\pi}{n}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = 0. \tag{5'}$$

Si ottengono così, poichè se $k \pm k' \equiv 0 \pmod{n}$ le quadriche corrispondenti coincidono, $\frac{k}{2}$ quadriche se k è pari, $\frac{k-1}{2}$ se k è dispari.

Volendo poi considerare le proiettività cicliche *propriamente* di ordine n, cioè tali che le loro prime $n-1$ potenze siano distinte, e la n^{esima} sia uguale alla prima, bisogna prendere solo i valori di k primi con n. Si avranno allora solo $\frac{\varphi(n)}{2}$ quadriche, se $n > 2$, una sola quadrica (il piano doppio (2)), se $n = 2$.

Si ha una sola quadrica anche se $n = 3, 4$; propriamente, per $n = 3$:

$$(a^2_{12} - a_{12}a_{21} + a^2_{21}) - a_{11}a_{22} = 0;$$

per $n = 4$:

$$a^2_{12} + a^2_{21} - 2a_{11}a_{22} = 0.$$

7. Sia $\Phi(\lambda, \mu)$ la quadrica luogo delle proiettività che hanno il birapporto $\frac{\lambda}{\mu}$.

Se consideriamo tutte le proiettività di una medesima generatrice n di Φ, per ciò che abbiamo già detto, esse avranno due coppie comuni (M, M'), (N, N'). Se poi X, Y sono i punti uniti di tale proiettività, presi in ordine conveniente, si ha sempre

$$(XYMM') = \frac{\lambda}{\mu};$$

ciò che prova che le coppie XY appartengono ad una proiettività, di cui sono M, M', gli elementi uniti. Poichè analogamente si dimostrerebbe che le stesse coppie, in questo od in altro ordine appartengono ad una proiettività di elementi uniti N, N', ne deriva evidentemente che la coppia (M, M') coincide con la coppia (N, N').

Inoltre la generatrice considerata incontri la conica K in ω; sarà ω un' involuzione parabolica, anzi la sola proiettività parabolica sulla u; per cui la coppia (M, M') si ridurrà ad un unico punto unito. Si consideri poi l'ulteriore generatrice di Φ passante per ω, e sia v; anche le proiettività giacenti su v avranno questo medesimo punto unito. Si può dunque enunciare il teorema:

Il luogo delle proiettività di invariante $\frac{\lambda}{\mu}$, *le quali hanno un determinato elemento unito, è dato dalle due generatrici della quadrica* $\Phi(\lambda, \mu)$ *che s'incontrano nel punto di* K *che ha quell'elemento come singolare.*

8. Più in generale, poichè al variare di $\frac{\lambda}{\mu}$ le generatrici u, v di $\Phi(\lambda, \mu)$ restano sempre nel piano tangente in ω a tutte le quadriche del fascio, ed inoltre per ogni punto di questo piano tangente passa una quadrica del fascio, si può dire anche:

Il luogo delle proiettività aventi un dato elemento unito è il piano tangente alle quadriche del fascio nel punto della conica K *avente come singolare l'elemento dato.*

9. Prima di terminare queste osservazioni sulle generatrici e sui piani tangenti di $\Phi(\lambda, \mu)$, consideriamo il caso particolare della quadrica $\Phi(0, 1)$ che contiene le proiettività degeneri e che ha l'equazione:

$$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0.$$

Se ω è un punto di questa quadrica, aventi due certi elementi singolari X, Y, e si conduce in esso il piano tangente, che taglia la quadrica stessa nelle due generatrici u, v, sarà p. es. u formata di proiettività aventi l'elemento X come primo elemento singolare, v formato invece di proiettività di cui l'elemento Y è il secondo elemento singolare.

Sia τ un di punto uv diverso da ω. Per esso si tiri una retta che incontri u e v nei punti distinti τ_1, τ_2. Si vede subito che tanto τ_1, quanto τ_2 mutano X in Y e non hanno comuni altre coppie di elementi omologhi; per cui questa coppia e questa sola sarà comune a tutte le proiettività allineate con τ_1 e τ_2; quindi anche a τ. Poichè inoltre ad ogni piano tangente corrisponde in tal maniera una coppia di elementi della forma in un determinato ordine, si può enunciare il teorema:

Il luogo delle proiettività che mutano un determinato elemento X *in un altro elemento* Y *è in piano tangente alla quadrica* $\Phi(0, 1)$ *nel punto* ω *che rappresenta la proiettività di cui* X, Y *sono gli elementi singolari.*

Questo resultato comprende evidentemente quello enunciato nel § precedente.

10. Terminiamo questa breve esposizione coll'accennare a due casi di omografia nello spazio che hanno speciale significato riguardati come trasformazioni di proiettività.

Il primo caso si ha quando si applichi allo spazio una omologia armonica di cui sia I (l'identità) il centro, e il piano delle involuzioni il piano di omologia.

È evidente anzitutto che, poichè I è polo del piano di omologia rispetto a tutte le quadriche $\Phi(\lambda, \mu)$, questa omologia muta tra loro due punti della stessa quadrica allineati con I, cioè muta una proiettività in un'altra di uguale invariante e cogli stessi elementi uniti. Due proiettività omologhe non essendo generalmente identiche, dovranno essere l'una inversa dell'altra.

È naturale quindi che in tale omologia debbano essere uniti solo l'identità e le involuzioni. Si ha anche di qua il metodo più semplice per ottenere da una proiettività la sua inversa, e che stimo superfluo enunciare.

11. Il secondo caso risulta quando, essendo ω una proiettività non degenere, si fa corrispondere τ il suo prodotto $\tau\omega$ colla ω. Dimostriamo anzitutto che tale corrispondenza è una proiettività. Essa è biunivoca; muta punti, rette e piani in punti, rette e piani; lascia inalterate le relazioni di appartenenza.

Infatti, se la τ descrive una retta, essa muta sempre (in generale) due certi elementi A, B in due determinati elementi A', B'. La ω muti poi A', B' in A'', B''; la $\tau\omega$ muterà allora A, B in A'', B'', e quindi descriverà anche essa una retta.

Si abbiano poi due rette a, b che s'incontrino e quindi determinino un certo piano α. Le proiettività di a abbiano in comune due coppie A, A'; B, B'; quella di b due coppie c, c'; D, D'. Perchè le due rette si incontrino bisogna che sia $ABCD \barwedge A'B'C'D'$. Nella nostra corrispondenza, ad $a . b$ corrisponderanno due rette a_1, b_1 che s'incontreranno e determineranno un piano α_1.

Un punto situato su α, cioè situato su di una retta appoggiantesi ad a e b, verrà mutato in un punto situato su di una retta incidente ad a_1, b_1 cioè situata su α_1.

Senza insistere di più, è ora evidente che sono verificate tutte le condizioni perchè la nostra corrispondenza sia proiettiva.

I punti uniti di essa non potranno corrispondere che a proiettività degeneri. Se X, Y sono punti singolari di una tal proiettività, la τ muta X in ogni punto della forma; la ω mantiene tale corrispondenza. Inoltre la τ muta ogni elemento della forma in Y; questo vien dalla ω mutato p. es. in Y_1; sicchè perchè τ sia unita bisogna che Y_1 sia elemento unito di ω. Ciò basta; sicchè generalmente i punti uniti saranno distribuiti su due rette sghembe, generatrici della quadrica $\Phi(1, 0)$ delle proiettività degeneri. L'omografia sarà *biassiale*.

12. Termino qui questo breve saggio, notando solo che lo stesso metodo può condurre alle rappresentazioni delle omografie e delle correlazioni tra forme di 2^a e 3^a specie, ed anche in generale di n^a specie, sovrapposte mediante gli elementi di uno spazio lineare a 8, 15, $n(n+2)$ dimensioni rispettivamente; come pure, osservando che la nostra rappresentazione delle involuzioni su di un piano ci riporta a quella notissima delle coppie di punti, sul piano stesso; mentre nelle forme di 2ª specie, la geometria delle polarità piane, che verrebbero rappresentate nello spazio a 9 dimensioni in una varietà lineare a 5 dimensioni, ci ricondurrebbe alla geometria delle coniche di un piano, svolta specialmente dal Segre e dal Veronese. Ed alla conica K luogo delle involuzioni degeneri, corrisponderebbero qui, a seconda del grado di degenerazione, due varietà, una delle quali è la V_2^4 detta superficie di Veronese.

GUIDO ASCOLI.

METODO INDIRETTO PER LA RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI

di una funzione di variabile reale (1)

TEOREMA. — *Data una funzione* y *della variabile reale* x, *se la funzione inversa* x *della variabile* y *non è reale in un intorno* $(y_1 - \varepsilon_1, y_1)$ *a sinistra di* y_1 *e reale in un intorno* $(y_1, y_1 + \varepsilon_2)$ *a destra e inoltre, posto* $y_1 = y(x_1)$, *la* y *è continua nel punto* x_1 *allora* y_1 *è un minimo di* y.

Infatti, poichè y è continua in x_1, se σ è un numero reale positivo minore di ε_1 e di ε_2, esiste un intorno di x_1 per tutti i punti x del quale è $|y - y_1| < \sigma$ e quindi $y_1 - \varepsilon_1 < y < y_1 + \varepsilon_2$, segue allora che questi stessi valori di y sono anche maggiori di y_1, perchè se fossero minori, per l'ipotesi fatta, ad essi non corrisponderebbero valori di x; y_1 è perciò un minimo.

OSSERVAZIONE 1ª. — È ovvio il teorema analogo che si riferisce al massimo.

OSSERVAZIONE 2ª. — L'enunciato del teorema precedente suppone evidentemente che la funzione y sia univalente, ovvero che si consideri un ramo univalente della funzione che passa per (x_1, y_1); così che, quando si voglia far la ricerca dei massimi e minori di una funzione col metodo indicato dal teorema stesso, converrà anzitutto decomporre la funzione in rami univalenti.

OSSERVAZIONE 3ª. — Se la funzione x di y è plurivalente ed è per es. $y_1 = y(x_1)$ ed $y_1 = y(x^{(1)})$ allora bisognerà distinguere l'uno dall'altro i valori y_1 che provengono dai due valori x_1 ed $x^{(1)}$, potendo l'uno e non l'altro essere massimo o minimo.

(1) Quando diremo massimi o minimi intenderemo parlare di massimi e minimi relativi.

Corollario. — *Se la funzione inversa* x *di* y *è continua, a meno di* poli, *negli intervalli* $(y_1 y'_1), (y_2, y'_2), \dots, (y_n, y'_n)$ *mentre in ogni altro intervallo non è reale, e inoltre, posto* $y_1 = y(x_1), y'_1 = y(x'_1), \dots,$ *la* y *è continua nei punti* $x_1, x'_1, \dots,$ *allora gli estremi inferiori di detti intervalli sono minimi della* y, *e i superiori massimi, e non vi sono altri massimi nè minimi.*

La prima parte è conseguenza del teorema dimostrato.

Per ciò che riguarda la seconda osserviamo che:

1°. I punti nei quali x non è reale non sono nè massimi nè minimi, perchè non sono valori assunti da y.

2°. I punti nei quali x è infinita non sono nè massimi nè minimi perchè sono i $\lim\limits_{x=\infty} y$, e ai quali non è applicabile la definizione di massimo o minimo.

3°. I punti nei quali la x è continua non possono essere nè massimi nè minimi. Infatti sia x continua in y_1, posto $x_1 = x(y_1)$, se y fosse p. es. massima in x_1 esisterebbe un intorno di x_1: $(x_1 - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2)$ per tutti i punti x del quale sarebbe $y < y_1$, e quindi a valori di y maggiori di y_1 non corrisponderebbero valori di x nel detto intervallo; ma poichè x è continua in y_1 esiste un intorno di y_1 (e quindi valori maggiori di y_1) per tutti i punti y del quale risulti $|x - x_1| < \eta$, indicando con η un numero reale positivo minore di ε_1 e di ε_2, cioè a valori di y maggiori di y_1 corrispondono valori di x dell'intervallo $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_2)$; l'ipotesi è adunque assurda.

Applicazione. — La funzione y definita da un'equazione del tipo

$$\varphi_1(y)\, x^2 + \varphi_2(y)\, x + \varphi_3(y) = 0, \tag{1}$$

nella quale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono funzioni univalenti e reali e

$$S = \overline{\varphi_2(y)}^2 - 4\varphi_1(y)\, \varphi_3(y)$$

è una funzione razionale intera, [1] può avere massimi e minimi dati dalla seguente:

Regola. — Posto

$$S = (ay^2 + by + c)(a_1 y^2 + b_1 y + c_1) \dots$$
$$(a_k y^2 + b_k y + c_k)(y - y_1)^{p_1}(y - y_2)^{p_2} \dots (y - y_m)^{p_m},$$

dove le $y_1, y_2, \dots, y_m$ si suppongono distinte e disposte in ordine crescente, se p_r è dispari e $p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_m$ è dispari (pari) y_r è massimo o minimo (minimo o massimo) secondo che $a \,.\, a_1 \dots a_k \gtrless 0$, [2] ben inteso per quei rami univalenti, dei quali si compone y, ai quali appartiene y_r e che sono continui in x_r.

---

[1] E quindi può imaginarsi decomposta in fattori reali di secondo grado a discriminante negativo e in fattori reali di primo grado.

[2] Il segno di un trinomio a discriminante negativo è sempre quello del coefficiente del termine di 2° grado.

Infatti se p. es. p_r e $p_{r+1}+p_{r+2}+\ldots+p_m$ sono entrambi dispari ed $a \,.\, a_1 \ldots a_k > 0$ la funzione inversa $x=\dfrac{-\varphi_2 \pm \sqrt{S}}{2\varphi_1}$ è reale in un intorno a sinistra di y_r e non reale intorno a destra; perchè x è reale quando $S>0$, complessa quando $S<0$.

Osservazione 1ª. — Le radici reali di S, cioè $y_1, y_2, \ldots y_m$ sono sufficienti a determinare gli intervalli di realtà per la x, e quindi se in questi intervalli x è continua (il che succede se sono continue $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, a meno di poli dati dalle radici della $\varphi_1=0$); la y non ha altri massimi o minimi relativi oltre quelli dati dalla regola precedente.

Inoltre il massimo dei valori che soddisfanno l'inequazione $S \geqslant 0$ sarà il massimo assoluto di y, il minimo dei detti valori sarà il minimo assoluto.

Osservazione 2ª. — Non si possono avere due massimi consecutivi perchè, supposto $a \,.\, a_1 \,.\, a_2 \ldots a_k > 0$, se p_r e $p_{r+1}+p_{r+2}+\ldots+p_m$ sono entrambi dispari, e quindi y_r è massimo, e inoltre p_{r-1} è dispari: $p_{r+2}+\ldots$ è pari e quindi y_{r+1} è minimo, se invece p_{r-1} è pari: $p_{r+2}+\ldots$ è dispari, e quindi se p_{r+2} è dispari: $p_{r+3}+\ldots$ è pari e perciò y_{r+2} è minimo, e così via.

Analogamente, non si possono avere due minimi consecutivi.

Osservazione 3ª. — Se $y_r=y(x_r)$ è un massimo (minimo) di un ramo univalente della funzione defininita dalla (1), e il ramo stesso è continuo in un intervallo (a, b) al quale appartiene x_r, allora y_r è il massimo (minimo) assoluto di quel ramo nell'intervallo (a, b).

Infatti poichè y_r è un massimo esiste un intorno di x_r, poniamo $(x^{(0)}, x^{(1)})$ per tutti i punti x del quale compresi gli estremi è $y<y_r$; siano $y^{(0)}$ ed $y^{(1)}$ i valori di y corrispondenti agli estremi, e supponiamo $y^{(1)}>y^{(0)}$ (il che è lecito per la continuità della y). Ancora per la continuità della y, vi sono due punti x'_1, x''_1, uno a sinistra e l'altro a destra di x_r, [1] nei quali la y assume uno stesso valore y_1 compreso tra $y^{(1)}$ ed y_r.

Ciò posto se nell'intervallo (a, b) si suppone l'esistenza di un punto x_s a destra di x_r e tale che, posto $y_s=y(x_s)$, sia $y_s \geqslant y_r$, essendo la y continua in (a, b) e quindi nell'intervallo $(x^{(1)}, x_s)$, [2] in questo intervallo vi è un punto y_1''' nel quale la y assume il valore y_1. Ma allora la y assumerebbe lo stesso valore y_1 per tre valori x'_1, x''_1, x'''_1 di x, cioè l'equazione (1) avrebbe tre radici, mentre è di secondo grado in x. Analogamente si prova che non può esistere un punto come x_s alla sinistra di x_r e nell'intervallo (a, b).

Nello stesso modo si dimostra il teorema relativo al minimo.

---

[1] E nell'intervallo $(x^{(0)}, x^{(1)})$.

[2] Supponiamo, come è lecito, che $x^{(1)}$ sia a sinistra di x_s.

COROLLARIO. — *Dall'osservazione precedente si trae facilmente, che, non si possono avere due valori di* x *l'uno di massimo e l'altro di minimo col minimo maggiore del massimo e senza che tra i valori stessi di* x *vi sia un punto di discontinuità per la* y.

OSSERVAZIONE 4ª. — I valori di massimo o di minimo si ottengono sostituendo il massimo o minimo nella espressione $-\dfrac{\varphi_2(y)}{2\varphi_1(y)}$.

Dott. ANTONIO BINDONI.

PICCOLE NOTE

I. — **Sugli integrali definiti di una funzione finita.**

È noto che

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots \tag{1}$$

se α è una costante finita. Sia ora $\mu(x)$ una funzione determinata finita e integrabile nell'intervallo $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ ($\alpha < \beta$; α, β costanti); indicheremo con M il limite superiore dei suoi valori assoluti. Divideremo l'intervallo dato in n intervalli parziali $\delta_i^{(n)}$ ($i = 1\,2\ldots n$); e sia $\delta^{(n)}$ il più grande di questi intervalli. Supporremo

$$n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{e} \quad \delta^{(n)} < \frac{\mathrm{H}}{n} \quad \text{ossia} \quad n\delta^{(n)} < \mathrm{H} \quad \text{ossia} \quad n\,[\delta^{(n)}]^2 < \frac{\mathrm{H}^2}{n} \tag{2}$$

dove H è una costante finita indipendente da n. Indicheremo con $\mu_i^{(n)}$ una quantità compresa tra il limite inferiore e il limite superiore (oppure anche uguale a uno di questi due limiti) di μ in $\delta_i^{(n)}$. Io dico che

$$\lim_{n=\infty}\prod_{i=1}^{n}\,[1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}] = e^{\int_\alpha^\beta \mu(x)dx} \tag{3}$$

ossia che (si ricordi che, se il numero n è abbastanza grande, $\log(1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})$ è reale)

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\log(1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}). \tag{4}$$

La (4) *si potrebbe assumere come una nuova definizione dell'integrale di una funzione* μ (x); *la* (3) *è una ampia generalizzazione di* (1); infatti, ponendo in essa $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}$, $\delta_i^{(n)} = \dfrac{\beta-\alpha}{n}$, essa si riduce precisamente alla (1). [1]

---

[1] Un caso particolare di questa formula fu da me trovato a proposito di alcune mie ricerche sulle equazioni differenziali (Circolo Matematico di Palermo 1903). La (4) si potrebbe generalizzare, ponendo

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(1+\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione tale che $\lim\limits_{\varepsilon=0}\dfrac{\varphi(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ecc. ecc.

DIMOSTRAZIONE. — Dalla (1) si ha

$$e^{\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}} = 1 + \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} + A_i^{(n)} \tag{5}$$

dove è

$$A_i^{(n)} = (\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})^2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

e quindi

$$| A_i^{(n)} | < | \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} |^2 e^{M\delta^{(n)}}. \tag{6}$$

Dalla (5) si ha

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}} = \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}) + B^{(n)} \tag{7}$$

dove è per la (6)

$$| B^{(n)} | = \left| \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k^{(n)}\delta_k^{(n)} - \mu_i^{(n)}\delta_i^{(n)}} \right| < n\,(\delta^{(n)})^2 M^2 e^{M\delta^{(n)}} e^{(n-1)M\delta_{(n)}}.$$

E per le (2) avremo dunque

$$| B^{(n)} | < \frac{H^2M^2}{n} e^{MH} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n=\infty} B^{(n)} = 0. \tag{8}$$

Ma

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} = \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx.$$

Quindi dalla (7), passando al limite per $n = \infty$, otteniamo appunto [in virtù della (8)] la formola (3), che ci eravamo proposti di dimostrare.

GUIDO FUBINI.

II. — Determinazione delle quadrisecanti di una quaterna di rette *(nel metodo delle proiezioni centrali).*

Il prof. Loria in un suo articolo pubblicato in questo giornale (serie II, volume IV, pag. 289) dà una notevole soluzione del problema della ricerca delle quadrisecanti di una quaterna di rette. Poichè fra le soluzioni più comuni non vedo citata la soluzione che qui esporrò e che d'altra parte non ho trovata esplicitamente in alcun testo di Descrittiva, mi permetto di esporla in poche parole, quantunque per la semplicità del principio su cui si fonda essa si presenti spontaneamente.

Le due rette che si appoggiano a certe quattro rette date (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) sono le intersezioni delle due rigate;

$d_1^{(2)}$ determinata dalle rette (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) come direttrici
$d_2^{(2)}$ » » » (A_1, A_2), (B_1, B_2), (D_1, D_2) » »

I punti A_1, B_1, C_1 sono intanto traccie di tre rette di $d_1^{(2)}$; di più se conduco p. es. per B_1, C_1 rispettivamente le parallele alle A_2B_2, A_2C_2 fino ad incontrarsi in A'_1, e per A_1, C_1 rispettivamente le parallele alle A_2B_2, B_2C_2 fino ad incontrarsi in B'_1 ho nei punti A'_1, B'_1 le traccie di altre due rette di $d_1^{(2)}$, e precisamente di quelle rette che hanno rispettivamente A_2 e B_2 per punti fuga.

Analogamente si possono determinare le traccie A''_1, B''_1 delle due rette di $d_2^{(2)}$ aventi ancora rispettivamente A_2 e B_2 per punti fuga; di altre tre rette di $d_2^{(2)}$ si conoscono già le traccie A_1, B_1, D_1.

Allora le ulteriori intersezioni delle due coniche determinate, l'una dai punti A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, l'altra dai punti A_1, B_1, D_1, A''_1, B''_1 sono le traccie delle quadrisecanti richieste, e non è difficile trovare i relativi punti di fuga.

Se già si conoscesse una quadrisecante (S_1S_2) il punto S_1 si può sostituire tanto a B'_1 quanto a B''_1 nella determinazione delle due coniche prima nominate.

GUIDO TOGNOLI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 666, 682, 684, 685, 686 E 687

666. *Essendo dati due circoli* c *e* c′ *si consideri la parabola* π *di parametro costante* p *il cui vertice è situato su* c *e l'asse è tangente a* c, *e la parabola* π′ *di parametro costante* p′ *il cui vertice è situato su* c′ *e l'asse è tangente a* c′.

Dimostrare che, se gli assi di π *e* π′ *sono perpendicolari, il luogo del centro del circolo che passa per i quattro punti comuni alle due parabole* π *e* π′ *si compone di otto* conchiglie di Pascal.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Definizioni: 1ª. Con $\overrightarrow{AB}$ intenderemo che la *direzione positiva* stabilita sulla retta $\overline{AB}$ è quella diretta da A verso B; per *senso positivo di rotazione* di una retta di un piano intorno a un punto della retta stessa intenderemo quello contrario al movimento delle lancette d'un orologio.

2ª. L'angolo $\widehat{AOB}$ sarà quello descritto dalla semiretta $\overline{OA}$ quando ruota intorno ad O nel senso positivo per venire a sovrapporsi alla semiretta $\overline{OB}$.

3ª. Se t è la tangente a un cerchio di centro O in un suo punto A stabiliremo che la *direzione positiva* sulla t è quella che viene a coincidere col senso positivo $\overrightarrow{OA}$ della retta $\overline{OA}$ quando la tangente t ruotando intorno ad A di un angolo retto e nel senso positivo viene a sovrapporsi alla retta $\overline{OA}$.

I. — Sieno C e C′ i centri di c e c'; V un punto variabile di c; V'_1 e V'_2 gli estremi del diametro di c' perpendicolare alla retta $\overline{CV}$; t, t'_1, t'_2 rispettivamente le tangenti a c in V ed a c' in V'_1 e V'_2. Ciò posto è evidente che esistono sei parabole $\pi, \pi'_1, \pi'_2, -\pi, -\pi'_1, -\pi'_2$ tali che le prime tre hanno rispettivamente per vertici i punti V, V'_1, V'_2 per parametri p, p', p' per assi le rette t, t'_1, t'_2 e sono dirette secondo le direzioni positive di queste tre rette (v. Def. 3ª), mentre le ultime tre parabole hanno rispettivamente gli stessi vertici, parametri ed assi delle precedenti ma sono dirette in senso contrario. Si devono dunque distinguere i seguenti otto casi

$$(\pi, \pi'_1);\ (\pi, \pi'_2);\ (\pi, -\pi'_1);\ (\pi, -\pi'_2);\ (-\pi, \pi'_1);\ (-\pi, \pi'_2);\ (-\pi, -\pi'_1);\ (-\pi, -\pi'_2)$$

che si ottengono combinando una parabola di vertice V con una di vertice V'_1 o V'_2.

Nel § seguente considereremo però solo il primo caso (π, π'_1) dal quale dedurremo poi gli altri sette.

II. — Scegliamo la $\overrightarrow{CC'}$ per asse delle X e la perpendicolare a $\overline{CC'}$ nel suo punto di mezzo O per asse delle Y, sul quale sceglieremo per direzione positiva quella che coincide col senso positivo dell'asse delle X quando questo viene a sovrapporsi all'asse delle Y ruotando intorno ad O nel senso positivo e di un angolo retto. Questo sistema di assi lo indicheremo con (Γ).

Sia $C \equiv (-a, 0)$, $C' \equiv (a, 0)$; per C e C′ conduciamo due semirette parallele alla direzione positiva dell'asse delle Y; esse incontreranno i cerchi c e c' rispettivamente in H ed H′.

Indichiamo poi con (γ) la coppia di assi cartesiani ortogonali che si ottiene assumendo la retta t con la sua direzione positiva (v. Def. 3ª) per asse delle x e la CV per quello delle y.

L'equazione di π, riferita al sistema di assi (γ), è evidentemente

$$y^2 - 2px = 0\,; \tag{1}$$

inoltre, essendo r il raggio di c e posto $\widehat{\mathrm{YCH}} = \alpha$, le coordinate di O rispetto al sistema di assi (γ) sono

$$x = a\cos\alpha\,, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,\alpha - r\,;$$

quindi passando dal sistema (γ) al sistema (Γ) le formule di trasformazione saranno

$$\begin{cases} x = \mathrm{X}\cos\alpha - \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha + a\cos\alpha\,, \\ y = \mathrm{X}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{Y}\cos\alpha + a\,\mathrm{sen}\,\alpha - r\,; \end{cases}$$

perciò la (1) diventa

$$\varphi = (\mathrm{X}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{Y}\cos\alpha + a\,\mathrm{sen}\,\alpha - r)^2 - 2p\,(\mathrm{X}\cos\alpha - \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha + a\cos\alpha) = 0\,. \tag{2}$$

Analogamente, essendo r' il raggio di c' ed osservando che $\widehat{\mathrm{Y_1CH'}} = 90^0 + \alpha$, dalla (2) si deduce l'equazione di π'_1 riferita al sistema (Γ) cambiando in essa a in $-a$, p in p', r in r' ed α in $90^0 + \alpha$. Essa è

$$\psi = (\mathrm{X}\cos\alpha - \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha - a\cos\alpha - r')^2 + 2p'\,(\mathrm{X}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{Y}\cos\alpha - a\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 0\,. \tag{3}$$

Le parabole (2), (3) determinano il fascio di coniche

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

nel quale a $\lambda = 1$ corrisponde un cerchio. Indicando con X, Y le coordinate del centro di detto cerchio, avremo

$$\begin{cases} \mathrm{X} = a\cos 2\alpha + (r - p')\,\mathrm{sen}\,\alpha + (r' + p)\cos\alpha\,, \\ \mathrm{Y} = -a\,\mathrm{sen}\,2\alpha + (r - p')\cos\alpha - (r' + p)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, \end{cases}$$

donde si ricava

$$\begin{cases} (\mathrm{X} + a)\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{Y}\cos\alpha = r - p'\,, \\ -\mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha + (\mathrm{X} - a)\cos\alpha = r' + p\,, \end{cases}$$

dalle quali, eliminando α, risulta l'equazione del luogo

$$[(r-p')\,(\mathrm{X}-a) - (r'+p)\,\mathrm{Y}]^2 + [(r'+p)\,(\mathrm{X}+a) + (r-p')\,\mathrm{Y}]^2 = (\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-a^2)^2 \tag{4}$$

che rappresenta evidentemente una *quartica bicircolare*. La (4) si può trasformare nella seguente

$$\begin{aligned}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - a^2)\,[\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - a^2 - (r - p')^2 - (r' + p)^2] &= \\ = 2a\,\big\{[(r' + p)^2 - (r - p')^2]\,\mathrm{X} + 2\,(r - p')(r' + p)\,\mathrm{Y} + [(r - p')^2 + (r' + p)^2]\,a\big\}\,,\end{aligned}$$

e ponendo

$$r - p' = d_1\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}\varphi_1\,, \quad (5) \qquad\qquad r' + p = d_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1\,, \quad (6)$$

essa diventa

$$(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - a^2)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - a^2 - d_1^2) = 2ad_1^2\,(\mathrm{X}\cos\varphi_1 + \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + a)\,. \tag{7}$$

La retta

$$\mathrm{X}\cos\varphi_1 + \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + a = 0 \tag{8}$$

è tangente al cerchio c'' di diametro $\overline{\mathrm{CC'}}$ e d'equazione

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - a^2 = 0$$

nel punto $O_1 \equiv (-a\cos\varphi_1, -a\,\mathrm{sen}\varphi_1)$; avremo dunque per le (5), (6)

$$d_1 = +\sqrt{(r-p')^2+(r'+p)^2}, \quad \text{e} \quad \widehat{COO_1} = \varphi_1 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{r-p'}{d_1} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{r'+p}{d_1}. \ ^{(1)}$$

Assumiamo la $\overrightarrow{O_1O}$ per nuovo asse delle ξ e la retta rappresentata dalla (8), cioè la tangente in O_1 a c'' con la sua direzione positiva stabilita mediante la Def. 3ª, per asse delle η. Allora le formule di trasformazione saranno

$$\begin{cases} X = \xi\cos\varphi_1 - \eta\,\mathrm{sen}\varphi_1 - a\cos\varphi_1, \\ Y = \xi\,\mathrm{sen}\varphi_1 + \eta\cos\varphi_1 - a\,\mathrm{sen}\varphi_1, \end{cases}$$

e quindi la (7) diventa

$$(\xi^2+\eta^2-2a\xi)^2 = d_1^2(\xi^2+\eta^2).$$

Conclusione. — La curva luogo che indicheremo con Σ_1 è la *chiocciola di Pascal* concoide di c'' rispetto al polo O_1 ed al segmento addizionale d_1.

III. — Essendo O_2, O_3, O_4 punti di c'', poniamo

$$d_2 = +\sqrt{(r+p')^2+(p-r')^2}, \qquad \widehat{COO_2} = \varphi_2 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{r+p'}{d_2} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{p-r'}{d_2};$$

$$d_3 = +\sqrt{(r+p')^2+(r'+p)^2}, \qquad \widehat{COO_3} = \varphi_3 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{r+p'}{d_3} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{r'+p}{d_3};$$

$$d_4 = +\sqrt{(r-p')^2+(p-r')^2}, \qquad \widehat{COO_4} = \varphi_4 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{r-p'}{d_4} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{p-r'}{d_4};$$

e chiamiamo Σ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ la *chiocciola di Pascal* concoide di c'' rispetto al polo O_i ed al segmento addizionale d_i, e Σ'_i quella simmetrica di Σ_i rispetto alla retta $\overline{CC'}$. Ciò posto esaminiamo gli altri sette casi del nostro problema.

2°. — (π, π'_2). Si ha: $\widehat{V'_2CH'} = 270° + \alpha$; l'equazione di π'_2 rispetto alla coppia di assi (Γ) si può dedurla dalla (2) cambiando in essa a in $-a$, p in p', r in r' ed α in $270° + \alpha$. Tale equazione è

$$(X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\alpha - a\cos\alpha + r')^2 - 2p'(X\,\mathrm{sen}\alpha + Y\cos\alpha - a\,\mathrm{sen}\alpha) = 0$$

la quale differisce dalla (3) per i segni di r' e di p'. Per ottenere l'equazione del luogo bisognerà quindi cambiar segno a p' ed r' nei risultati del 1° caso (§ II). Si trova che il luogo è la Σ_2.

3°. — $(\pi, -\pi'_1)$. Bisogna cambiar segno a p' nei risultati del 1° caso (§ II). Il luogo è la Σ_3.

4°. — $(\pi, -\pi'_2)$. Bisogna cambiar segno a p' nei risultati del 2° caso. Il luogo è la Σ_4.

5°, 6°, 7°, 8°. — $(-\pi, \pi'_1)$, $(-\pi, \pi'_2)$, $(-\pi, -\pi'_1)$ e $(-\pi, -\pi'_2)$. Bisogna cambiar segno a p rispettivamente nei risultati ottenuti nel 1°, 2°, 3° e 4° caso. I luoghi sono rispettivamente le chiocciole di Pascal Σ'_4, Σ'_3, Σ'_2 e Σ'_1.

IV. — Esaminiamo alcuni casi particolari notevoli.

$r = p'$, $r' = p$. — Σ_4 e Σ'_4 degenerano nel cerchio c''. Gli altri luoghi rimangono sempre conchiglie di Pascal.

$a = 0$. — I cerchi c e c' hanno il centro in O; Σ_i e Σ'_i degenerano nel cerchio di centro O e raggio d_i e nel punto O (doppio).

---

(1) Si considerano solo archi positivi (v. Def. 2ª): inoltre è evidente che queste eguaglianze come anche le altre analoghe che stabiliremo in seguito, forniscono un solo valore per φ_1 (e sarà quello che noi sceglieremo) tale che sia $0° \leq \varphi_1 < 360°$. Il punto O_1 di c'' resta dunque univocamente determinato.

$r = r' = 0$. — I luoghi Σ_1, Σ_4, Σ'_3, Σ'_2 coincidono in un'unica conchiglia di Pascal; quindi coincideranno anche Σ'_1, Σ'_4, Σ_3, Σ_2 in una conchiglia simmetrica della precedente rispetto a $\overline{CC'}$; quando si ha

$$p^2 + p'^2 - 4a^2 = 0$$

le due conchiglie diventano due cardioidi.

$p = p' = 0$. — I luoghi Σ_1, Σ_3, Σ'_4, Σ'_2 e gli altri Σ'_1, Σ'_3, Σ_4, Σ_2 coincidono rispettivamente in due conchiglie uguali e simmetriche rispetto a $\overline{CC'}$. Questo caso è notissimo; esso oltrechè essere una specializzazione del nostro problema lo è anche del seguente

Teorema. — *La curva descritta dal vertice di un angolo costante che si muove con continuità in un piano mantenendo sempre i suoi lati tangenti rispettivamente a due circonferenze date è una* chiocciola di Pascal. [1]

$p = p' = r = 0$. — I luoghi vengono tutti a coincidere con la podaria di c' rispetto al polo C, o altrimenti, con la concoide di c'' rispetto al polo C e al segmento addizionale r'.

$p = p' = r' = 0$. — Caso analogo al precedente.

$p = p' = r = r' = 0$. — I luoghi degenerano tutti nel cerchio c''. Dà questo caso si deduce il noto

Teorema. — *Il luogo dei vertici degli angoli retti i cui lati passano per due punti fissi* C *e* C' *è il circolo di diametro* $\overline{CC'}$.

682. *Calcolare l'integrale*

$$I = \int \sqrt{\sqrt{4x+a} - (2x-a)}\,.\,dx.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini R. U. di Pavia.

Si ha

$$\sqrt{4x+a} - (2x-a) = \tfrac{1}{2}\,[3a + 1 - (\sqrt{4x+a} - 1)^2],$$
$$dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x+a}\,.d\,(\sqrt{4x+a} - 1),$$

e ponendo

$$\sqrt{3a+1} = \alpha, \qquad \sqrt{4x+a} = z + 1,$$

avremo

$$2\sqrt{2}\,I = \int (z+1)\sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz = \int z\sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz + \int \sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz.$$

Si ha

$$\int z\sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{\alpha^2 - z^2}\,d\,(\alpha^2 - z^2) = -\tfrac{1}{3}\,(\alpha^2 - z^2)\sqrt{\alpha^2 - z^2} + c_1,$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z^2}\,dz = \int (zdz)\sqrt{\frac{\alpha^2}{z^2} - 1} = \tfrac{1}{2}\,z^2\sqrt{\frac{\alpha^2}{z^2} - 1} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{\alpha^2 - z^2} + \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{z}{\alpha} + c_2\,;$$

quindi

$$2\sqrt{2}\,I = [\tfrac{1}{2}\,z - \tfrac{1}{3}\,(\alpha^2 - z^2)]\sqrt{\alpha^2 - z^2} + \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{z}{\alpha} + c_3\,,$$

e definitivamente,

$$I = -\tfrac{1}{12}\,[\sqrt{4x+a} - 4\,(2x-a) + 3]\sqrt{\sqrt{4x+a} - (2x-a)} +$$
$$+ \frac{3a+1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{4x+a} - 1}{\sqrt{3a+1}} + c_4\,.$$

---

[1] V. p. es. E. Pascal, *Repertorio*, II, pag. 763.

684. *Il luogo dei centri delle coniche che passano per i fuochi di un'ellisse e sono tangenti ad essa in un punto dato, è un'iperbole.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Lemma. — *Il luogo dei centri delle coniche di un fascio*

$$\varphi + \lambda\psi = 0 \tag{1}$$

è una conica.

Infatti le equazioni

$$\varphi'_x + \lambda\psi'_x = 0 , \qquad \varphi'_y + \lambda\psi'_y = 0$$

rappresentano due diametri della (1); eliminando tra esse il parametro λ si ottiene l'equazione del luogo il quale è la conica

$$\varphi'_x\psi'_y - \psi'_x\varphi'_y = 0 .$$

Con facili considerazioni geometriche si vede che tale conica passa per i punti diagonali e per i punti medi dei lati del quadrangolo base del fascio.

Ora se F, F' sono i fuochi dell'ellisse data e t è la tangente in un suo punto P, tutte le coniche tangenti all'ellisse in P e passanti per F, F' formano evidentemente un fascio; il luogo richiesto è quindi l'iperbole che passa per P, per i punti medi dei lati del triangolo PFF' e per il punto $(t, \overline{\mathrm{FF'}})$.

685. *Si considerino due cerchi fissi* c *e* c' *di centri* O *ed* O', *e un diametro* $\overline{\mathrm{AB}}$ *di* c. *Essendo* P *la proiezione di un punto* M *di* c *sul diametro* $\overline{\mathrm{AB}}$, *si descriva il circolo* γ *che ha per centro* M *e per raggio la media geometrica tra il raggio del circolo* c *e la lunghezza* $\overline{\mathrm{OP}}$ (o $\overline{\mathrm{MP}}$). *Dimostrare che l'asse radicale di* γ *e* c' *inviluppa una conica.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Scegliamo $\overline{\mathrm{OA}}$ per asse delle x e la normale ad $\overline{\mathrm{OA}}$ in O per asse delle y. Sia $\mathrm{M} = (x, y)$; r il raggio di c; $\sqrt{rx}$ quello di γ e

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma = 0$$

l'equazione di c'. Quella di γ sarà

$$(\mathrm{X} - x)^2 + (\mathrm{Y} - y)^2 - rx = 0 .$$

Tenendo conto che

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

l'equazione (in X, Y) dell'asse radicale di γ e c' è

$$(2\,\mathrm{X} + r)\,x + 2\,\mathrm{Y}y + \alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma - r^2 = 0 ,$$

ossia

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0 \tag{2}$$

essendo

$$\mathrm{A} = 2\,\mathrm{X} + r , \qquad \mathrm{B} = 2\,\mathrm{Y} , \qquad \mathrm{C} = \alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma - r^2 .$$

Dalle (1), (2) derivando rispetto ad x e y risulta rispettivamente

$$x\,dx + y\,dy = 0 , \qquad \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy = 0;$$

dalle quali eliminando dx e dy risulta

$$\mathrm{B}x - \mathrm{A}y = 0 . \tag{3}$$

Eliminando x e y tra le (1), (2), (3), si ottiene l'equazione dell'inviluppo della (2), che è la conica

$$\mathrm{C}^2 - r^2\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2) = 0 .$$

Nel caso che il raggio di γ sia $\sqrt{ry}$ la dimostrazione è analoga.

686 *Essendo* O *il vertice,* a *l'asse e* d *l'assintoto di una "versiera di Agnesi" e* T *il punto di contatto di una delle tangenti condotte da* O *alla curva, dimostrare che la parallela ad* a *condotta per* T *divide l'area compresa tra la curva e le rette* a *e* d *in due parti equivalenti. Si cerchi anche di dividere in due parti equivalenti l'area suddetta per mezzo di una retta parallela a* d.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia C il centro ed r il raggio del circolo generatore della versiera; $A \equiv (d, a)$. Sceglieremo rispettivamente la $\overrightarrow{CA}$ per asse delle x e la perpendicolare a $\overline{CA}$ in C per quello delle y. Allora l'equazione della versiera sarà

$$\varphi = y^2 (r - x) - r^2 (r + x) = 0. \tag{1}$$

1.° Calcoliamo l'integrale indefinito $I = \int y dx$. Si ha

$$I = r \int \sqrt{\frac{r+x}{r-x}}\, dx = r \int \frac{x\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \\ + r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = - r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} + C;$$

quindi l'area compresa tra la curva e le rette a e d è data da

$$I_{-r}^{r} = \left[- r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} \right]_{-r}^{r} = \pi r^2.$$

2°. La tangente condotta nel punto generico (x, y) alla (1) ha per equazione

$$(X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

cioè

$$- (y^2 + r^2)(X - x) + 2y(r - x)(Y - y) = 0.$$

Questa retta passa per $O \equiv (-r, 0)$ quando

$$y^2 (3x - r) + r^2 (r + x) = 0. \tag{2}$$

Dalle (1), (2) si ricava $(x_{1,2} = -r,\ y_{1,2} = 0)$, $(x_{3,4} = 0,\ y_{3,4} = \pm r)$; quindi i punti di contatto delle tangenti condotte da O alla curva sono

$$O \equiv (-r, 0); \ T \equiv (0, r); \ T' \equiv (0, -r).$$

Dunque l'area compresa tra la curva, le rette a e d e la parallela per T ad a sarà

$$I_{-r}^{0} + r^2 = \left[- r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} \right]_{-r}^{0} + r^2 = \tfrac{1}{2} \pi r^2 \qquad \text{c. d. d.}$$

3°. Volendo dividere in due parti equivalenti l'area compresa tra la curva e le rette a e d con una retta parallela a d si dovrà determinare una x tale che sia

$$I_{-r}^{x} = \tfrac{1}{2} \pi r^2;$$

vale a dire

$$- r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} = 0,$$

donde

$$\cos \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}.$$

Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$\cos z = z.$$

687. *Dimostrare che la retta avente per equazione*

$$2\lambda(\lambda+\mu)x+(\lambda^2-\mu^2+2\lambda\mu+a^2)y-a(\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu)=0, \qquad (1)$$

essendo i parametri λ *e* μ *legati dalla relazione*

$$\lambda^2+\mu^2=b^2, \qquad (2)$$

inviluppa una conica. Quando a *varia questa conica inviluppa una quartica, e quando* b *varia questa quartica inviluppa tre rette, una delle quali è doppia ed è assintotica alla quartica.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

La (1) la possiamo scrivere così

$$(x+y-a)(\lambda^2-\mu^2)+2(x+y+a)\lambda\mu+(\lambda^2+\mu^2)x+a^2y=0. \qquad (3)$$

La (2) equivale alle seguenti posizioni:

$$\lambda=b\cos\theta, \qquad \mu=b\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

tenendo conto delle quali, la (3) diventa

$$b^2(x+y-a)\cos 2\theta+b^2(x+y+a)\,\mathrm{sen}\,2\theta+b^2x+a^2y=0; \qquad (4)$$

la (4) derivata rispetto a θ diventa

$$(x+y+a)\cos 2\theta-(x+y-a)\,\mathrm{sen}\,2\theta=0. \qquad (5)$$

Eliminando θ tra le (4), (5) si ottiene l'inviluppo della (1). Esso è la conica

$$(b^2x+a^2y)^2-2b^4[(x+y)^2+a^2]=0. \qquad (6)$$

L'inviluppo della (6), quando a varia, è la quartica

$$b^4-2b^2xy+2y^2(x+y)^2=0,$$

la quale, variando b, inviluppa le tre rette (una doppia)

$$y^2=0, \qquad \sqrt{2}(x+y)\pm x=0.$$

QUISTIONI PROPOSTE

695. Determinare il luogo geometrico dei punti del piano di un triangolo tali che le rette che congiungono le loro proiezioni sui lati con i vertici opposti siano concorrenti, e determinare anche il luogo dei punti d'incontro di quest'ultime.

696. Trovare la condizione necessaria e sufficiente perchè le congiungenti i vertici d'un tetraedro con i punti di contatto delle facce opposte colle rispettive sfere ex-inscritte passino per un medesimo punto.

E. Piccioli.

697. Trovare una curva piana tale che il circolo circoscritto al triangolo formato da una retta data, dalla tangente e dalla normale in un punto variabile della curva, sia tangente alla retta che unisce questo punto con un punto fisso della retta data.

698. Trovare una curva piana tale che due rette fisse del piano tra loro perpendicolari stacchino rispettivamente sulla normale e sulla tangente in un suo punto variabile due segmenti che stiano tra loro in un rapporto costante K.

A. Gandini.

BIBLIOGRAFIA

M. D'Ocagne. — *Le Calcul simplifié;* 1905, pag. VI-228. — Gauthier-Villars, Ed.

I numeri governano il mondo, disse Platone, *ma senza divertirlo,* ha aggiunto qualcuno; e siccome la sentenza del grande allievo di Socrate si avvera sempre più col crescere della civiltà e la necessità dei calcoli non si presenta più ai cultori delle scienze esatte soltanto, ma anche, e più largamente, ai naviganti, agli artiglieri, agli elettricisti, agli ingegneri, agli strateghi,... è naturale che cresca sempre più il desiderio, anzi il bisogno, di semplificare, di abbreviare o, magari, di sopprimere addirittura ogni specie di calcolo grafico o numerico. (1)

Nè si deve pensare che questo bisogno sia meno sentito da chi abbia una estesa cultura matematica, perchè è una vera eresia il credere che la disposizione alle matematiche sia accompagnata da una notevole abilità al calcolo numerico. Nella storia dei matematici illustri due soli, che io sappia, ebbero veramente questa abilità: Eulero e Wallis, quest'ultimo specialmente che giunse a calcolare *a mente* la radice quadrata di un numero qualunque di cinquanta cifre. Come eresia, senza dubbio maggiore, è quella di credere che una grande abilità al calcolo numerico sia indizio di disposizione alle matematiche; e ben se ne accorsero quelli che tentarono di educare i Mondeux, i Mangiamelli, gli Inaudi... tutti sterili prodigi, che il Lucas, a ragione, chiama " machines aritmétiques a grosse tête ". (2)

Per raggiungere lo scopo accennato, fin dalla più remota antichità si cominciò ad immaginare dei mezzi più o meno adatti; nessuno però, fino a pochi anni fa, aveva pensato a raccogliere e a classificare tutti questi vari, numerosissimi, modi di semplificazione. Fu solo nel 1894 che il prof. d'Ocagne, nome già noto ai cultori delle Matematiche Pure, pubblicò in un fascicolo di un centinaio di pagine (3)

(1) L'illustre generale Menabrea, che fu anche un fine uomo di stato e un matematico egregio, aggiungeva: " Quante osservazioni rimangono inutili al progresso delle scienze solo perchè non si è avuta la forza sufficiente per calcolarne i risultati! Davanti a un lungo e arido calcolo, da quanto scoraggiamento si sente preso l'uomo di genio, il quale non domanda che del tempo per meditare e se lo vede rubato dalla materialità delle operazioni. Ma è solo per la laboriosa via dell'analisi che egli deve arrivare alla verità, ed ei non la può seguire senza essere guidato dai numeri, perchè senza i numeri non è possibile sollevare, neppure in parte, il velo che nasconde i misteri della natura ".

(2) Anche a me capitò, qualche anno fa, di assistere agli esperimenti di uno di questi prodigi. Era un certo Pierini di Pomarancia (del quale ho perduto ogni traccia), anch'esso guardiano di pecore come i tre citati. Ebbene, in una *intervista* che ebbi con lui, dopo i suoi esperimenti, non mi fu possibile fargli capire che, invece di moltiplicare per 25, per 125 . . . , conveniva meglio dividere per 4, per 8 . . . , e moltiplicare poi il quoziente per 100, per 1000 . . . , o, meglio ancora, moltiplicare per 5, due, tre . . . , volte di seguito.

(3) *Le Calcul Simplifié.* — Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1904.

tre sue dottissime conferenze (tenute in forma elementare, al Conservatorio Nazionale d'Arti e Mestieri), nelle quali a grandi linee è tracciato tutto quanto di notevole si è fatto in proposito. Quel fascicolo, com' era da aspettarsi, ebbe fortuna e l'A. ha dovuto ora pubblicarne una seconda edizione; però le aggiunte e le maggiori spiegazioni son tante che il fascicolo si è trasformato in un volume di più di duecento pagine, e lo ha pubblicato la Ditta Gauthier-Villars, nella sua splendida *Bibliothèque général des Sciences.*

E noi crediamo far cosa utile accennando brevemente al contenuto di questo pregevolissimo volume, perchè speriamo che così nascerà in molti il desiderio di conoscerlo; e ci auguriamo che anche in Italia sorga qualche forte cultore di questo importante ramo delle Matematiche Applicate, al quale l'illustre fondatore della *Nomografia* ha dedicata, da tanti anni, la sua feconda operosità.

L'A. comincia col classificare nei seguenti sei gruppi i mezzi in discorso:

1°. *Gli istrumenti aritmetici;*

2°. *Le macchine aritmetiche;*

3°. *Gli istrumenti e le macchine logaritmiche;*

4°. *Le tavole numeriche;*

5°. *Il calcolo grafico;*

6°. *Le tavole grafiche;*

Degli *istrumenti aritmetici* ben poco c' è da dire; l'unico notevole, dopo i famosi *bastoni* di Nepero, è quello, recentissimo, costituito dalle *réglettes* dell'ingegnere Genaille, che permette di semplificare molto sensibilmente le ordinarie moltiplicazioni.

Delle *macchine aritmetiche* invece c' è da dire moltissimo e l'A. ne fa uno studio assai esteso e, crediamo, quasi completo. Comincia colle macchine per addizionare, da quella di Pascal (primo esempio che si possa citare di una macchina da calcolare) fino alle macchine a tasti americane, e, principalmente, a quelle ingegnose casse registratrici, proprie ad assicurare meccanicamente il funzionamento di una azienda commerciale.

Il capitolo delle macchine per moltiplicare è senza dubbio, uno dei più interessanti del libro. Comincia con qualche indicazione sulla macchina di Leibniz, (1) molto notevole dal punto di vista teorico, ma che è rimasta allo stato di curiosità scientifica. Poi, dopo avere passato in rivista i tentativi fatti sulla stessa via da Hahn, da Müller, da Mahon e da Stern, arriva all'*aritmometro* di Thomas, il quale ha costituita la prima soluzione, pienamente soddisfacente, del problema della moltiplicazione e di cui l'A. dà una descrizione molto dettagliata e interessantissima. L'organo essenziale di questa macchina, comune con quella di Leibniz, è il tamburo a nove denti di ineguale lunghezza, che si trova anche nelle macchine di Maurel, di Edmondson e di Tchebichef. Anche di quest'ultima, che offre la particolarità di essere a movimento continuo, l'A. dà una descrizione completa e dettagliata, deducendola da notizie attinte dalla bocca stessa di Tchebichef. Passa in seguito alle macchine, il cui organo essenziale non è più il tamburo a denti di varia grandezza, ma una ruota con un numero di denti variabile. Una ruota di questo genere si trova per la prima volta nella macchina per addizionare di Poleni; (2) si ritrova poi nella macchina circolare di Roth, ma essa non ha presa una forma veramente soddisfacente che nella macchina di Odhner, quella che è chiamata la *Brunswiga* in Germania e la *Rapide* in Francia, e che, molto perfezionata dal punto di vista meccanico, (3) si costruisce dai fratelli Cha-

(1) Leibniz, per costruire la sua macchina, spese cento mila lire; e questo nell'anno 1673.

(2) Il nome di questo nobile veneziano, che visse due secoli fa, è il solo nome italiano che figuri nella storia delle macchine aritmetiche e logaritmiche. Potrebbero però in quest' ultima, figurare anche quello del Castigliano, e specialmente del Porro, inventori di due notevoli aritmografi.

(3) Dello stesso tipo ci sembrano le recentissime *Monopol;* esse, fra altri vantaggi, presentano anche quello di essere messe in movimento dalla mano sinistra del calcolatore, il quale ha così la destra libera per trascrivere di mano in mano i risultati.

teau sotto il nome di *Dactyle.* [1] Infine, fra questo gruppo di macchine per moltiplicare con ripetute addizioni, l'A. mette anche quelle a contatto intermittente, i tipi principali delle quali si hanno nelle macchine di Dietzschold, di Grant, e di Selling. Ma la prima macchina per moltiplicare direttamente fu esposta solo nel 1889 da un giovane di 18 anni, Leone Bollèe; [2] essa è un capolavoro di meccanica. Il principio sul quale è basata è poi stato applicato, sotto una forma differente, anche da Steiger.

Per la costruzione delle tavole numeriche, l'A. accenna alle macchine a differenze, che furono ideate per la prima volta dal Müller, e che furono poi realizzate, per le differenze seconde, da Babbage e, per le differenze quarte, da Scheutz e da Wiberg. Queste ultime servono, oltre che a calcolare, anche a stampare, e con esse si sono già stampate delle tavole logaritmiche.

L'A. termina il suo importantissimo studio accennando al grande progetto, disgraziatamente non realizzato, della macchina analitica di Babbage, colla quale si sarebbe potuta effettuare qualunque serie di operazioni su numeri qualunque.

Nel capitolo seguente *(gli istrumenti e le macchine logaritmiche),* dopo una digressione molto semplice, ma molto interessante, sulla storia e sulla teoria dei logaritmi, l'A. enumera e descrive tutti gli istrumenti (regoli, circoli, eliche ...,) fondati sul loro uso, per terminare colla notevolissima macchina di Torres, per risolvere le equazioni.

Gli altri due capitoli, sulle *tavole numeriche* e sui *calcoli grafici,* non contengono che rapide, ma interessanti, indicazioni.

Nell'ultimo capitolo finalmente, sulle *tavole grafiche,* l'A. comincia collo stabilire la perfetta autonomia del *calcolo nomografico;* poscia con rapidi e magistrali cenni, dà una esatta idea della genesi della Nomografia. Passa quindi ad esporre, sempre in forma semplicissima e servendosi del linguaggio ordinario, i principî più usuali di questa dottrina: metodo cartesiano di Pouchet; anamorfismo semplice di Lalanne; anamorfismo generale di Massau; abbachi esagonali di Lallemand; e, finalmente, punti allineati a una e a due quote, la cui geniale idea fu forse quella che spinse l'A. a fondare la Nomografia.

Giunto però alla fine del suo lavoro (pieno anche di preziose citazioni bibliografiche), l'A. si chiede se tanta ricchezza di procedimenti per evitare i calcoli numerici corrisponda realmente a una necessità pratica e se era necessario moltiplicare così le soluzioni di un problema, in apparenza sempre lo stesso. E la breve risposta che Egli si dà, dimostra appunto che questa ricchezza corrisponde alla diversa specie di calcoli che si presentano nelle diverse applicazioni, e, aggiungiamo noi, anche alle diverse condizioni materiali in cui si possono trovare i diversi calcolatori.

E concluderemo dicendo che solo chi non si è mai trovato nella necessità di dover fare lunghi calcoli numerici di uno stesso tipo o di dover frequentemente servirsi di una stessa formula, variandone i dati, può non apprezzare l'utilità delle macchine da calcolare e degli abbachi; e può trovar giusto quanto asseriva un nostro illustre professore, il quale, reduce da una delle prime esposizioni di Parigi, parlandoci delle macchine aritmetiche che egli vi aveva viste, argutamente concludeva: "però la miglior macchina per calcolare è sempre quella costituita da un pezzo di carta e da un lapis".

G. Pesci.

---

(1) Per nostra esperienza personale possiamo asserire che la macchina *Thomas* ci pare preferibile alla *Dactyle,* perchè affatica molto meno il braccio e perchè il suo prezzo è sensibilmente minore.

(2) Questo nome è poi diventato celebre, non però come quello di un meraviglioso e precoce inventore, sibbene come quello di un fortunato e ardito automobilista.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 5 aprile 1905

LE DEFINIZIONI GENERALI IN MATEMATICA

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

Aritmetica.

12. Non si deve definire il numero intero; invece si definiscono generalmente le operazioni sui numeri interi; credo che gli allievi imparino queste definizioni a mente e non vi annettano senso alcuno. Ciò dipende da due ragioni: prima di tutto vengono insegnate loro troppo presto, mentre l'intelletto loro non ne prova ancora bisogno alcuno; in secondo luogo tali definizioni non sono soddisfacenti dal punto di vista logico. Quanto all'addizione non se ne potrebbe trovare una buona, semplicissimamente perchè occorre fermarsi ed è impossibile definir tutto. Non è definir l'addizione dire che consiste in aggiungere. L'unica cosa fattibile consiste nel partire da un certo numero d'esempî concreti e dire: l'operazione che abbiamo fatta si chiama addizione.

Quanto alla sottrazione è un'altra cosa; si può definirla logicamente come l'operazione inversa dell'addizione; ma occorre cominciare di là? Anche lì bisogna principiare con esempî, mostrare sopra esempî la reciprocità delle due operazioni; la definizione sarà così preparata e giustificata.

È lo stesso anche per la moltiplicazione; si prenderà un problema speciale; si mostrerà che si può risolverlo addizionando fra loro molti numeri eguali; si dimostrerà poi che si arriva più facilmente al risultato con una moltiplicazione, operazione che gli allievi sanno già fare per pratica, e la definizione logica ne conseguirà naturalmente.

Si definirà la divisione come operazione inversa della moltiplicazione; ma si principierà con un esempio tolto dalla nozione familiare dello spartire, e si dimostrerà con quest'esempio che la moltiplicazione riproduce il dividendo.

13. Ho già parlato delle frazioni; ho detto che si comincia colla torta, e si fa bene; è proprio di lì che si deve principiare. Poco dopo si spingerà l'astrazione più oltre, e si introdurrà la grandezza continua che ha per prototipo la lunghezza; occorre mostrare (dico mostrare, mostrare agli occhi e, beninteso, non dimostrare) che è divisibile all'infinito, ed il resto andrà da sè. Quanto alle definizioni più sottili, a quelle puramente aritmetiche, bisogna abbandonarle all'insegnamento superiore, se si vuole occuparsene.

Rimangono le operazioni sulle frazioni. Non vi è difficoltà che per la moltiplicazione. È meglio esporre prima la teoria delle proporzioni; è solo da essa che potrà nascere una definizione logica; ma per fare accettare le definizioni che si incontrano al principio di questa teoria, bisogna prepararle con frequenti esempî, tolti ai problemi classici della regola del tre, in cui si avrà cura d'introdurre alcuni dati frazionarî. Non si temerà neppure di familiarizzare gli studenti colla nozione delle proporzioni mediante le immagini geometriche, sia rivolgendosi alle loro rimembranze, se hanno già fatto studî geometrici, sia ricorrendo all'intuizione diretta, se non ne hanno fatti, cosa d'altronde che ve li preparerà. Aggiungerò, finalmente, che dopo definita la moltiplicazione delle frazioni, bisogna giustificare tale definizione dimostrando com'essa sia commutativa, associativa e distributiva, e facendo bene osservare all'uditorio che si fa questa constatazione per giustificare la definizione.

14. Per definire il numero incommensurabile, bisogna nuovamente prender le mosse dalla nozione di grandezza continua, e, tra queste grandezze, scegliere un esempio, che può essere solo la lunghezza. Proveremo che certe lunghezze possono esprimersi mediante numeri commensurabili; che altre nol possono, ma sono legate alle prime da relazioni d'inegnaglianza. Sapete come tali ineguaglianze permettono di definire i rapporti incommensurabili di modo che si sarà con tutta naturalezza condotti alla definizione del numero incommensurabile. Sarà bene scegliere un esempio, in cui l'impossibilità di scegliere una comune misura possa dimostrarsi facilmente, tale l'esempio classico di $\sqrt{2}$.

Per le operazioni sui numeri incommensurabili bisogna giustificarne in due modi le definizioni; prima dal punto di vista logico, dimostrando che soddisfanno le stesse regole di quelle de' numeri interi; eppoi con imagini concrete, che si potranno prendere dalla geometria. Non sono difficili a trovarsi. Nel libro di Hilbert si trova un intero capitolo che è una vera aritmetica illustrata. Ho fatto dianzi le mie riserve su detto libro, ma vi è da prendervi molto. Del resto, poichè il numero incommensurabile non dev'esser definito che a studenti già progrediti negli studi, essi comprenderanno subito queste imagini.

15. Passiamo ai numeri negativi; occorrono qui maggiori precauzioni. Si moltiplicheranno prima gli esempî di grandezze suscettibili di cambiamenti di segno, come i segmenti, gli angoli, il tempo, la temperatura, e si faranno su tali esempî gli esercizî di addizione e sottrazione. Il termometro è a 4 gradi sotto zero, aumenta o cala di 6 gradi, che diviene la temperatura? ecc. Così preparata, la definizione dei numeri negativi, quella della loro addizione e sottrazione sarà facilmente accettata. Quella della moltiplicazione si riduce in ultima analisi alla regola dei segni; tale regola sarà compresa, se la giustificate in due modi: 1° logicamente, dimostrando che soddisfa alla legge commutativa e distributiva; 2° con esempî concreti; e di simili esempî ne vorrei due specie: prima esempî geometrici presi nella teoria delle proporzioni e della similitudine, e che saranno il seguito di quelli già visti a proposito degli incommensurabili; eppoi esempî tolti ai movimenti uniformi: sono i più atti a dare una ragione concreta della regola dei segni.

Si vede quale parte fanno in tutto questo le imagini geometriche; e questa parte è giustificata dalla filosofia e dalla storia della scienza. Se l'aritmetica fosse rimasta pura da ogni mescolanza colla geometria, non avrebbe conosciuto che il numero intero; è stato per adattarsi ai bisogni della geometria che ha inventato altre cose.

Geometria.

16. In geometria si incontra prima di tutto la nozione di linea retta. È possibile definire la linea retta? La definizione conosciuta, il cammino più corto da un punto all'altro non mi soddisfa affatto. Partirei puramente dalla *riga*, e mostrerei prima all'allievo come si possa verificare una riga col rovesciamento; questa verificazione è la vera definizione della linea retta; la linea retta è un asse di rotazione. Gli si insegnerebbe poi a verificare la riga con uno scorrimento, e si otterrebbe una delle più importanti proprietà della linea retta. Quanto a quell'altra proprietà d'essere il cammino più corto da un punto all'altro, è un teorema che può venir dimostrato apodditicamente, ma la dimostrazione è troppo delicata per poter trovare posto nell'insegnamento secondario. È meglio insegnare che una riga precedentemente verificata si applica sopra un filo teso. Non occorre temere, in presenza di analoghe difficoltà, di moltiplicare gli assiomi, giustificandoli con esperienze grossolane.

Di questi assiomi, bisogna pure ammetterne, e se ne ammettiamo un po' più di quanto sia strettamente necessario, il male non è troppo grande; l'essenziale è di imparare a ragionare giustamente sugli assiomi una volta ammessi. Lo zio Sarcey, cui piaceva ripetersi, diceva spesso che al teatro lo spettatore accetta volentieri tutti i postulati che gli vengono imposti sul principio, ma che una volta alzato il sipario, diviene intransigente quanto alla logica. Ebbene, è lo stesso per le matematiche.

Per il circolo, si può partir dal compasso; gli allievi riconosceranno immediatamente la curva tracciata; si farà poi osservar loro che la distanza tra i due punti dello strumento rimane costante, che una di queste punte è fissa e l'altra mobile, e si sarà così naturalmente condotti alla definizione logica.

La definizione del piano implica un assioma, e non bisogna dissimularlo. Si prenda una tavola da disegno e si faccia osservare che una riga mobile si applica costantemente su detta tavola, e ciò conservando due gradi di libertà. Si potrebbe comparare col cilindro e il cono, superficie sulle quali non si potrebbe applicare una retta altro che lasciandole un solo grado di libertà; poi si prenderebbero tre tavole da disegno; si mostrerebbe prima che possono scorrere rimanendo applicate l'una sull'altra, e ciò con tre gradi di libertà; e finalmente per distinguere il piano dalla sfera, che due di queste tavole, applicabili sopra una terza, sono applicabili l'una sull'altra.

Vi meraviglierete forse di questo continuo uso di strumenti mobili; non è questo un volgare artificio, ed è molto più filosofico di quanto sulle prime si crederebbe. Cos'è la geometria pel filosofo? È lo studio di un gruppo, e di qual gruppo? di quello de' movimenti dei corpi solidi. Come allora definire questo gruppo senza far muovere alcuni corpi solidi?

17. Dobbiamo conservare la definizione classica delle parallele e dire che si chiamano così due rette che, poste sul medesimo piano, non si incontrano per quanto si prolunghino? No, perchè tale definizione è negativa, perchè non può esser verificata coll'esperienza e non potrebbe quindi venir considerata come un dato immediato dell'intuizione. No, specialmente perchè è totalmente estranea alla nozione di gruppo, alla considerazione del movimento de' corpi solidi, che è, come ho detto, la vera fonte della geometria. Non sarebbe meglio definir prima la traslazione rettilinea di una figura invariabile, come un movimento in cui tutti i punti di quella figura hanno traiettorie rettilinee; mostrare che una traslazione simile è possibile, facendo scorrere una squadra sopra una riga? Da tal constatazione sperimentale, elevata ad assioma, sarebbe facile fare uscire la nozione di parallele e lo stesso postulato d'Euclide.

Quanto al libro terzo, non esiterei nel dare all'ometetia la precedenza sulla similitudine, e nel considerare quasi sul principio la trasformazione omotetica in tutta la sua generalità. Nell'esposizione delle teorie geometriche, bisogna evitare che i teoremi sembrino come isolati gli uni dagli altri e mostrar bene il filo che li unisce. Ora, ogni libro della geometria è lo studio di un gruppo di trasformazioni; i teoremi non si succedono a caso; si susseguono in ordine sempre eguale; se mi permettete di usare un linguaggio ben differente da quel che occorrerebbe nell' insegnamento, bisogna sempre determinare la struttura del gruppo ed i suoi invarianti. È quindi questo gruppo il legame apparente o nascosto di tutti i teoremi di un medesimo libro; senza pronunziare la grande parola gruppo, è facile lasciarla intravedere. Nei libri precedenti, considerammo solo il gruppo degli spostamenti di un corpo solido. Nel terzo si considera il gruppo delle omotetie e quello delle similitudini; è meglio principiar dal primo che è il più semplice. L'uso del pantografo darà un esempio concreto di trasformazione omotetica, che penetrerà facilmente nello spirito dei giovani e vi resterà.

Ho detto che la massima parte delle definizioni matematiche sono vere costruzioni. Quindi non è meglio far prima la costruzione, eseguirla davanti agli allievi, o meglio ancora farla loro costruire in modo da preparare la definizione?

18. Si deve ora parlare dei volumi e delle superfici? È troppo presto, poichè per comprendere la definizione logica, bisogna sapere il calcolo integrale; non è però troppo presto poichè giungiamo al quarto libro.

Che fare allora? bisogna fare come abbiamo sempre fatto fin qui; bisogna astenersi da ogni definizione del volume e della superficie; i ragazzi credono sapere cos'è, e non chiedono nulla. Ci si contenterà d'ennunciare sotto forma d'assiomi queste due proposizioni che sono in realtà una vera definizione: che due aree, composte di parti uguali ciascuna a ciascuna, hanno ugual superficie; che la superficie di una parte di un'area è più piccola della superficie dell'area totale. E lo stesso è dei volumi.

Calcolo differenziale.

19. Vi sono due modi di iniziare lo studio del calcolo differenziale, quello di Lagrange, che è in fondo quello di Newton, e quello di Leibniz. Occorre, beninteso, conoscer l'uno e l'altro, ma da quale bisogna principiare, e quando convien parlare per la prima volta dell'uno o dell'altro? Su questo punto si è molto variato; ai miei tempi l'insegnamento secondario conosceva solo le derivate, e non si parlava di differenziali che alla Scuola Politecnica. Dopo, seguendo le fluttuazioni dei programmi della Scuola Politecnica, la notazione differenziale ha invaso le classi speciali; ne è stata poi bandita, e finalmente ne ha, or non è molto, ripreso possesso. Bisogna senza dubbio aspettarsi nuovi flussi e riflussi. Ma quali che siano queste variazioni, vi sono alcuni principî ai quali dobbiamo serbarci fedeli.

Si è spesso sedotti dall'alto senso filosofico della notazione differenziale, che ricorda continuamente la definizione, il significato profondo dei simboli che si devono adoperare. Ahimè! li ricorda troppo, e meglio sarebbe ricordarli meno che rammentarli imperfettamente, ed esporci quindi all'errore. Tali errori non si eviteranno che cercando di dimenticare il primitivo significato dei simboli. Così quando ho una funzione z di x e di y, x ed y essendo esse stesse funzioni di u e di v, scrivo:

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = \frac{dz}{du}\,du + \frac{dz}{dv}\,dv$$

e, in questa formula, ha cinque volte il simbolo dz ed ogni volta con un significato diverso. So bene che si possono adoperare ∂ rotondi, ma che palliativo insufficiente! non occorrerebbero due forme di d; ce ne vorrebbero cinque, ce ne vorrebbero dieci.

E sarebbe ben peggio facendo intervenire i differenziali e le derivate d'ordine superiore.

Sì, certamente, ci si abitua a tali agguati e si giunge ad evitarli, ma perchè? A condizione di dimenticare l'origine di questa notazione, di non più ricordarsi che $\frac{d^2z}{dx^2}$ è il quoziente di un certo d^2z per un certo dx^2; ma di considerare questa frazione come un *blocco*, come la seconda derivata di z rapporto ad x, alla condizione insomma di *pensare in derivate*.

Chi pensa in derivate può adoperare la notazione di Leibniz senza pericolo; se trova in due termini di una medesima formula lo stesso simbolo d^2z con due significati differenti, ciò non ha maggiori inconvenienti che il trovare una medesima lettera a in due parole della stessa frase senza rapporto alcuno tra loro, poichè d^2z non è per lui un individuo, ma una porzione d'individuo.

Bisogna certo conoscere la notazione differenziale; bisogna sapere adoperare quel linguaggio ch'è di tutti, così come si deve sapere il tedesco, sebbene questa lingua abbia regole di costruzione ridicole ed un alfabeto senza senso comune, perchè è parlata da 60,000,000 di uomini tra' quali molti dotti.

Ma questa scienza è pericolosa e non bisogna adoperarla, finchè non si è imparato a pensare in derivate; senza di ciò non si saprebbe mai fare senza errori il più semplice cambiamento di variabili.

Per abituarvi gli allievi bisogna sul principio adoperare esclusivamente la notazione di Lagrange e non parlar loro di differenziali, finchè non faranno imperturbabilmente i cambiamenti di variabili. Si definirà quindi prima di tutto la derivata; vorrei che questa definizione fosse preparata da esempi concreti. Ve ne sono due, quello delle tangenti e quello della velocità; e non sono da disdegnarsi, poichè il primo è stato il punto di partenza di Fermat e di Roberval ed il secondo quello di Newton.

Si ricondurranno questi due esempi l'uno all'altro tracciando la curva degli spazi in funzione del tempo. Credo che la definizione classica sembrerà più chiara, se arriva solo dopo questi esempi.

Vi è però un caso in cui la notazione differenziale riprende tutti i suoi vantaggi, in cui i suoi inconvenienti scompaiono e non si può negarle un alto valore filosofico ed educativo. È quello in cui non si considerano che differenziali di prim' ordine, a patto di non farne che uso giudizioso. Si imparerà così a ragionare correttamente sugl'infinitamente piccoli, ci si famigliarizzerà colla teoria dei piccoli errori, tanto importanti in fisica, intenderemo come piccole variazioni di dati possano influire sul risultato; e di questo anche i fisici non si lagneranno.

Avendo così apprese le derivate, partendo dall'esempio concreto della velocità, sapendole già calcolare ed adoperare, l'allievo inizierà lo studio dei differenziali del prim'ordine ed imparerà a servirsene, ma ad un'espressa condizione.

Il professore non scriverà mai:

$$df = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy,$$

ma sempre

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy.$$

Ci si asterrà sempre dal parlare dei differenziali secondi nei licei. Ho detto assolutamente; ahimè, se sono nei programmi, bisognerà rassegnarcisi, ma si relegheranno alla fine del corso, allorquando la formazione dello studente sarà compiuta, e d'altronde si definiranno servendoci unicamente dello sviluppo di Taylor.

Calcolo integrale.

20. Dopo quanto precede, è quasi superfluo dire come va definito l'integrale; è ben evidente che va definito come superficie.

I nostri padri inscrivevano in un'area piana una serie di rettangoli ed ottenevano come limite della somma di questi rettangoli un integrale rappresentante quest'area piana. Infatti, dicevano, la differenza tra la superficie cercata e la somma tende verso zero: poichè si può renderla più piccola di ogni quantità data. Facevano questo ragionamento senza scrupolo, perchè credevano sapere cosa fosse una superficie. Noi, invece, non restiamo più soddisfatti da questo ragionamento, perchè sappiamo che simili cose non si sanno nascendo, che non si può sapere cosa sia una superficie altro che conoscendo il calcolo integrale.

Ed allora per definire un integrale, prendiamo ogni precauzione; distinguiamo le funzioni continue e discontinue, quelle che hanno derivate, e quelle che non ne hanno. Tutto questo è a posto nell'insegnamento delle Facoltà; tutto questo sarebbe detestabile nei licei. L'allievo, qualsiasi definizione gli diate, non saprà mai cosa sia un integrale, se non gli è stato precedentemente insegnato. Tutte le sottigliezze lo lasceranno indifferente. Crede sapere che cosa sia una superficie e non comprenderà d'ignorarlo che quando avrà bene appreso il calcolo integrale; non è quindi interessante dirglielo nel momento in cui comincia lo studio di questo calcolo.

È allora semplicissimo ciò che rimane a fare; definire l'integrale come area compresa fra l'asse delle x, due ordinate e la curva, mostrare che quando una delle ordinate si sposta, la derivata di quest'area è precisamente l'ordinata stessa. È il ragionamento di Newton, così è nato il calcolo integrale, e, volenti o nolenti, bisogna ripassare per dove sono passati i padri nostri.

Si daranno alcuni esempi, scegliendo le aree che la geometria elementare permette di calcolare. Quanto ai volumi, i centri di gravità, le superficie curve, sarà facile ed utile mostrare come il calcolo dei medesimi si colleghi ad alcuni integrali, e costruire la curva la cui area varia come il volume o la superficie curva data.

Fatto questo, sarà stato fatto tutto quanto è utile nell'insegnamento secondario.

Meccanica.

21. Non ho bisogno di tornare sulla definizione del moto, o dell'accelerazione, o delle altre nozioni cinematiche; si riattaccheranno utilmente a quella delle derivate.

Insisterò invece sulle funzioni dinamiche di forza e di massa.

Una cosa mi colpisce: cioè quanto i giovani che hanno ricevuto l'insegnamento secondario siano lontani dall'applicare al mondo reale le leggi meccaniche state loro insegnate. Non solo ne sono incapaci; ma non vi pensano neppure. Per essi il mondo scientifico e quello reale sono separati da una paratia stagna. Non di rado si vede un signore ben messo, probabilmente baccelliere, seduto in una carrozza, imaginandosi di aiutarla a procedere spingendo sul davanti a dispetto del principio di azione e reazione.

Se cercassimo di analizzare lo stato d'animo dei nostri scolari, ciò ci stupirebbe meno; qual'è per essi la vera definizione della forza? Non quella che recitano, ma quella, che appiattata in un cantuccio del loro cervello, lo dirige tutto quanto di lì. Ecco questa definizione: le forze sono freccie colle quali si formano parallelogrammi. Tali freccie sono esseri immaginarî che non hanno rapporto alcuno con quanto esiste in natura. Ciò non accadrebbe, se si fossero mostrate loro forze reali prima di rappresentarle con freccie.

Come definire la forza? Buone definizioni logiche, non ne esistono; credo averlo sufficientemente dimostrato altrove. Vi è la definizione antropomorfica, la sensazione dell'effetto muscolare; quella è veramente troppo grossolana e non se ne può ricavare niente d'utile.

Ecco la via da seguirsi: occorre prima di tutto per far conoscere il genere forza, mostrare una dopo l'altra tutte le specie di tal genere; sono ben numerose e varie; vi è la pressione dei fluidi sulle pareti dei vasi che li racchiudono; la tensione dei fili, l'elasticità di una molla; il peso che influisce su tutte le molecole d'un corpo; l'attrito la respettiva reazione normale di due solidi a contatto.

Questa non è che definizione qualitativa; occorre imparare a misurare la forza. Perciò mostreremo prima che è possibile rimpiazzare una forza con un'altra senza turbare l'equilibrio; troveremo il primo esempio di questa sostituzione nella bilancia e nella doppia pesata di Borda. Mostreremo poi che un peso può venir rimpiazzato, non solo da un altro peso, ma da forze di nature differenti; il freno di Prony per esempio ci permette di rimpiazzare un peso con un attrito.

Da tutto questo si ricava la nozione dell'equivalenza di due forze.

Occorre definire la direzione d'una forza. Se una forza F è equivalente ad un'altra forza F', applicata al corpo considerato per mezzo di un filo teso, in modo che F possa venir rimpiazzata da F' senza turbare l'equilibrio, allora il punto di attacco del filo sarà per definizione il punto d'applicazione della forza F', e quello della equivalente forza F; la direzione del filo sarà la direzione della forza F' e quella della forza equivalente F.

Da ciò, passeremo al confronto della grandezza delle forze. Se una forza può rimpiazzarne altre due di ugual direzione, ciò dipende dall'essere uguale alla loro somma; dimostreremo per esempio che un peso di 20 grammi può rimpiazzarne due di 10 grammi.

Basta? Non ancora. Sappiamo ora comparare l'intensità di due forze, che hanno ugual direzione e punto d'applicazione; bisogna imparare a farlo quando le direzioni sono diverse. A tal uopo, immaginiamo un filo tenuto teso da un peso e passante sopra una puleggia; diremo che la tensione de' due pezzi di filo è la stessa e uguale al peso tensore.

Ecco la nostra definizione; essa ci permette di comparare due forze qualsiansi aventi la direzione stessa di questi due fili. Bisogna giustificarlo dimostrando come la tensione dell'ultimo tratto rimanga la stessa per un medesimo peso tensore, quali che siano il numero e la disposizione delle puleggie di rinvio. Bisogna poi completarla mostrando che ciò è vero soltanto se le puleggie non hanno attrito.

Quando ci si è resi padroni di tali definizioni, occorre far vedere come il punto d'applicazione, la direzione e l'intensità bastino a determinare una forza; come due forze, per le quali questi tre elementi sono gli stessi, siano *sempre* equivalenti e possano *sempre* venir rimpiazzate l'una dall'altra, sia nell'equilibrio, sia nel movimento, e ciò qualunque siano le altre forze messe in uso.

Bisogna far vedere che due forze concorrenti possono esser sempre rimpiazzate da una risultante unica; e che *tale risultante rimane la stessa*, sia il corpo in riposo o in movimento e quali che siano le altre forze che le vengono applicate.

Bisogna finalmente far vedere che le forze definite nel modo suddetto soddisfano il principio dell'uguaglianza dell'azione e della reazione.

L'esperienza, la sola esperienza, può insegnare tutto questo.

Basterà citare alcune volgari esperienze, che gli allievi fanno ogni giorno senz'accorgersene, ed eseguire dinanzi a loro una piccola quantità d'esperienze semplici e bene scelte.

Quando avremo percorse tutte queste diverse vie, potremo rappresentar le forze con freccie, e vorrei ancora che, nello sviluppo dei ragionamenti, si tornasse quando a quando dal simbolo alla realtà. Non sarebbe per esempio difficile illustrare il parallelogramma delle forze mediante un apparecchio formato di tre fili, passanti su puleggie, tenuti tesi da pesi e rimanenti in equilibrio, essendo riuniti in un medesimo punto.

Conoscendo la forza è facile definire la massa; questa volta occorre prendere la definizione in prestito alla dinamica; non vi è modo di fare altrimenti, poichè lo scopo da raggiungere, è di far conoscere la differenza tra la massa ed il peso. Qui pure la definizione dev'essere preparata da esperienze; esiste infatti una macchina che sembra fatta proprio apposta per dimostrare che cosa sia la massa, la macchina di Atwood; si rammenterà del resto la legge della caduta de' corpi, si rammenterà che l'accelerazione del peso è la stessa pe' corpi pesanti e per quelli leggieri, e che varia colla latitudine, ecc.

22. Ora se mi dite che tutti i metodi che preconizzo sono da molto tempo applicati nei licei, me ne rallegrerò più che meravigliarmene; so che nell'insieme il nostro insegnamento matematico è buono; non desidero che sia buttato all'aria, anzi ne sarei desolato; desidero solo miglioramenti lentamente progressivi. Non bisogna che quest'insegnamento subisca brusche oscillazioni al soffio capriccioso di mode effimere. In simili tempeste soccomberebbe presto il suo alto valore educativo. Una buona e solida logica deve continuare a formarne la base. La definizione mediante l'esempio è sempre necessaria, ma deve preparare la definizione logica, non già sostituirla; deve almeno farla desiderare nei casi in cui la vera definizione logica non può essere data utilmente che nell'insegnamento superiore.

Avete ben compreso che quanto ho detto oggi non implica affatto l'abbandono di quanto ho scritto altrove. Ho spesso avuto occasione di criticare certe definizioni che oggi preconizzo. Quelle critiche sussistono intatte. Tali definizioni non possono essere che provvisorie. Ma per quelle bisogna passare.

POINCARÉ.

IL CONCETTO DI ANGOLO IN "GONIOMETRIA,,

Nella " Geometria (1) elementare del piano „ si dice *angolo*, (2) *una parte del fascio limitata da due raggi* (*come il segmento è una parte della retta limitata da due punti*); altri invece, seguendo il Bertrand, (" Developpement nouveau de la partie élémentaires des mathématiques „. Genève, 1778, II, pag. 6) dicono: *un piano* (3) *è diviso da due rette intersecantesi e giacenti in esso, in 4 porzioni o regioni che si chiamano angoli* (γωνία); questa definizione ci conduce (4) ad attribuire all'angolo il carattere di *ente a due dimensioni*, mentre in matematica lo si riguarda come ente ad una dimensione; quello che il Bertrand chiama angolo, si può dire (col Veronese) *settore angolare*.

In Goniometria ed in Geometria Analitica s'imagina l'angolo come generato da un raggio ruotante in un dato senso intorno alla sua origine mantenendosi sopra un piano (*piano sostegno o piano dell'angolo*); le posizioni, iniziale e finale del raggio mobile, sono i lati *origine* ed *estremo* dell'angolo, intendendo che questo sia costituito dall'insieme delle posizioni occupate dal raggio generatore, o da tutti i raggi del fascio coi quali il raggio mobile va a coincidere nel suo movimento. Il raggio generatore lo si può riguardare anche come

(1) Cfr. H. SCHOTTEN, *Inhalt und methode des Planimetrischen unterrichts.* Lipsia, vol. II, pag. 94, Cap. II.

(2) G. VERONESE (collaboratore P. GAZZANIGA), *Elementi di Geometria.* F.lli Drucker, Padova, 1901. Parte I, Ed. IIa, pag. 33.

(3) BALTZER (traduzione di L. CREMONA), *Elementi di Matematica.* Parte VI. — Planimetria — Genova, Tip. dei Sordo-Muti, 1884, pag. 14, n. 5.

(4) U. AMALDI, *Sui concetti di retta e di piano.* Questioni riguardanti la Geometria Elementare. Raccolte e ordinate da Federigo Enriques. Edit. N. Zanichelli, Bologna, 1900, pag. 55.

projettante un punto mobile, nel verso scelto, sopra una circonferenza sul piano dell'angolo, avente per centro il vertice. Il punto mobile può percorrere la circonferenza quante volte si vuole, e se il cammino percorso lo diciamo *arco*, questo [1] può essere minore, uguale od anche maggiore di una circonferenza; quindi anche l'angolo al centro, corrispondente all'arco, può essere minore, uguale od anche maggiore [2] di un fascio di raggi.

Veniamo così a riguardare l'angolo non più come parte di un fascio di raggi, come si fa in " Geometria elementare ", e leghiamo il concetto di angolo al concetto di movimento, rendendoci, in tal modo, impossibile ogni qualsiasi studio dell'angolo dal punto di vista *attuale*.

Non credo quindi ozioso accennare con *forma puramente intuitiva* ad un modo secondo cui si possa imaginare l'angolo, indipendentemente dal movimento, come parte di un tutto, per modo da poterlo studiare anche dal punto di vista *attuale*.

Indichiamo con (Σ) la *falda* di elicoide retto, generata da un raggio la cui origine scorra sull'asse (a) di una superficie cilindrica di rotazione (λ), mantenendosi ad esso perpendicolare ed appoggiandosi ad un'elica (ε) disegnata su (λ); l'insieme delle posizioni del raggio mobile, per analogia col piano, lo chiameremo *fascio elicoidale di raggi* [forma che indicheremo con (φ)] del quale (Σ) diviene la *superficie sostegno*.

Due raggi f e g di (φ) determinano sull'elica (ε) due punti F e G la porzione finita di elica limitata dai punti F e G dicesi, com'è noto *arco di elica: l'insieme dei raggi del fascio compresi tra* f *e* g *(appoggiantisi cioè all'arco* FG*) lo diremo angolo elicoidale avente per lati* f *e* g. [3] La porzione o regione di (Σ) luogo dei punti dei raggi dell'angolo fg, la chiameremo *settore angolare* (sostegno dell'angolo).

Dato il senso positivo delle rotazioni dello spazio attorno all'asse (a), possiamo considerare angoli elicoidali positivi e negativi ed in corrispondenza archi di elica positivi e negativi; inoltre, siccome un

---

(1) Cfr. U. Bettazzi, *Nozioni di Trigonometria*. Succ. Le Monnier, Firenze, 1896, pag. 2, II. L'arco così definito non coincide coll'arco di circonferenza della *Ciclometria*.

(2) Anche in *Geometria Elementare* dalla somma di più angoli si è condotti a considerare angoli maggiori del fascio o del piano (seguendo Bertrand).

F. Enriques e U. Amaldi, *Elementi di Geometria*, ad uso delle scuole secondarie superiori. Bologna, N. Zanichelli, 1903, pag. 32, n. 91, pag. 37, n.i 103, 104.

M. Gremigni, *Elementi di Geometria*. Vol. I. Firenze, R. Bemporad e F.o 1896, pag. 12, IX.

(3) Il Ch.mo prof. U. Amaldi nel lavoro citato (pag. 58) dopo avere detto di settore angolare (piano) aggiunge: "…. si può definire come *angolo* ab o ba *l'insieme dei raggi uscenti da* O *e appartenenti al settore angolare che ha per lati* a e b. All'angolo si possono aggiungere, volendo, i lati a e b ".

Sarebbe bene, a mio avviso, non aggiungere all'angolo i suoi lati, potendo così estendere all'*angolo nullo* il concetto intuitivo di grandezza nulla; l'angolo nullo à per lati due raggi consecutivi (in senso infinitesimale) del fascio di raggi.

arco di elica (cilindrica di rotazione) può scorrere sulla linea stessa con perfetta sovrapposizione (proprietà che tale linea ha in comune colla circonferenza e la retta), si può, servendoci per esempio del concetto di sovrapponibilità, definire eguaglianza e somma di archi di elica, per cui possiamo dire che questi costituiscono una classe di grandezze. In conseguenza anche gli angoli elicoidali si possono riguardare come costituenti un'altra classe di grandezze: e, se diciamo *corrispondenti* un angolo elicoidale e l'arco di elica (ε) che ha per *origine* il punto ove si appoggia il lato origine dell'angolo, e per estremo il punto d'appoggio del lato estremo, si può dire che *le grandezze corrispondenti delle classi " angoli elicoidali " ed " archi di elica " sono direttamente proporzionali.*

Consideriamo il fascio (α) di semipiani avente per asse (a), uno qualunque dei semipiani à in comune col fascio elicoidale (φ) infiniti raggi paralleli ed *equiversi*, (1) e tali che due qualunque consecutivi distano di un segmento uguale al *passo* dell'elica (ε). L'angolo elicoidale che à per lati due di tali raggi consecutivi lo diremo *angolo giro*, l'arco corrispondente *arco giro*; si può vedere facilmente che se i lati di un angolo elicoidale sono paralleli ed equiversi, l'angolo è uguale ad un numero intero (positivo o negativo ma non nullo) di angoli giro e reciprocamente; e teoremi analoghi per gli archi di elica.

Se poi diciamo *angoli (archi) congrui*, due angoli (archi) che differiscono di un numero intero (positivo o negativo) di angoli (archi) giro, possiamo dire che: *portato con un movimento rotatorio dello spazio attorno all'asse* (a) *a sovrapporre il lato (punto) origine di uno di due angoli (archi) congrui col lato (punto) origine dell'altro, i lati estremi sono paralleli ed equiversi [i punti estremi sono sopra un semipiano di (α)]: e reciprocamente.*

Si potrebbero molto facilmente estendere agli angoli (archi) elicoidali congrui tutti i teoremi relativi alla *congruenza.* (2)

Si è già detto che gli archi di elica e i corrispondenti angoli elicoidali formano due classi di grandezze direttamente proporzionali; quindi, assunto un arco di elica come unità di misura per gli archi, e preso come unità di misura degli angoli quello corrispon-

(1) Dati due raggi paralleli, la retta delle origini divide il loro piano in due semipiani; se i due raggi sono in uno li direi *equiversi*, nel caso diverso, *antiversi;* ragioni etimologiche giustificano pienamente tali diciture.

(2) V. per esempio C. Bourlet, *Leçons de Trigonométrie rectiligne.* (Cours complet de Mathématiques élémentaires publié sus la direction de M. Darboux). Parigi A. Colin et C.ie 1898, pag. 19 e seg.

dente all'arco unitario, archi ed angoli corrispondenti ànno misure uguali.

La misura di un arco di elica rispetto ad un altro arco (non nullo) assunto come unità di misura, la diremo *ampiezza* di quell'arco, mentre con *lunghezza* dello stesso arco s'intende la misura del segmento uguale all'arco *rettificato*; quindi l'*ampiezza* di un arco è la sua misura se riguardato come elemento di una classe di grandezze.

Anche per la misurazione di angoli elicoidali, e corrispondenti archi di elica, potremo scegliere, come suol farsi in pratica per tutte le classi di grandezze, più unità di misura procedendo così a misurazioni complesse ed ottenendo valori complessi; (per esempio: l'*angolo giro* di 4 *quadranti*, di 60 *gradi*, di 60 *minuti primi*, di 60 *minuti secondi*).

Conveniamo ora di chiamare *distanza* di un punto da un piano il segmento di perpendicolare condotta dal punto al piano, compreso tra il punto (*estremo* del segmento) ed il piano. Dato un angolo elicoidale fg consideriamo la distanza di un punto P del lato estremo g dal piano del fascio (α) contenente il lato origine f, (positiva se P è da quella parte del piano ove sono i raggi, a partire da f, degli angoli positivi minori di un semigiro, negativa se P è dalla parte opposta); *il rapporto di questa distanza al segmento (sempre positivo) di* g *intercetto tra l'asse* (a) *ed il punto* P *(estremo) lo diremo seno dell'angolo* fg.

Si può dimostrare facilmente che il seno di un angolo elicoidale non dipende dalla scelta del punto P sul lato estremo (escludendo naturalmente l'origine di questo lato); ed inoltre che è una funzione monodroma dell'angolo.

Osserviamo poi che *due angoli congrui ànno uguali i seni;* infatti supposto che per un movimento rotatorio dello spazio attorno all'asse (a) si siano portati i due angoli ad avere in comune il lato origine, quindi i due lati estremi o coincidono o sono paralleli ed equiversi, e perciò le distanze degli estremi degli archi corrispondenti di una stessa elica (ε) dal piano del fascio (α) contenente il lato origine (comune) sono uguali in valore assoluto e segno, e quindi anche uguali i loro rapporti al raggio dell'elica considerata.

Ne segue che per la ricerca del valore del *seno* di un angolo possiamo sempre sostituire a questo un angolo congruo, in particolare un angolo positivo minore di un giro *(riduzione al primo giro).*

Per determinare poi il valore del seno di un angolo positivo minore di un giro, possiamo proiettare sopra un piano normale all'asse (a)

l'angolo stesso; questo si proietta in un angolo piano [parte del fascio piano di raggi, avente per centro il punto O d'incontro del piano iconico coll'asse (a)], l'arco di elica (α) si proietta in un arco di circonferenza (come lo definisce la " Geometria elementare piana ") col centro in O e di raggio uguale a quello della superficie cilindrica (λ); il seno dell'angolo elicoidale risulta uguale al seno dell'angolo piano proiezione.

Quindi studiando la funzione angolare *seno* per angoli piani minori del fascio, possiamo conoscere tutti i valori della funzione stessa per ogni angolo elicoidale.

Ciò che si è fatto per la funzione angolare seno, si può ripetere per ogni altra funzione angolare.

Imaginiamo che il passo dell'elicoide retto (Σ) vada decrescendo; le considerazioni fatte valgono in ogni suo stadio, anzi si può notare che il valore di ogni funzione angolare, per un dato angolo elicoidale non dipende dal *passo* dell'elicoide, ma solo dall'angolo diedro dei due semipiani del fascio (α) contenenti i lati dell'angolo: se dunque supponiamo che il passo dell'elicoide retto si renda evanescente, questo tenderà ad una superficie composta di infiniti piani sovrapposti normali all'asse (a), aventi in comune il punto O d'incontro coll'asse e tali che si possa passare dall'uno all'altro con continuità; il fascio elicoidale (φ) tende ad un fascio di raggi composto di infiniti fasci piani omocentrici (centro il punto O) e tali che anche in essi si possa passare dall'uno all'altro con continuità.

Se a e b sono due raggi di questo fascio, l'insieme dei raggi compresi tra essi (lati) costituisce l'angolo ab o ba, e si può dire che i raggi che lo compongono ànno le origini sovrapposte.

Definito così l'angolo, non potremmo estendere ad esso le definizioni della " Geometria elementare " di angoli *concavi, convessi, piatti* poichè essa li riguarda sempre come parte di un fascio piano di raggi; potremo però dire *angolo piatto*, l'angolo di un numero intero (non nullo) di semigiri; *concavo* quello maggiore di un numero dispari di semigiri e minore del numero successivo di semigiri; *convesso* l'angolo non concavo.

Le eliche poi determinate da (Σ) sulle superficie cilindriche coassiali, di asse (a), tendono per l'evanescenza del passo a circonferenze concentriche (di centro O); queste circonferenze si dovrebbero riguardare non già come linee chiuse, bensì come linee aperte, per modo che l'arco di circonferenza come lo considera la " Goniometria " è un arco della linea limite di una elica cilindrica di rotazione di passo evanescente.

Se in " Goniometria „ si vuol mantenere all'angolo il significato datogli dalla " Geometria elementare „ dovremmo limitarci allo studio delle funzioni angolari per angoli appartenenti e non superanti il fascio piano, come projezioni di quelli di un elicoide retto minori di un giro, ed estendere poi i risultati ottenuti, come si è detto, ad angoli qualsiansi: se invece si vuol considerare l'angolo in generale, allora lo si può concepire come parte di un fascio-limite elicoidale di raggi, potendo così non fosse altro liberarci dal concetto di moto e permettendoci uno studio dell'angolo dal punto di vista *attuale*.

Se in fine invece di considerare una *falda* dell'elicoide retto prendiamo in esame tutto l'elicoide e quindi anche il fascio elicoidale di *rette*, e se in ciascuna di queste assumiamo come verso positivo quello che va dal punto di appoggio sull'asse (a) al punto di appoggio sull'elica (ε), possiamo in modo analogo acquisire il concetto che si à di angolo di due rette in " Geometria Analitica del piano „.

Anzi a questo riguardo noto che, date due rette f, g di un piano sulle quali sia fissato *il verso positivo*, assegnato inoltre il *senso positivo del piano*, il loro angolo è *indeterminato* poichè se con α^0 indichiamo il valore dell'angolo positivo congruo all'angolo fg e minore di un giro, il valore dell'angolo fg è rappresentato da

$$\alpha^0 + k\,360^\circ$$

ove k è un numero intero positivo o negativo (non escluso lo zero), quindi è indeterminato, il che non dovrebbe essere, dato il concetto che ci siamo *ora* fatto di angolo di due rette; possiamo dire però che è determinata l'*inclinazione* delle due rette, intendendo con tale parola (in senso *reciproco*) l'angolo positivo minimo congruo all'angolo delle due rette; e per inclinazione (in senso *relativo*) di f su g l'angolo positivo minimo congruo all'angolo gf.

F. Mancinelli.

PRINCIPI DI GEOMETRIA EUCLIDEA

PREFAZIONE.

In questo lavoro ho esposto i principî della geometria elementare, col rigore maggiore che ho potuto conciliare con le esigenze didattiche.

La trattazione è in massima parte originale. Per la retta mi sono ispirato ai *Principî di Geometria logicamente esposti* (1) del prof. Peano. Inoltre seguendo il prof. Veronese (2) ho definito le parallele prima del piano, e l'eguaglianza tra figure, come una certa corrispondenza biunivoca. Però a differenza del prof. Veronese, io ho definito le rette parallele indipendentemente dal concetto di segmenti eguali; come anche la sopradetta definizione d'eguaglianza è modificata un poco.

Questi miei *principî*, sono scritti in modo che illustrati convenientemente con osservazioni empiriche, si possono dare in mano agli studenti delle scuole secondarie superiori. Poscia si può continuare, con leggiere modifiche, con qualsivoglia buon trattato di geometria elementare, e meglio, in particolare, col citato libro del prof. Veronese.

I. — **La retta.**

1. Postulato I. — *Esistono punti distinti.*

I punti si indicano con lettere maiuscole; per indicare che i punti A e B non sono distinti, cioè che le lettere A e B rappresentano uno stesso punto, scriveremo $A \equiv B$, e leggeremo: « il punto A coincide col punto B ».

È chiaro che se è $A \equiv B$, è pure $B \equiv A$; e che se è $A \equiv B$ e $B \equiv C$, è $A \equiv C$.

2. Definizione. — Dicesi *figura* una classe di punti, ciascuno dei quali si dice che *appartiene* ad essa. Se due figure F ed F′ son tali che ogni punto di F appartiene ad F′, si dice che F è *contenuta* in F′, ed anche che F *appartiene* ad F′. Se F è contenuta in F′, e questa è contenuta in F, diremo che F ed F′ *coincidono*, e scriveremo $F \equiv F'$. È chiaro che se è $F \equiv F'$, è pure $F' \equiv F$; e se è $F \equiv F'$ e $F' \equiv F''$, è $F \equiv F''$.

Se F è contenuta in F′, ma non è $F \equiv F'$, diremo che F è *parte* di F′.

La scienza che tratta delle figure, si chiama *Geometria*.

(1) Torino, Fratelli Bocca, 1889.

(2) *Elementi di Geometria*, Ediz. III, 1904, Verona.

3. Postulato II. — *Dati due punti distinti, esiste una figura, che chiameremo segmento, individuata da essi, indipendente dall'ordine secondo cui essi sono dati, e alla quale essi appartengono.*

Il *segmento* individuato (Post. II) da due punti distinti A e B, si indica con AB o con BA; dunque AB ≡ BA. Ogni punto che appartiene ad AB, ed è distinto da A e da B, si chiama *interno* al segmento AB. Diremo, alle volte, che AB *congiunge* i punti A e B, i quali diconsi *estremi* del segmento AB.

4. Postulato III. — *Se un punto* C *è interno al segmento* AB, *tutti i punti di* AC *appartengono ad* AB, *e* B *non appartiene ad* AC.

Teorema. — *Se un punto* C *è interno al segmento* AB, *tutti i punti di* BC *appartengono ad* AB, *e* A *non appartiene a* BC.

Dimostrazione. — Si dimostra applicando il Post. III a BA, e poi osservando (§ 3) che è AB ≡ BA.

5. Postulato IV. — *Se due punti distinti* C *e* D *sono interni ad* AB, *sarà vera una delle due seguenti proposizioni:* D *appartiene ad* AC; D *appartiene a* BC.

Teorema I. — *Se due punti distinti* C *e* D *sono interni ad* AB, *sarà vera una sola delle due seguenti proposizioni:* D *appartiene ad* AC; D *appartiene a* BC.

Dimostrazione. — Infatti poniamo, p. es. che D appartenga (Post. IV) a BC. Il punto C deve appartenere (Post. IV) ad uno (almeno) dei segmenti AD, BD. Ma C a BD non appartiene (Post. III), quindi apparterrà ad AD, onde (Post. III) D non appartiene ad AC, c. v. d.

Corollario. — *Se* C *è un punto interno ad* AB, *i segmenti* AC *e* BC *non hanno alcun punto comune distinto da* C.

Postulato V. — *Se il punto* B, *distinto da* A, *appartiene ad entrambi i segmenti* AC *e* AD, *sarà vera una delle due seguenti proposizioni:* C *appartiene ad* AD; D *appartiene ad* AC.

Teorema II. — *Se il punto* B, *distinto da* A, *appartiene ad entrambi i segmenti* AC *e* AD, *sarà vera una sola delle due seguenti proposizioni:* C *appartiene ad* AD; D *appartiene ad* AC.

Dimostrazione. — Segue dalla seconda parte del post. III.

Postulato VI. — *Se il punto* B *è interno ad* AC, *e* C *appartiene a* BD, *allora* C *appartiene ad* AD.

6. Postulato VII. — *Dati due punti distinti* A *e* B, *esistono punti, ciascuno* P *dei quali è tale che il punto* B *è interno al segmento* AP.

Definizione. — La figura costituita dal segmento AB, e (Post. VII) dai punti, ciascuno P dei quali è tale che B è interno ad AP, si chiama *raggio* o *semiretta,* e si indica con (A) B. Il punto A dicesi *origine* di (A) B.

Teorema. — *Un raggio è individuato dalla sua origine e da un suo punto qualunque (distinto da questa).*

Dimostrazione. — Sia C un punto di (A) B, dico che è (A) B ≡ (A) C. Infatti dalla Def. risulta che o C appartiene ad AB, o B appartiene ad AC.

Consideriamo quest'ultima ipotesi, e sia P un punto di (A) C. Possiamo (Def.) distinguere due casi: P appartiene ad AC; C appartiene ad AP. Se C appartiene ad AP, tutti i punti di AC appartengono (Post. III) ad AP, e in particolare B, onde P appartiene (Def.) ad (A) B. Se poi P appartiene ad AC, esso (Post. IV) o appartiene ad AB, e quindi (Def.) ad (A) B, ovvero appartiene a BC. Ma allora (Teor. § 4) B non appartiene a PC, e per conseguenza (Post. IV) B appartiene ad AP, cioè P appartiene ad (A) B. Dunque finora abbiamo dimostrato che nell'ipotesi di B appartenente ad AC, ogni punto P di (A) C appartiene ad (A) B. Sempre nella medesima ipotesi, sia ora Q un punto di (A) B. Se Q appartiene ad AB, esso appartiene (Post. III) ad AC, e quindi (Def.) ad (A) C. Se invece è B in AQ, o (Post. V) C appartiene ad AQ, o Q appartiene ad AC, onde in entrambi i casi il punto Q appartiene ad (A) C.

Nell'ipotesi che C appartenga ad AB, si ripete la fatta dimostrazione, scambiando B con C. Concludiamo (§ 2): (A) B $\equiv$ (A) C, c. v. d.

7. Definizione. — Chiameremo *retta* la figura costituita da due raggi, ciascuno dei quali contiene l'origine dell'altro, cioè come (A) B e (B) A, con A e B punti distinti: la indicheremo con (AB). Alle volte con una sola lettera latina minuscola, indicheremo una retta. Lo stesso faremo per indicare un segmento, quando non vi è luogo ad equivoci. Si suol dire pure che (AB) *congiunge* A e B; ecc.

Teorema. — *Una retta è individuata da due suoi punti (distinti) qualunque.*

Dimostrazione. — Sia la retta (AB), e C un suo punto qualunque distinto da A e da B; dico, in primo luogo, (AB) $\equiv$ (BC). Infatti dalla data Def. segue che C giace in uno (almeno) dei raggi (A) B, (B) A, p. es. in (A) B. Allora o C appartiene ad AB, o B appartiene ad AC; consideriamo la prima ipotesi. Per il teor. del § 6 è (B) A $\equiv$ (B) C, onde per il nostro scopo basterà dimostrare che, se P appartiene ad (A) B, P apparterrà a (BC); e se Q appartiene a (C) B, Q apparterrà ad (AB).

Appartenga, primieramente, P ad (A) B: allora o P è in AB, o B è in AP. Se P è in AB, o esso appartiene (Post. IV) a BC, e quindi a (BC), ovvero P appartiene ad AC, e quindi (Post. III e IV) C appartiene a BP, cioè P a (B) C, e quindi P a (BC). Se invece B appartiene ad AP, allora è (Post. III) C in AP, onde giacchè (Post. III) B non è in AC, è (Post. IV) B in CP, e quindi P in (C) B, e P in (BC).

Sia ora Q un punto di (C) B: o Q è in CB, e quindi (§ 4) è in AB, e per conseguenza in (AB). Ovvero è B in CQ, per cui (Post. VI) B appartiene ad AQ, e quindi Q ad (A) B, ed anche Q ad (AB).

Sin ora abbiamo considerata l'ipotesi che C appartenga ad AB, e sempre in questa ipotesi, si dimostra analogamente, che è (AB) $\equiv$ (AC). Se invece è B in AC, si ha, per la fatta dimostrazione: (AC) $\equiv$ (AB), e (AC) $\equiv$ (BC). Onde (AB) $\equiv$ (BC).

Sia, infine, D un altro punto di (AB), distinto da A, da B, e da C:

esso, per quanto si è dimostrato, appartiene a (BC), per cui (BC) $\equiv$ (CD); e concludendo: (AB) $\equiv$ (CD), c. v. d.

COROLLARIO. — *Per due punti distinti passa una retta ed una sola.*

8. TEOREMA. — *La retta può considerarsi come composta di due raggi distinti, aventi la stessa origine in un punto qualunque della retta medesima.*

Ovvero, con altre parole: *La retta è divisa da ogni suo punto in due parti distinte.*

Infatti scelto un punto qualunque O di una data retta r, siano (Postulato VII) A e B due punti distinti di questa, tali che O sia interno ad AB. Osserviamo intanto che (Teor. § 7) è $r \equiv$ (AB). Sia ora P un punto qualunque di r, appartenente, p. es., ad (A) B (Def. § 7): se esso è interno ad AB, apparterrà (Post. IV) o ad OA, o ad OB, in ogni caso apparterrà ad uno dei due raggi (O) A, (O) B. Se invece è B in AP, anche (Post. III) O apparterrà ad AP, e allora giacchè B (Post. III) non appartiene ad AO, B apparterrà (Post. IV) ad OP, onde P appartiene ad (O) B. Dunque ogni punto P di r appartiene ad uno (almeno) dei due raggi (O) A, (O) B. Viceversa se Q è un punto di (O) A, p. es., esso appartiene alla (OA) $\equiv r$ (Teor. § 7).

I due raggi (O) A e (O) B, poi, sono distinti, giacchè se coincidessero, o il punto B sarebbe interno ad AO, o A sarebbe interno ad OB, cose entrambe assurde (§ 4), c. v. d.

OSSERVAZIONE. — I due raggi (O) A e (O) B, non hanno alcun punto comune distinto da O, giacchè in contrario essi (Teor. § 6) coinciderebbero, contro quanto abbiamo dimostrato. Questa osservazione si suole enunciare dicendo che la retta è *aperta.*

DEFINIZIONE. — Due raggi distinti di una stessa retta, aventi l'origine comune, diconsi *opposti.*

COROLLARIO. — *Essendo* (O) A *e* (O) B *raggi opposti, il punto* O *è interno ad* AB.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, se O non fosse interno ad AB, esso dovendo appartenere alla (AB), e quindi o ad (A) B o a (B) A, sarebbe tale che o B appartiene ad AO, ovvero A ad OB. In entrambi i casi sarebbe (O) A $\equiv$ (O) B (Teor. § 6), e ciò non è, c. v. d.

II. — **L'angolo.**

9. POSTULATO VIII. — *Data una retta esiste un punto che non appartiene ad essa.*

COROLLARIO. — *Esistono coppie di raggi distinti, aventi la stessa origine.* P. es., un raggio (O) A, e il raggio (O) B, dove B (Post. VIII) non appartiene a (OA).

DEFINIZIONE. — Dati due raggi (distinti o coincidenti) non opposti, (O) A e (O) B, aventi la stessa origine O, chiameremo loro *angolo con-*

vesso, e l'indicheremo con A (O) B o con B (O) A, la figura dei punti che appartengono a segmenti aventi gli estremi sui raggi dati. I dati raggi si chiameranno *lati* dell'angolo, e il punto O se ne dirà il *vertice*. Se è (O) A ≡ (O) B, A (O) B si chiamerà *angolo nullo.*

COROLLARIO. — *L'angolo nullo coincide coi suoi lati (coincidenti).*

10. POSTULATO IX. — *Se un raggio avente l'origine nel vertice di un angolo convesso, incontra in un punto distinto da questo, un segmento avente gli estremi sui lati dell'angolo, esso incontrerà tutti i segmenti siffatti.*

DEFINIZIONE. — Un raggio che ha l'origine nel vertice di un angolo, che incontra (Post. IX) tutti i segmenti aventi gli estremi sui lati di questo, e che è distinto dai lati dell'angolo, si dice *interno* al detto angolo.

TEOREMA I. — *Se un raggio* (O) C *è interno all'angolo convesso* A (O) B, *tutti i raggi interni ad* A (O) C *o a* B (O) C, *apparterranno ad* A (O) B, *e inoltre* (O) B *non appartiene ad* A (O) C, *e* (O) A *non appartiene a* B (O) C.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti scelto un segmento qualunque avente gli estremi (distinti da O) M in (O) A e N in (O) B, esso sarà (Post. IX) incontrato da (O) C in un punto P interno ad esso. Sia ora (O) D un raggio interno ad A (O) C, p. es.: esso (Post. IX) incontra MP in un punto interno Q, che (§ 4) è interno ad MN, onde (O) D appartiene ad A (O) B, ecc., c. v. d.

TEOREMA II. — *Se due raggi distinti* (O) C *e* (O) D *appartengono ad* A (O) B, *sarà vera una ed una sola delle due seguenti proposizioni:* (O) D *appartiene ad* A (O) C; (O) D *appartiene a* B (O) C. Ovvero con altre parole: *Un raggio interno ad un angolo convesso, divide questo in due parti che hanno quel solo raggio comune.*

DIMOSTRAZIONE. — Segue dai Post. IX e IV, e dal Teor. I del § 5.

11. DEFINIZIONE. — Siano (O) A e (O) B due raggi opposti, ed (O) C un altro raggio avente l'origine in comune con essi, e da questi distinto. La figura composta degli angoli convessi A (O) C e B (O) C, si chiamerà *angolo piatto,* e si indicherà con (O) A . C o con (O) B . C. I raggi (O) A e (O) B se ne dicono *lati,* e O *vertice.*

OSSERVAZIONE. — Un raggio (O) D di (O) A . C distinto da (O) C, appartiene (Def.) ad uno (almeno) dei due angoli A (O) C, B (O) C, poniamo, p. es., ad A (O) C.

POSTULATO X. — *Dato l'angolo piatto* (O) A . C, *se* (O) D *è interno ad* A (O) C, *allora* (O) C *apparterrà a* B (O) D; *e viceversa.*

COROLLARIO. — *Dato l'angolo piatto* (O) A . C, *ogni suo raggio distinto da* (O) C, *appartiene ad uno e ad uno solo degli angoli convessi* A (O) C *e* B (O) C.

DIMOSTRAZIONE. — Che un raggio (O) D di (O) A . C distinto da (O) C appartenga ad uno, p. es., ad A (O) C dei due angoli A (O) C, B (O) C, segue dalla data definizione di angolo piatto. Che, poi, (O) D non appartiene a B (O) C, segue dal Post. X e dal Teor. I del § 10.

12. Teorema. — *Un angolo piatto è individuato dai lati e da un suo raggio qualunque (distinto da questi), avente l'origine nel vertice dell'angolo.*

Dimostrazione. — Sia (O) D un raggio di (O) A . C: dico che è (O) A . C $\equiv$ (O) A . D. Infatti supponiamo (Coroll. § 11) che (O) D (distinto da (O) C) appartenga ad A (O) C, e che sia (O) P un altro raggio di (O) A . C. Se (O) P è interno a B (O) C, esso (Post. X e Teor. I, § 10) appartiene a B (O) D e quindi ad (O) A . D. Se invece (O) P appartiene ad A (O) C, allora (Teor. II, § 10) o appartiene a C (O) D e quindi (Post. X e Teorema I, § 10) a B (O) D, ed anche ad (O) A . D, ovvero appartiene ad A (O) D, e per conseguenza ad (O) A . D. Analogamente si dimostra che viceversa ogni raggio che appartiene ad (O) A . D, apparterrà pure ad (O) A . C. Concludiamo: (O) A . D $\equiv$ (O) A . C, c. v. d.

Corollario. — *Due angoli piatti coincidono, se hanno in comune i lati e un raggio distinto da questi avente l'origine nel vertice comune.*

Dimostrazione. — Infatti in tale ipotesi, ciascuno di essi è formato dai medesimi due angoli convessi.

13. Teorema. — *Dato un angolo piatto* (O) A . M *cui appartenga una retta* r, *se* C *è un punto di questa, uno dei due raggi di* r *aventi* C *per origine, apparterrà all'angolo* A (O) C, *e l'altro raggio apparterrà all'angolo* B (O) C.

Dimostrazione. — Siano infatti D ed E due punti di *r*, uno per ciascuno dei due raggi di *r* aventi C per origine, onde (Coroll., § 8) C appartiene a DE. Se entrambi i raggi (O) D e (O) E appartenessero ad uno, p. es. B (O) C, dei due angoli B (O) C e A (O) C, (O) D, p. es. apparterrebbe (Teor. II, § 10) a B(O)E, e ciò è assurdo, giacchè (O) C appartiene a D (O) E (Teor. I, § 10), c. v. d.

14. Teorema I. — *Date due rette distinte aventi un punto in comune, non esiste alcun angolo piatto col vertice in questo punto, coi lati su una delle due rette date, e che contenga tutti i punti dell'altra retta.*

Dimostrazione. — Siano le due rette distinte (OA) e (OC); dico che non esiste alcun angolo piatto (O) A . M, p. es., che contenga tutti i punti di (OC). Infatti dovrebbe essere (§ 12) (O) A . M $\equiv$ (O) A . C, e se D è un punto distinto da O, appartenente al raggio opposto di (O) C, tale che O sia interno a CD, il raggio (O) D dovrebbe appartenere o all'angolo A (O) C, o all'altro B (O) C. Poniamo che (O) D appartenga ad A (O) C, per cui conterrà un punto E interno ad AC, e le rette (AC) e (CD) avendo in comune i due punti distinti C ed E coinciderebbero. E allora sarebbe anche (AB) $\equiv$ (CD) per avere comuni i due punti distinti O ed A, e ciò è contro l'ipotesi che le due date rette siano distinte, c. v. d.

Teorema II. — *Se un raggio ha l'origine in un lato di un angolo piatto, e incontra un raggio di questo avente la sua origine nel vertice dell'angolo, esso appartiene al detto angolo piatto.*

Dimostrazione. — Sia dato (O) A . B; dico che (A) B appartiene ad esso. Per il segmento AB la cosa è evidente; onde sia C un punto tale, che B è interno ad AC. Allora siccome (O) B appartiene a C (O) A, così (Post. X, 2ª parte), (O) C appartiene ad A′ (O) B, ossia ad (O) A . B, indicando con A′ un punto tale che sia O interno ad AA′. Se ne conclude che ogni punto C di (A) B appartiene ad (O) A . B, c. v. d.

Teorema III. — *Due angoli piatti aventi i lati sopra una stessa retta, e un punto fuori di questa comune, coincidono.*

Dimostrazione. — Siano gli angoli piatti (O) O_1 . P e (O_1) O . P; dico che essi coincidono. Infatti ogni raggio di (O) O_1 . P interno ad O_1 (O) P, incontra (Post. IX) O_1P, e quindi (Teor. II) appartiene ad (O_1) O . P. Un raggio, poi, di (O) O_1 . P interno ad M (O) P, dove M è tale che O è interno ad MO_1, incontri MP in N. Ma (Teor., § 12) è (O_1) O . P $\equiv$ (O_1) O . N, onde (Teor. II) il detto raggio appartiene pure ad (O_1) O . P. Analogamente si dimostra che ogni raggio di questo, appartiene ad (O) O_1 . P. Dunque (O) O_1 . P $\equiv$ (O_1) O . P, c. v. d.

Corollario. — *Date due rette che s'incontrano, qualunque angolo piatto avente i lati su una di esse, e contenente uno dei due raggi dell'altra, che hanno l'origine nel punto comune alle due rette, non contiene l'altro dei due raggi ora detti.*

Dimostrazione. — È conseguenza del teorema precedente, e del Teorema I di questo §.

15. Teorema I. — *Un segmento avente un (solo) suo punto interno in comune con un lato di un angolo convesso, possiede punti non appartenenti all'angolo.*

Dimostrazione. — Infatti, se un segmento *a* avente un suo punto interno A comune col lato (O) A di A (O) B, avesse tutti i suoi punti appartenenti a quest'angolo, l'angolo piatto (O) A . B conterrebbe (§ 8, § 14, Teor. II) entrambi i raggi in cui A divide la retta che contiene il segmento *a*. E ciò è assurdo (Coroll., § 14), c. v. d.

Teorema II. — *Due angoli convessi coincidenti, hanno i medesimi lati.*

Dimostrazione. — Infatti, essendo A (O) B $\equiv$ A′ (O′) B′, sia (O′) A′ non coincidente con (O) A, nè con (O) B. Si indichi con M′ un punto di (O)′ A′, p. es., non posto sui lati di A (O) B. Allora M′ sarà interno ad un segmento PQ avente gli estremi P in (O) A e Q in (O) B. Inoltre essendo A (O) B $\equiv$ A′ (O′) B′, *tutto* il segmento PQ apparterrà ad A′ (O′) B′. Ma PQ ha solamente M′ in comune con (O′) A′, giacchè nel caso contrario, ad A (O) B apparterrebbero dei punti di (O′) A′, solamente (Post. IX, Coroll., § 7) quelli di PQ, dunque veniamo ad un assurdo (Teor. I), c. v. d.

Definizione. — Dati due raggi non opposti distinti (O) A e (O) B, se ne considerino gli opposti (O) A′ e (O) B′ rispettivamente. La figura composta degli angoli convessi A (O) B′, B′ (O) A′, A′ (O) B, si chiamerà *angolo concavo*. I raggi (O) A e (O) B se ne diranno *lati*, e il punto O si chiamerà *vertice*; s'indicherà con [A (O) B].

III. — Rette parallele.

16. Teorema I. — *Date due rette* r *ed* s, *se esiste un angolo piatto avente i lati su* r, *e che contiene tutti i punti di* s, *allora scelto un punto qualunque di* s, *esisterà un angolo piatto avente quel punto per vertice, i lati su* s, *e che contiene tutti i punti di* r.

Dimostrazione. — Essendo A, O, B tre punti distinti di r, esista un angolo piatto (O) A . M che contenga tutti i punti di s. Siano A', O', B' tre punti distinti qualunque di s, e tali che O' appartenga ad A'B': dico che (O') A' . O contiene tutti i punti di r. A tal fine basta dimostrare che se P appartiene ad r, (O') P appartiene o ad O (O') B', o ad O (O') A'. Infatti giacchè tutti i punti di s appartengono ad (O) A . M, ed è (Teor., § 12) (O) A . M $\equiv$ (O) A . O', possiamo (§ 13) scegliere un punto Q' di s, in modo che (O) Q' appartenga all'angolo B (O) O', se P è in (O) B. Ma allora (O) Q' avrà in comune con O'P un punto N, cioè (O') P incontra OQ' in N, e quindi (O') P appartiene ad O (O') Q', ed anche ad (O') A'. O, c. v. d.

Teorema II. — *Date due rette* r *ed* s, *se esiste un angolo piatto avente i lati su* r, *e che contiene tutti i punti di* s, *allora scelto un punto qualunque della stessa* r, *esisterà un angolo piatto avente quel punto per vertice, i lati su* r, *e che contiene tutti i punti di* s.

Dimostrazione. — Infatti essendo (O) A . M $\equiv$ (O) A . O', si ha (Teorema III, § 14): (O) A . M $\equiv$ (P) A . O'. E giacchè (O) A . M per ipotesi contiene tutti i punti di s, anche (P) A . O' conterrà tutti i punti di s, c. v. d.

17. Definizione. — Due rette tali che per qualunque punto di una qualsivoglia di esse, esiste un angolo piatto col vertice in quel punto, i lati su quella retta, e a cui appartengono tutti i punti dell'altra retta, si chiameranno *parallele*.

Teorema. — *Due rette parallele non hanno alcun punto comune.*

Infatti date due rette che s'incontrino, non esiste (§ 14) alcun angolo piatto col vertice nel loro punto comune, p. es., coi lati su una qualunque di esse, e che contenga tutti i punti dell'altra retta, c. v. d.

Postulato XI. — *Per un punto che non appartenga ad una data retta, passa una retta ed una sola parallela a questa.*

IV. — Il piano.

18. Definizione. — La figura dei punti di tutte le rette che congiungono i punti di una retta r con un punto O non appartenente ad essa, e della parallela (Post. XI) a questa passante per O, chiamasi *piano*, e si indica con Or.

Postulato XII. — *Una retta avente due punti distinti in comune col piano, appartiene a questo.*

Teorema. — *La parallela ad una retta del piano passante per un punto di esso, appartiene a questo piano.*

Dimostrazione. — Siano P ed r un punto ed una retta del piano. l'uno non appartenente all'altra, ed s la (Post. XI) parallela ad r condotta da P: dico che anche s appartiene al piano. Infatti se A e B son due punti distinti di r, le (PA), (PB) appartengono (Post. XII) al piano. Se (P) B appartiene (Def., § 17 e Teor., § 12) all'angolo convesso M (P) A, p. es., essendo M un punto qualunque di s distinto da P, (P) B avrà in comune con AM un punto N. Ed ora, siccome M appartiene alla (AN), la quale (Post. XII) appartiene al piano, M appartiene pure a questo, e di conseguenza tutta la retta s apparterrà (Post. XII) al piano, c. v. d.

19. Teorema. — *Un piano è individuato da una retta e da un suo punto qualunque non appartenente alla retta.*

Dimostrazione. — *a)* Sia il piano Or, ed O' un suō punto qualunque distinto da O, e che non appartiene ad r: dico che è $Or \equiv O'r$. Infatti si cominci ad osservare che la (OO') appartiene (Def., § 18) ad entrambi i piani Or e $O'r$. Ne segue che ogni retta congiungente O con un punto di r, appartiene (Post. XII) ad $O'r$, e ogni retta che congiunge O' con un punto di r, appartiene ad Or. Per il teorema del § precedente, poi, la parallela ad r passante per O appartiene ad $O'r$, e la parallela ad r per O', appartiene ad Or. Dunque è $Or \equiv O'r$.

b) Se r' è una retta di Or distinta da r e non passante per O, dico che è $Or \equiv Or'$. Giacchè r' appartiene ad Or, congiungendo O con un punto qualunque di r', si ottiene una retta la quale appartiene (Post. XII) al piano Or; così dicasi (Teor., § 18) per la parallela ad r' passante per O. Dunque ogni punto di Or' appartiene ad Or. Viceversa due rette qualunque congiungenti O con due punti di r', e distinte dalla parallela ad r passante per O, incontreranno r in due punti distinti, onde r appartiene (Post. XII) ad Or'. Ne segue che sia le rette che congiungono O con punti di r, sia la parallela ad r passante per O, apparterranno (Post. XII, e Teor., § 18) ad Or'. Dunque: $Or \equiv Or'$.

c) Se O' ed r' sono un punto ed una retta di Or, ed O' non appartiene ad r', si ha: $Or \equiv O'r \equiv O'r'$, c. v. d.

Corollario I. — *Il piano è individuato da tre punti qualunque non appartenenti ad una stessa retta.*

Corollario II. — *Due rette parallele o che s'incontrano, individuano un piano.*

Corollario III. — *Due rette del piano o sono parallele, o hanno un punto comune.*

Corollario IV. — *Essendo* r, r', r'' *tre rette del piano, se* r *ed* r' *sono parallele, ed* r'' *incontra* r, r'' *incontrerà pure* r'.

Dimostrazione. — Infatti se non l'incontrasse, r'' ed r' sarebbero (Coroll. III) parallele, e per il punto comune ad r e r'', passerebbero queste due rette entrambe parallele alla r', e ciò è (Post. XI) assurdo.

20. TEOREMA I. — *Data una qualunque retta del piano, questo può essere considerato come composto di due angoli piatti distinti, aventi il vertice in un punto qualunque della retta, e i lati su questa medesima.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia (OB) una retta del piano: si conduca in questo per O un'altra retta qualunque (OC). Siano inoltre A e D due punti tali che O sia interno ad AB, ed anche a CD. Ogni punto appartenente ad (O) A . C, ovvero ad (O) A . D, appartiene (Teor., § 12, Def., § 9 e Post. XII) al piano. Viceversa se P è un punto di questo, la parallela ad (AB) per esso, seca (Coroll. IV, § 19) il raggio (O) C, p. es. (Teor. § 8), onde essa appartiene (Def., § 17 e Teor., § 12) all'angolo (O) A . C.

Che, infine, (O) A . C e (O) A . D non hanno alcun punto comune fuori di (OA), segue dal coroll. del § 12, e dal Teor. I, del § 14, c. v. d.

TEOREMA II. — *Data una retta del piano, questo si può considerare come composto di due parti distinte, tali che due punti di una stessa parte individuano un segmento non avente alcun punto comune colla retta; mentre due punti appartenenti a parti diverse, sono congiunti da un segmento che incontra la data retta.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia r una data retta del piano: questo può considerarsi (Teor. I) come composto di due parti, ciascuna delle quali è un angolo piatto col vertice in un punto arbitrario di r, e i lati su questa medesima retta. Siano ora A e B due punti del piano fuori di r: se ad AB appartiene un punto M di r, i punti A e B non appartengono ad uno stesso dei due detti angoli piatti (Teor. I e Teor. I, § 14). Onde se A e B appartengono ad uno stesso di questi, il segmento AB non incontra r. Viceversa se AB non contiene alcun punto di r, A e B appartengono ad uno stesso dei sopradetti due angoli piatti. Infatti (Corollario III, § 19) o la (AB) è parallela ad r, e allora (Def., § 17) l'assunto è dimostrato. Ovvero (AB) seca r in N, e allora deve essere (N) A $\equiv$ (N) B, giacchè se così non fosse, i raggi (N) A e (N) B sarebbero opposti, ed N sarebbe interno (Coroll., § 8) ad AB, contro l'ipotesi. Onde A e B appartengono ad uno stesso dei due angoli piatti più volte menzionati.

DEFINIZIONE. — Ciascuna delle due parti distinte in cui il piano resta diviso da una sua retta qualunque, dicesi *semipiano*. Un semipiano, dunque, non è altro che uno degl' infiniti angoli piatti coincidenti, aventi i lati sopra una data retta, e passanti per uno stesso punto fuori di questa. La data retta si chiama *asse* del semipiano.

V. — Segmenti eguali.

21. POSTULATO XIII. — *Dato un segmento* a, *resta individuata una classe di segmenti, che soddisfa ai postulati seguenti.*

DEFINIZIONE. — Ciascuno b di questi, si dirà *eguale* ad a, e si scriverà $a = b$.

POSTULATO XIV. — *È* a $=$ a.

POSTULATO XV. — *Se è* a $=$ b, *è pure* b $=$ a.

POSTULATO XVI. — *Se è* a $=$ b *e* b $=$ c, *è* a $=$ c.

POSTULATO XVII. — *Se è* AB $=$ A'B', *e* C *è un punto di* AB, *esisterà un punto* C' *di* A'B', *tale che è* AC $=$ A'C', *e* BC $=$ B'C'.

TEOREMA. — *Se è* AB $=$ A'B', *e* C *è un punto di* AB, *esisterà un punto* C'_1 *di* A'B', *tale che è* AC $=$ $B'C'_1$ *e* BC $=$ $A'C'_1$.

DIMOSTRAZIONE. — Basta applicare il postulato precedente, ai due segmenti eguali AB e B'A' (§ 3).

POSTULATO XVIII. — *Se è* AB $=$ A'B', AC $=$ A'C', BC $=$ B'C', *con* C *interno ad* AB, *sarà* C' *interno ad* A'B'.

22. TEOREMA. — *Un segmento* AB *non è eguale ad un segmento* MN *sua parte.*

DIMOSTRAZIONE. — In primo luogo sia, p. es., M $\equiv$ A; allora se fosse AB $=$ MN, siccome si ha pure (Post. XV) AN $=$ MB, e (Post. XIV) BN $=$ NB, con N interno ad AB, dovrebbe (Post. XVIII) essere B interno ad MN, e ciò non è (Post. III).

Se poi nessuno dei punti M ed N coincide con A o con B, si osservi che se fosse AB $=$ MN, dovrebbe (Post. XVII) esistere un punto C di MN tale che sia BM $=$ MC (e AM $=$ NC). Ma per il caso già dimostrato BM non è eguale ad MC, dunque AB non è eguale ad MN, c. v. d.

OSSERVAZIONE. — Dato un segmento AB, e un suo qualunque punto C, per i Post. XIV e XVII, esiste un punto C' di AB, *unico* per il teorema precedente, tale che è AC $=$ BC'. Questa proprietà del segmento si indica dicendo che *il segmento è invertibile.*

23. POSTULATO XIX. — *Dato un raggio* (O) P *e un segmento* MN, *esiste un punto* A *di* (O) P, *tale che è* OA $=$ MN.

Osserviamo che il punto A è *unico* in virtù del teorema del § 22.

24. TEOREMA. — *Dati due segmenti* a *e* b, *se per un raggio* (O) P *si verifica che essendo* N *ed* M *punti di questo, è* N *interno ad* OM, *essendo* ON $=$ a *e* OM $=$ b, *allora per qualsivoglia altro raggio* (O') P', *sarà* N' *interno ad* O'M', *qualora sia,* O'N' $=$ a *e* O'M' $=$ b *con* N' *ed* M', *punti di* (O') P'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti fissato M' in modo che sia O'M' $=$ OM $=$ b, per il Post. XVII esisterà un punto N'_1 di O'M', tale che è $O'N'_1$ $=$ ON, cioè $O'N'_1 = a$. Ma (§ 23) è $N' \equiv N'_1$, dunque... c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due segmenti a e b, e scelto un raggio qualunque (O) P, siano M ed N quei due punti di (O) P, pei quali si ha ON $= a$, OM $= b$. I punti M ed N son tali (Teor. e Def., § 6) che o N appartiene ad OM, o M ad ON. Se p. es. N appartiene ad OM, ed N non coincide con M, diremo che a è *minore* di b, e che b è *maggiore* di a, e scriveremo $a < b$ ed anche $b > a$. Se poi fosse N $\equiv$ M, sarebbe (Post. XVI e XIV) $a = b$. Queste definizioni sono giustificate dal teorema precedente.

25. TEOREMA. — *Dati due segmenti* AB *e* A'B', *se un punto* C *di* AB *e un altro* C' *di* A'B', *son tali che è* AC $=$ A'C' *e* BC $=$ B'C', *sarà* AB $=$ A'B'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti sia (§ 23) B'_1 quel punto di $(A')B'$ tale che è $AB = A'B'_1$: sarà (Post. XVII e § 23) $BC = B'_1C'$, per cui (Post. XVI) anche $B'C' = B'_1C'$, e infine (§ 23) $B' \equiv B'_1$, c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due segmenti a e b, e scelti i punti A, C e B sopra una stessa retta *qualunque*, in modo che sia $AC = a$, $BC = b$, e C interno ad AB, chiameremo questo segmento AB *somma* di a e b, e scriveremo $AB = a + b$.

Si osservi che da questa definizione e dal teorema precedente, segue che è $a + b = b + a$, cioè, come diremo, la somma gode della proprietà *commutativa*.

26. TEOREMA. — *Sia* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, C *interno ad* AB *e* C' *interno ad* A'B': *allora sarà* $BC = B'C'$.

DIMOSTRAZIONE. — Sia infatti B'_1 quel (§ 23) punto di $(C')B'$, per cui è $CB = C'B'_1$. Allora sarà (Teor., § 25) $AB = A'B'_1$, ed anche (Postulato XVI) $A'B' = A'B'_1$, onde (§ 23) $B' \equiv B'_1$, c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due segmenti a e b con $a < b$, e scelti i punti A, C e B sopra uno stesso raggio (A) B in modo che sia $AC = a$, $AB = b$ (e quindi (§ 24) C interno ad AB) chiameremo BC *differenza* di b e a, e scriveremo $BC = b - a$.

VI. — Figure eguali.

27. DEFINIZIONE. — Due figure F ed F' si dicono *eguali*, e si scrive $F = F'$, se i loro punti si corrispondono biunivocamente, in modo che il segmento che unisce due punti qualunque di F, è eguale a quello che congiunge i due punti corrispondenti di F'. Una siffatta corrispondenza si dirà *corrispondenza di eguaglianza*.

OSSERVAZIONI. — È chiaro che è $F = F$ (Post. XIV). Se è $F = F'$, è pure $F' = F$ (Post. XV); se è $F = F'$, $F' = F''$, sarà (Post. XVI) $F = F''$.

Date due figure eguali F e F', a punti di F interni al segmento che congiunge due punti qualunque di essa, corrispondono (Post. XVIII) in F' punti interni al segmento che unisce i punti corrispondenti *(omologhi)* di questa.

Dalla data definizione segue pure che sono eguali due figure corrispondenti *(omologhe)* in figure eguali. Si osservi inoltre, come nell'ipotesi che F e F' siano segmenti, se sono eguali secondo la data definizione, essi soddisferanno ai postulati del capitolo precedente; e (Post. XVII e Teor., § 26) viceversa.

28. TEOREMA. — *Due rette qualunque sono figure eguali, e la corrispondenza d'eguaglianza è individuata qualora sian date due coppie di punti omologhi (in modo che siano eguali i due segmenti corrispondenti così determinati).*

DIMOSTRAZIONE. — Siano le rette (AB) e (A'B'), con $AB = A'B'$: dico che fra i punti delle due rette si può stabilire una ed una sola corrispondenza d'eguaglianza, in modo che siano omologhi A, A' e B, B'. Infatti dato un punto qualunque P di (AB), p. es. in (B) A, si assuma come suo omologo il punto P' di (B') A', tale che sia $B'P' = BP$ (§ 23). Analogamente si determini il punto Q' di (A'B'), omologo di un altro punto Q di (AB). Ed ora si ha $PQ = P'Q'$, per il teorema del § 26 se P' e Q' appartengono entrambi a (B') A', o per il teorema del § 25 se uno di essi appartiene a (B') A', mentre l'altro appartiene al raggio opposto a questo, c. v. d.

Corollario. — *Due raggi qualunque sono figure eguali.*

Dimostrazione. — Si dimostra come sopra.

29. Teorema. — *Ogni figura eguale ad una retta, è una retta.*

Dimostrazione. — Sia $F = F'$, essendo $F \equiv (AB)$: dico che pure F' è una retta. Infatti ai punti A e B saranno omologhi due punti A' e B' di F', tali che è $AB = A'B'$. Se ora P' è un altro punto qualunque di F', e P è il suo omologo in F, giacchè A, B e P sono in una stessa retta, P' appartiene (§ 27) ad (A'B'). Viceversa se Q'_1 è un punto qualunque di questa, e Q è il punto di (AB) che ad esso corrisponde nella relazione di eguaglianza fra la stessa (AB) e la (A'B'), con A, A' omologhi, e B, B' omologhi (Teor., § 28), sarà $Q'_1 \equiv Q'$ (§ 27), ove Q' è l'omologo di Q in F'. Concludiamo che è $F' \equiv (A'B')$, c. v. d.

Corollario. — *Ogni figura eguale ad un raggio, è un raggio, e nella corrispondenza d'eguaglianza sono omologhi le loro origini.*

Infatti se A e A' sono omologhi nella corrispondenza d'eguaglianza che intercede fra (O) A e (O_1) A', ai punti interni ad OA, corrisponderanno (§ 27) i punti interni ad O'A', detto O' l'omologo di O. Ai punti Q tali che è A interno ad OQ, corrisponderanno (§ 27) punti Q' tali che è A' interno ad O'Q'. Ne segue $O_1 \equiv O'$, giacchè se così non fosse, i punti di $O'O_1$ non avrebbero i loro omologhi in (O) A, e ciò è assurdo, c. v. d.

30. Teorema. — *Se due angoli convessi sono eguali, nella corrispondenza di eguaglianza saranno omologhi i vertici, e ai lati dell'uno corrisponderanno (in un certo ordine), i lati dell'altro.*

Dimostrazione. — Infatti sia $A\,(O)\,B = A_1\,(O_1)\,B_1$, e indichiamo con (O') A' e (O') B' gli omologhi di (O) A e (O) B rispettivamente. Allora nella data corrispondenza d'eguaglianza, ad A(O)B sarà omologo A'(O')B' (§ 27). Onde, per l'ipotesi, si deve avere $A'(O')\,B' \equiv A_1\,(O_1)\,B_1$, da cui si deduce (§ 15, Teor. II) quanto si voleva dimostrare.

31. Postulato XX. — *Se due angoli convessi* A (O) B *e* A' (O') B' *sono eguali, e sono omologhi* (Teor., § 30) (O) A *e* (O') A', *e quindi anche* (O) B *e* (O') B' *esisterà un'altra corrispondenza d'eguaglianza fra gli stessi angoli, nella quale sono omologhi* (O) A *e* (O)' B' *e quindi* (O) B *e* (O') A'.

Teorema. — *Se è* $A\,(O)\,B = A'\,(O)'\,B'$, $OA = O'A'$ $OB = O'B'$, *sarà* $AB = A'B'$.

Dimostrazione. — Infatti possiamo (Post. XX) sempre supporre che nella corrispondenza d'eguaglianza che intercede fra i due dati angoli, siano omologhi (O) A e (O') A', (O) B e (O') B'. Ne segue, per l'ipotesi fatta, che sono pure omologhi A, A', e B, B', onde è $AB = A'B'$, c. v. d.

32. POSTULATO XXI. — *Se è* $AC = AC'$, *e* $BC = BC'$, *con* C *e* C' *posti entrambi in uno stesso semipiano avente* (AB) *per asse sarà* $C \equiv C'$.

TEOREMA. — *Se* (O) B *e* (O) P *appartengono ad uno stesso semipiano avente* (OA) *per asse, e se è* $A(O)B = A(O)P$, *sarà* $(O)B \equiv (O)P$.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, supponiamo che nella relazione di eguaglianza che intercede fra A (O) B e A (O) P, sia (O) A tautologo (Post. XX), e sia $OP = OB$. Per il teorema precedente sarà $AB = AP$, onde (Postulato XXI) è $B \equiv P$, e quindi $(O)B \equiv (O)P$, c. v. d.

33. TEOREMA. — *Se* O (B) *appartiene ad* A (O) C e (O') B' *ad* A' (O') C', *se inoltre è* $A(O)B = A'(O')B'$, $A(O)C = A'(O')C'$, *allora sarà* $B(O)C = B'(O')C'$.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti possiamo (Post. XX) supporre che nella corrispondenza di eguaglianza che intercede fra A (O) C e A' (O') C', siano omologhi (O) A e (O') A'. Ma allora ad (O) B sarà omologo un certo raggio che dovendo formare con (O') A' e nell'angolo piatto (O') A' . C' un angolo eguale ad A (O) B, coinciderà (Teor., § 32) con (O') B'. Per cui sarà $B(O)C = B'(O')C'$, come figure corrispondenti in figure eguali.

34. POSTULATO XXII. — *Dato un raggio* (O) A, *in ogni angolo piatto avente* (O) A *per un lato, esiste un raggio formante con* (O) A *un angolo convesso eguale ad un angolo convesso dato.*

OSSERVAZIONE. — Questo raggio è *unico* in virtù del teorema del § 32.

35. TEOREMA. — *Due angoli piatti sono figure eguali, e precisamente esistono due diverse corrispondenze d'eguaglianza fra i loro punti, tali che in esse siano omologhi i lati dei due angoli.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano gli angoli piatti (O) A . B e (O') A' . B', e P un punto qualunque del primo di essi. Sia inoltre (O') M' quel raggio (§ 34) di (O)' A' . B', tale che è $A'(O')M' = A(O)P$, inoltre sia (§ 23) P' quel punto di (O') M', per cui è $O'P' = OP$. Assumeremo P' come omologo di P, ottenendo così, al variare di P, una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due angoli piatti dati, nella quale sono omologhi (O) A e (O') A', e i raggi a questi opposti. Vogliamo dimostrare che questa corrispondenza è d'eguaglianza.

Infatti se Q e Q' sono altri due punti omologhi, giacchè (Teor., § 33) è $P(O)Q = P'(O')Q'$, si ha (Teor., § 31) $PQ = P'Q'$.

In virtù poi del Post. XXI, la corrispondenza d'eguaglianza è unica, una volta che siano omologhi (O) A e (O') A'.

Che, infine, si possa stabilire un'altra relazione d'eguaglianza diversa da questa, segue dall'osservare che ad (O) A si può far corrispondere invece di (O') A', il raggio a questo opposto, c. v. d.

COROLLARIO. — *Due semipiani sono in infiniti modi figure eguali.*

36. DEFINIZIONE. — Due angoli convessi diconsi *opposti al vertice*, quando i lati dell'uno, sono raggi opposti ai lati dell'altro.

TEOREMA. — *Gli angoli convessi opposti al vertice sono eguali fra loro.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano opposti i raggi (O) A, (O) B′, e (O) B, (O) A′: dico che è A (O) B = A′ (O′) B′. Infatti, stabilita la corrispondenza di eguaglianza (Teor., § 35) fra gli angoli piatti (O) B.A e (O) B′ . A′, in modo che siano omologhi (O) B e (O) B′, (e quindi (O) A′ e (O) A), ad (O) A di (O) B . A corrisponda il raggio (O) A'_1 di (O) B′ . A′. Ne segue che deve essere A (O) A′ = A'_1 (O) A, e quindi (Teor., § 32) (O) A′ ≡ (O) A'_1, e di conseguenza A (O) B = A′ (O) B′ come figure corrispondenti in figure eguali, c. v. d.

37. OSSERVAZIONE. — Si osservi che dato un segmento AB, per ogni suo punto M, esiste (§ 22) un altro punto M′ tale che è AM = BM′.

POSTULATO XXIII. — *In ogni segmento* AB *esiste un punto* O, *tale che è* AO = OB. Cioè con altre parole: *In ogni segmento esiste un punto che lo divide in due parti eguali.*

Insomma si ammette che esista (almeno) una posizione di M, per cui sia M ≡ M′. Un siffatto punto dicesi punto *medio* del dato segmento.

38. TEOREMA. — *Ogni segmento ammette un sol punto medio.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti se M ed M_1 fossero due punti medi di AB, e se M, p. es., appartiene (Post. IV) ad AM_1, essendo $AM_1 = BM_1$, esisterebbe (Post. XVII) un punto N di BM_1, tale che è AM = BN, per cui anche (Post. XVI) BM = BN. E ciò è (Post. III e Teor., § 22) assurdo, c. v. d.

39. DEFINIZIONE. — Due punti diconsi *opposti* rispetto al punto medio del segmento che li congiunge. Due figure si chiamano *opposte* rispetto ad un punto O, se i loro punti sono riferiti biunivocamente, e se due qualunque punti omologhi, sono opposti rispetto ad O.

TEOREMA. — *Se* A, A′ *e* B, B′ *sono due coppie di punti opposti rispetto ad uno stesso punto* O, *è* AB = A′B′.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti oltre di essere, per ipotesi, OA = OA′ e OB = OB′, è pure (Teor., § 36) A (O) B = A′ (O) B′, onde (Teor., § 31) si ha: AB = A′B′, c. v. d.

COROLLARIO. — *Due figure opposte rispetto ad uno stesso punto, sono eguali.*

40. TEOREMA. — *Per il vertice di un angolo convesso, passa una semiretta ed una sola, che lo divide in due parti eguali.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia A (O) B l'angolo dato, e siano M ed M′ due punti dei suoi lati, in modo che sia OM = OM′; sia inoltre N il punto medio di MM′. Dico che è A (O) N = B (O) N. Infatti nella corrispondenza d'eguaglianza (Teor., § 35) fra gli angoli piatti (O) N . A e (O) N . B, avente come tautologhi i punti di (O) N, al punto M corrisponda un certo punto M_1. Siccome intanto è ON = ON, OM = OM_1, e NM = NM_1 sarà pure OM′ = OM_1 e NM′ = NM_1, onde (Post. XXI) è M′ ≡ M_1. Ne segue che nella sopradetta corrispondenza d'eguaglianza, sono omologhi (O) A e (O) B, per cui si ha A (O) N = B (O) N, come figure omologhe in figure eguali. Che, poi, solamente (O) N divide A (O) B in due parti eguali, segue dall'osservare che un raggio (O) N_1 siffatto, contiene il punto medio di ogni segmento come MM', e ciò sia per la corrispondenza d'eguaglianza che intercederebbe fra A (O) N_1 e B (O) N_1, sia, pure, in virtù del teorema del § 31.

Definizione. — La semiretta che divide un dato angolo convesso in due parti eguali, dicesi *bisettrice* di questo.

41. Teorema. — *Le bisettrici di due angoli convessi opposti al vertice, sono opposte.*

Dimostrazione. — A tal fine basterà dimostrare che se (O) M è la bisettrice di A (O) B, la semiretta (O) M' opposta ad (O) M. è la bisettrice di A' (O) B'. E infatti si ha: A(O)M = B (O) M, A (O) M = A' (O) M', B (O) M = B' (O) M', onde è A' (O) M' = B' (O) M', c. v. d.

42. Definizione. — Dati tre punti A, B, C non situati in una stessa retta, chiameremo *triangolo* la figura costituita dai punti dei segmenti AB, BC, CA, e dai punti dei segmenti aventi gli estremi su due di questi tre segmenti. I punti A, B e C si chiamano *vertici* del triangolo ABC; AB, BC, CA ne sono i *lati*. Gli angoli convessi B (A) C, A (C) B, e C (B) A, si dicono *angoli del triangolo*. Diconsi *opposti* A e BC, B e AC, C e AB. La figura costituita dai lati di un triangolo si chiama *contorno* di questo.

Teorema. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, e gli angoli fra questi compresi eguali, sono eguali, e hanno i rimanenti lati eguali.*

Dimostrazione. — Infatti i dati triangoli sono figure corrispondenti negli angoli eguali per ipotesi.

43. Teorema. — *Se due triangoli hanno i lati rispettivamente eguali, essi hanno eguali gli angoli opposti a lati eguali, ed essi stessi* (Teor., § 42) *sono eguali.*

Dimostrazione. — Sia AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A', dico che è A(C)B = A'(C')B'. Infatti sia (C) A_1 quel raggio (§ 34) di (C) B . A, per cui è B (C) A_1 = B' (C') A', e sia, inoltre, CA_1 = C'A'. Si deduce (Teorema, § 42) A_1B = A'B', e quindi (Post. XXI) A ≡ A_1, per cui A (C) B = = A' (C') B'. Analogamente si dimostra essere B (A) C = B' (A') C', e A (B) C = A' (B') C', c. v. d.

44. Definizione. — Dato un triangolo ABC, i punti che ad esso appartengono, senza giacere in alcuno dei lati, diconsi *interni* ad ABC.

Teorema. — *Ogni punto interno ad un triangolo, è interno ad un segmento avente un estremo in uno qualunque dei vertici e l'altro estremo nel lato opposto.*

Dimostrazione. — Per la data definizione di triangolo (§ 42), se P è un punto interno ad un dato triangolo ABC, esso è interno ad un segmento MN, avente gli estremi su due lati di ABC. Vogliamo dimostrare che P è interno ad un segmento avente un estremo in A, p. es., e l'altro sul lato opposto BC. Infatti consideriamo prima il caso che essendo interno M ad AC, N lo sia ad AB. Allora (A) P incontra (Post. IX) BC in un punto interno D. Siccome poi entrambi i punti M ed N appartengono a quella delle due parti in cui il piano è diviso (Teor. II, § 20) da (BC), la quale contiene A, MN non incontra (BC), onde A e P sono in una stessa parte di piano rispetto a (BC). Se ne deduce che D non è in AP, e quindi (Def., § 6) è P in AD.

Consideriamo ora il caso in cui mentre M è in AC, N sia in BC. Intanto (A) N è interno a B (A) C, onde (Teor. I, § 10) anche (A) P appartiene a B (A) C, e quindi esso incontrerà BC in un certo punto D. Siccome, inoltre, AM non incontra (BC), i punti A ed M appartengono (Teor. II, § 20) ad una stessa delle due parti in cui (BC) divide il piano. Ma anche P appartiene a questa stessa parte, onde AP non incontra (BC), per cui P è in AD.

Analogamente si dimostra che P è interno ad un segmento avente un estremo in B e l'altro in AC, e ad un altro segmento avente un estremo in C e l'altro in AB.

Osservazione. — Il triangolo dunque è la figura dei punti che appartengono ai segmenti aventi un estremo fisso comune, e l'altro appartenente ad un segmento dato; la retta di questo non passante per il punto fisso.

Corollario. — *Due punti interni ad un triangolo, sono congiunti da un segmento tutto interno al triangolo.*

45. Osservazione. — Se A, B, C e A', B', C' sono due terne di punti omologhi in una corrispondenza d'eguaglianza, e i punti A, B e C (e quindi A', B', C') non sono allineati, ai punti interni al triangolo ABC corrisponderanno i punti interni ad A'B'C'.

Teorema I. — *Se due triangoli coincidono, hanno gli stessi lati.*

Dimostrazione. — Sia $ABC \equiv A'B'C'$; se, p. es., A'B' non fosse un lato di ABC, esisterebbe un punto M interno ad A'B' e ad ABC. Allora M deve (Def., § 42) essere interno ad un segmento PQ avente gli estremi sul contorno di ABC. Ma per essere $ABC \equiv A'B'C'$, tutti i punti di PQ apparterrebbero ad A'B'C', e quindi (Teor., § 44) all'angolo B' (A') C', e ciò (Teor. I, § 15) è assurdo, c. v. d.

Teorema II. — *Se due triangoli sono eguali, ai vertici dell'uno saranno omologhi nella corrispondenza d'eguaglianza, i vertici dell'altro.*

Dimostrazione. — Siano ABC e A'B'C' due triangoli eguali, e dicansi A_1, B_1 e C_1 i punti del secondo triangolo omologhi ai vertici A, B, C del primo, nella corrispondenza d'eguaglianza.

Si ha: $A'B'C' \equiv A_1B_1C_1$, per cui (Teor. I) ai vertici di ABC sono omologhi nella corrispondenza d'eguaglianza, i vertici A', B' e C', c. v. d.

46. Teorema. — *Se due triangoli sono eguali, essi hanno i lati rispettivamente eguali.*

Dimostrazione. — Infatti ai vertici dell'uno corrispondono (Teor., § 45) i vertici dell'altro, per cui ai lati dell'uno i lati dell'altro, c. v. d.

Corollario. — *Se due triangoli sono eguali, essi hanno eguali gli angoli aventi vertici omologhi.*

Dimostrazione. — Segue dal teorema precedente e dal Teor. del § 43.

Giuseppe Marletta.

Catania, dicembre 1904.

SULLA CONGRUENZA E SIMMETRIA DELLE FIGURE [1]

§ 1. — Figure simmetriche rispetto ad un punto.

Definizione I. — Due punti si dicono **simmetrici** rispetto al punto di mezzo del segmento da essi determinato; questo punto dicesi **centro di simmetria**.

Definizione II. — Due figure si dicono **simmetriche rispetto ad un punto**, se i punti dell'una sono simmetrici ai punti dell'altra rispetto a questo punto.

Teorema I. — *La figura simmetrica ad un segmento rispetto ad un punto è un segmento eguale e parallelo ad esso.*

Infatti se AB è il segmento dato ed A', B' sono i punti simmetrici ad A, B rispetto al centro di simmetria O, dall'eguaglianza dei due triangoli OAB, OA'B' si ricava appunto che il segmento A'B' è eguale e parallello ad AB.

Teorema II. — *Due figure simmetriche rispetto ad un punto sono eguali fra loro.*

Infatti ad ogni punto dell'una corrisponde uno ed un solo punto dell'altra; inoltre, per il Teor. precedente, i segmenti dell'una sono eguali ai segmenti dei punti corrispondenti dell'altra. [2]

§ 2. — Segmenti congruenti e simmetrici sulla retta.

Definizione I. — Due segmenti eguali d'una stessa retta si dicono **congruenti** se hanno lo stesso verso; si dicono **simmetrici** se sono di verso opposto.

Da questa definizione si deducono immediatamente i seguenti corollari:

Corollario I. — *Due segmenti congruenti o simmetrici ad uno stesso segmento sono congruenti fra loro.*

Corollario II. — *Due segmenti l'uno congruente e l'altro simmetrico ad uno stesso segmento sono simmetrici fra loro.*

---

(1) Negli *Elementi di Geometria* di Giuseppe Veronese è contenuta una breve "Nota sulle figure congruenti e simmetriche". Siccome però tale argomento non fa parte del programma per le nostre scuole secondarie, esso non è trattato comunemente nei libri di testo. Presentando quindi ai lettori del *Periodico* questo breve studio, spero di non fare cosa del tutto priva d'interesse. Nel compilarlo sono partito appunto dalle definizioni che si trovano nella Nota ricordata, e mi sono servito in parte anche di quanto lo stesso Autore espone sul medesimo argomento ne' suoi *Fondamenti di Geometria.*

(2) Vedi Veronese, *Elementi di Geometria,* parte I, ediz. III, pag. 22.

Come il lettore riconoscerà facilmente, in questa dimostrazione si considerano soltanto le figure rettilinee; però se le due figure fossero non rettilinee, esse sarebbero pure eguali, poichè si corrisponderebbero nelle due figure rettilinee eguali determinate dai medesimi punti.

Definizione II. — Dato un punto X del segmento AB, se X' è il punto del segmento ad esso congruente o simmetrico A'B', tale che AX = A'X' (e quindi anche tale che BX = B'X'), i due punti X, X' si dicono **corrispondenti nella congruenza o simmetria** dei segmenti dati.

E così pure dati due segmenti congruenti o simmetrici, i segmenti determinati da punti corrispondenti si dicono **corrispondenti nella congruenza o simmetria** dei segmenti dati.

Teorema I. — *Due segmenti corrispondenti in due segmenti congruenti o simmetrici sono rispettivamente congruenti o simmetrici.*

Se AB, A'B' sono due segmenti congruenti o simmetrici, e se X, X'; Y, Y' sono due coppie di punti corrispondenti, essendo (Def. II): AX = A'X' ed AY = A'Y' si ha pure:

$$AY - AX = A'Y' - A'X'$$

ossia

$$XY = X'Y'.$$

Ma siccome in segmenti congruenti i punti corrispondenti si succedono nello stesso verso, mentre in segmenti simmetrici si succedono in verso opposto, nel primo caso XY ed X'Y' saranno congruenti, nel secondo simmetrici.

Definizione III. — Se due segmenti eguali hanno due punti corrispondenti che coincidono in un punto, questo si dice **punto unito** dei due segmenti.

Teorema II. — *Se due segmenti congruenti hanno un punto unito, coincidono.*

Infatti se X, X' sono due punti corrispondenti in due segmenti congruenti AB, A'B' e coincidono, stabilita la corrispondenza fra i due segmenti, si ha che AX ed A'X' sono congruenti (Teor. I); ma affinchè ciò avvenga è necessario che anche A coincida con A'. Così pure B coinciderà con B'.

Teorema III. — *Se due segmenti simmetrici* AB, A'B' *hanno una parte in comune* BB', *il punto medio di* BB' *è un punto unito per i due segmenti.*

Indicando con X questo punto medio ed essendo BX = B'X, al punto X considerato come appartenente ad AB corrisponde il punto X stesso considerato come appartenente ad A'B'. In particolare se nei due segmenti gli estremi B e B' coincidono in un punto, questo è un punto unito.

Teorema IV. — *Se due segmenti simmetrici hanno un punto unito, due punti corrispondenti qualunque sono simmetrici rispetto ad esso.*

Infatti se X è il punto unito di due segmenti simmetrici, e Y, Y' sono due punti corrispondenti qualunque, i due segmenti XY, XY' sono essi pure simmetrici (Teor. I); quindi i punti Y, Y' sono simmetrici rispetto ad X.

Corollario. — *Due segmenti simmetrici non possono avere che un punto unito.*

Teorema V. — *Se due segmenti simmetrici* AB, A'B' *non hanno alcun punto unito, due punti corrispondenti qualunque sono simmetrici rispetto al punto medio del segmento* BB'.

Se X è questo punto medio si ha intanto $XB = XB'$; inoltre se Y, Y' sono due punti corrispondenti in AB ed in A'B', si ha: $BY = B'Y'$. Da ciò si ricava:

$$XB + BY = XB' + B'Y'$$

ossia

$$XY = XY'.$$

Ma Y e Y' sono da parti opposte rispetto ad X; quindi sono simmetrici rispetto ad esso.

Osservazione. — Dai teoremi precedenti risulta che: Dati due segmenti simmetrici su una retta, esiste sempre un punto di essa, rispetto al quale due punti corrispondenti qualunque sono simmetrici.

§ 3. — Figure simmetriche rispetto ad una retta.

Definizione I. — Due punti distinti aventi la medesima distanza da una retta e situati sulla stessa perpendicolare a questa retta si dicono **simmetrici rispetto alla retta** e questa si chiama **asse di simmetria.**

Osservazione I. — I punti dell'asse sono simmetrici di se stessi.

Osservazione II. — Due punti simmetrici rispetto ad un asse sono simmetrici rispetto al punto comune all'asse ed alla retta alla quale appartengono.

Definizione II. — Due figure si dicono **simmetriche rispetto ad un asse** quando i punti dell'una sono simmetrici ai punti dell'altra rispetto a quest'asse.

Dalle precedenti definizioni si ricava il seguente:

Corollario. — *Le due parti del piano in cui esso è diviso da una sua retta sono simmetriche rispetto ad essa.*

Teorema I. — *La figura simmetrica ad un segmento, rispetto ad un asse, è un segmento eguale ad esso. Le rette dei due segmenti s' incontrano in un punto dell'asse e formano con esso angoli eguali.*

Consideriamo prima il caso di un segmento AB avente un estremo, per es. B, sull'asse di simmetria s. Allora il punto B' simmetrico di B, coincide con esso; se P è il punto d' incontro della retta AA' con l'asse, i due triangoli ABP, A'B'P avendo BP in comune, $PA = PA'$ e gli angoli in P retti, sono eguali; quindi si ha anche: $AB = A'B'$ e $A\widehat{B}P = A'\widehat{B'}P$.

Sia dato ora un segmento AC tale che non abbia un estremo sull'asse, ma che la retta alla quale appartiene incontri l'asse, nel punto B, coincidente con B'. Condotta per C la perpendicolare all'asse e indicando con C', P' i punti d'incontro con la A'B' e con l'asse, dall'eguaglianza dei triangoli CBP', C'B'P' si ricava intanto: $CP' = C'P'$, ossia C' è il simmetrico di C; inoltre, essendo pure $CB = C'B'$, risulta $AC = A'C'$.

Infine se il segmento dato è perpendicolare all'asse di simmetria, lo è pure il segmento simmetrico e i due segmenti appartengono ad una stessa retta; se esso è parallelo all'asse, lo è pure il segmento simmetrico e le rette dei due segmenti incontrano l'asse nel suo punto all' infinito.

Teorema II. — *Due figure simmetriche rispetto ad una retta sono eguali.*

La dimostrazione è identica a quella del teor. II, § 1.

Teorema III. — *Due figure situate in un medesimo piano* (1) *e simmetriche rispetto ad una retta di esso sono di verso opposto.*

Consideriamo prima due triangoli, e per maggiore semplicità supponiamo che essi abbiano un lato BC in comune e appartenente all'asse di simmetria, mentre i vertici A, A' sono due punti simmetrici rispetto ad esso. Evidentemente gli angoli $A\widehat{B}C$, $A'\widehat{B}C$ aventi il lato BC in comune ed i due lati BA, BA' da parti opposte rispetto ad esso, sono di verso opposto; quindi, poichè i versi di un triangolo sono quelli d'uno dei suoi angoli, anche i triangoli ABC, A'BC sono di verso opposto.

Ricordando ora che gli angoli corrispondenti di due figure eguali, in uno stesso piano, sono diretti nel medesimo verso o in verso opposto se lo sono due qualunque di essi, (2) il teorema si potrà estendere a due figure qualunque.

Teorema IV. — *Due segmenti simmetrici ad uno stesso segmento rispetto a due assi paralleli sono paralleli fra loro.*

Se il segmento dato è parallelo ai due assi la cosa è evidente. Negli altri casi basta osservare che la retta del segmento dato forma con le rette dei due segmenti ad esso simmetrici due angoli alterni interni oppure due angoli corrispondenti eguali, secondochè i due assi sono da parti opposte rispetto al segmento dato oppure dalla stessa parte (Teor. I).

Teorema V. — *Due punti* A', A'' *simmetrici ad uno stesso punto* A *rispetto a due assi perpendicolari* s, s' *sono simmetrici rispetto al punto d'incontro* O *degli assi.*

Indicando con S, R i punti d'incontro di AA' con s' e di AA'' con s, dall'eguaglianza dei due triangoli A'SO, A''RO risulta intanto OA' = OA''. Inoltre, i due angoli $A'\widehat{O}S$, $A''\widehat{O}R$ essendo complementari, l'angolo $A''\widehat{O}A'$ è piatto.

Corollario I. — *Due segmenti simmetrici ad uno stesso segmento rispetto a due assi perpendicolari sono paralleli fra loro.*

Corollario II. — *Due figure simmetriche ad una stessa figura rispetto a due assi perpendicolari sono simmetriche rispetto al punto d'incontro degli assi.*

§ 4. — Figure congruenti e simmetriche sul piano.

Definizione I. — Due figure eguali nel piano aventi due angoli dello stesso verso (e quindi anche tutti gli altri) (3) si dicono **congruenti**.

Definizione II. — Due figure eguali nel piano aventi due angoli di verso opposto (e quindi anche tutti gli altri) si dicono **simmetriche**.

Da queste definizioni segue che:

Corollario I. — *Due figure congruenti o simmetriche ad una terza figura sono congruenti fra loro.*

(1) Il teor. precedente, come il teor. II § 1, vale anche per figure non piane.
(2) Veronese, *Fondamenti di Geometria*, pag. 353.
(3) Vedi dimostrazione del Teor. III, § 3.

Corollario II. — *Due figure l'una congruente e l'altra simmetrica ad una terza figura sono simmetriche fra loro.*

Teorema I. — *Due figure situate in un medesimo piano e simmetriche rispetto ad un asse sono simmetriche fra loro.*

Infatti due figure simmetriche rispetto ad un asse sono eguali (Teor. II, § 3) e di verso opposto (Teor. III, § 3).

Teorema II. — *Due figure congruenti aventi due punti uniti coincidono.*

Se A, B sono i punti della prima figura che coincidono con i punti corrispondenti A′, B′ della figura congruente, e se C è un altro punto della prima, il punto corrispondente C′ nell'altra è tale che il triangolo A′B′C′ è congruente al triangolo ABC. Quindi C′ dovrà necessariamente essere dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB, e se ciò avviene esso coincide con C. La stessa cosa si verifica per ogni altra coppia di punti corrispondenti.

Teorema III. — *Due figure simmetriche aventi due punti uniti sono simmetriche rispetto alla retta da essi determinata.*

Siano ABC..., A′B′C′... due figure simmetriche aventi due coppie AA′, BB′ di punti corrispondenti che coincidono. I due triangoli ABC, A′B′C′ determinati da punti corrispondenti, sono eguali; quindi gli angoli $C\widehat{A}B$, $B'\widehat{A'}C'$ sono eguali ma di verso opposto. Congiungendo C con C′, se P è il punto d'incontro di tale congiungente con la retta AB, dall'eguaglianza dei due triangoli CPA, C′PA′, risulta $CP = C'P$ e $C\widehat{P}A = A'\widehat{P}C'$, ossia i punti C e C′ sono situati sopra una perpendicolare alla retta AB ed alla medesima distanza da essa. Lo stesso accadendo per ogni altra coppia di punti corrispondenti, si concluderà che le due figure considerate hanno la retta AB per asse di simmetria.

§ 5. — Figure simmetriche rispetto ad un piano.

Definizione I. — Due punti distinti aventi la medesima distanza da un piano e situati sulla stessa perpendicolare a questo piano si dicono **simmetrici rispetto al piano**, e questo dicesi **piano di simmetria.**

Osservazione I. — I punti del piano di simmetria sono simmetrici di se stessi.

Osservazione II. — Due punti simmetrici rispetto ad un piano sono simmetrici rispetto al punto d'incontro della retta alla quale appartengono col piano.

Definizione II. — Due figure si dicono **simmetriche rispetto ad un piano** quando i punti dell'una sono simmetrici ai punti dell'altra rispetto ad esso.

Corollario. — *Le parti dello spazio in cui esso viene diviso da un piano sono simmetriche rispetto a questo piano.*

Teorema I. — *La figura simmetrica ad un segmento rispetto ad un piano è un segmento eguale ad esso. Le rette dei due segmenti si* *incontrano in un punto del piano di simmetria e formano con esso angoli eguali.*

Indicando con π il piano di simmetria, se A e A', B e B' sono due coppie di punti simmetrici, si riconosce facilmente che i due segmenti AB, A'B' sono situati in un piano α, perpendicolare a π, e sono simmetrici rispetto alla retta s comune ai due piani. Quindi (Teor. I, § 3) essi sono eguali e le loro rette s'incontrano in un punto della retta s, formando con essa, e quindi con π, angoli eguali.

Teorema II. — *La figura simmetrica ad un piano rispetto ad un piano è un altro piano; essi s'incontrano in una retta del piano di simmetria e formano con esso angoli diedri eguali.*

Infatti consideriamo il piano dato come determinato da una sua retta r e da un suo punto P fuori di essa. Se r' e P' sono la retta ed il punto simmetrici ad r e P rispetto al piano di simmetria π, ogni punto del fascio (Pr) ha per simmetrico un altro punto del fascio (P'r'); quindi il piano P'r' è simmetrico al piano Pr rispetto a π.

Le rette simmetriche dei due piani s'incontrano nei punti della retta d'intersezione dei piani stessi, la quale sarà quindi sul piano π.

Infine considerando un piano perpendicolare alla retta d'intersezione dei due piani, è evidente che le sezioni normali da esso determinate nei diedri che i piani formano con π sono eguali (Teor. I), quindi anche i diedri sono eguali.

Teorema III. — *Due figure simmetriche rispetto ad un piano sono eguali.*

La dimostrazione è identica a quella del teorema II, § 1.

Teorema IV. — *Due triedri (e quindi anche due tetraedri) simmetrici rispetto ad un piano sono di verso opposto.*

Sia, per maggiore semplicità, BCD un triangolo del piano di simmetria, e siano A, A' due punti simmetrici rispetto allo stesso piano; i due triedri A (BCD), A'(BCD) sono eguali e di verso opposto. Infatti basta ricordare che i versi di un triedro sono quelli di uno dei suoi diedri; ora i due triedri C (ABD), C (A'BD) sono di verso opposto; lo stesso accade per i diedri di spigoli CA, CA' e quindi per i diedri stessi con gli spigoli in direzione opposta, cioè AC, A'C e per conseguenza anche per i triedri dati.

Teorema V. — *Due segmenti simmetrici ad uno stesso segmento rispetto a due piani paralleli sono paralleli fra loro.*

Osservando che il segmento dato e i due segmenti ad esso simmetrici sono situati in uno stesso piano perpendicolare ai piani paralleli di simmetria, la dimostrazione si riconduce a quella del Teor. IV, § 3.

Teorema VI. — *Due punti simmetrici ad uno stesso punto rispetto a due piani perpendicolari sono simmetrici rispetto alla retta d'intersezione dei due piani di simmetria.*

Con un'osservazione analoga a quella fatta per il teorema precedente, la dimostrazione si riconduce a quella del Teor. V, § 3.

Corollario. — *Due figure simmetriche ad una stessa figura rispetto a due piani perpendicolari sono simmetriche rispetto alla retta d'intersezione dei piani di simmetria.*

§ 6. — Figure congruenti e simmetriche nello spazio.

Definizione I. — Due figure eguali nello spazio aventi due[1] triedri dello stesso verso si dicono **congruenti**.

Definizione II. — Due figure eguali nello spazio aventi due triedri di verso opposto si dicono **simmetriche**.

Da queste definizioni si ricava quanto segue:

Corollario I. — *Due figure congruenti o simmetriche ad una stessa figura sono congruenti fra loro.*

Corollario II. — *Due figure l'una congruente e l'altra simmetrica ad una stessa figura sono simmetriche fra loro.*

Teorema I. — *Due figure simmetriche rispetto ad un piano sono simmetriche fra loro.*

Infatti due figure simmetriche rispetto ad un piano sono eguali e di verso opposto (Teor. III e IV, § 5).

Teorema II. — *Se due figure congruenti hanno due punti uniti, esse hanno per punti uniti tutti i punti della retta da essi determinata.*

Siano A e B i punti della prima figura, che coincidono con i punti corrispondenti A′ e B′ della figura congruente. Nella corrispondenza di eguaglianza determinata dalle due figure, la retta AB corrisponde a sè stessa; quindi, scelto ad arbitrio un punto X di AB, il punto X′ corrispondente è situato sulla stessa retta, a distanze da A e B eguali a quelle di X; ossia X ed X′ coincidono.

Teorema III. — *Se due figure congruenti hanno tre punti uniti, non situati sopra una medesima retta, coincidono.*

Siano A, B, C i tre punti della prima figura che coincidono con i corrispondenti A′, B′, C′ della figura congruente. Se D è un altro punto qualunque della prima e D′ è il suo corrispondente nell'altra, i due tetraedri DABC, D′A′B′C′ saranno congruenti. Perciò D e D′ devono essere situati dalla stessa parte rispetto al piano ABC; ciò è possibile solamente se D e D′ coincidono.

Lo stesso avviene per ogni altra coppia di punti corrispondenti.

Teorema IV. — *Se due figure simmetriche hanno tre punti uniti, non situati sopra una medesima retta, esse hanno per punti uniti tutti i punti del piano da essi determinato e sono simmetriche rispetto a questo piano.*

Siano F ed F′ due figure simmetriche e siano A, B, C i punti della prima che coincidono con i punti corrispondenti A′, B′, C′ della seconda. Le parti delle due figure situate nel piano ABC, avendo tre punti uniti, coincidono; infatti la corrispondenza di eguaglianza fra due figure piane è determinata da due triangoli eguali, dati come corrispondenti; ora se questi coincidono anche le due figure coincidono.

---

[1] Si dimostra infatti il seguente teorema: I triedri corrispondenti di due figure eguali sono dello stesso verso o di verso opposto se lo sono due qualunque di essi. (Veronese, *Fondamenti di Geometria*, pag. 419).

La seconda parte del teorema si può dimostrare in modo analogo a quello del Teor. III al § 4; oppure più brevemente si potrebbe dimostrare come segue:

Sia F'' la figura simmetrica ad F rispetto al piano ABC. Essa è congruente alla figura F', ed avendo tre punti uniti con essa, coincide con essa (Teor. III).

A. Borriero.

SU D'UN'APPLICAZIONE DELLE FUNZIONI U_n, V_n DI LUCAS

1. Indicando con α e β $(\alpha \neq \beta)$ le radici di un'equazione quadratica, con p la loro somma e q il loro prodotto. il Lucas (V. *Theor. des nombres*, pag. 30 e segg.) ha studiato le due funzioni

$$\alpha^n+\beta^n=V_n=p^n-\frac{n}{1}p^{n-2}q+\frac{n(n-3)}{1.2}p^{n-4}q^2+\ldots+(-1)^h\frac{n}{h}C^{h-1}_{p-h-1}p^{n-2h}q^h+\ldots$$

$$\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=U_n=p^{n-1}-C^1_{n-2}p^{n-3}q+\ldots+(-1)^r C^r_{n-r-1}p^{n-r-1}q^r+\ldots$$

colle condizioni iniziali

$$U_1=1\,,\quad U_2=p\,;\qquad V_0=2\,,\quad V_1=p\,.$$

Ciò premesso, consideriamo il polinomio intero razionale di grado n

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n \qquad [I]$$

ed il trinomio di secondo grado

$$x^2-px-q=(x-\alpha)(x+\beta). \qquad [II]$$

Affinchè il polinomio [I] sia divisibile per il trinomio [II] è necessario e sufficiente che si abbia

$$f(\alpha)=\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+A_2\alpha^{n-2}+\ldots+A_n=0$$
$$f(-\beta)=(-\beta)^n+A_1(-\beta)^{n-1}+\ldots+A_n=0$$

e da queste deduciamo

$$\frac{\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}+\dfrac{f(-\beta)}{\beta}}{\alpha-(-\beta)}=\frac{\alpha^{n-1}-(-\beta)^{n-1}}{\alpha-(-\beta)}+A_1\frac{\alpha^{n-2}-(-\beta)^{n-2}}{\alpha-(-\beta)}+\ldots+\frac{A_n}{q},$$

$$\frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha-(-\beta)}=\frac{\alpha^n-(-\beta)^n}{\alpha-(-\beta)}+A_1\frac{\alpha^{n-1}-(-\beta)^{n-1}}{\alpha-(-\beta)}+\ldots A_{n-1},$$

ossia, servendoci delle funzioni U_n e V_n di Lucas,

$$\left.\begin{array}{l} U_{n-1}+A_1U_{n-2}+\ldots+A_{n-3}U_2+A_{n-2}U_1+\dfrac{A_n}{q}=0 \\ U_n+A_1U_{n-1}+\ldots+A_{n-2}U+A_{n-1}U_1=0 \end{array}\right\}. \qquad (U)$$

Le (U) *sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il polinomio* [I] *sia divisibile per il trinomio* [II].

Infatti le (U) sono verificate se il polinomio [I] è divisibile per il trinomio [II], ed inversamente si osserva che, se le (U) sono verificate, si ha

$$f(\alpha)=0 \qquad \text{ed} \qquad f(-\beta)=0,$$

e la cosa è dimostrata.

Nota. — Il teorema precedente è dimostrato in modo affatto diverso e con minore semplicità dai sigg. G. De Longchamps e Ch. Pravaz rispettivamente nei vol. 4° (pag. 70) e 5° (pag. 347) del *Jour. de Math.$^{\text{que}}$ di Longchamps.*

2. Le (U) includono la sola funzione U_n, costruendo le condizioni

$$f(\alpha)+f(-\beta)=0\,, \qquad \frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha-(-\beta)}=0$$

che si equivalgono colle (U), si hanno le condizioni

$$\left.\begin{array}{r} V_n+A_1V_{n-1}+A_2V_{n-2}+\ldots+A_{n-1}V_1+A_nV_0=0 \\ U_n+A_1U_{n-1}+A_2U_{n-2}+\ldots+A_{n-2}U_2+A_{n-1}U_1=0 \end{array}\right\} \qquad (W)$$

che contengono tutte e due le funzioni di Lucas.

3. Crediamo qui utilissimo indicare un'altra forma che può prendere la seconda delle (W).

Riteniamo il coefficiente p come un parametro variabile, allora si ha

$$2n\,U_n=V'_n$$

in cui V'_n è la derivata di V_n rispetto a p (V. " Sulle funzioni di U_n e V_n di Lucas ", Candido, *Period. di Matem.*, anno 1902, pag. 320), e le condizioni (W) divengono

$$\left.\begin{array}{r} V_n+A_1V_{n-1}+A_2V_{n-2}+\ldots+A_{n-1}V_1+A_1V_0=0 \\ \frac{1}{n}V'_n+\frac{A_1}{n-1}V'_{n-1}+\frac{A_2}{n-2}V'_{n-1}+\ldots+\frac{A_{n-2}}{2}V'_2+\frac{A_{n-1}}{1}V'_1=0 \end{array}\right\} (W')$$

4. Consegue da quanto abbiamo stabilito che:

Le condizioni affinchè il polinomio [I] *sia divibile per* $(x^2-px-q)^k$, *con* $n \geqslant 2k$, *sono le* 2k *condizioni, analoghe alle* (U) *od alle* (W), *od alle* (W') *costruite rispetto a' polinomi*

$$f(x).\ f'(x),\ f''(x),\ldots,\ f_{(k)}^{(k-1)}.$$

5. Consideriamo oltre al polinomio [I] un altro polinomio [I'] composto di fattori semplici

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k).$$

I binomi $x-\alpha_i$ possono combinarsi a due a due in $\frac{1}{2}[k(k-1)]$ modi, ossia si ha $\frac{1}{2}[k(k-1)]$ gruppi di trinomi di secondo grado e stabilite le condizioni di divisibilità di $f(x)$ per uno di questi gruppi rimangono stabilite le condizioni di divisibilità della $f(x)$ stessa per $\varphi(x)$.

Osservazione. — Tutte le condizioni testè accennate si possono ridurre a k solamente, ossia alle seguenti

$$\left.\begin{array}{r} f(\alpha_1)-f(\alpha_2)=0 \\ f(\alpha_1)+f(\alpha_2)=0 \\ f(\alpha_2)+f(\alpha_3)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\alpha_{k-2})+f(\alpha_{k-1})=0 \\ f(\alpha_{k-1})+f(\alpha_k)=0 \end{array}\right\} \qquad (L)$$

Infatti queste non possono sussistere senza che si abbia contemporaneamente

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\ldots f(\alpha_k)=0,$$

ossia senza che la $f(x)$ sia divisibile per $\varphi(x)$, ed inversamente se queste sussistono, cioè se sussiste la divisibilità, sussisterà anche il gruppo (L).

S'intende bene che in cambio della relazione $f(\alpha_1)-f(\alpha_2)=0$ si può associare a tutto il rimanente gruppo un'altra qualunque relazione

$$f(\alpha_k)-f(\alpha_1)=0 .$$

6. La cosa si estende alla divisibilità di $f(x)$ per $\varphi^k(x)$ e per $\varphi^k(x)\,\psi(x)$. Ne lasciamo lo studio al lettore.

Applicazioni.

Merita considerazione il caso di $n=2k$ (§ 4) perchè ci porta ad una relazione notevole esistente fra' coefficienti $A_0 \ldots A_n$ quando il polinomio (I) è la k^{ma} potenza del trinomio (II). Ci limiteremo a studiare la cosa per il polinomio di 4° grado: ciò non toglie nulla alla generalità del processo.

Se il polinomio

$$x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$$

è il quadrato del trinomio x^2-px-q, si deve avere

$$U_4+A_1U_3+A_2U_2+A_3U_1=0$$

$$U_3+A_1U_2+\left(A_2+\frac{A_4}{q}\right)U_1=0$$

$$4U_3+3\,A_1U_2+2\,U_1A_2=0$$

$$4\,U_2+\left(3\,A_1+\frac{A_3}{q}\right)U_1=0$$

ed eliminando fra queste equazioni le U si ha la risultante

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 1 & A_1 & A_2+\frac{A_4}{q} \\ 0 & 4 & 3\,A_1 & 2\,A_2 \\ 0 & 0 & 4 & 3\,A_1+\frac{A_3}{q} \end{vmatrix}=0,$$

da cui

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2+\frac{A_4}{q} \\ 4 & 3\,A_1 & 2\,A_2 \\ 0 & 4 & 3\,A_1+\frac{A_3}{q} \end{vmatrix}$$

e sviluppando e riducendo si ha, tenendo conto che è $q^2=A_4$,

$$A_4\,(8\,A_2-3\,A_1^2)^3=(A_1A_3-16\,A_4)^2$$

che è la relazione domandata.

La ricerca della relazione analoga a quella trovata esistente fra' coefficienti A_i $(i=1, 2, \ldots n)$ del polinomio (I), con $n=2k$, se questo è la potenza k^{ma} del trinomio (II), non presenta alcuna difficoltà.

Divisori di x^n+1 *della forma* x^2-px+1.

Riteniamo la V_n ed U_n funzioni di p; si ha allora la proposizione:

La condizione necessaria e sufficiente, perchè il trinomio

$$x^2-px+1$$

sia un divisore del binomio x^n+1 *è che l'equazione*

$$V_n+2=0 \tag{1}$$

ammetta una radice doppia p_1.

Infatti le (W) si riducono alle altre

$$V_n+2=0, \qquad U_n=0.$$

d'altra parte questo sistema è equivalente all'altro

$$V_n+2=0, \qquad V'_n=0.$$

(V. *Periodico*, loc. cit.) e la cosa è dimostrata.

Ora ci è noto che in questo caso (V. *Giornale del Battaglini*, Vol. 39, pag. 103) per $n=2k-1$ si hanno $k-1$ radici doppie ed una eguale a -2;

$$\text{per } n=2k \begin{cases} k=2k_1, \text{ si hanno } k \text{ radici doppie,} \\ k=2k_1-1, \text{ si hanno } k-2 \text{ radici doppie e due nulle,} \end{cases}$$

epperò la questione si può considerare svolta.

Osserviamo che dalle funzioni numeriche si ricava facilmente

$$V_{2k}=V_k^2-2,$$

epperò la (1) diviene

$$V_{2k}+2=V_k^2=0,$$

ciò che ci porta a concludere che:

Se $n=2k$

$$x^2_k+1=(x^2-p_1x+1)(x^2-p_2x+1)\ldots(x^2-px+1),$$

dove $p_1\ldots p_k$ sono le radici dell'equazione $V_k=0$.

Se $n=2k$ con $k=2k_1-1$ si ha

$$x^{2k}+1=(x^2+1)(x^2-p_1x+1)(x^2-p_{k-2}x+1),$$

dove $p_1\ldots p_{k-2}$ sono le radici non nulle della equazione $V_{4k_1-2}=0$.

Esempio 1°. — Sia il trinomio x^4+1, la $V_4+2=0$ è

$$p^4-4p^2+4=0,$$

ossia

$$(p^2-2)^2=0,$$

epperò

$$p_1=\sqrt{2}, \quad p_2=\sqrt{2}, \quad p_3=-\sqrt{2}, \quad p_4=-\sqrt{2},$$

e quindi

$$(x^4+1)=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1).$$

Esempio 2°. — Sia il trinomio x^5+1, la $V_5+2=0$ è

$$p^5-5p^3+5p+2=0.$$

Le radici di questa equazione sono $p_1 = -2$ che non essendo doppia non può essere adoperata e le altre

$$p_2 = -(\omega^1+\omega^4),\ p_3 = -(\omega^2+\omega^3),\ p_4 = -(\omega^3+\omega^2),\ p_5 = -(\omega^4+\omega^1)$$

dove, com'è noto (V. *Battaglini*, loc. cit.) ω è una radice quinta propria dell'unità, e tenendo conto che si ha $(-1)^5+1=0$, è pure

$$x^5+1=(x+1)(x+\omega^1)(x+\omega^2)(x+\omega^3)(x+\omega^4).$$

Questo metodo ci porta alla conclusione generale, certamente non nuova, ma che serve, per così dire, di controllo:

Indicando con ω una radice $(2k+1)^{ma}$ propria dell'unità si ha identicamente

$$x^{2k+1}+1=(x+1)(x+\omega^1)(x+\omega^2)\ldots(x+\omega^k).$$

Esempio 3°. — Sia il binomio x^6+1, la $V_6+2=0$ è

$$p^6-6p^4+9p^2=0,$$

da cui

$$p_1=0,\quad p_2=0,\quad p_3=\sqrt{3},\quad p_4=\sqrt{3},\quad p_5=-\sqrt{3},\quad p_6=-\sqrt{3},$$

epperò

$$x^6+1=(x^2+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1).$$

G. Candido.

PICCOLE NOTE

Sopra certi limiti dipendenti dal concetto di integrale definito.

Poichè l'osservazione che forma l'oggetto della breve nota del prof. Fubini, inserita nel fascicolo marzo-aprile 1905 di questo *Periodico*, sotto la rubrica " Piccole note ", può venire utilizzata pel calcolo di taluni limiti non semplici, come è anche fatto in quel caso particolare, credo sia opportuno dare ad essa quella maggiore estensione la cui possibilità fu già avvertita dall'A.; tanto più che la dimostrazione che qui indicheremo della proprietà da utilizzarsi è delle più semplici, pure trattandosi del caso generale.

Cominciamo col richiamare la nozione di integrale definito. Si abbia perciò una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $\overline{a\ b}$ (con $a<b$), e nel quale essa ha finiti i limiti inferiore e superiore. Diviso questo intervallo in n parti arbitrarie, per mezzo dei valori $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ di x, disposti in ordine crescente, si ponga

$$x_0=a,\qquad x_n=b,\qquad \delta_r=x_r-x_{r-1}\qquad (r=1,2,\ldots,n).$$

Siano l_r ed L_r i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo parziale $\overline{x_{r-1}\ x_r}$, e λ_r un numero qualunque compreso fra l_r, L_r; non escluso però che possa coincidere coll'uno o l'altro di questi due numeri. Si consideri un sistema *normale* di divisioni dell'intervallo $\overline{a\ b}$: cioè una successione infinita di differenti decomposizioni di $\overline{a\ b}$, scelte arbitrariamente, ma tali che la massima delle ampiezze delle varie parti che le formano vada tendendo a zero (e quindi il numero di queste parti, pure essendo sempre finito, crescerà oltre ogni limite). Per la m^a decomposizione (che consti di n_m parti), potremo considerare la somma

$$S_m=\sum_{r=1}^{r=n_m}\delta_r^{(m)}\lambda_r^{(m)}$$

... le $\delta^{(m)}$ e le $\lambda^{(m)}$ hanno un significato del tutto analogo a quello accennato ...mente. È noto che, se per la funzione $f(x)$ rimane soddisfatta la *condizione di integrabilità*, avremo

$$\lim_{m=\infty} S_m = \int_a^b f(x)\,dx\,;$$

qualunque sia il sistema normale di decomposizioni che si sceglie in $\overline{a\ b}$, e qualunque sia il valore che, nelle singole parti di tale intervallo, s'intende di fissare ...

Sia ora $F(x)$ una funzione qualunque infinitesima del 1° ordine nel punto zero; ... tale che si abbia

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{x} = k,$$

... k numero finito non nullo (e che è detto il *valore principale* dell'infinitesimo). Corrispondentemente ad ogni funzione $f(x)$ integrabile nell'intervallo $\overline{a\ b}$, e ad un qualsivoglia sistema normale di decomposizioni scelto in $\overline{a\ b}$, potremo considerare una successione infinita di somme, di cui la m^a (con m abbastanza grande, se $F(x)$ fosse definita soltanto in prossimità dello zero) sia

$$S'_m = \sum_{r=1}^{r=n_m} F(x_r^{(m)}), \qquad \text{essendo} \qquad x_r^{(m)} = \delta_r^{(m)}\lambda_r^{(m)}.$$

Ciò posto, la proprietà a cui alludevamo al principio è quella espressa dall'uguaglianza

$$\lim_{m=\infty} S'_m = k\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

e che ora passeremo a dimostrare.

Infatti, per ogni valore di x che non sia nullo, ponendo

$$\frac{F(x)}{x} - k = \varphi(x),$$

se ne ricaverà

$$F(x) = kx + x\varphi(x).$$

E quindi

$$S'_m = kS_m + \sum_{r=1}^{r=n_m} x_r^{(m)}\varphi(x_r^{(m)}).$$

Ora, corrispondentemente a quelle infinite decomposizioni dell'intervallo $\overline{a\ b}$, abbiamo una successione di gruppi di numeri, l'm^o dei quali contiene gli n_m elementi

$$x_1^{(m)},\ x_2^{(m)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}.$$

La somma dei valori assoluti degli elementi di un gruppo qualsivoglia non supera mai un determinato numero fisso, positivo e finito; giacchè si ha evidentemente

$$|\delta_1^{(m)}\lambda_1^{(m)}| + |\delta_2^{(m)}\lambda_2^{(m)}| + \ldots + |\delta_{n_m}^{(m)}\lambda_{n_m}^{(m)}| \leqq (b-a)M, \tag{2}$$

dove M indica il maggiore dei due valori assoluti che hanno i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ in $\overline{a\ b}$. Di più, gli elementi di tutti quei gruppi tendono *uniformemente* a zero (cioè tende a zero il massimo dei valori assoluti dei numeri dei vari gruppi; perchè tende a zero la massima delle $\delta^{(m)}$, e le $\lambda^{(m)}$ non superano mai M in valore assoluto). A causa di quest'ultima proprietà, e poichè si ha

$$\lim_{x=0} \varphi(x) = 0,$$

potremo concludere che, fissato un numero positivo σ del tutto arbitrario, esiste un valore di m sufficientemente grande, a partire dal quale risulterà sempre

$$|\varphi(x_r^{(m)})| < \frac{\sigma}{(b-a)M}\,. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n_m).$$

Ma allora, per la (2), ne seguirà

$$\left|\sum_{r=1}^{r=n_m} x_r^{(m)} \varphi(x_r^{(m)})\right| < \sigma.$$

Cioè, sebbene col crescere indefinito di m, il numero n_m tenda all'infinito, si avrà

$$\lim_{m=\infty} \sum_{r=1}^{r=n_m} x_r^{(m)} \varphi(x_r^{(m)}) = 0.$$

E dopo ciò, segue subito

$$\lim_{m=\infty} S'_m = k \lim_{m=\infty} S_m = k \int_a^b f(x)\, dx;$$

come appunto volevamo dimostrare.

La proprietà espressa dalla formula (1) potrà poi enunciarsi nel modo seguente.

Data una funzione f(x) *integrabile in un intervallo* $\overline{a\ b}$, *se invece di fare la somma di quei prodotti infinitesimi mediante i quali, col passaggio al limite, si otterrebbe il valore del suo integrale definito, si fa la somma dei valori che una funzione* F(x), *infinitesima del 1° ordine nel punto zero, acquista nei punti individuati da tali prodotti, il limite della nuova somma non differirà dall'integrale definito di* f(x) *che per un fattore costante; il quale è rappresentato dal valore principale, nel punto zero, dell'infinitesimo* F(x).

Ora questa proprietà, che del resto appare pressochè intuitiva, può essere evidentemente utilizzata per il calcolo del limite d'una somma di m valori che una funzione infinitesima del 1° ordine, nel punto zero, acquista in un intorno dello zero; mentre m tende all'infinito, e gli m punti dell'intorno vanno approssimandosi al punto zero. Volendo poi una formula di pratica applicazione, supporremo

$$n_m = m, \qquad \delta_1^{(m)} = \delta_2^{(m)} = \ldots = \delta_{n_m}^{(m)} = \frac{b-a}{m}, \qquad \lambda_r^{(m)} = f\left(a + r\frac{b-a}{m}\right).$$

Ed avremo così

$$\lim_{m=\infty} \sum_{r=1}^{r=m} F(x_r^{(m)}) = k \int_a^b f(x)\, dx, \tag{3}$$

essendo

$$x_r^{(m)} = \frac{b-a}{m} f\left(a + r\frac{b-a}{m}\right).$$

Ed ora non resterà che specializzare le funzioni F (x) e $f(x)$, per ottenere altrettanti limiti particolari. Così, potremo prendere (è questo il caso considerato dal prof. Fubini)

$$F(x) = \log(1+x), \qquad \text{e quindi} \qquad k = 1,$$

lasciando del resto arbitraria $f(x)$. Oppure

$$F(x) = \operatorname{sen} x, \qquad \text{e quindi} \qquad k = 1$$
$$F(x) = \frac{1-\cos x}{x}, \qquad \text{»} \quad \text{»} \qquad k = \tfrac{1}{2}$$
$$F(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}, \qquad \text{»} \quad \text{»} \qquad k = \tfrac{1}{6}.$$

E se la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $\overline{0\ 1}$, in luogo della formula (3) potremo considerare l'altra più semplice

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} F\left[\frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\right] = k \int_0^1 f(x)\, dx. \tag{4}$$

Per esempio, supposto $f(x) = x$, otterremo

$$\lim_{n=\infty} \left\{F\left(\frac{1}{n^2}\right) + F\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + F\left(\frac{n}{n^2}\right)\right\} = \tfrac{1}{2} k.$$

Ed in particolare, sarà

$$\lim_{n=\infty}\left(\text{sen}\,\frac{1}{n^2}+\text{sen}\,\frac{2}{n^2}+\ldots+\text{sen}\,\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n=\infty} n^2\left(\frac{1-\cos\frac{1}{n^2}}{1}+\frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{2}+\ldots+\frac{1-\cos\frac{n}{n^2}}{n}\right)=\frac{1}{4}.$$

È ovvio infine avvertire che le formule (1), (3), (4) saranno pure valide per ogni funzione che sia infinitesima del 1° ordine in un punto qualsivoglia x_0, purchè allora, in luogo di $F(x)$, si scriva $F(x_0+x)$.

MINEO CHINI.

BIBLIOGRAFIA

F. KLEIN und E. RIECKE. — *Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen.*
F. SHILLING. — *Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere ueber die Photogrammetrie.* Leipzig, Teubner 1904.

F. Klein è già favorevolmente noto ai lettori di questo *Periodico* per la sua pubblicazione: *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.* (1)

Nei due volumi suaccennati sono raccolte le conferenze, sopra varie questioni di matematica, di fisica e di astronomia, tenute a Gottinga, durante le vacanze pasquali del 1904, dai proff. Klein, Riecke, Schilling ecc. Essi hanno cercato di mostrare che le scuole superiori per essere rispondenti ai bisogni della vita moderna devono essere pratiche nei programmi, nei mezzi, nelle finalità.

Il Klein, mette in evidenza, con esempi presi dalle matematiche, che ogni disciplina deve svolgersi in relazione alla coltura generale che si vuole raggiungere nella scuola e combatte l'opinione di coloro che sostengono essere troppo elevato l'insegnamento della matematica nei licei per quelli che diventeranno medici, avvocati, economisti ecc.

Da noi quest'insegnamento era già abbastanza limitato ed è facile prevedere cosa avverrà adesso col nuovo ordinamento, per il quale la maggior parte degli alunni cessa di occuparsene dopo il primo anno.

Il Riecke nella sua conferenza tratta prima della teoria unitaria di Franklin, poi di quella dualistica di Symmer e quindi di quelle di Weber e di Maxwell-Hertz; si occupa dell'esistenza di particelle elettriche (joni) negli elettroliti, nell'aria e nelle fiamme; studia l'azione dei raggi catodici e Becquerel e parla infine del radio e della sua trasformazione in elio.

Lo Schilling nella sua prima lezione si occupa delle relazioni della geometria descrittiva con le altre discipline geometriche; nella seconda esamina le applicazioni di essa alla cinematica, meccanica, geodesia, astronomia, architettura, statica grafica, fisiologia e psicologia; e nella terza, esposti i procedimenti fotogrammetrici per una prospettiva unica, ne fa applicazione a due e più prospettive e poi alla pittura, architettura, geodesia, ed astronomia e termina colla descrizione dei relativi apparecchi. In un'appendice è poi dimostrata l'utilità dell'apparecchio di proiezione per l'insegnamento delle matematiche.

Come si vede, l'argomento di queste lezioni è sommamente istruttivo e le numerose figure che illustrano il libro dello Schilling le rendano attraenti e ne facilitano l'esposizione.

A. NEPPI MODONA.

(1) V. *Periodico di Matematica*, anno X 1895, pag. 187.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 giugno 1905