Indice Articoli Anno 1903

N°	Autore/i	Titolo	Pagine	Anno
1	TRAVERSO N.	SULLE PRINCIPALI OPERAZIONI DELL'ANALISI COMBINATORIA FORMALE E SU ALCUNE LORO APPLICAZIONI RELATIVE ALLO SVILUPPO RAPIDO DEI DETERMINANTI E DEGLI IPERDETERMINANTI (1/3)	1-30	1903
2	FRATTINI G.	DI UN CERTO ALGORITMO PER LO SVILUPPO DELLA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO INTERO IN FRAZIONE CONTINUA	31-35	1903
3	PESCI G.	SOPRA UNO DEGLI ERRORI PRODOTTI DALL'INTERPOLAZIONE SEMPLICE	35-41	1903
4	PICCIOLI E.	SULLA MINIMA DISTANZA DI DUE IPERSPAZI	41-42	1903
5	TAGIURI A.	GENERALIZZAZIONI RIGUARDANTI LA DIVISIBILITA' DEI NUMERI E LA TEORIA DELLE FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE	43-58	1903
6	NICOLETTI O.	SOPRA UN TEOREMA DELLA TEORIA DEI LIMITI	58-59	1903
7	MARENGHI C.	SOVRA UNA FORMULA DI CAUCHY	59-60	1903
8	TRAVERSO N.	SULLE PRINCIPALI OPERAZIONI DELL'ANALISI COMBINATORIA FORMALE E SU ALCUNE LORO APPLICAZIONI RELATIVE ALLO SVILUPPO RAPIDO DEI DETERMINANTI E DEGLI IPERDETERMINANTI (2/3)	73-116	1903
9	MIGNOSI G.	UN PROBLEMA SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI	117-123	1903
10	DELITALA G.	NUOVE PROPRIETA' DEI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO (SAGGIO DI GEOMETRIA RECENTE) (1/2)	124-137	1903
11	DA RIN E.	SULL'INTEGRAZIONE INDEFINITA DELLE FUNZIONI INVERSE	137-139	1903
12	ASCOLI G.	SOPRA UN MODO SEMPLICE DI GENERAZIONE DELLA SERIE DI TAYLOR	139-142	1903
13	TRAVERSO N.	SULLE PRINCIPALI OPERAZIONI DELL'ANALISI COMBINATORIA FORMALE E SU ALCUNE LORO APPLICAZIONI RELATIVE ALLO SVILUPPO RAPIDO DEI DETERMINANTI E DEGLI IPERDETERMINANTI (3/3)	153-184	1903
14	DELITALA G.	NUOVE PROPRIETA' DEI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO (SAGGIO DI GEOMETRIA RECENTE) (2/2)	185-191	1903
15	BRUSOTTI L.	DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA DI CALCOLO COMBINATORIO	191-192	1903
16	LAZZARINI M.	SUI NUMERI PERFETTI E SUI NUMERI DI MERSENNE	201-212	1903

SULLE PRINCIPALI

operazioni dell'analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti.

Sommario. — Introduzione — Formazione rapida delle permutazioni di n cose diverse — Formazione rapida delle combinazioni e disposizioni semplici m ad m — Formazione rapida e rappresentazione delle permutazioni di n cose non tutte differenti — Sviluppo rapido dei determinanti — Formazione ed enumerazione delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati — Nozioni sugli iperdeterminati; metodo per svilupparli e per determinare il numero dei loro termini.

INTRODUZIONE.

L'analisi combinatoria si occupa di questioni che possono ridursi a tre tipi principali. Dati alcuni oggetti possiamo infatti proporci: 1° di stabilire norme secondo le quali si possano in tutti i modi possibili aggruppare gli oggetti dati in modo che per ciascun gruppo siano soddisfatte determinate condizioni; 2° di determinare quanti sono i possibili gruppi, soddisfacenti a determinate condizioni, senza formarli; 3° di stabilire relazioni di dipendenza tra simboli, ognuno dei quali rappresenti il numero dei gruppi di data specie formati con dati oggetti. Per es. quando si stabiliscono le norme per formare le permutazioni, combinazioni m ad m ecc. di n cose diverse, si risolve una questione della 1ª specie; quando si prova che il numero delle permutazioni di n cose diverse è $n!$ si risolve una questione della 2ª specie; quando infine si prova che il numero delle disposizioni m ad m di n cose diverse è uguale al prodotto del numero delle combinazioni m ad m di tali cose, per il numero delle permutazioni di m cose, si tratta una questione della 3ª specie.

Segue da ciò che l'analisi combinatoria può dividersi in due parti; la 1ª tratta questioni della 1ª specie e potrebbe chiamarsi analisi combinatoria formale; la seconda tratta questioni della 2ª e 3ª specie e potrebbe chiamarsi analisi combinatoria quantitativa.

Chiunque apra un trattato di algebra cosidetta complementare, si accorgerà che nella trattazione di questioni riguardanti l'analisi combinatoria, si dà in generale poca importanza alla parte formale: esse sono considerate esclusivamente o quasi dal punto di vista quantitativo. Uno degli scopi che mi sono proposto colla pubblicazione della presente nota, è di mostrare quanto possa essere utile un largo sviluppo dell'analisi combinatoria formale. Ho limitato a tal uopo le mie considerazioni agli aggruppamenti più comuni, quali le permutazioni, combinazioni ecc., con particolare riguardo ai metodi per formare rapidamente le permutazioni di n cose diverse.

I concetti di permutazione, inversione di due elementi di una permutazione, classe e segno di una permutazione, sono famigliari a chi conosce appena i principî dell'algebra complementare; di essi si fa uso frequente per es. nella teoria dei determinanti: anzi occorre averli presenti, per ben comprendere la definizione stessa di determinante. La questione dello sviluppo rapido di un determinante, cioè della scritturazione rapida ed immediata dei suoi termini, senza ricorrere ai soliti sviluppi per mezzo di determinanti d'ordine inferiore, si attacca, attesa la definizione stessa di determinante, a quella della formazione rapida delle permutazioni di n cose differenti. Malgrado lo sviluppo già considerevole della teoria dei determinanti, una soluzione ben soddisfacente di tale questione, non si ha, per quanto io conósca, ancora. (*) In questa nota me ne occupo lungamente, esponendola quale applicazione della parte formale della teoria delle permutazioni di n cose diverse. L'indirizzo che ho seguito è, a parer mio, l'unico veramente razionale che conduca ad una buona soluzione.

Nella seconda parte del lavoro, premesse le necessarie definizioni, espongo la parte formale della teoria delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati, e ne faccio l'applicazione allo sviluppo rapido degli iperdeterminanti a due dimensioni. Ho trattato della formazione delle combinazioni a due dimensioni e dello sviluppo degli iperdeterminanti rettangolari in alcuni miei precedenti lavori; (**) in questo espongo alcuni nuovi metodi, i quali dal punto di vista pratico sono di gran lunga preferibili a quelli indicati nei suddetti lavori e credo che, tenuto conto della natura alquanto complessa di simili questioni, il lettore li troverà assai semplici.

Il concetto di combinazione a più dimensioni e quello correlativo di iperdeterminante non sono certamente troppo noti (***) e trattandone in questo lavoro ho voluto illustrarli largamente per mostrare in qual senso ritengo utile e razionale una generalizzazione dell'ordinaria analisi combinatoria elementare.

Relativamente alle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati, ho anche trattato il problema della determinazione del loro nu-

---

(*) Nel libro *I determinanti* del prof. E. Pascal (Manuale Hoepli) sono citati al § 9 i principali lavori che trattano dello sviluppo rapido dei determinanti.

(**) Saranno citati in seguito.

(***) Da poco tempo mi occupo nei miei lavori di tali enti che, per quanto sappia, sono stati studiati per la 1ª volta da me.

mero, senza formarle. A tale problema, come pure a quello equivalente della determinazione del numero dei termini di un iperdeterminante rettangolare, ho soltanto accennato nei miei lavori precedenti; in questo dimostro e confermo con esempi, come l'effettiva determinazione del numero delle combinazioni a due dimensioni si può far dipendere da poche e notevoli proprietà di un opportuno simbolo che lo rappresenta.

§ 1. Metodi per formare rapidamente le permutazioni di n cose diverse.

Metodo I. — Supponiamo che le n cose siano i numeri $1, 2 \dots n$, e per maggior semplicità sia dapprima $n = 4$. Si devono adunque formare le permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4. Si cominci a scriverne una qualunque, ad es. (1, 2, 3, 4). (*) Scambiando in essa il 1° elemento con ciascuno di quelli che lo seguono si ottengono le tre permutazioni (2 1 3 4), (3 2 1 4), (4 2 3 1). Da ciascuna delle quattro permutazioni già formate se ne possono dedurre altre due, tenendo fisso il 1° elemento e scambiando il 2° con ciascuno di quelli che lo seguono. In tal modo dalla

(1 2 3 4)	si deducono le	(1 3 2 4), (1 4 3 2)
(2 1 3 4)	"	(2 3 1 4), (2 4 3 1)
(3 2 1 4)	"	(3 1 2 4), (3 4 1 2)
(4 2 3 1)	"	(4 3 2 1), (4 1 3 2).

Si sono adunque già formate $4 + 4 \, . \, 2 = 12$ permutazioni. Da ciascuna di esse se ne può dedurre un'altra tenendo fissi i primi due elementi e scambiando il 3° col 4° (cioè con l'unico elemento che lo segue). Si hanno così altre 12 permutazioni, le quali assieme alle 12 già ottenute costituiscono un gruppo di 24 permutazioni tutte differenti. Sono adunque queste tutte le $4!$ permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4.

In generale per formare tutte le permutazioni di n elementi differenti si scrive una qualunque di esse e da essa si derivano altre $n - 1$ permutazioni scambiando il 1° elemento con ciascuno di quelli che lo seguono; da ognuna delle n permutazioni già formate si derivano altre $n - 2$ permutazioni, tenendo fisso il 1° elemento e scambiando il 2° con ciascuno di quelli che lo seguono. Si hanno così $n(n - 2)$ permutazioni che assieme alle n precedenti, costituiscono un gruppo di $n + n(n - 2) = n(n - 1)$ permutazioni. Da ognuna di queste si derivano $n - 3$ permutazioni tenendo fissi i primi due elementi e scambiando il 3° con ciascuno di quelli che lo seguono; si hanno così

(*) Scriveremo sempre una permutazione chiudendo fra le parentesi ( ) i suoi elementi che supporremo contati da sinistra a destra.

altre $n(n-1)(n-3)$ permutazioni, le quali assieme alle $n(n-1)$ precedenti, costituiscono un gruppo di $n(n-1)(n-2)$ permutazioni. E così si continua fino ad aver ottenuto $n(n-1)(n-2)\ldots 4.3$ permutazioni; in ciascuna di queste si scambierà allora il penultimo elemento con l'ultimo e si avranno altre $n(n-1)\ldots 4.3$ permutazioni, le quali, assieme alle $n(n-1)\ldots 4.3$ precedenti, costituiscono il gruppo di tutte le $n(n-1)\ldots 4.3.2 = n!$ permutazioni degli elementi dati.

È noto che una permutazione si dice di classe pari o dispari, secondochè il numero delle inversioni in essa contenute è pari e dispari. (*) Si considera poi quale segno di una permutazione il $+$ od il $-$ secondochè essa è di classe pari o dispari; perciò, se ν è il numero delle inversioni contenute in una permutazione, il suo segno sarà quello di $(-1)^\nu$.

Se interessasse non soltanto formare le permutazioni di n elementi differenti, ma determinare ancora il segno di ciascuna, si comincierà a determinare quello della 1ª permutazione scritta, contando le inversioni in essa contenute. Il segno delle permutazioni rimanenti si determinerà allora, senza contare le inversioni contenute in ciascuna di esse, ricordando che se da una permutazione si passa ad un'altra collo scambio di due elementi, questa è di segno contrario a quello della precedente. Dovendo formare le permutazioni dei numeri $1, 2, \ldots n$ si può assumere come permutazione principale la $(1\,2\ldots n)$, la quale, non contenendo alcuna inversione, ha il segno $+$.

Metodo II. — Cominciamo da un caso particolare. Si debbano ad es. formare le permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4. Scritta una di esse, ad es. la (1 2 3 4), possiamo subito ottenerne un'altra, eseguendo sulla 1ª una sostituzione circolare; (*) otteniamo adunque la (2 3 4 1). Da questa mediante sostituzione circolare si deduce la (3 4 1 2) e da questa la (4 1 2 3).

Si sono così già formate quattro permutazioni. Nella 1ª di esse, la (1 2 3 4), teniamo fisso il 1º elemento ed eseguiamo sui rimanenti una sostituzione circolare; otteniamo la (1 3 4 2), dalla quale con operazione analoga si deduce la (1 4 2 3). E similmente dalla

(2 3 4 1)	si deducono le	(2 4 1 3), (2 1 3 4)
(3 4 1 2)	„	(3 1 2 4), (3 2 4 1)
(4 1 2 3)	„	(4 2 3 1), (4 3 1 2).

(*) Essendo $a_1, a_2 \ldots a_n$, n elementi diversi ed essendo $(a_1a_2\ldots a_n)$ una loro permutazione della principale, si dice che nella permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$, due elementi α_i ed α_j fanno inversione se essendo a_i a destra (sinistra) di a_j nella $(a_1a_2\ldots a_n)$, lo stesso α_i è a sinistra (destra) di α_j nella $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$; in altre parole due elementi della $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ fanno inversione quando non sono disposti, l'uno rispetto all'altro, come nella permutazione principale. Se gli elementi sono numeri, si può assumere come permutazione principale quella nella quale sono disposti in ordine crescente, ed allora essendo r_1 ed r_2 due elementi di un'altra permutazione si dirà che r_1 fa inversione con r_2 se $r_1 > r_2$ e se r_1 è a sinistra di r_2.

(**) Si dice che si esegue una sostituzione circolare su n elementi $a_1, a_2, \ldots a_n$ quando si scambia ciascuno con quello che lo segue e l'ultimo col 1º, dimodochè il risultato di una sostituzione circolare eseguita su una permutazione $(a_1a_2\ldots a_n)$ è la permutazione $(a_2a_3\ldots a_na_1)$.

Si sono così già ottenute 12 permutazioni. Nella 1ª di esse, la (1234), teniamo fissi i primi due elementi, ed eseguiamo una sostituzione circolare sui rimanenti (cioè scambiamo gli elementi 3º e 4º). Otteniamo la (1 2 4 3) e similmente, con analoga operazione, da ciascuna delle rimanenti undici permutazioni possiamo dedurne un'altra, dimodochè abbiamo altre 12 permutazioni, le quali assieme alle 12 già formate, costituiscono il gruppo di tutte le permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4.

In generale per formare tutte le permutazioni di n elementi diversi, se ne forma una qualunque e si eseguiscono $n-1$ sostituzioni circolari, la 1ª sulla permutazione scritta, e ciascuna delle altre sulla permutazione ottenuta eseguendo la precedente. Da ognuna delle n permutazioni già formate si deducono altre $n-2$ permutazioni, tenendo fisso il 1º elemento ed eseguendo $n-2$ sostituzioni circolari sugli elementi rimanenti, ciascuna sostituzione dovendo eseguirsi sulla permutazione ottenuta eseguendo le sostituzione precedente. Si hanno così $n(n-2)$ permutazioni, le quali, assieme alle n precedentemente formate, costituiscono un gruppo di $n+n(n-2)=n(n-1)$ permutazioni. Da ognuna di queste si derivano altre $n-3$ permutazioni tenendo fissi i primi due elementi, ed eseguendo $n-3$ sostituzioni circolari sugli elementi rimanenti, ciascuna sostituzione dovendo eseguirsi sul risultato della sostituzione precedente. Si hanno così altre $n(n-1)(n-3)$ permutazioni, le quali assieme alle $n(n-1)$ precedentemente formate, costituiscono un gruppo di $n(n-1)(n-3)+$ $+n(n-1)=n(n-1)(n-2)$ permutazioni. E così si continua fino ad aver ottenuto un gruppo di $n(n-1)(n-2)\ldots 4.3$ permutazioni. Da ognuna di queste se ne dedurrà allora un'altra, tenendo fissi i primi $n-2$ elementi, ed eseguendo sui rimanenti una sostituzione circolare (cioè scambiando gli ultimi due elementi). Così si avranno altre $n(n-1)\ldots 4.3$ permutazioni, le quali assieme alle $n(n-1)\ldots 4.3$ precedenti costituiscono il complesso di tutte le $n(n-1)\ldots 4.3.2.=n!$ permutazioni degli elementi dati.

Volendo formare col metodo suddetto le permutazioni di n cose $a_1a_2\ldots a_n$ e determinare inoltre il segno di ciascuna, basterà tener conto di quanto segue. Sia $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\ldots\alpha_n)$ una di esse. Eseguendo una sostituzione circolare sugli elementi $\alpha_p,\ldots\alpha_n$, si ottiene la permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n\alpha_p)$. Ora si sa che una sostituzione circolare fra m elementi equivale alla successione di $m-1$ trasposizioni; pertanto la suddetta sostituzione circolare eseguita sugli elementi $\alpha_p\ldots\alpha_n$, i quali sono in numero di $n-p+1$, equivale ad $n-p+1-1$ ossia ad $n-p$ trasposizioni. Perciò se $n-p$ è pari, la permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n\alpha_p)$ è dello stesso segno della $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$; altrimenti è di segno contrario. Pertanto se n è pari (dispari), le permutazioni $\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n\alpha_p)$ ed $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ hanno o non hanno lo stesso segno secondochè p è pari (dispari) o dispari (pari). Pensiamo ora al processo dianzi indicato per ottenere dalla $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$

tutte le permutazioni rimanenti. Il segno di essa si potrà subito determinare contando il numero delle inversioni formate dai suoi elementi. Sia dapprima n pari. Le $n-1$ permutazioni ottenute eseguendo nel modo noto $n-1$ sostituzioni circolari, hanno tutte segno contrario a quello della $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Le $n-2$ permutazioni ottenute da ciascuna delle n permutazioni già formate, eseguendo nel modo noto $n-2$ sostituzioni circolari, hanno invece lo stesso segno della permutazione dalla quale si deducono; le $n-3$ permutazioni ottenute da ciascuna delle $n(n-1)$ già formate con $n-3$ sostituzioni circolari eseguite nel modo noto, hanno segno contrario a quello della permutazione dalla quale si deducono ecc.... Il contrario accade se n è dispari.

Notazioni e simboli. — Dati n elementi $a_1 a_2, \ldots a_n$ differenti, indicheremo con θ_{no} l'operazione che consiste nello scrivere una qualunque permutazione di essi. Essendo $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_q \ldots \alpha_n)$ una permutazione degli elementi $a_1, \ldots a_n$, indicheremo con σ_{pq} l'operazione che consiste nello scambiare in essa gli elementi che occupano i posti p^{mo} e q^{mo} e diremo che la permutazione $(\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}, (\alpha_q)_p, \alpha_{p+1}, \ldots$ $\ldots \alpha_{q-1}, (\alpha_p)_q, \alpha_{q+1}, \ldots \alpha_n)$ è il risultato dell'operazione σ_{pq} eseguita sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Per es. eseguendo l'operazione σ_{23} sulla $(2\,1\,5\,4\,6\,4)$, vale a dire scambiando gli elementi che occupano i posti 2° e 3°, si ha per risultato la $(2\,6\,5\,4\,1\,3)$.

È chiaro che le operazioni σ_{pq} e σ_{qp} sono equivalenti, giacchè eseguendole su una stessa permutazione si ottengono risultati identici.

Indicheremo con $\sigma_{pq} . \sigma_{rs} . \sigma_{uv} \ldots$ l'operazione che consiste nello scambiare gli elementi p^{mo} e q^{mo} nella $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$; poi nella permutazione ottenuta quelli aventi i posti r^{mo} e s^{mo}; poi nell'ultima permutazione ottenuta quelli aventi i posti u^{mo} e v^{mo} ecc. L'operazione $\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{uv} \ldots$ si dirà prodotto delle $\sigma_{pq}, \sigma_{rs}, \sigma_{uv} \ldots$ e si dirà risultato della $\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{uv} \ldots$ eseguita sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ il complesso delle permutazioni ottenute eseguendo σ_{pq} su $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, σ_{rs} sul risultato di σ_{pq}, σ_{uv} sul risultato di σ_{rs} ecc. Per es. il risultato dell'operazione $\sigma_{12}\sigma_{24}\sigma_{35}$ eseguita sulla permutazione $(2\,1\,5\,3\,4)$ è il complesso delle permutazioni $(1\,2\,5\,3\,4)$, $(1\,3\,5\,2\,4)$, $(1\,3\,4\,2\,5)$.

Il simbolo σ_{qq} rappresenta lo scambio di un elemento con sè stesso; quindi se esso compare, qual fattore, in un prodotto di σ, si può sopprimere.

Eseguire un'operazione su un gruppo di permutazioni significherà eseguirla su ciascuna permutazione del gruppo.

Scrivendo il segno $=$ tra i simboli di due operazioni da eseguirsi su una stessa permutazione o su uno stesso gruppo di permutazioni allo scopo di ottenere altre permutazioni, intenderemo di affermare che tutte le permutazioni ottenute quali risultato della 1ª operazione, si possono ottenere quali risultato della 2ª e viceversa. E le suddette due operazioni si diranno equivalenti rispetto alla permutazione (od al gruppo di permutazioni) sulle quali devono eseguirsi.

Indicheremo il prodotto $\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,q+2}\ldots\sigma_{q,r}$, $(r>q)$, con τ_{qr} e scriveremo $\tau_{qr}\tau_{qr}\ldots\tau_{qr}$, od anche convenzionalmente τ_{qr}^h, invece del prodotto $\sigma_{q,q+1}\ldots\sigma_{qr}\sigma_{q,q+1},\ldots\sigma_{qr}\sigma_{q,q+1},\ldots\sigma_{qr}$ i cui fattori si ottengono scrivendo di seguito h volte quelli del prodotto $\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,q+2}\ldots\sigma_{q,r}$. Adunque τ_{qr} e τ_{qr}^h sono due operazioni definite dalle eguaglianze:

$$\tau_{qr}=\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,q+2},\ldots\sigma_{q,r}$$

$$\tau_{qr}^h=\underbrace{\tau_{qr}\tau_{qr}\ldots\tau_{qr}}_{h}=\underbrace{\sigma_{q,q+1},\ldots\sigma_{qr}}_{1}\ldots\underbrace{\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,r}}_{h},$$

Si ha pertanto $\tau_{12}=\sigma_{12}$.

Metodo III. — Cominciamo da alcuni casi particolari. Le permutazioni dei due elementi 1.2 sono le (1 2), (2 1); la 2ª di esse si ottiene dalla 1ª eseguendo su questa l'operazione $\tau_{12}=\sigma_{12}$. Volendo formare le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, cominciamo a scriverne una per es. la (1 2 3). Eseguendo su di essa l'operazione $\tau_{13}=\sigma_{12}\sigma_{13}$ otteniamo le permutazioni (2 1 3), dedotta dalla (1 2 3) colla σ_{12}, e (3 1 2) dedotta dalla (2 1 3) mediante la σ_{13}. Da tale (3 1 2), ossia dall'ultima permutazione ottenuta, possiamo dedurne altre due eseguendo su essa ancora la τ_{13} e queste sono le (1 3 2) e (2 3 1). Se infine sulla (2 3 1) si esegue la σ_{12} si ha la (3 2 1). Si sono adunque formate le permutazioni (1 2 3), (2 1 3), (3 1 2), (1 3 2), (2 3 1), (3 2 1), che sono tutte le permutazioni degli elementi 1, 2, 3. Di queste le ultime cinque si possono considerare come dedotte dalla (1 2 3) mediante l'operazione $\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}$ (giacchè la 1ª di esse si deduce dalla (1 2 3), e ciascuna delle altre dalla precedente. Indicando adunque con ε_{20} l'operazione che permette di dedurre da una permutazione di due elementi per es. 1, 2, tutte le altre, e con ε_{30} quella che permette di dedurre da una permutazione di tre elementi, per es. 1, 2, 3, tutte le altre, si ha:

$$\varepsilon_{20}=\tau_{12}=\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{30}=\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}=\tau_{13}\tau_{13}\sigma_{12}=\tau^2_{13}\,\tau_{12}.$$

Analogamente per formare tutte le permutazioni di quattro elementi differenti, per es. 1, 2, 3, 4, basta scriverne una; poi eseguire su di essa l'operazione

$$\varepsilon_{40}=\tau^3_{14}\tau_{13}$$

ossia

$$\varepsilon_{40}=\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}$$

indi su ciascuna delle permutazioni già formate (sono dodici) eseguire l'operazione che indicheremo con ε_{42} (il lettore comprenderà in seguito il perchè).

$$\varepsilon_{42}=\tau_{34}=\sigma_{34}.$$

Ed invero eseguendo la ε_{40} ad es. sulla (1 2 3 4) si hanno le undici permutazioni (2 1 3 4), (3 1 2 4), (4 1 2 3), (1 4 2 3), (2 4 1 3), (3 4 1 2), (4 3 1 2), (1 3 4 2), (2 3 4 1), (3 2 4 1), (4 2 3 1). Se ora si esegue su tutte le permutazioni già formate la τ_{34} (cioè si scambiano gli ultimi due elementi) si ottengono le permutazioni (1 2 4 3), (3 1 4 2), (4 1 3 2), (1 4 3 2), (2 4 3 1), (3 4 2 1), (4 3 2 1), (1 3 2 4), (2 3 1 4), (2 3 1 4), (4 2 1 3), le quali assieme alle 12 già ottenute costituiscono il complesso di tutte le 4! permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4.

Siano ora dati cinque elementi differenti, ad es. 1, 2, 3, 4, 5. Si eseguisca su una loro permutazione qualunque, ad es. sulla (1 2 3 4 5) l'operazione

$$\varepsilon_{50} = \tau^4_{15}\tau_{14}$$

ottenendo così altre 19 permutazioni; poi sulle 20 permutazioni già formate si eseguisca un'operazione ε_{52}, definita dall'eguaglianza

$$\varepsilon_{52} = \tau^2_{35}\tau_{34}$$

ottenendo così altre 100 permutazioni. Il lettore potrà verificare che le 120 permutazioni formate sono tutte differenti; esse sono le 5! permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4, 5.

Ed ancora volendo formare le permutazioni di sei elementi diversi, se ne scriverà una qualsiasi; poi si eseguirà su esse l'operazione

$$\varepsilon_{60} = \tau^5_{16}\tau_{15}$$

ottenendo così una 1ª serie di permutazioni (nella quale è compresa la permutazione scritta per la prima). Su ognuna delle permutazioni della 1ª serie si eseguirà l'operazione ε_{62} definita dall'uguaglianza.

$$\varepsilon_{62} = \tau^3_{36}\tau_{35}$$

ottenendo così una seconda serie di permutazioni; infine su ciascuna permutazione delle prime due serie (cioè su tutte le permutazioni già formate) si eseguirà l'operazione

$$\varepsilon_{64} = \tau_{56} = \sigma_{56}$$

ottenendo così una terza serie di permutazioni.

Le permutazioni delle tre serie sono tutte le permutazioni dei sei elementi dati.

Ed ora si vogliano formare le permutazioni di n elementi differenti. Si consideri un'operazione ε_{np} definita dall'uguaglianza:

$$\varepsilon_{np} = \tau^{n-p-1}_{p+1,n}\tau_{p+1,n-1}$$

e si ritenga $\tau_{\lambda\lambda} = 1$, qualunque sia l'intero λ, anche nullo.

Dimodochè è in particolare:

$$\varepsilon_{n0} = \tau^{n-1}_{1,n} \cdot \tau_{1,n-1}$$

$$\varepsilon_{n,n-2} = \tau_{n-1,n}\,\tau_{n-1,n-1} = \tau_{n-1,n}.$$

Ne risulta che essendo i ed j numeri interi non tutti e due nulli ed $j > i$ l'espressione di ε_{nj} si deduce da quelle di ε_{ni} aumentando il primo indice delle τ della differenza $j-i$ e diminuendo l'esponente del 1° fattore (la prima τ) pure di $j-i$.

Dalla definizione dell'operazione ε_{np} risulta che: eseguire l'operazione ε_{np} su una permutazione di n elementi, $(n \geq p)$, significa scambiare $n-(p+1)$ volte di seguito l'elemento avente il posto $(p+1)^{mo}$ con ciascuno di quelli che lo seguono e poi ancora l'elemento avente il posto $(p+1)^{mo}$ con quelli che occupano i posti $(p+2)^{mo}, \ldots (n-1)^{mo}$ ciascuno di tali scambi dovendo eseguirsi sul risultato dello scambio precedente.

Infatti l'espressione della ε_{np} mediante operazioni σ è la seguente:

$$\varepsilon_{np} = \underbrace{\sigma_{p+1,\,p+2}\sigma_{p+1,\,p+3}\ldots\sigma_{p+1,\,n}}_{1}\ldots\ldots\underbrace{\sigma_{p+1,\,p+2}\sigma_{p+1,\,p+3}\ldots\sigma_{p+1,\,n}}_{n-(p+1)}\sigma_{p+1,\,p+2}\ldots\sigma_{p+1,\,n-1}$$

Sia dapprima n pari e si formi una qualunque permutazione degli n elementi dati. Per dedurre da questa tutte le rimanenti basterà formare $\frac{n}{2}$ serie di permutazioni: la 1ª serie comprende la permutazione già formata e quelle che si ottengono eseguendo su essa l'operazione

$$\varepsilon_{n,0} = \tau_{1,n}^{n-1} \cdot \tau_{1,n-1}.$$

La 2ª serie si ottiene eseguendo su ciascuna permutazione della 1ª serie l'operazione

$$\varepsilon_{n,2} = \tau_{3,n}^{n-1} \tau_{3,n-1}$$

la 3ª eseguendo su ciascuna permutazione della serie 1ª e 2ª l'operazione

$$\varepsilon_{n,4} = \tau_{5,n}^{n-5} \tau_{5,n-1}$$

... la $\left(\frac{n}{2}-1\right)^{ma}$ serie eseguendo sulle permutazioni di tutte le serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-4} = \tau_{n-3,n}^{3} \tau_{n-3,n-1}$$

l'ultima, cioè la $\left(\frac{n}{2}\right)^{ma}$ serie, eseguendo su ciascuna permutazione delle serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-2} = \tau_{n-1,n} = \sigma_{n-1,n}.$$

Se n è dispari, le serie da costrurre sono $\frac{n-1}{2}$; la 1ª serie comprende la 1ª permutazione scritta e quelle ottenute eseguendo su essa l'operazione

$$\varepsilon_{n,0} = \tau_{1,n}^{n-1} \tau_{1,n-1}$$

la 2ª serie si ottiene eseguendo su ciascuna permutazione della 1ª serie l'operazione

$$\varepsilon_{n,2} = \tau_{3,n}^{n-3} \tau_{3,n-1}$$

... la penultima serie ossia la $\left(\frac{n-3}{2}\right)^{ma}$ serie, si ottiene eseguendo sulle permutazioni di tutte le serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-5} = \tau^{4}_{n-4,n}\,\tau_{n-4,n-1}$$

e l'ultima, ossia la $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ma}$ si ottiene eseguendo sulla permutazione tutte le serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-3} = \tau^{2}_{n-2,n}\,\tau_{n-2,n-1}.$$

Si ricordi adunque che le permutazioni di una stessa serie si ottengono sempre eseguendo una certa operazione sulle permutazioni di *tutte* le serie precedenti.

Adunque: per formare le permutazioni di n elementi diversi basta scriverne una qualunque (iniziale) ed eseguire successivamente le operazioni $\varepsilon_{n,0}$; $\varepsilon_{n,2}$; $\varepsilon_{n,4}$; ... $\varepsilon_{n,n-2}$ se n è pari, ed $\varepsilon_{n,0}$; $\varepsilon_{n,2}$; $\varepsilon_{n,4}$; ... $\varepsilon_{n,n-3}$ se n è dispari, avvertendo di eseguire la $\varepsilon_{n,0}$ sulla permutazione iniziale e ciascuna delle $\varepsilon_{n,2}$; $\varepsilon_{n,4}$; ... sulla permutazione iniziale e su quelle ottenute eseguendo le ε precedenti.

È ovvio convincersi che le permutazioni così ottenute sono $n!$ Infatti eseguendo l'operazione τ_{qr} su una permutazione di n elementi $(q, r \geq n)$, si hanno $r-q$ permutazioni, giacchè τ_{qr} è il prodotto di $r-q$ scambi. Perciò dicendo ν_{mp} il numero delle permutazioni ottenute eseguendo l'operazione ε_{mp} su una permutazione di n elementi, $(m, p \geq n)$, si avrà:

$$\nu_{mp} = \{m-(p+1)\}\,.\,\{m-(p+1)\} + \{m-(p+2)\}$$

ossia

$$\nu_{mp} = \{m-(p+1)\}^2 + \{m-(p+2)\}\,.$$

Intendiamo ora con $\nu_{no}, \nu_{n2}, \nu_{n4} \ldots$ il numero delle permutazioni ottenuto da una data di n elementi, eseguendo su essa rispettivamente le operazioni $\varepsilon_{no}, \varepsilon_{n2}, \varepsilon_{n4} \ldots$ e supponiamo dapprima n pari. Eseguendo la ε_{no} su una permutazione se ne ricavano altre ν_{no}, le quali assieme alla data costituiscono una prima serie di $\nu_{no}+1$ permutazioni. Eseguendo su ciascuna di queste la ε_{n2} si ha una seconda serie di $(\nu_{no}+1)\,\nu_{n2}$ permutazioni le quali assieme alla $\nu_{no}+1$ precedenti costituiscono un complesso di

$$(\nu_{no}+1)\,\nu_{n2} + (\nu_{no}+1) = (\nu_{no}+1)\,(\nu_{n2}+1)$$

permutazioni. Eseguendo su ciascuna di esse la ε_{n4} si ha una terza serie di $\nu_{n4}\,(\nu_{no}+1)\,(\nu_{n2}+1)$ permutazioni, le quali assieme alle $(\nu_{no}+1)\,(\nu_{n2}+1)$ costituiscono un complesso di

$$\nu_{no}\,(\nu_{no}+1)\,(\nu_{n2}+1) + (\nu_{no}+1)\,(\nu_{n2}+1) = (\nu_{no}+1)\,(\nu_{n2}+1)\,(\nu_{n4}+1)$$

permutazioni... Così continuando si conclude che il numero delle permutazioni della serie $1^a, 2^a \ldots \left(\frac{n}{2}\right)^{ma}$ è:

$$P_n = (\nu_{n0}+1)(\nu_{n2}+1)\ldots(\nu_{n,n-4}+1)(\nu_{n,n-2}+1).$$

Ora si ha:

$$\nu_{n0}+1 = (n-1)^2+(n-2)+1 = n(n-1)$$
$$\nu_{n2}+1 = (n-3)^2+(n-4)+1 = (n-2)(n-3)$$
$$\vdots$$
$$\nu_{n,n-4}+1 = 9+2+1 \quad = 4.3$$
$$\nu_{n,n-2}+1 = 1+1 \quad = 2-1$$

e pertanto

$$Pn = n(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1-n!$$

Similmente, se n è dispari, si prova che $P_n = n!$

È quindi fuor di dubbio che col metodo esposto si ottengono tutte le permutazioni di n elementi diversi.

Laddove interessasse determinare il segno di ciascuna di esse basterebbe pensare che: eseguendo una delle operazioni ε su una data permutazione, le permutazioni ottenute hanno alternativamente il segno $+$ e $-$ e la 1^a di esse ha segno contrario a quella della permutazione sulla quale si esegue la suddetta ε. Infatti ciascuna ε è un prodotto di scambi (operazioni σ), ciascuno dei quali deve eseguirsi sul risultato ottenuto eseguendo lo scambio precedente.

Metodo IV. — È meno semplice dei precedenti, ma non meno importante.

L'operazione che consiste nello scambiare i primi due elementi di una permutazione $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ è la σ_{12}; la indicheremo anche con ω_2 e pertanto $\omega_2 = \sigma_{12}$; adunque il risultato della ω_2 eseguita sulla $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ è la $[(\alpha_2)_1(\alpha_1)_2\,\alpha_3\alpha_n]$.

Dati n elementi $a_1, \ldots a_n$, l'operazione che consiste nello scrivere una permutazione qualunque di essi, per es. la $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ si indicherà con θ_{n0} e la $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ si dirà risultato della θ_{n0} eseguita cogli elementi $a_1 \ldots a_n$. Tale $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, considerata quale risultato della θ_{n0} eseguita cogli elementi $a_1 \ldots a_n$, si dirà **permutazione principale**.

Si debbano dapprima formare le permutazioni di due elementi, per es. dei numeri 1, 2. Esse sono le (1 2), (2 1); una di esse si ottiene eseguendo la θ_{20} cogli elementi 1, 2, e l'altra eseguendo l'operazione ω_2 sul risultato dello θ_{20}. Sicchè, indicando con ω'_2 l'operazione che permette di formare tutte le permutazioni di due elementi, si ha:

$$\omega'_2 = \theta_{20}\,\omega_2.$$

Dovendo formare le permutazioni di tre elementi per es. dei numeri 1, 2, 3, eseguiamo con essi la θ_{30}, cioè scriviamo la permutazione principale. Sia essa ad es. la (1 2 3). Eseguendo su questa la ω_2 si ha la (2 1 3). Indichiamo ora con θ_{31} l'operazione che consiste nello scambiare in una delle permutazioni già formate, cioè le (1 2 3), (2 1 2) il 3° elemento con uno di quelli che in tali permutazioni non hanno ancora occupato il 3° posto (sono gli elementi 1 e 2). La θ_{31} può adunque essere eseguita in quattro modi, scambiando nella (1 2 3) o nella (2 1 3) il 3° elemento con uno di quelli che lo precedono. Noi la eseguiremo scambiando nella (2 1 3) gli elementi 3 ed 1 che sono consecutivi, dimodochè il risultato della θ_{31} eseguita sulla (2 1 3) è la (2 3 1). Eseguendo su questa la ω_2 si ha la (3 2 1). Indichiamo con θ_{32} l'operazione che consiste nello scambiare in una qualunque delle quattro permutazioni già formate il 3° elemento con uno di quelli che in nessuna di esse hanno ancora occupato il 3° posto (soltanto l'elemento 2 si trova in tali condizioni). Anche tale operazione si può eseguire in più di un modo e precisamente in quattro modi, giacchè in ciascuna delle permutazioni già formate si può scambiare l'ultimo elemento con l'elemento 2. Noi la eseguiremo scambiando gli elementi 3° e 2° nella (3 2 1), (sono elementi consecutivi) dimodochè il risultato della θ_{32} eseguita sulla (3 2 1) è la (3 1 2). Eseguendo la ω_2 sul risultato della θ_{32} si ha la (1 3 2). Si sono così ottenute le sei permutazioni degli elementi 1, 2, 3, nell'ordine: (1 2 3), (2 1 3), (2 3 1), (3 2 1), (3 1 2), (1 3 2). Di queste le prime due terminano coll'elemento 3, le due seguenti coll'elemento 1, e le ultime due coll'elemento 2.

Convenendo che il segno + scritto tra i simboli di due operazioni indichi soltanto che quella rappresentata dal simbolo scritto a destra debba eseguirsi dopo quella rappresentata dal simbolo scritto a sinistra, ed indicando con ω'_3 l'operazione che permette di formare le permutazioni di tre elementi differenti, nel modo dianzi descritto, possiamo scrivere

$$\omega'_3 = \theta_{30}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 \ldots \tag{1}$$

La ω_2 consiste nello scambio dei primi due elementi, e deve sempre eseguirsi sul risultato delle θ immediatamente a sinistra; ciascuna θ consiste nello scambiare in una delle permutazioni già formate il 3° elemento con uno di quelli che non hanno ancora occupato in esse il 3° posto: fa eccezione la θ_{30} la quale consiste nello scrivere una permutazione qualunque degli elementi dati.

La permutazione risultato della θ_{30} si dirà permutazione iniziale relativa, rispetto alle operazioni θ_{31}, θ_{32} (il lettore comprenderà in seguito il perchè di tale denominazione). Possiamo pertanto dire che le θ_{31} e θ_{32} devono eseguirsi sulla permutazione iniziale ad esse relativa, oppure su una di quelle ottenute dopo di essa.

Eseguire un'operazione ω_3 definita dall'uguaglianza

$$\omega_3 = \omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 \ldots \tag{1'}$$

su una permutazione $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ di tre elementi, significa eseguire le ω_2 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, poi la θ_{31}, poi la ω_2 sul risultato della θ_{31} ecc... assumendo come permutazione iniziale relativa alle θ_{31}, θ_{32}, la permutazione data $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$. In altri termini per eseguire la ω_3 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ basta eseguire le operazioni che compongono la ω'_3 e che sono posteriori a θ_{30}, essendo ω'_3 l'operazione definita dalla (1) da eseguirsi cogli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Eseguire la ω_3 su una permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ di n elementi, significa eseguirla sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, e scrivere accanto agli elementi delle cinque permutazioni ottenute gli elementi $\alpha_4, \alpha_5\ldots\alpha_n$. Il risultato della ω_3 eseguito sulla $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ è adunque un gruppo di cinque permutazioni, le quali terminano tutte cogli elementi $\alpha_4,\ldots\alpha_n$. Indipendentemente dall'ordine, esse sono le seguenti:

$$(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n), (\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4\ldots\alpha_n), (\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4\ldots\alpha_n), (\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_n), (\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_n).$$

Notiamo ancora che nel caso speciale della formazione delle permutazioni degli elementi 1, 2, 3 noi abbiamo eseguito le θ_{31} e θ_{32} in modo da operare soltanto scambi tra due elementi consecutivi. Eseguendo ciascuna delle operazioni ω e θ (esclusa la θ_{30}) sul risultato precedente, si ha un criterio (non unico) per comporre la ω'_3 di scambi da eseguirsi tra due elementi consecutivi. Infatti l'operazione ω'_3 eseguita per formare le permutazioni degli elementi 1, 2, 3 è la

$$\omega'_3 = \theta_{30}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}.$$

Ogni espressione della ω'_3 composta di soli scambi tra elementi consecutivi si dirà *forma singolare* della ω'_3. Adunque per ridurre la ω'_3 a forma singolare basta disporre opportunamente delle θ_{31} e θ_{32}.

Prima di trattare il caso generale, esamineremo ancora quello particolare della formazione delle permutazioni di quattro elementi ad es. dei numeri 1, 2, 3, 4. Cominciamo a formarne una qualunque (principale), ad es. la (1 2 3 4), eseguendo la θ_{40} cogli elementi 1, 2, 3, 4. Eseguendo la ω_3 sulla (1 2 3 4) otteniamo cinque permutazioni che terminano coll'elemento quattro e che indipendentemente dall'ordine sono le: (2 1 3 4), (2 3 1 4), (3 2 1 4), (3 1 2 4), (1 3 2 4). Indichiamo con θ_{41} l'operazione che consiste nello scambiare in una delle sei permutazioni già formate, il 4° elemento con uno di quelli che non hanno occupato in esse, il 4° posto (sono gli elementi 1, 2, 3 che precedono l'ultimo). Essa può eseguirsi in 6 . 3 = 18 modi, giacchè in ciascuna delle suddette sei permutazioni si può scambiare l'ultimo elemento con uno degli elementi 1, 2, 3. Noi la eseguiremo sulla (1 2 3 4), scambiando gli elementi 4° e 3°, dimodochè il risultato della θ_{41} è la (1 2 4 3). Eseguendo su questa la ω_3, si hanno, indipendentemente dall'ordine, le permutazioni (2 1 4 3), (2 4 1 3), (4 2 1 3), (4 1 2 3), (1 4 2 3), le quali assieme alla (1 2 4 3) sono tutte le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4 che terminano coll'elemento 3. Sia θ_{42} l'operazione che consiste nello scambiare in una delle dodici permutazioni già formate il 4° elemento con uno di quelli che in nessuna di esse hanno occupato il 4° posto, cioè con uno degli elementi 1 e 2. Tale operazione si può eseguire in $12 . 2 = 24$ modi e noi la eseguiremo sulla (2 3 1 4) scambiando gli elementi 4° e 3°, dimodochè il risultato della θ_{42} è la (2 3 4 1). Eseguendo su questa l'operazione ω_3 si hanno indipendentemente dall'ordine le (3 2 4 1), (3 4 2 1), (4 3 2 1), (4 2 3 1), (2 4 3 1). Esse e la (2 3 4 1) sono quelle fra le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4, che terminano coll'elemento 1. Sia infine θ_{43} l'operazione consistente nello scambiare in una delle diciotto permutazioni già formate, il 4° elemento con uno di quelli che in nessuna di esse hanno occupato il 4° posto (tale è il solo elemento 2). Tale operazione si può eseguire in diciotto modi diversi e noi la eseguiremo sulla (3 1 2 4) scambiando gli elementi 4° e 3°, dimodochè il risultato della θ_{42} è la (3 1 4 2). Ed ora, eseguendo sulla (3 1 4 2) l'operazione ω_3 otteniamo, indipendentemente dall'ordine, le permutazioni (1 3 4 2), (1 4 3 2), (4 1 3 2), (4 3 1 2), (3 4 1 2); esse e la (3 1 4 2) sono tutte le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4 che terminano coll'elemento 2.

Le permutazioni formate sono $4! = 24$, ed altre evidentemente non possono formarsene.

Sempre convenendo che il segno + posto tra i simboli di due operazioni indichi che quella rappresentata dal simbolo posto a sinistra debba eseguirsi immediatamente prima di quella rappresentata dal simbolo posto a destra, e chiamando con ω'_4 l'operazione mediante la quale si formano col processo dianzi indicato le permutazioni di quattro elementi differenti, possiamo scrivere:

$$\omega'_4 = \theta_{40}\omega_3 + \theta_{41}\omega_3 + \theta_{42}\omega_3 + \theta_{43}\omega_3 \ldots \qquad (2)$$

Nell'applicare la (2) occorre aver presente che ciascuna ω_3 va eseguita sul risultato della θ_4 immediatamente a sinistra e che ciascuna θ_4 va eseguita su una delle permutazioni precedentemente ottenute, tranne la θ_{40} che va eseguita sugli elementi dati.

Nell'eseguire le $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ c'è dell'arbitrario, giacchè ogni θ_4 può eseguirsi in più di un modo. Noi abbiamo eseguita la θ_{41} sulla permutazione principale (1 2 3 4) e le θ_{42}, θ_{43} sulle (2 3 1 4) e (3 1 2 4) le quali sono due delle permutazioni ottenute dalla principale eseguendo su essa la ω_3 sotto forma singolare e precisamente eseguendo le operazioni θ_{31} e θ_{32} della ω_3. Come vedesi, ciascuna delle $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ eseguite in tal modo, consta nello scambio di due elementi consecutivi (4° e 3°); dimodochè se nell'applicare la (2) supponiamo le ω_3 ridotte a forma singolare ed eseguiamo le $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ rispettivamente sulla permutazione principale e sulle due che si ottengono eseguendo su essa le operazioni θ_{31} e θ_{32} di ω_3, possiamo dire che la ω'_4 consta di scambi fra elementi consecutivi. Una tal forma della ω'_4 si dirà *forma singolare*; pertanto per ridurre la ω'_4 a forma singolare, il che è possibile in più di un modo, basta mettere le ω_3 sotto forma singolare e disporre opportunamente delle θ_4.

La (2) sostituendo ad ω_3 l'espressione data dalla (1'), diventa:

$$\omega'_4 = \theta_{40}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 + \\ + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 \dots \qquad (3)$$

Diremo che la permutazione principale è iniziale relativa delle (od alle o rispetto alle) operazioni $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$, e che la permutazione ottenuta quale risultato di una θ_4 è iniziale relativa delle operazioni θ_{31} e θ_{32} a destra di essa θ_4 ed a sinistra della θ_4 seguente (se c'è). Per es. la permutazione resultato della θ_{42} è iniziale relativa delle θ_{31} e θ_{32} comprese tra θ_{42} e θ_{43}.

Pertanto nell'applicare la (3) devesi osservare che: 1º ciascuna ω_2 deve eseguirsi sul risultato della θ immediatamente a sinistra: 2º che ciascuna θ_i, $(i = 4, 3)$, deve eseguirsi sulla permutazione iniziale ad essa relativa o su una delle permutazioni ottenute dopo di essa (dopo tale permutazione relativa) e che in ogni caso rappresenta lo scambio dell'elemento i^{mo} con uno di quelli che lo precedono, e che nella permutazione iniziale relativa ed in quelle formate posteriormente ad essa, non hanno ancora occupato l'i^{mo} posto.

Eseguire un'operazione ω_4 definita dall'uguaglianza:

$$\omega_4 = \omega_3 + \theta_{41}\omega_3 + \theta_{42}\omega_3 + \theta_{42}\omega_4$$

oppure

$$\omega_4 = \omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \\ + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2$$

su una permutazione di quattro elementi $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, significa eseguire la ω_3 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, poi la θ_{41}, poi la ω_3 sul risultato della θ_{41} ecc... considerando come permutazione iniziale relativa delle $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ e come permutazione iniziale relativa delle θ_{31} e θ_{32} di una data ω_3, la permutazione ottenuta quale risultato della θ_4 che le sta a sinistra od, in assenza di essa, la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$; pertanto il risultato della ω_4 è, indipendentemente dall'ordine, un gruppo di 23 permutazioni, le quali sono tutte le permutazioni degli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, tranne la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$. In altri termini possiamo dire che eseguire la ω_4 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, significa fare in essa le operazioni che si fanno posteriormente alla θ_{40} nell'eseguire la ω'_4 sugli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (considerando come risultato della θ_{40} la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

Eseguire la ω_4 su una permutazione $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)$ di $n > 4$ elementi, significa eseguirla sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ e poi scrivere gli elementi $\alpha_5, \alpha_6 .. \alpha_n$ a destra di quelli di ciascuna delle 23 permutazioni ottenute, pertanto il risultato della ω_4 eseguita sulla $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)$ è un gruppo di 23 permutazioni le quali terminano tutte cogli elementi $\alpha_5, \alpha_6 \dots \alpha_n$.

Passiamo ora al caso generale. Indichiamo con ω_i un'operazione la quale ci permetta di dedurre da una permutazione $(\alpha_1 \ldots, \alpha_i)$ di i elementi diversi, tutte le rimanenti $i! - 1$. Diremo che si esegue la ω_i sulla permutazione $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ di $n > i$ elementi, quando si scrivono gli elementi $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ di seguito a quelli di ciascuna delle permutazioni ottenute eseguendo la ω_i sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_i)$, dimodochè il risultato della ω_i eseguita sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ è un gruppo di $i! - 1$ permutazioni aventi comuni gli elementi finali $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$.

Consideriamo l'operazione ω'_n definita dall'uguaglianza

$$\omega'_n = \theta_{n0}\omega_{n-1} + \theta_{n1}\omega_{n-1} + \ldots + \theta_{nr}\omega_{n-1} + \ldots + \theta_{n,n-1}\omega_{n-1} \ldots \qquad (4)$$

dove θ_{n0} è un'operazione che consiste nello scrivere una permutazione qualunque $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ di n elementi dati, ω_{n-1} è un'operazione che ci permette di dedurre da una permutazione di $n-1$ elementi tutte le rimanenti e che deve eseguirsi sul risultato della θ_n immediatamente a sinistra e $\theta_{n1}, \theta_{n2}, \ldots$ sono operazioni delle quali ognuna può eseguirsi sul risultato della θ_{n0} (permutazione principale) e su una delle permutazioni già formate (cioè formate prima di eseguire la θ_n che si considera) e consiste nello scambio dell'ultimo elemento con uno di quelli che nelle permutazioni già formate non hanno ancora occupato l'ultimo posto.

Immaginiamo ora di eseguire la ω'_n. Dopo aver eseguito la ω_{n-1} seguente θ_{n0}, avremo ottenuto tutte le permutazioni degli n elementi dati $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, le quali terminano ad es. con un certo elemento β_1; eseguita la ω_{n-1} seguente θ_{n1}, avremo ottenute tutte le permutazioni che terminano con un certo elemento β_2 ecc..., eseguita la ω_{n-1} seguente $\theta_{n,n-1}$, avremo ottenuto tutte le permutazioni che terminano con un certo elemento β_n. Gli elementi $\beta_1 \ldots \beta_n$ sono, salvo l'ordine, gli stessi $\alpha_1, \ldots \alpha_n$; adunque la ω'_n è un'operazione che ci permette di formare tutte le permutazioni degli elementi $\alpha_1, \ldots \alpha_n$.

Sostituendo ad n i numeri $n-1, n-2 \ldots$ si hanno dalla (4) le espressioni di $\omega'_{n-1}, \omega'_{n-2}, \ldots \omega'_4, \omega'_3$. Correlativamente a tali operazioni possiamo definirne altrettante $\omega_{n-1}, \omega_{n-2}, \ldots \omega_4, \omega_3$, stabilendo che eseguire l'operazione

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \theta_{i1}\omega_{i-1} + \theta_{i2}\omega_{i-1} + \ldots \theta_{i,i-1}\omega_{i-1} \ldots \qquad (5)$$

su una permutazione $(\alpha_1, \ldots \alpha_i)$ di i elementi, significhi operare sugli elementi di essa come si opera su quelli della permutazione ottenuta quale risultato della θ_{i0}, di guisa che il risultato della ω_i è un complesso di $i! - 1$ permutazioni, cioè il complesso di tutte le permutazioni degli elementi $\alpha_1, \ldots \alpha_i$, tranne la $(\alpha_1, \ldots \alpha_i)$; 2° eseguire la ω_i su una permutazione $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ di $n > i$ elementi, significhi scrivere gli elementi $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ di seguito a quelli di ognuna delle permutazioni ottenute eseguendo la ω_i sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_i)$, dimodochè il risultato di tale ω_i eseguito sulla $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ è un complesso di $i! - 1$ permutazioni aventi comuni gli elementi finali $\alpha_{i+1}, \dots \alpha_n$.

Se ora nella (4) sostituiamo alle ω_{n-1} le loro espressioni mediante le ω_{n-2}, poi nella relazione ottenuta sostituiamo alle ω_{n-2} le loro espressioni mediante le ω_{n-3} ecc... infine alle ω_3 le loro espressioni mediante le ω_2, abbiamo:

$$\begin{aligned}\omega'_n = {} & \theta_{n0}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \\ & + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{51}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \\ & + \theta_{42}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{52}\omega_2 + \dots + \theta_{41}\omega_2 + \\ & + \dots + \theta_{42}\omega_2 + \dots + \theta_{43}\omega_2 + \dots + \theta_{53}\omega_2 + \dots + \theta_{54}\omega_2 + \dots + \theta_{61}\omega_2 + \dots + \theta_{51}\omega_2 \\ & + \dots + \theta_{52}\omega_2 + \dots + \theta_{53}\omega_2 + \dots + \theta_{54}\omega_2 + \dots + \theta_{62}\omega_2 + \dots + \theta_{63}\omega_2 + \dots + \theta_{64}\omega_2 \\ & + \dots + \theta_{65}\omega_2 + \dots + \theta_{71}\omega_2 + \dots + \theta_{72}\omega_2 + \dots + \theta_{73}\omega_2 + \dots + \theta_{74}\omega_2 + \dots + \theta_{75}\omega_2 \\ & + \dots + \theta_{76}\omega_2 + \dots + \theta_{81}\omega_2 + \dots + \theta_{87}\omega_2 + \dots\dots + \theta_{n-1,1}\,\omega_2 + \dots + \theta_{n-1,n-2}\,\omega_2 \\ & + \dots + \theta_{n1}\omega_2 + \dots + \theta_{n,n-1}\,\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 \qquad \dots\dots (6)\end{aligned}$$

dove nel 2° membro tra θ_{ih} e θ_{ik} $(i = 3, 4, \dots n;\ h, k = 1, 2, \dots, i-1)$ deve supporsi scritto quanto precede θ_{i1}, tranne θ_{n0}. Per descrivere facilmente la ω'_n chiameremo permutazione iniziale relativa alle operazioni $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots \theta_{i,i-1}$, $(i = 3, \dots n)$, la permutazione principale, cioè il risultato della θ_{n0}, se percorrendo il 2° membro da destra a sinistra a partire dalla θ_i considerata non si incontra alcuna $\theta_{i+1,1}$; se invece si incontra una o più $\theta_{i+1,1}$, chiameremo permutazione iniziale relativa alla θ_i considerata il risultato della $\theta_{i+1,1}$ che le è più vicina a sinistra.

La descrizione della ω'_n è quindi la seguente:

1° L'operazione θ_{n0} consiste nello scrivere una qualunque permutazione degli n elementi dati;

2° ω_2 è un'operazione che consiste nello scambio dei primi due elementi di una permutazione e deve eseguirsi sul risultato della θ che le sta immediatamente a sinistra;

3° θ_{ij} è un'operazione che deve eseguirsi sulla permutazione iniziale ad essa relativa o su una delle permutazioni ottenute posteriormente (cioè ottenute dopo la suddetta iniziale relativa e prima di eseguire essa θ_{ij}) e consiste nello scambiare l'elemento i^{mo} con uno di quelli che lo precedono e che nella permutazione iniziale relativa alla θ_{ij} ed in quelle ottenute posteriormente ad essa, non hanno ancora occupato l'ultimo posto:

Esaminando il 2° membro della (6) si vede che:

1° ogniqualvolta si esegue l'operazione θ_{ij} $(i \geq 3)$, su una permutazione A già formata, bisogna eseguire sul risultato di tale θ_{ij} quelle stesse operazioni che si sono fatte sulla permutazione principale e su quelle da essa dedotte prima di eseguire la θ_{i1} che è destra di θ_{n0} e che si trova più vicina ad essa (vale a dire prima di eseguire per la 1ª volta la θ_{i1});

2° tutte le permutazioni ottenute prima di eseguire per la prima volta la θ_{i1}, ($i \geq 3$), hanno comuni gli ultimi $n-i$ elementi;

3° ogniqualvolta si esegue una θ_{ij} su una permutazione, le operazioni posteriori ad essa ed anteriori alla $\theta_{i,j+1}$ più vicina ed a destra di θ_{ij}, hanno per scopo di permutare in $(i-1)!-1$ modi i primi $i-1$ elementi della permutazione ottenuta quale risultato della θ_{ij}.

Le permutazioni ottenute eseguendo la ω'_n sono evidentemente tutte differenti; è anche facile convincersi che sono $n!$. Infatti esse sono tante quante sono complessivamente le θ ed ω_2 contenute nel 2° membro della (6), giacchè a ciascuna θ ed ω_2 corrisponde una di tali permutazioni, la quale ne è il risultato. Sia ν_i il numero dei simboli θ ed ω_2 che compaiono nell'espressione di ω'_i. Sarà $\nu_i - 1$ il numero di quelli che compaiono nell'espressione di ω_i. Allora supponendo nella (4) sostituite alle ω_{n-1} le loro espressioni mediante le ω_2, compariranno nel 2° membro $n(\nu_{n-1}-1)+n = n\nu_{n-1}$ simboli. Si ha quindi

$$\nu_n = n\nu_{n-1}.$$

Ma è pure

$$n! = n(n-1)!$$

quindi:

$$\nu_n = n!$$

Consideriamo ancora la (4). Sostituendo ad ω_{n-1} seguente θ_{n0} la sua espressione mediante ω_{n-2}, (si ricava dalla (5) supponendo $i=n-1$), essa diventa:

$$\omega'_n = (\theta_{n0}\omega_{n-2} + \theta_{n-1,1}\,\omega_{n-2} + \ldots + \theta_{n-1,n-2}\,\omega_{n-2}) + \theta_{n1}\omega_{n-1} + \ldots + \theta_{n,n-1}\,\omega_{n-1}$$

Ora le permutazioni ottenute eseguendo le $\theta_{n0}, \theta_{n-1,1}, \ldots \theta_{n-1,n-2}$ hanno tutte in comune l'ultimo elemento, ed in esse tutti gli elementi, all'infuori di quest'ultimo, compaiono al penultimo posto, uno per ciascuna permutazione. Supponiamo che la θ_{n1} sia eseguita sulla permutazione principale (la sua iniziale relativa) e le $\theta_{n2}, \theta_{n3}, \ldots \theta_{n,n-1}$ rispettivamente sui risultati delle $\theta_{n-1,1}, \theta_{n-1,2} \ldots \theta_{n-1,n-2}$. Poichè ciascuna θ_{ii} consiste nello scambio dell'ultimo elemento con uno di quelli che nelle permutazioni già formate non hanno ancora occupato l'ultimo posto, per eseguire le $\theta_{n1}, \theta_{n2}, \ldots \theta_{n,n-1}$ occorre scambiare gli ultimi due elementi nelle permutazioni ottenute mediante $\theta_{n0}, \theta_{n-1,1}, \ldots \theta_{n-1,n-2}$. Eseguendo le $\theta_{n1}, \ldots \theta_{n,n-1}$ in siffatto modo e supponendo che ciascuna ω_{n-1} consti di scambi tra due elementi consecutivi, si vede che anche la ω'_n consterà (tranne la θ_{n0}) di scambi tra elementi consecutivi, sarà cioè ridotta *a forma singolare.*

Ciò che si è detto per ω'_n si può ripetere per ω'_{n-1}. Supponendo che le ω_{n-2} dalle quali dipende una ω'_{n-1} constino di soli scambi tra elementi consecutivi, e disponendo opportunamente delle θ_{n-2} in essa contenute, potremo ridurla a forma singolare. Così continuando si conclude che:

Affinchè la ω'_n consti, tranne l'operazione θ_{n0}, di scambi tra elementi consecutivi è sufficiente 1° che qualunque sia θ_{ij}, $(i > 3)$, l'operazione $\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2$ seguente essa θ_{ij} si componga degli scambi degli elementi 1° e 2°, 2° e 3°, 1° e 2°, 2° e 3°, 1° e 2°, dei quali il 1° va eseguito sul risultato della θ_{ij} e ciascuno dei rimanenti sul risultato del precedente; 2° che la θ_{ij}, qualunque sia $i > 3$, consista nello scambio degli elementi che occupano i posti i^{mo} ed $(i-1)^{mo}$ e debba eseguirsi sulla sua permutazione iniziale relativa se $j=1$ e sulla $\theta_{i-1,j-1}$ immediatamente a destra della θ colla quale si è ottenuta essa permutazione iniziale relativa, se $j \neq 1$.

Sviluppo della ω'_n in prodotto continuo. — Consideriamo ancora la (6) ed una delle θ_{ij} del 2° membro. Tra le permutazioni sulle quali essa può eseguirsi, si trova sempre quella ottenuta quale risultato della ω_2 immediatamente a sinistra. Immaginando ora che ciascuna θ_{ij} sia eseguita sul risultato della ω_2 che le sta immediatamente a sinistra, il 2° membro della (6) conterrà operazioni (tranne la θ_{n0}) tali che ciascuna dovrà eseguirsi sul risultato della precedente. Possiamo pertanto mettere la ω'_n sotto forma di prodotto continuo, scrivendo

$$\omega'_n = \theta_{n0}\omega_2\theta_{31}\omega_2\theta_{32}\omega_2\theta_{41}\omega_2\theta_{31}\omega_2\theta_{32}\omega_2\theta_{42}\omega_2 \dots \theta_{n,n-1}\,\omega_2 \dots \theta_{12}\omega_2 \qquad (6')$$

convenendo che θ_{ij} rappresenti (tranne θ_{n0}) un'operazione da eseguirsi sul risultato della ω_2 immediatamente a sinistra e che consiste nello scambio dell'elemento i^{mo} con uno di quelli che nella permutazione iniziale ad essa relativa occupano i primi i posti e che nè in essa, nè in quelle ottenute posteriormente ad essa, hanno ancora occupato l'i^{mo} posto.

Notiamo in particolare i seguenti sviluppi di ω'_4 ed ω'_5 in prodotto continuo, utilissimi per la formazione delle permutazioni di 4 e 5 elementi.

$$\omega'_4 = \theta_{40}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{24}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{34}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}$$

$$\omega'_5 = \theta_{50}\omega_4\sigma_{15}\omega_4\sigma_{15}\omega_4\sigma_{15}\,\omega_4\sigma_{15}\omega_4$$

dove si è posto

$$\omega_4 = k\,\sigma_{14}\,k\,\sigma_{24}\,k\,\sigma_{24}\,k$$

ed è

$$k = \sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}.$$

Segno delle permutazioni. — Il 4° metodo per formare le permutazioni di n elementi differenti ci permette di determinare con facilità il segno di ciascuna. Infatti si determini dapprima il segno della permutazione principale, sia esso ad es. il segno $+$; la 2ª permutazione avrà il segno $-$, la 3ª se dedotta dalla 1ª avrà segno $-$, se dalla 2ª avrà segno $+$. In generale il segno di una permutazione è il segno contrario a quello della permutazione dalla quale si ottiene mediante lo scambio di due elementi. Se la ω'_n è sviluppata in prodotto continuo, allora ciascun scambio deve eseguirsi sul risultato dello scambio precedente, quindi il segno della 1ª permutazione scritta, sarà pure quello delle permutazioni 3ª, 5ª, 7ma ecc... mentre le permutazioni 2ª, 4ª, 6ª,... avranno segno contrario.

§ 2. Formazione rapida delle combinazioni e disposizioni semplici m ad m di n cose.

Ci occorrerà in seguito di saper formare con prontezza le combinazioni n ad n di m cose diverse ($n \leq m$). Il metodo che esponiamo è di molta importanza pratica.

Si debbano ad es. formare le combinazioni tre a tre dei cinque numeri 1, 2, 3, 4, 5. Disponiamoli in un ordine qualunque per esempio 3, 4, 2, 1, 5; otteniamo così una successione di elementi che diremo *fondamentale*. Coi primi tre di essi formiamo una prima combinazione la (3 4 2), che diremo iniziale. Le altre si deducono da essa nel seguente modo. Sostituendo all'ultimo elemento ciascuno di quelli che lo seguono nella successione fondamentale, abbiamo le combinazioni (3 4 1), (3 4 5). Da ciascuna di queste possiamo ottenerne una o più sostituendo al penultimo elemento, cioè il 2º, ciascuno di quelli elementi che nella successione fondamentale sono compresi per posizione tra esso ed il 3º elemento della combinazione che si considera. E così tra gli elementi 4 ed 1 della (3 4 1) è compreso nella successione fondamentale il solo elemento 2, dimodochè dalla (3 4 1) si può derivare soltanto la (3 2 1); invece tra gli elementi 4 e 5 della (3 4 5) sono compresi nella successione fondamentale gli elementi 2, 1, dimodochè dalla (3 4 5) si deriveranno le (3 2 5), (3 1 5). Da ciascuna delle combinazioni (3 2 1), (3 2 5), (3 1 5) deriviamone una o più sostituendo al 1º elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale, sono compresi tra esso ed il 2º della combinazione considerata. E così dalla (3 2 1) si deriverà soltanto la (4 2 1), giacchè tra gli elementi 3 e 2 di essa è compreso nella successione fondamentale solamente l'elemento 4; similmente dalla (3 2 5) si deriva soltanto la (4 2 5), e dalla (3 1 5) si derivano le (4 1 5), (2 1 5). Abbiamo quindi formate le combinazioni (3 4 2) (3 4 1) (3 4 5) (3 2 1) (3 2 5) (3 1 5) (4 2 1) (4 2 5) (4 1 5) (2 1 5), le quali evidentemente sono tutte le combinazioni tre a tre degli elementi dati.

Se gli elementi dati sono n, la norma da seguirsi per formarne le combinazioni m ad m è la seguente:

Si scrive la successione fondamentale disponendo gli elementi dati in un ordine qualunque; poscia si assume quale combinazione iniziale quella che contiene i primi m *elementi della successione fondamentale. Da tale combinazione si deduce una prima serie di combinazioni, sostituendo all'*m^{mo} *elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale lo seguono. Dalle combinazioni della 1ª serie si deducono quelle di una 2ª serie sostituendo in ciascuna all'*$(\mathrm{m}-1)^{\mathrm{mo}}$ *elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale sono compresi tra esso e l'*n^{mo} *della combinazione considerata. Dalle combinazioni della 2ª serie si deducono quelle di una terza serie sostituendo in ciascuna all'*$(\mathrm{m}-2)^{\mathrm{mo}}$ *elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale sono compresi tra esso e l'*$(\mathrm{m}-1)^{\mathrm{mo}}$ *della combinazione considerata.... E così si continua fino a costrurre l'*m^{ma} *serie di combinazioni. In generale, ottenuta la serie* i^{ma}, *si costruisce la serie* $(i+1)^{\mathrm{ma}}$ *sostituendo in ciascuna combinazione della serie* i^{ma}, *all'elemento* $(\mathrm{m}-\mathrm{i}+1)^{\mathrm{mo}}$, *uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale sono compresi tra esso e l'*$(\mathrm{m}-\mathrm{i}+2)^{\mathrm{mo}}$ *della combinazione considerata.*

Per es. le combinazioni tre a tre degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6 assumendo la 1, 2, 3, 4, 5, 6, quale successione fondamentale sono:

(1 2 3)	combinazione iniziale	
(1 2 4), (1 2 5), (1 2 6)	dedotte dalla (1 2 3)	I serie
(1 3 4)	" (1 2 4)	II serie
(1 3 5), (1 4 5)	" (1 2 5)	
(1 3 6), (1 4 6), (1 5 6)	" (1 2 6)	
(2 3 4)	" (1 3 4)	III serie
(2 3 5)	" (1 3 5)	
(2 4 5), (3 4 5)	" (1 4 5)	
(2 3 6)	" (1 3 6)	
(2 4 6), (3 4 6)	" (1 4 6)	
(2 5 6), (3 5 6), (4 5 6)	" (1 5 6)	

In tutto $\binom{6}{3}=20$ combinazioni.

Si può provare che il numero delle combinazioni ottenute col metodo dianzi indicato e $\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$. Infatti abbiamo dapprima una combinazione iniziale dalla quale si deducono $n-m$ combinazioni appartenenti alla 1ª serie. Dalla prima combinazione della 1ª serie se ne deduce una della 2ª serie, dalla 2ª se ne deducono due, dalla terza tre ecc. dalla $(n-m)^{\mathrm{ma}}$, $n-m$; il numero delle combinazioni della 3ª serie è dunque $1+2+\ldots+(n-m)$. Similmente provasi che le combinazioni della 3ª serie sono in numero di $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+[1+2+\ldots+(n-m)]$ ecc.... In generale ponendo

$$F_{n-m,0}=1$$

$$F_{n-m,1}=n-m$$

$$F_{n-m,2}=F_{1,1}+F_{2,1}+\ldots+F_{n-m,1}=1+2+\ldots+(n-m)$$

$$\vdots$$

$$F_{n-m,q}=F_{1,q-1}+F_{2,q-1}+\ldots+F_{n-m,q-1}$$

si ha che il numero delle combinazioni della serie q^{ma} è $F_{n-m,q}$. Il numero F_{pq} suolsi chiamare (*) p^{mo} numero figurato d'ordine q. Si sa che:

$$F_{p,q}=F_{p,q-1}+F_{p-1,q}$$

e pertanto

$$F_{p,q}=F_{p-1,q}+F_{p-1,q-1}+\ldots+F_{p-1,1}+F_{p,0} \qquad (1)$$

essendo $F_{p,0}=1$. Si sa inoltre che

$$\binom{n}{m}=F_{n-m+1,m}\,.$$

Supponendo adunque nella (1) $q=m$; $p=n-m+1$, si ha:

$$F_{n-m+1,m}=F_{n-m,m}+F_{n-m,m-1}+\ldots+F_{n-m,1}+1$$

ossia

$$F_{n-m+1,m}=\binom{n}{m}$$

è il numero delle combinazioni appartenenti alle serie m^{ma}, $(m-1)^{ma}\ldots$ 2ª, 1ª, oltre la combinazione iniziale.

Disposizioni. — Dopo quanto abbiamo detto la formazione rapida delle disposizioni m ad m di n cose diverse non offre difficoltà. Formate le combinazioni m ad m, formeremo cogli elementi di ciascuna tutte le permutazioni possibili seguendo uno dei metodi indicati. Queste saranno tutte le disposizioni m ad m delle n cose date.

(*) LUCAS, *Théorie des nombres*, Paris 1891, pag. 56 e seg. Ivi però è rappresentato col simbolo F_p^q.

§ 3. Formazione rapida e rappresentazione delle permutazioni di n elementi non tutti differenti.

Dei metodi indicati per formare rapidamente le permutazioni di n elementi differenti, soltanto il 4° si può applicare alla formazione delle permutazioni di n elementi non tutti differenti. Basta adunque scrivere una di tali permutazioni ed eseguire su essa e su quelle che da essa si deducono le operazioni che abbiamo rappresentato coi simboli θ_{ij} ed ω_2. nell'ordine indicato nel 2° membro della (6, § 1°). Bisogna però in ogni caso avere l'avvertenza di considerare quale risultato dello scambio di due elementi uguali di una permutazione, la permutazione stessa.

Se vogliamo ad es. formare le permutazioni degli elementi 1, 1, 2, 3, 3. Una di esse (principale) è la (1 1 2 3 3), dalla quale, scambiando i primi due elementi, si ha la permutazione stessa. Scambiando il 3° elemento con uno di quelli che lo precedono, per es. con quello che si trova alla sua sinistra si ha la (1 2 1 3 3), dalla quale, scambiando i primi due elementi si ha la (2 1 1 3 3). Così ci accorgiamo che al 3° posto sono già comparsi gli elementi 2 (una volta) ed 1 (2 volte), cioè ciascuno degli elementi differenti che occupano i primi tre posti nella permutazione principale. Possiamo anche dire che le permutazioni formate hanno comuni gli ultimi due elementi ed in esse i primi tre elementi sono stati permutati in tutti i modi possibili. Scambiando in una delle permutazioni ottenute, per es. l'ultima, il 4° elemento con uno di quelli che sono da esso differenti e che lo precedono, per es. con quello che gli sta a sinistra, si ha la (2 1 3 1 3) e permutando in essa i primi tre elementi in tutti i modi possibili si hanno le (1 2 3 1 3), (1 3 2 1 3), (3 1 2 1 3), (3 2 1 1 3), (2 3 1 1 3). Scambiando in una delle permutazioni ottenute, per es. la (3 1 2 1 3) il 4° elemento, con uno di quelli che sono differenti da esso, che lo precedono e che nelle permutazioni formate non hanno ancora occupato il quarto posto, per es. col 3° elemento, si ha la (3 1 1 2 3): dalla quale, permutando in tutti modi possibili i primi tre elementi, si hanno le (1 3 1 2 3), (1 1 3 2 3). Così si sono già formate tutte le permutazioni che hanno comuni l'ultimo elemento che è un 3. ed in esse i primi quattro elementi sono permutati in tutti i modi possibili. Continuiamo adunque scambiando in una delle permutazioni ottenute, per es. l'ultima, il 5° elemento con uno di quelli che lo precedono e sono da esso differenti per es. col 4°; avremo la (1 1 3 3 2) dalla quale, permutando in tutti i modi possibili i primi quattro elementi, otteniamo le (13132), (31132), (31312), (13312), (3 3 1 1 2). In una di tutte le permutazioni già formate, per es. l'ultima, scambiamo il 5° elemento con uno di quelli ad esso non uguali e che non hanno ancora occupato il 5° posto, per es. col 4°; otteniamo la (3 3 1 2 1), dalla quale, permutando in tutti i modi possibili i primi quattro elementi, si hanno le (3 1 3 2 1), (1 3 3 2 1), (1 3 2 3 1), (3 1 2 3 1), (3 2 1 3 1), (2 3 1 3 1), (2 1 3 3 1), (1 2 3 3 1), (3 2 3 1 1), (3 3 2 1 1), (2 3 3 1 1). Le permutazioni formate sono evidentemente tutte le permutazioni degli elementi dati. Si sa poi che il numero N delle permutazioni di n elementi tra i quali β_1 uguali tra loro, β_2 pure uguali, ... β_r pure uguali, $(\beta_1 + \ldots \beta_r = n)$, è

$$N = \frac{n}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_r!}.$$

Segno delle permutazioni di n numeri non tutti differenti. — Se gli n elementi dati sono n numeri si può assumere quale permutazione principale quella nella quale sono disposti in ordine crescente. Se ad es. tra gli n numeri dati ve ne sono v_1 uguali ad **1**, v_2 uguali a 2, ... v_r uguali ad r, si può assumere come permutazione principale la $(11\ldots122\ldots2\ldots rr\ldots r)$. Essendo allora ε_1 ed ε_2 due elementi differenti di un'altra permutazione si dirà che essi fanno inversione se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ e se ε_1 si trova a sinistra di ε_2; quindi il numero delle inversioni contenute nella permutazione principale, cioè formate da due elementi qualunque differenti di essa, è zero. Al solito si dirà che una permutazione è di classe pari o dispari, oppure che ad essa compete il segno $+$ od il segno $-$, secondochè il numero delle inversioni in essa contenute è pari o dispari. Riguardando lo zero come numero pari si attribuirà alla permutazione principale il segno $+$. È poi evidente che se in una permutazione si scambiano due elementi differenti e consecutivi si ottiene una permutazione che ha un'inversione di più o di meno della precedente; pertanto le due permutazioni sono di segno contrario.

In una permutazione i cui elementi sono numeri non tutti diversi, mettiamo in evidenza due elementi u e v ed indichiamo con A il gruppo degli elementi precedenti u, con B quello degli elementi seguenti v e supponiamo v a destra di u. Siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ gli elementi posti tra u e v. Scriveremo tal permutazione nel seguente modo: $(\mathrm{A}u\alpha_1\ldots\alpha_\nu v\mathrm{B})$.

Consideriamo i seguenti scambi di due elementi: 1° di u con α_1, 2° di u con α_2..; ν^{mo} di u con α_ν, $(\nu+1)^{\text{mo}}$ di u con v; $(\nu+2)^{\text{mo}}$, di v con α_ν, $(\nu+3)^{\text{mo}}$ di v con $\alpha_{\nu-1}, \ldots (2\nu+1)^{\text{mo}}$ di v con α_1, ed eseguiamo il 1° sulla permutazione suddetta e ciascuno degli altri sul risultato dello scambio precedente. La permutazione ottenuta eseguendo l'ultimo scambio è la $(\mathrm{A}v\alpha_1\ldots\alpha_\nu u\mathrm{B})$ che si può derivare dalla data scambiando gli elementi u e v; noi invece per ottenerla abbiamo operato $2\nu+1$ scambi tra elementi consecutivi. Sia η_u ed η_v il numero degli elementi rispettivamente uguali ad u e v contenuti nella successione $\alpha_1, \ldots \alpha_r$. Nel passare da una permutazione alla successiva, eseguendo i suddetti scambi, si ha un cambiamento di segno soltanto quando gli elementi scambiati sono differenti; pertanto il numero totale dei cambiamenti di segno sarà $2_r + 1 - \eta_u - \eta_v$, che è pari o dispari secondochè lo è $\eta_u + \eta_v + 1$. Pertanto la permutazione $(Av\alpha_1 \ldots \alpha_r uB)$ avrà o non avrà lo stesso segno della $(Au\alpha_1 \ldots \alpha_r vB)$ secondochè $\eta_u + \eta_v + 1$ è pari o dispari, ossia secondochè $\eta_u + \eta_v$ è dispari o pari (si considera pari anche lo zero).

Adunque: *se in una permutazione di elementi (numeri) non tutti diversi si scambiano due elementi differenti la nuova permutazione ottenuta ha segno uguale o contrario a quello della data secondochè il numero degli elementi compresi (per posizione) tra quelli scambiati ed uguali all'uno od all'altro di essi è dispari o pari.*

Es. nella permutazione (2 3 4 5 2 3 1 3 5 2) sono contenute 19 inversioni, quindi ad essa compete il segno —; nella (2 5 4 5 2 3 1 3 3 2), ottenuta dalla prima scambiando gli elementi 2° e 9°, sono contenute 25 inversioni e quindi il segno di essa è —. Gli elementi che nella permutazione data sono compresi tra il 2° ed il 9° (i quali sono un 3 ed un 5) sono 4, 5, 2, 3, 1, 3. Tra questi ve ne sono due uguali a 3 ed uno uguale a 5; quindi il numero di quelli uguali a 3 od a 5 è tre; tal numero è dispari, quindi senza contare le inversioni contenute nella 2ª permutazione potevamo essere sicuri che essa avrebbe avuto segno uguale a quello della data.

Riguardo al segno delle permutazioni di n numeri non tutti differenti, osserviamo che la permutazione principale ha il segno + e che per ciascuna delle altre si può determinare facilmente il segno, giacchè ognuna di esse si deduce da una permutazione di segno noto mediante lo scambio di due elementi differenti. Osserviamo ancora che nel formare le suddette permutazioni, c'è una certa libertà nello scegliere la permutazione sulla quale si deve eseguire ciascun scambio ed approfittando di tale libertà potremo, mediante una scelta opportuna, operare soltanto scambi tra due elementi consecutivi (le permutazioni degli elementi 1, 1, 2, 3, 3 dell'es. dianzi trattato, si sono appunto formate operando solamente scambi tra due elementi consecutivi). Procedendo in tal modo otteniamo permutazioni tali che ciascuna è di segno contrario a quella dalla quale è stata dedotta.

Figurazione delle permutazioni di n elementi non tutti diversi. — È noto (*) come le permutazioni di n elementi diversi possono essere figurate mediante gruppi di n caselle scelte in una matrice quadrata di lato n, per modo che di quelle di ciascun gruppo una ed una sola appartenga a ciascuna orizzontale e verticale della matrice. Anche le permutazioni di elementi non tutti differenti possono essere figu-

(*) Cfr. LUCAS, *op. cit.*, pag. 65 e seg.

rate mediante gruppi di elementi scelti opportunamente in una matrice rettangolare.

Si considerino ad es. le permutazioni dei nove elementi $b\,c\,d\,h\,d\,c\,d\,h\,h$ tra i quali quelli differenti sono: l'elemento b preso una volta, l'elemento c preso due volte, l'elemento d preso tre volte e l'elemento h preso tre volte. Formata la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \end{vmatrix}$$

di dimensioni $\longrightarrow 9$ e $\downarrow 4$ (nella quale cioè ogni orizzontale contiene 9 elementi ed ogni verticale 4) si chiami con G un gruppo di elementi scelti in essa in modo che: ogni verticale della matrice ne contenga uno e le orizzontali 1ª, 2ª, 3,ª 4ª, ne contengano rispettivamente 1. 2, 3, 3 (tali sono i numeri che indicano quante volte gli elementi differenti b, c, d, h della successione $b, c, d, h, d, c, d, h, h$ sono contenuti in essa. Sia ad es. $G = (a_{11}\, a_{24}\, a_{26}\, a_{32}\, a_{38}\, a_{39}\, a_{43}\, a_{45}\, a_{47})$.

A tal gruppo possiamo far corrispondere una permutazione dei nove elementi dati convenendo che ad ogni a_{ij} corrisponda l'elemento b, o c, o d, od h secondochè $i = 1, 2, 3, 4$ (cioè si fa corrispondere ad a_{ij} quello degli elementi b, c, d, h che nella successione data è preso i volte) ed assegnando a tal elemento il posto j^{mo}. La permutazione corrispondente al gruppo G considerato è la $(b\,d\,h\,c\,h\,c\,h\,d\,d)$. Viceversa data una permutazione dei suddetti elementi per es. la $(c\,h\,c\,h\,d\,b\,d\,h\,d)$ sostituiamo a ciascun elemento di essa l'elemento a_{ij} ritenendo $i = 1, 2, 3, 4$ secondochè l'elemento sostituito è b, c, d, h ed assumendo per j il valore $1, 2, 3, \ldots$ secondochè l'elemento sostituito occupa il posto 1°, 2°, 3°, ... Avremo il gruppo di elementi $(a_{21}\, a_{42}\, a_{23}\, a_{44}\, a_{35}\, a_{16}\, a_{37}\, a_{48}\, a_{39})$, che evidentemente è uno dei possibili gruppi G. Pertanto ad ogni gruppo G di elementi scelti nella matrice suddetta corrisponde una permutazione dei nove elementi dati e viceversa, ad ogni permutazione un gruppo; quindi i gruppi G si possono assumere quali gruppi figurativi delle permutazioni degli elementi dati. In generale se gli elementi dati sono n e tra questi ve ne sono h_1 uguali tra loro, h_2 pure uguali tra loro, $\ldots h_r$ uguali tra loro, $(h_1 + h_2 + \ldots \ldots + h_r) = n$, si possono figurare le permutazioni di tali elementi mediante gruppi di elementi a_{ij} scelti in una matrice rettangolare di dimensioni $\longrightarrow n$ ed $\downarrow r$, cioè di n verticali ed r orizzontali, in modo che ogni verticale della matrice ne contenga uno solo e le orizzontali 1ª, 2ª, ... r^{ma} ne contengano rispettivamente $h_1, h_2, \ldots h_r$. Vedremo in seguito che la figurazione delle permutazioni di elementi non tutti diversi è un caso particolare della figurazione di speciali aggruppamenti di elementi dati, dei quali ci occuperemo tra breve.

§ 4. Metodi per sviluppare rapidamente i determinanti.

I metodi dianzi esposti per formare rapidamente le permutazioni di n elementi diversi, possono tutti applicarsi allo sviluppo rapido dei determinanti. Però, dal punto di vista pratico, è preferibile l'applicazione dei primi tre.

Sia dapprima

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

il determinante da svilupparsi. La notissima definizione di determinante si compendia nell'uguaglianza

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

cioè il valore Δ del determinante si ottiene sommando algebricamente il prodotto $a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$ e quelli che da esso si ottengono tenendo fissi i primi (secondi) indici della a e permutando in tutti i modi possibili i secondi (primi), assumendo poi per segno di ciascun prodotto quello della permutazione dei secondi (primi) indici. Se $(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ è adunque una permutazione degli elementi $1, 2, \dots n$ sarà $a_{1,\alpha_1}\, a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}$ un termine del determinante e ad esso competerà il segno di $(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n)$. Per scrivere i termini del determinante basterà adunque scrivere le permutazioni dei numeri $1, 2, \dots n$, seguendo uno dei tre primi metodi (è convenientissimo il 1°) e poi a sinistra degli elementi 1°, 2°, ... di ciascuna scrivere i segni $a_1\, a_2 \dots a_n$ disponendoli rispetto agli elementi di ciascuna permutazione come sono disposti nel prodotto $a_{1,\alpha_1} \dots a_{n,\alpha_n}$ rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Il segno di ciascun termine si determinerà poi colla massima facilità, giacchè corrispondentemente a ciascuna permutazione $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ si può subito scrivere il relativo segno.

Consideriamo ora il caso nel quale gli elementi di un determinante sono numeri non rappresentati coi segni $a_{11}, \dots a_{nn}$, ma con altri segni qualsiasi. Ad es. si debba sviluppare il determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Premettiamo anzitutto un'osservazione. Sia $\pm\, a_{1,\alpha_1}\, a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}$ un termine del suddetto determinante Δ. Se nella permutazione $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ dei secondi indici delle a si scambiano due elementi α_i, α_j si ha una permutazione di segno contrario a quello della $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$. Essa è la

$(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\ \alpha_j\ \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1}\ \alpha_i\ \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n)$ e le corrisponde il termine $\pm a_{1,\alpha_1} \ldots a_{i,\alpha_j} \ldots a_{j,\alpha_i} \ldots a_{n,\alpha_n}$ di Δ.

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \ldots\ldots & a_{1\alpha_i} & \ldots\ldots & a_{1\alpha_j} & \ldots\ldots & a_{1n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{i1} & \ldots\ldots & a_{i\alpha_i} & \text{———} & a_{i\alpha_j} & \ldots\ldots & a_{in} \\
\vdots & & \Big| & \times & \Big| & & \vdots \\
a_{j1} & \ldots\ldots & a_{j\alpha_i} & \text{———} & a_{j\alpha_j} & \ldots\ldots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \ldots\ldots & a_{n,\alpha_i} & \ldots\ldots & a_{n,\alpha_j} & \ldots\ldots & a_{nn}
\end{array} \right|$$

Si osservi che il termine $\pm a_{1,\alpha_1} \ldots a_{i,\alpha_j} \ldots a_{j,\alpha_i} \ldots a_{n,\alpha_n}$ si deduce dal termine $\pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n}$ sostituendo ai fattori a_{i,α_i}, a_{j,α_j}, collegati nella figura soprastante colla freccia $\searrow$, rispettivamente i fattori a_{j,α_i}, a_{i,α_j} collegati colla freccia $\nearrow$, e cambiando il segno. Se gli elementi di Δ sono numeri, una simile sostituzione si fa colla massima facilità; basta sostituire a due elementi, due altri i quali, coi primi sono ai vertici di uno stesso rettangolo. Per es. si vede subito che agli elementi 2 e -2 rispettivamente delle orizzontali 2ª e 4ª di δ, dovrebbero sostituirsi gli elementi 3 ed 1 delle orizzontali 4ª e 2ª. Gli elementi a_{j,α_i}, a_{i,α_j} si diranno coniugati degli elementi a_{i,α_i}, a_{j,α_j} e precisamente a_{j,α_i}, sarà coniugato di a_{i,α_i} ed a_{i,α_j} di a_{j,α_j}; due fattori coniugati appartengono adunque ad una stessa verticale di Δ e precisamente due elementi di Δ (appartenuti a linee differenti) ed i loro coniugati sono ai vertici di uno stesso rettangolo. Considereremo l'operazione che consiste nel sostituire a due fattori di un termine di δ aventi i posti i^{mo} ed j^{mo} i fattori coniugati, come correlativa di quella che consiste nello scambiare in una permutazione di n cose gli elementi aventi i posti i^{mo} ed j^{mo}.

Dei metodi esaminati relativamente alla formazione rapida delle permutazioni di n numeri $1, 2, \ldots n$ (sono anche questi n cose diverse), il 1° ed il 3° sono particolarmente importanti per l'applicazione che se ne può fare allo sviluppo rapido dei determinanti. Mostriamo ad es. come si possano scrivere rapidamente i termini di δ applicando il 1° metodo. Si cominci a scriverne uno, per esempio il principale $+2.2.3.(-2).3$.

Scritta la permutazione $(1\,2\,3\,4\,5)$ degli elementi $1, 2, 3, 4, 5$, sappiamo già che per formare le rimanenti seguendo il 1° metodo, si comincia a dedurne altre quattro scambiando in essa gli elementi 1° e 2°, 1° e 3°, 1° e 4°, 1° e 5°. Eseguendo sul termine $+2.2.3.(-2).3$ di δ le operazioni correlative dei suddetti scambi abbiamo altri quattro termini di δ. Adunque ai fattori 1° e 2°, che sono 2 e 2 sostituiremo i fattori coniugati che sono 3 ed 1 ed avremo il termine $-3.1.3.(-2).3$. Similmente sostituendo ai fattori 1° e 3°, 1° e 4°, 1° e 5°, i fattori coniugati abbiamo i termini $-2.2(-1)(-2).3$; $-(-1).2.3.3.3$; $-2.2.3.(-2).3$.

Praticamente c'è però un inconveniente il quale proviene dal fatto che non sempre in un sol modo, con due elementi di un determinante si può formare una coppia i cui elementi abbiano valori determinati. Per esempio la coppia (3, 3) si può formare con due elementi di δ in più di un modo, ad es. cogli elementi 1° e 5° della 1ª orizzontale; 1° della 2ª, e 3° della 3ª; 2° della 4ª e 5° della 5ª ecc.... Ora quando ad es. dal termine principale $+2.2.3.(-2).3$ se ne dovesse dedurre un altro, sostituendo agli elementi 3° e 5° i loro coniugati, bisognerebbe dapprima cercare in δ tali elementi (3 e 3), ed attesa la pluralità delle coppie i cui elementi sono 3 e 3, c'è pericolo di non scegliere la coppia che occorre (la quale nel nostro caso comprende gli elementi 3° della 3ª orizzontale e 2° della 4ª). Tal pericolo può soltanto evitarsi con una faticosa attenzione la quale pregiudica la rapidità ed il buon esito dello sviluppo del determinante δ. Pensiamo però che esso cesserebbe di esistere quando tutti gli elementi di δ fossero differenti, cioè fossero numeri a ciascuno dei quali corrispondesse un segno differente.

Orbene se percorrendo successivamente le orizzontali 1°, 2°, ... di δ da sinistra a destra, noi troviamo parecchi elementi uguali, muniamo il 1° di essi dell'indice 1, il 2° incontrato dell'indice 2, ecc.... e ricordiamoci, quando vediamo scritti ad es. i segni $3_2, -2_2$ ecc. ... che essi rappresentano i numeri $3, -2, \ldots$

Vediamo allora che in

$$\delta = \begin{vmatrix} 2_1 & 1_1 & -1_1 & 3_1 & 3_2 \\ 3_3 & 2_2 & -1_2 & 1_2 & 4_1 \\ 2_3 & 0_1 & 3_4 & -1_3 & 2_4 \\ -1_4 & 3_5 & 1_3 & -2_1 & 4_1 \\ 2_5 & -1_5 & 5_1 & 2_6 & 3_6 \end{vmatrix}$$

due elementi qualunque differiscono per il valore, oppure, avendo lo stesso valore differiscono per l'indice; in ogni caso, due elementi qualunque differiscono almeno nella forma, vale a dire i loro segni rappresentativi sono differenti. Allora due qualunque delle coppie formate scegliendo due elementi di δ, differiscono almeno per un elemento, e dovendo cercarne una i cui elementi siano fattori di un dato termine di δ, possiamo trovarla subito pensando che *il 1°, 2°, 3°, ... fattore di un termine di δ, devono cercarsi rispettivamente nella 1ª, 2ª, 3ª, ... orizzontale*. Per es. si trova subito la coppia $(2_2, -2_1)$ del termine principale $+2_1.2_2.3_4.(-2_1).3_6$. Sostituendo in esso ai fattori 1° e 2° i loro coniugati si ha il termine $-3_3.1_1.3_4.(-2).3_6$; sostituendo invece ai fattori 1° e 3° i loro coniugati si ha il termine $-2_3.2_2.(-1_1)$.

$.(-2_1).3_6$. ecc.... si deducono quindi dal termine principale altri quattro termini di δ sostituendo ai fattori 1° e 2°, 1° e 3°, 1° e 4°, 1° e 5°, i loro coniugati. E ricordiamoci bene che se da un termine di δ se ne deduce un altro sostituendo a due fattori del 1° i loro coniugati, i segni dei due termini *sono contrari*.

Consideriamo ancora la permutazione (1 2 3 4 5) e le quattro ottenute scambiando in essa gli elementi 1° e 2°, 1° e 3°. 1° e 4°, 1° e 5°. Per avere le rimanenti permutazioni, seguendo il 1° metodo sappiamo che occorre scambiare in ognuna delle cinque permutazioni già formate il 2° elemento con ciascuno di quelli che lo seguono (3° 4° e 5°). Ora se noi in ciascuno dei cinque termini di δ corrispondenti alle suddette cinque permutazioni (il 1° di tali cinque termini è il principale), eseguiamo le operazioni correlative dei suddetti scambi, cioè ai fattori 2° e 3°, 2° e 4°, 2° e 5°, sostituiamo i loro coniugati, otteniamo da ognuno di essi altri tre termini di δ. Abbiamo in tutto 15 termini che assieme ai cinque già formati costituiscono un gruppo di 20 termini. Se in ognuno di essi sostituiamo ai fattori 3° e 4°, 3° e 5° i loro coniugati abbiamo altri 40 termini, e se infine in ognuno dei 60 termini già formati sostituiamo ai fattori 4° e 5° i loro coniugati abbiamo altri 60 termini di δ. Ormai è chiaro che:

Scritto un termine di un determinante d'ordine n *(per es. il termine principale) si possono ottenere tutti i termini rimanenti eseguendo su esso e su quelli che da esso si deducono, le operazioni correlative di quelle che si eseguiscono sulla permutazione* $(1\,2\ldots n)$ *e su quelle che da essa si deducono, per avere tutte le permutazioni dei numeri* $1, 2, \ldots n$, *seguendo il 1°, od il 3°, od il 4°, dei metodi già esposti.*

L'operazione correlativa dello scambio degli elementi di una permutazione aventi i posti i^{mo} ed j^{mo} consiste nel sostituire ai fattori aventi i posti i^{mo} ed j^{mo} del prodotto corrispondente a tale permutazione (il qual prodotto è un termine del determinante) i fattori coniugati, che trovansi subito nel determinante dato. Alla permutazione $(1\,2\ldots n)$ corrisponde il termine del determinante formato moltiplicando gli elementi della diagonale principale $\searrow$, ed ha il segno $+$; a due permutazioni, delle quali la 2ª sia dedotta dalla 1ª mediante lo scambio di due elementi, corrispondono termini del determinante aventi segno contrario, ed il 2° di essi si deduce dal 1° eseguendo su questo l'operazione correlativa del suddetto scambio.

Ancora una osservazione. Non occorre affatto per scrivere tutti i termini del determinante dato, di scrivere prima le permutazioni dei numeri $1, 2, \ldots n$, ma soltanto di eseguire le operazioni correlative di quelle che si eseguirebbero se si volessero formare tali permutazioni. Quello che dunque importa conoscere, come appunto noi conosciamo, è l'ordine di successione di tali operazioni.

ALBA, luglio 1902.

(continua) DOTT. NICOLÒ TRAVERSO.

DI UN CERTO ALGORITMO

per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero in frazione continua

Ebbi già occasione di segnalare in questo periodico (Tomo XVII. sett.-ott. 1901), un singolare algoritmo per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero e positivo in frazione continua, e di farne l'applicazione alla dimostrazione di un teorema notabile. Promisi altresì di tornare sull'argomento per giustificare il detto algoritmo, che esposi allora senza dimostrazione; questo è lo scopò della presente nota.

Detta ω la radice quadrata a meno di un'unità di un numero intero e positivo D, l'algoritmo consiste nel formare le potenze consecutive di $\frac{\omega z + D}{z + \omega}$, considerata come indicante una sostituzione lineare sulla lettera z, e formarle nel modo che indicai con l'esempio numerico: $D = 19$, $\omega = 4$. In questo caso la sostituzione sopra z diviene

$$\frac{4z+19}{z+4} = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{z+4}{3}}.$$

Ponendo nel 2° membro di questa eguaglianza $\frac{4z+19}{z+4}$ in luogo di z, si ottiene il quadrato operativo della sostituzione, che è

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_2 = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{8z+35}{3z+12}}.$$

Separando dalla frazione $\frac{8z+35}{3z+12}$ la parte intera del quoziente della divisione del 1° termine del numeratore pel 1° termine del denominatore, detto quadrato prende la forma

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_2 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{3z+12}{2z+11}}}.$$

Si ponga $\frac{4z+19}{z+4}$ invece di z nel 2° membro di questa eguaglianza, e si avrà

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_3 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{24z+105}{19z+82}}}.$$

Ovvero, separando dalla frazione $\frac{24z+105}{19z+82}$ la parte intera del quoziente dei termini in z,

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_3 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{19z+82}{5z+23}}}}.$$

E via dicendo. — I numeri interi e positivi ottenuti come quozienti delle consecutive divisioni, sono i quozienti incompleti consecutivi dell'ordinario sviluppo di $\sqrt{19}$ in frazione continua. E lo stesso avviene applicando un consimile algoritmo alla radice di D, qualora D rappresenti un numero intero e positivo qualsivoglia. — Infatti, supponiamo che ciò si verifichi fino ad una certa potenza della sostituzione lineare

$$\frac{\omega z + D}{z+\omega}$$

e sia la potenza n^{ma}; talchè si abbia

$$\left(\frac{\omega z + D}{z+\omega}\right)_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}}}} \tag{1}$$

dove $a_1, a_2, \ldots a_n$ rappresentano i primi n quozienti incompleti di $\sqrt{D}$. Supponiamo anzi che α, β, γ, δ siano quattro numeri positivi, non escludendo che taluno di essi possa essere zero; ma avvertendo che in ogni caso il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ dovrà essere positivo ed eguale alla potenza ennesima di $D - \omega^2$, cioè del resto della radice quadrata di D. (*) Supponiamo finalmente (perchè sarà necessario in seguito) che si verifichi la diseguaglianza

$$\delta > \gamma\omega.$$

Dimostreremo che le stesse circostanze si ripetono per la potenza $(n+1)^{ma}$ della sostituzione principale $\frac{\omega z + D}{z+\omega}$. E poichè per $n=1$ le dette circostanze si verificano, come si vede dall'eguaglianza

$$\left(\frac{\omega z + D}{z+\omega}\right)_1 = \omega + \cfrac{1}{\cfrac{z+\omega}{r}}$$

(*) Il lettore se ne persuaderà facilmente ripensando all'esposto algoritmo, e ricordando il noto teorema che: *il determinante del prodotto di due sostituzioni lineari è il prodotto dei determinanti dei fattori.*

nella quale r rappresenta il resto della radice quadrata di D, si concluderà per induzione che esse si verificano qualunque sia n.

Per formare la potenza $(n+1)^{ma}$ della sostituzione $\frac{\omega z + D}{z+\omega}$, si muti z in $\frac{\omega z + D}{z+\omega}$ nel 2° membro della (1), e si avrà

$$\left(\frac{\omega z + D}{z+\omega}\right)_{n+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'}}}}}$$

dove E indica la parte intera del quoziente

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

e $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, hanno i seguenti valori:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \gamma\omega + \delta \\ \beta' &= \gamma D + \delta\omega \\ \gamma' &= \alpha\omega + \beta - (\gamma\omega + \delta)\,E \\ \delta' &= \alpha D + \beta\omega - (\gamma D + \delta\omega)\,E. \end{aligned}$$

Sarà da dimostrare: 1° che α', β', γ' e δ' sono positivi; 2° che E uguaglia il quoziente incompleto $(n+1)^{mo}$ dell'ordinario sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua; 3° che $\delta' > \gamma'\omega$.

In quanto alla positività di α', β', γ' e δ', essa è evidente per α', β' e γ', come apparisce dalle (1). Che poi anche δ' è positivo, risulta dall'osservare che il determinante $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ è positivo ed eguale ad r^{n+1}, epperò δ' non può essere negativa.

Passiamo alla E, parte intera del quoziente

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

e paragoniamola col quoziente incompleto $(n+1)^{mo}$ dello sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua. A tal fine facciamo nella (1) $z = \sqrt{D}$, ed avremo

$$\sqrt{D} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha\sqrt{D} + \beta}{\gamma\sqrt{D} + \delta}}}}.$$

Il quoziente completo $(n+1)^{mo}$ relativo a $\sqrt{D}$ è dunque

$$\frac{\alpha\sqrt{D} + \beta}{\gamma\sqrt{D} + \delta}.$$

D'altra parte è noto che il detto quoziente è pure della forma

$$\frac{m+\sqrt{D}}{n}$$

dove m ed n sono numeri interi e positivi. (*) Si avrà dunque

$$\frac{\alpha\sqrt{D}+\beta}{\gamma\sqrt{D}+\delta}=\frac{m+\sqrt{D}}{n}$$

d'onde

$$\alpha n-\gamma m=\delta$$
$$\beta n-\delta m=\gamma D.$$

Moltiplicando la prima di queste eguaglianze per ω e aggiungendola alla seconda:

$$n(\alpha\omega+\beta)-m(\gamma\omega+\delta)=\delta\omega+\gamma D=\omega(\gamma\omega+\delta)+\gamma r;$$

e da questa:

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=\frac{m+\omega}{n}+\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}.$$

Ora, poichè il quoziente incompleto $(n+1)^{mo}$ relativo a $\sqrt{D}$ non è se non la parte intera di $\frac{m+\sqrt{D}}{n}$, eguale a quella di $\frac{m+\omega}{n}$, sarà dimostrato che esso è anche la parte intera di $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, ove si giunga a stabilire che $\frac{m+\omega}{n}$ ed $\frac{m+\omega}{n}+\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}$ hanno la stessa parte intera. E ciò sarà evidente qualora si dimostri che il massimo numero di ennesimi contenuti nella somma

$$\frac{m+\omega}{n}+\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}$$

è $m+\omega$, che cioè la frazione $\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}$ non monta a $\frac{1}{n}$. (**)

Ma la disuguaglianza

$$\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}<\frac{1}{n}$$

si riduce all'altra

$$\gamma r<\gamma\omega+\delta,$$

per dimostrare la quale osserveremo che, essendo

$$r\leq 2\omega,$$

per una nota proprietà del resto dell'estrazione di radice quadrata,

(*) LEGENDRE. *Théorie des nombres.* T. I, § 5.

(**) Di questo mezzo per verificare che due espressioni hanno la stessa parte intera si servì pure il prof. *L. Bosi* per la risoluzione della questione a premio da me proposta in questo periodico (t. XVII, sett.-ott. 1901). — Si veda la mia relazione nel fascicolo di marzo-aprile 1902. — Il premio toccò in sorte al dott. *Paolo Cattaneo.*

si ha pure: $\gamma r \leq 2\gamma\omega$. E poichè si è supposto $\gamma\omega < \delta$ (salvo a dimostrare che anche $\gamma'\omega < \delta'$), sommando le ultime due disuguaglianze membro a membro, si ha per l'appunto

$$\gamma r < \gamma\omega + \delta.$$

Resta a dimostrare che $\gamma'\omega < \delta'$, che cioè

$$\omega\,[\alpha\omega + \beta - (\gamma\omega + \delta)\,\mathrm{E}\,] < \alpha\mathrm{D} + \beta\omega - (\gamma\mathrm{D} + \delta\omega)\,\mathrm{E}.$$

Posto $\omega^2 + r$ invece di D e fatte alcune riduzioni, questa disuguaglianza si riduce all'altra

$$\alpha > \gamma\mathrm{E}$$

per dimostrare la quale basterà mettere invece di E la quantità non minore $\dfrac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, e verificare che si ha pure:

$$\alpha > \gamma\,\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Ora quest'ultima disuguaglianza si riduce all'altra

$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

che è vera, perchè $\alpha\delta - \beta\gamma = r''$.

G. Frattini.

SOPRA UNO DEGLI ERRORI PRODOTTI DALLA INTERPOLAZIONE SEMPLICE

§ 1. — Si consideri una tavola numerica qualunque, la quale dia i valori di una funzione corrispondenti ai successivi valori di una variabile crescenti in progressione aritmetica (come la tavola dei logaritmi dei numeri, la tavola dei logaritmi delle funzioni circolari, la tavola dei valori naturali delle stesse funzioni,...); e siano y_0 e y_1 i valori della funzione corrispondenti a due valori successivi x_0 e x_1 della variabile. Quando, per avere il valore y della funzione corrispondente a un valore x della variabile compreso fra x_0 e x_1, o, inversamente, per avere il valore x della variabile corrispondente a un valore y della funzione compreso fra y_0 e y_1, si ammette il *principio delle parti proporzionali*, ossia si ammette che sia

$$(1) \quad y = y_0 + (x - x_0)\,\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad (2) \quad x = x_0 + (y - y_0)\,\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0},$$

è noto che y e x risultano, generalmente, affetti da due errori: uno che deriva dal principio ammesso, il quale è vero solo quando la funzione sia razionale, intera e di primo grado; l'altro che deriva dall'essere i valori y_0 e y_1, dati dalla tavola, approssimati a meno di una mezza unità dell'ultimo ordine e dal supporre che y si calcoli, o sia dato, collo stesso numero di cifre di y_0 e di y_1.

La ricerca di un limite per il primo errore (che indicheremo con g) esce generalmente dal campo delle *Matematiche elementari* (*); ma per il secondo (che indicheremo con l) si può facilmente trovare un limite con considerazioni elementari; e, per l'importanza pratica dell'argomento, crediamo utile esporre qui alcuni risultati, che ci sembrano notevoli e che coordinano e completano quanto altra volta (**) scrivemmo in proposito.

§ 2. — Stabiliamo prima di tutto

che y_0 ed y_1 siano i valori dati dalla tavola e che n sia il numero delle loro cifre decimali;

che a_0 ed a_1 siano gli errori di y_0 e di y_1 dovuti alle cifre trascurate (ovvero che $y_0 + a_0$ e $y_1 + a_1$ siano i valori esatti di y_0 e di y_1);

che, nella ricerca inversa, anche y sia dato con n cifre decimali;

che a sia l'errore di y dovuto alle cifre trascurate, e che, quando y sia il risultato di un calcolo numerico, b sia l'errore dovuto agli errori da cui possono essere affetti i numeri sui quali si è operato.

Ricordiamo inoltre che l'ultima cifra (l'n^{ma}) s'intende sempre aumentata di 1 se quella che seguiva era uguale o superiore a 5, e che quindi, prendendo quest'ultima cifra per cifra delle unità, il valore assoluto dell'errore dovuto alle cifre trascurate ha per massimo 0,5, se quest'errore è per eccesso, ed è invece minore di 0,5, ma può differire da 0,5 meno di una quantità piccola finchè si vuole, se quest'errore è per difetto. Così, dei due numeri esatti 37,500 e 42,499, trascurando tutte le cifre decimali, si ha rispettivamente 38 e 42, e quindi l'accennato errore è uguale a $-0,500$ nel primo caso, a $+0,499$ nel secondo.

E supponiamo finalmente che (come generalmente accade) al crescere della variabilità da x_0 a x_1 la funzione cresca sempre o cali sempre, e che quindi le tre differenze $y - y_0$, $y_1 - y$ e $y_1 - y_0$ abbiano tutte lo stesso segno.

§ 3. — Ciò posto, siano l_d ed l_i i valori di l nella ricerca diretta e nella ricerca inversa rispettivamente, e siano λ_d e λ_i i corrispondenti valori assoluti.

In quanto ad l_d nulla abbiamo da aggiungere a quanto già dicemmo(***); ricorderemo solo che non è esatto il dire che λ_d è sempre minore di 1,

(*) Uno studio completo ne facemmo noi stessi nella nota " Errori prodotti dalla interpolazione semplice nell'uso delle tavole logaritmo-trigonometriche " (*Rivista Marittima*, Luglio 1895), e nell'altra " Sulla ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli " (*Corrispondenza*, An. II, fasc. V, VI e VII; e *Periodico di Matematica*, Luglio-Decembre 1901).

(**) Veggasi l' "*Appendice* " al nostro *Trattato di Trigonometria* (Ed. Giusti, Livorno, 1895).

(***) V. il § 22 dell' "*Appendice* " citata.

giacchè, come già facemmo vedere con un esempio (*), λ_d può anche essere eguale a 1.

Passiamo dunque ad l_i.

Osservazione. — È notevole che, se la differenza $y_1 - y_0$, invece di dedurla direttamente dalla tavola, si calcola con altro procedimento, il quale conduca ad avere la differenza stessa *con approssimazione maggiore* (**), *l'errore* l_d, invece di diminuire, *può* anche *crescere.*

Supponiamo, p. es., che per $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ nella tavola si abbia $y_0 = 2,33$ e $y_1 = 2,49$, e che si voglia il valore y corrispondente a $x = 1,9$: dalla (1), essendo $y_1 - y_0 = 0,16$, avremo immediatamente

$$y = 2,33 + 0,9 \times 0,16 = 2,47.$$

Supponiamo ora che i valori *esatti* di y_0 e di y_1 siano 2,3250 e 2,4899 (dai quali si siano ricavati quelli dati dalla tavola trascurando le ultime due cifre) e che nel calcolo precedente, invece di usare la differenza approssimata 0,16, si usi la differenza *esatta* 0,1649, che si deduce da questi due valori; avremo allora

$$y = 2,33 + 0,9 \times 0,1649 = 2,48.$$

Ma il valore *esatto* di y (prescindendo dall'errore g) è, evidentemente, dato da

$$y = 2,3250 + 0,9 \times 0,1649 = 2,47341,$$

quindi, usando la differenza approssimata si commette un errore eguale a $+0,00341$, usando invece la differenza esatta si commette un errore eguale a $-0,00659$, che è maggiore, in valore assoluto, del precedente. E si noti che la conclusione non cambia se nel calcolo di y si evita l'errore a (non trascurando cioè nessuna cifra decimale), perchè, invece dei due valori 2,47 e 2,48 si avrebbe 2,474 e 2,47841 e i due errori corrispondenti sarebbero $-0,00059$ e $-0,00500$.

Questo apparente paradosso che si spiega facilmente esaminando la formula dà l_d.

§ 4. — Dietro tutte le notazioni stabilite e prescindendo, per ora, dall'errore b, dalla (2) si ha immediatamente

$$l_i = \left\{ \frac{(y + a) - (y_0 + a_0)}{(y_1 + a_1) - (y_0 + a_0)} - \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \right\} (x_1 - x_0),$$

e quindi

$$(3) \qquad l_i = \frac{a\,(y_1 - y_0) - a_1\,(y - y_0) - a_0\,(y_1 - y)}{(y_1 - y_0)\left\{(y_1 + a_1) - (y_0 + a_0)\right\}}\,(x_1 - x).$$

(*) V. il § 3 della nota citata "Sulla ricerca del logaritmoseno...".

(**) Questo avviene, p. es., nella tavola trigonometrica del Köhler, dove, invece della differenza per 1', si dà la differenza per 1", calcolata con una o due cifre decimali, sopra una differenza per 10", intermedia e dedotta da una tavola a 10 cifre decimali (come noi stessi trovammo, procedendo per tentativi; v. il § 10 della nota citata "Sulla ricerca del logaritmoseno...").

Ci proponiamo di trovare un limite superiore del secondo membro, supponendo dapprima che le differenze $y - y_0$, $y_1 - y$, $y_1 - y_0$ siano positive.

§ 5. — Osserviamo prima di tutto che ciascuna delle due differenze $y - y_0$ e $y_1 - y$ deve supporsi uguale a 1 almeno (perchè, altrimenti, l'interpolazione non occorrerebbe) e che quindi la differenza tavolare $y_1 - y_0$ deve supporsi uguale a 2 almeno. Osserviamo inoltre che le differenze $a - a_0$, $a_1 - a$, $a_1 - a_0$, per quanto s'è detto nel § 2, possono differire dall'unità di una quantità piccola finchè si vuole, ma non possono nè superarla nè uguagliarla. Osserviamo finalmente come di qui intanto derivi che il denominatore del secondo membro della (3) è sempre positivo.

Ed ora, al crescere di a, supposto a_0 ed a_1 qualunque ma fissi, il valore di l_1 cresce sempre (perchè il denominatore è positivo); quindi l_1 avrà il suo minimo valore eguale a quello che si ottiene facendo $a = -0,5$, e il suo massimo potrà differire meno di una quantità piccola finchè si vuole dal valore che si ottiene facendo $a = +0,5$.

Al crescere di a_1 invece, supposto a ed a_0 qualunque ma fissi, l_1 cala; a meno che, comparendo a_1 tanto al numeratore che al denominatore della frazione che figura nel secondo membro della (3), la frazione stessa non sia indipendente da a_1. Ma è facile vedere che, indicando con ε_1 un accrescimento qualunque attribuito ad a_1, affinchè si avesse

$$\frac{a(y_1-y_0)-a_1(y-y_0)-a_0(y_1-y)}{(y_1+a_1)-(y_0+a_0)}=\frac{a(y_1-y_0)-(a_1+\varepsilon_1)(y-y_0)-a_0(y_1-y)}{(y_1+a_1+\varepsilon_1)-(y_0+a_0)},$$

dovrebbe essere

$$y - y_0 = a_0 - a,$$

e questo è impossibile perchè, come si è osservato, $y - y_0$ è almeno eguale a 1, mentre $a_0 - a$ è sempre inferiore a 1. Dunque l_1, supposti a ed a_0 qualunque ma fissi, avrà il suo massimo valore eguale a quello che si ottiene facendo $a_1 = -0,5$ e il suo minimo potrà differire di una quantità piccola finchè si vuole del valore che si ottiene facendo $a_1 = +0,5$.

Vediamo finalmente come varia l_1 al crescere di a_0: in questo caso, supposti, al solito, a ed a_1 qualunque ma fissi, tanto il numeratore quanto il denominatore della frazione decrescono, ma è facile vedere che decresce anche la frazione stessa. Infatti, indicando con ε_0 un accrescimento qualunque, ma positivo, attribuito ad a_0, si avrà sempre

$$\frac{a(y_1-y_0)-a_1(y-y_0)-a_0(y_1-y)}{(y_1+a_1)-(y_0+a_0)}>\frac{a(y_1-y_0)-a_1(y-y_0)-(a_0+\varepsilon_0)(y_1-y)}{(y_1+a_1)-(y_0+a_0+\varepsilon_0)},$$

perchè questa diseguaglianza equivale all'altra

$$y_1 - y > a - a_1,$$

e questa è sempre verificata, perchè, come si è osservato, $y_1 - y$ è almeno eguale ad 1 mentre $a - a_1$ è sempre minore di 1. Quindi, come nel caso precedente, supposto a ed a_1 qualunque ma fissi, l_1 avrà il suo massimo valore eguale a quello che si ottiene facendo $a_0 = -0,5$ e il suo minimo potrà differire di una quantità piccola finchè si vuole dal valore che si ottiene facendo $a_0 = +0,5$.

§ 6. — Da quanto precede risulta che l_1 sarà sempre minore del valore che si ottiene dal secondo membro della (1) ponendo $a = +0,5$, $a_1 = -0,5$, $a_0 = -0,5$, e sarà sempre maggiore del valore che si ottiene dalla frazione stessa ponendo $a = -0,5$, $a_1 = +0,5$, $a_1 = +0,5$, potendo però differire dall'uno e dall'altro valore di una quantità piccola finchè si vuole.

Ma, ponendo $a_1 = a_0$, la (3) si riduce a

$$l_1 = \frac{a + a_0}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0), \tag{4}$$

quindi si conclude che

$$\lambda_1 < \frac{1}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0), \tag{5}$$

e che questo limite è inabbassabile.

Abbiamo supposto che tutt'e tre differenze $y - y_0$, $y_1 - y$, $y_1 - y_0$ siano positive, ma ora è facile vedere che i risultati precedenti non cambiano se tutt'e tre queste differenze sono negative, perchè nella frazione che figura nel secondo membro della (3) cambiano segno i coefficienti di a, a_1 e a_0, ma cambia segno anche il denominatore; dunque la (5) è sempre vera.

Esempio. — Sia

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1 \;, & y_0 = 2,33 \;, & a_0 = -0,00500 \\ & y = 4,39 \;, & a = +0,00499 \\ x_1 = 2 \;, & y_1 = 6,46 \;, & a_1 = -0,00500\,; \end{array}$$

dalla (2) si avrà subito

$$x = 1 + \frac{2,06}{4,13} = 1,498789\ldots$$

mentre coi valori esatti di y_0, y, y_1 si avrebbe

$$x = 1 + \frac{2,06999}{4,13000} = 1,501208\ldots.$$

onde

$$l_1 = 0,00241\ldots.$$

E la (5) dà appunto

$$\lambda_1 < \frac{1}{413} \quad \text{ossia} \quad \lambda_1 < 0,00242\ldots.$$

OSSERVAZIONE I. — Se oltre che dell'errore a si tiene conto anche dell'errore b (§ 2), invece della (5) si ha evidentemente

$$\lambda_i < \frac{1+b}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0). \tag{6}$$

OSSERVAZIONE II. — Nell'esempio precedente si è calcolato il valore di x con un numero di cifre esagerato, per meglio confermare i risultati precedenti: ma, per non avere una approssimazione illusoria, bastava fermarsi alla terza cifra decimale (*).

§ 7. — All'errore l_d neppur si accenna negli ordinari trattati di *Trigonometria*, mentre invece l'errore l_i è spesso preso in considerazione per giustificare la preferenza che, nella ricerca inversa, si stabilisce doversi dare al logaritmo della tangente, rispetto al logaritmo del seno o del coseno.

Il SERRET (**) suppone $a + b < 1$ e trascura *esplicitamente* gli errori a_0 ed a_1, e allora dalla (3) si ha immediatamente

$$\lambda_i < \frac{1}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0).$$

La stessa ipotesi e la stessa conclusione si trova in tutti i trattati, nei quali, per l'accennata ragione, si considera l_i (REBIÈRE, F. J., BRIOT et BOQUET, PICHOT, VACQUANT,....).

Fanno eccezione, che noi sappiamo, solo il DE COMBEROUSSE (***) e il BESSO (****). Il primo, riportando un ragionamento fatto dal VIEILLE (*****), arriva pure alla (5), ma supponendo $a - a_0$ e $a_1 - a_0$ minori, in valore assoluto, di 0,5, ipotesi evidentemente inammissibile, potendo invece tanto $a - a_0$ che $a_1 - a_0$ differire da 1 meno di una quantità piccola finchè si vuole. Il BESSO partendo dalla (3) invece che alla (5) arriva, nelle nostre ipotesi, all'altra

$$\lambda_i < \frac{1+b}{y_1 - y_0 - 1},$$

risultato al quale, con un ragionamento più breve, noi pure giungemmo (v*) e che dà un limite superiore maggiore di quello dato dalla (6).

E accenneremo finalmente anche a quanto trovasi nella pregievole introduzione dell'HOUEL alle bellissime tavole dello SCHRÖN (v**). Ivi, invece della (3), si ammette che sia

$$l_i = \frac{1}{y_1 - y_0}\left\{ a - a_0\left(1 - \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) - a_1 \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right\}, \tag{7}$$

(*) V. il § 17 dell' "*Appendice*" citata.

(**) *Traité de Trigonométrie.* (Ed. Gautier-Villars, Parigi, 1888, pag. 78.)

(***) *Cours de Mathématiques.* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1893, t. II, pag. 649.)

(****) *Elementi di Trigonometria piana.* (Ed. Loescher, 1880, pag. 106.)

(*****) *Théorie générale des approximations numérique.* (Ed. Mallet-Bachelier, Paris, 1854, pag. 36.)

(v*) V. il § 22 dell' "*Appendice*" più volte citata.

(v**) *Tables de logarithmes.* (Ed. Gauthier-Villars, 1894, pag. IX.

e allora si arriva immediatamente alla (5); ma la conclusione non è rigorosa, essendo la (7) vera solo approssimativamente.

Concludendo: la (6) è vera tenendo conto di tutti gli errori a, a_0 ed a_1 e il limite che essa fornisce è *inabbassabile;* e noi crediamo questo risultato nuovo e (specialmente pei casi in cui la differenza tavolare y_1-y_0 è piccola) praticamente importante.

G. Pesci.

Sulla minima distanza di due iperspazi

È noto che date due rette sghembe dello spazio ordinario, esiste sempre un segmento compreso tra esse, e uno solo, che è perpendicolare ad ambedue e minore di tutti gli altri: nella presente nota è mio proposito far vedere geometricamente, (*) che il teorema vale anche se alle due rette dello spazio ordinario si sostituiscono due spazi *duali* S_k, S_{n-k-1} dello spazio a n dimensioni S_n. La dimostrazione di questo teorema non differisce gran che da quello che si dà per le rette sghembe dell'S_3; è utile per questo, a fine di non complicarla troppo, premettere alcuni teoremi generali. Essi sono una naturale estensione di altri, noti nella geometria dello spazio ordinario, e quindi credo opportuno ometterne le rispettive dimostrazioni.

α) 1. Se un S_1 è perpendicolare a due spazi S_k ed S_{n-k-1} in un S_0 che essi abbiano a comune, è pure perpendicolare all'S_{n-1} che essi individuano:

2. se un S_1 è perpendicolare a un S_{n-1}, è pure perpendicolare a tutti gli spazi di dimensione inferiore contenuti in S_{n-1} e passanti pel piede di S_1.

β) 1. Dato un S_k e un S_{k-1} $(l \leq k)$ giacente o no in S_k si può sempre condurre per S_{k-1} un S_{n-1} perpendicolare ad S_k;

2. se S_{k-1} non giace in S_k, l'S_{k-1} sezione di S_k con S_{n-1}, si dice *proiezione* di S_{k-1} su S_k, ed è il luogo geometrico dei piedi degli S_1 perpendicolari, calati dai singoli punti di S_{k-1} su S_k.

γ) Se da un S_0 si cala l'S_1 perpendicolare a un S_{n-1}, il segmento che congiunge S_0 col piede di questa perpendicolare è la più corta distanza di questo S_0 dall'S_{n-1}.

δ) Per un S_0 si può sempre condurre un S'_k parallelo ad un S_k dato.

ε) Se un S_k è parallelo a un S'_k di S_{n-1} o è parallelo a questo S_{n-1} o giace in esso.

ι) Se un S_k è parallelo a un S_{n-1}, ogni S_{k+1}, per S_k e per un punto di S_{n-1} sega S_{n-1} in un S'_k parallelo ad S_k.

(*) Per quanto riguarda la trattazione analitica del problema vedi per esempio il Jordan, *Essai sur la géométrie à n dimensions.* Bull., Soc., Math., de France, III.

$\varkappa$) 1. Se due S_k S'_k sono paralleli e il primo ha a comune con un S_h un S_{h+k-n} $(h+k \geq n)$, anche il secondo avrà a comune con S_h un S'_{h+k-n}:

2. se S_h è inoltre perpendicolare ad S_k, è perpendicolare anche ad S'_k.

λ) Due spazi S_k S'_k paralleli a un terzo S''_k sono paralleli fra di loro.

μ) Un S_h e un S_k paralleli, sono ovunque alla medesima distanza.

Ciò premesso, passiamo alla dimostrazione del teorema.

Siano in S_n due spazi S_k ed S_{n-k-1} indipendenti, che non abbiano cioè alcun punto in comune. Si prenda in S_{n-k-1} un punto e per esso si conduca l'S'_k parallelo ad S_k [δ]. Questo S'_k unitamente all'S_{n-k-1}, determina un S_{n-1} parallelo all'S_k [ε]. Per S_k si conduca [β, 1.] l'S_{k+1} perpendicolare all'S_{n-1}; esso incontrerà detto S_{n-1} in un S''_k [ι]. Essendo paralleli S'_k ed S''_k [λ], S''_k ed S_{n-k-1} hanno un punto comune [$\varkappa$, 1.]. Sia A questo punto: per A conduciamo l'S_1 perpendicolare [β, 1.] ad S_{n-1}; esso risulta perpendicolare a S''_k [α, 2.] e quindi incontra S_k perpendicolarmente [$\varkappa$, 2.] in un punto B. Abbiamo così trovato un segmento AB perpendicolare ai due spazi S_k S_{n-k-1}. Dico che di tali segmenti non esiste che questo: infatti ogni altro che godesse di tale proprietà, essendo perpendicolare all'S_k intersezione di S_{n-1} coll'S_{k+1} contenente l'S_k dato e questo segmento [ι] [$\varkappa$, 2.], lo sarebbe pure ad S_{n-1} [α, 1.] e quindi giacerebbe in S_{k+1} [β, 2.]: dovendo poi incontrare S_{n-k-1} non potrebbe essere distinto da AB. Adesso non ci resta che far vedere che AB è la minima distanza dei due iperspazi dati, cioè che è il più breve fra gli ∞^{n-1} segmenti che congiungono un punto qualunque di S_k con un altro pure qualunque di S_{n-k-1}. E invero, se B_1 e A_2 sono punti di S_k e di S_{n-k-1} rispettivamente, e distinti da B e da A, detto A_1 il piede della perpendicolare calata da B_1 su S_{n-1} [β, 2] sarà A_1 B_1 minore di A_2 B_1 [γ]; ma A_1 B_1 è uguale ad AB, [μ], dunque AB è minore di A_2 B_1. Il teorema è così dimostrato.

Nell'S_4 avremo da considerare la minima distanza tra un S_1 e un S_2, nell'S_5 quella fra un S_1 e un S_3 e quella tra due S_2. In generale nell'S_n avremo da considerare $\frac{n-2}{2}$ minime distanze se n è pari, ed $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari, non occupandoci di quello tra un S_0 e un S_{n-1}, ciò che è già contenuto nei teoremi [β, 1.], fatto $k=l=n-1$, e [γ].

È chiaro che se si dovesse trovare la minima distanza in S_n di due iperspazi S_h ed S_k tali che fosse $h+k$ minore di $n-1$, basterebbe prendere per spazio ambiente l'S_{h+k+1} da essi individuato e ripetere il ragionamento precedente ponendo $h+k+1$ al posto di n. Il caso di $h+k$ maggiore di $n-1$ non offre alcun interesse per noi, avendo allora i due spazi S_h ed S_k almeno un S_0 a comune.

Pisa, maggio 1902.

ENRICO PICCIOLI.

GENERALIZZAZIONI

riguardanti la Divisibilità dei numeri e la Teoria delle frazioni decimali periodiche

I.

Divisibilità.

1. Un notevole criterio di Divisibilità dovuto al Ch.^{mo} prof. G. Loria si può ennunciare nel seguente modo: (*)

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un intero N *scritto nel sistema di numerazione decimale sia divisibile per un intero* a *primo con* 10, *è che sia divisibile per* a *la somma dei numeri ottenuti separando, finchè è possibile, le cifre di* N *in tanti gruppi di* m *cifre ciascuno cominciando da destra,* m *essendo un intero che verifica la congruenza* $10^m \equiv 1$ (mod a). Il numero m, per il teorema di Fermat generalizzato, esiste e perciò il criterio è generale.

Questo criterio si può estendere facilmente ai numeri rappresentati in un sistema di base qualunque g, mediante le osservazioni seguenti, dalle quali appare come esso dipenda *solamente* dallo stesso teorema di Fermat generalizzato. Infatti supposto l'intero positivo N scritto nel sistema di numerazione a base g, si potrà porre ed in un sol modo,

$$N = a_0 + g \,.\, a_1 + g^2 \,.\, a_2 + \ldots g^k \,.\, a_k$$

dove le a_r, cifre del numero, sono minori di g ed a_k è diverso da zero. Indicato con λ un intero indeterminato, si aggruppino i termini del secondo membro a λ a λ cominciando da a_0; se poi si pone

$$N_{\rho,\lambda} = a_{\rho\lambda} + a_{\rho\lambda+1} \cdot g + a_{\rho\lambda+2} \cdot g^2 + \ldots + a_{\rho\lambda+\lambda-1} \cdot g^{\lambda-1} \quad (\rho = 0, 1, 2 \ldots)$$

si ha:

$$N = N_{0,\lambda} + g^\lambda \,.\, N_{1,\lambda} + g^{2\lambda} \,.\, N_{2,\lambda} + \ldots \tag{1}$$

Ora detto a un intero positivo primo con g, si può assegnare all'indeterminata λ un valore m per il quale si abbia $g^m \equiv 1$ (mod a); ne segue

$$g^{2m} \equiv 1 \,,\; g^{3m} \equiv 1, \ldots \quad (\text{mod } a)$$

e dalla **(1)**, dopo avervi sostituito m a λ, si ricaverà la congruenza

$$N \equiv N_{0,m} + N_{1,m} + N_{2,m} + \ldots \quad (\text{mod. } a);$$

(*) LORIA, *Carattere di Divisibilità per un numero intero qualunque*. ("Rendiconti della R. Acc. dei Lincei" 1901 e "Il Bollettino di Matem." diretto dal Dott. Alberto Conti, gennaio-febbraio 1902.)

ma i termini del secondo membro non sono altro che i numeri ottenuti separando le cifre di N in gruppi di m cifre ciascuno cominciando da destra, quindi l'ultima congruenza esprime il criterio enunciato esteso alla base g, come ci eravamo proposti.

2. *Può* accadere che esista un esponente ω per cui si abbia $g^{\omega} \equiv -1 \pmod{a}$; in tale ipotesi si deduce

$$g^{2\omega} \equiv 1,\ g^{3\omega} \equiv -1,\ g^{4\omega} \equiv 1, \ldots \pmod{a},$$

e quindi se torniamo a considerare l'uguaglianza (1) e si muta l'indeterminata λ in ω, si ricaverà subito

$$N \equiv N_{0,\omega} - N_{1,\omega} + N_{2,\omega} - N_{3,\omega} + \ldots \pmod{a}$$

onde *il numero* N *sarà divisibile per* a *quando, e solo quando, è divisibile per* a *la* somma alternata *dei numeri ottenuti separando le cifre di* N *in gruppi di* ω *cifre cominciando da destra.* (*)

Osservazione. — Se a è un numero primo e g è non residuo quadratico di a si ha, come è notissimo, $g^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}$, quindi $\omega \overline{\overline{<}} \frac{a-1}{2}$; onde il precedente criterio è applicabile a tutti i numeri primi di cui g è non residuo quadratico.

3. Teorema di Plateau generalizzato. — *Ogni numero* a *primo colla base* g *di un sistema di numerazione, ammette nel sistema stesso un multiplo della forma* 111 . . . 1. (**)

Infatti discende dall'ipotesi che i due numeri g, $(g-1)a$ sono primi tra loro; quindi si potrà determinare un esponente m che renda $g^m - 1$ divisibile per il prodotto $(g-1)a$. Ma poichè

$$g^m - 1 = (g-1)(g^{m-1} + g^{m-2} + \ldots + 1),$$

il fattore che è nella seconda parentesi dovrà essere divisibile per a; ora tale fattore è appunto un numero di m cifre uguali ad 1 *nel sistema di base* g, quindi il teorema è dimostrato.

4. Sia $\div\!\!\div a_1 : a_2 : a_3 \ldots : a_n : \ldots$ una progressione geometrica illimitata a termini interi e positivi. Se q è il quoziente costante si ha $a_n = a_1 q^{n-1}$, e poichè a_n è intero per qualunque valore di n, anche q è *necessariamente* un numero intero. Ciò posto se indichiamo con a un intero positivo primo con q e con s_n la la somma dei primi n termini della progressione dico che *si potrà assegnare ad* n *un valore tale che* s_n *risulti multiplo di* a. Indichiamo infatti con d il massimo comune divisore dei numeri a, a_1: affinchè si verifichi quanto abbiamo affermato è necessario e sufficiente che $1 + q + \ldots + q^{n-1}$ sia divisibile per $\frac{a}{d}$ ovvero (moltiplicando i due termini del quoziente per $q-1$) che $q^n - 1$

(*) V. Loria, l. c.
(**) V. Loria, l. c.

sia divisibile per $(q-1)\frac{a}{d}$. Ma, a causa dell'ipotesi è sempre possibile determinare n in modo che si abbia

$$q^n \equiv 1 \left[\mathrm{mod}\ (q-1)\frac{a}{d}\right],$$

onde il teorema è dimostrato.

Se n è la soluzione minima di quest'ultima congruenza sono multipli di a i numeri s_n, s_{2n}, ... $s_{\nu n}$ ... e nessun altro tra i numeri s_x.

5. Aggiungeremo ora alcune considerazioni riguardanti la determinazione del minimo valore dell'esponente che verifica le congruenze $g^x \equiv \pm 1 \pmod a$, g ed a essendo due numeri dati primi fra di loro.

a) Se m è il minimo intero per cui $g^m \equiv 1 \pmod a$, i primi m termini della successione

$$g, g^2, \ldots g^m, \quad g^{m+1}, \quad g^{m+2}, \ldots$$

dànno rispetto ad a resti diversi da zero, diversi tra loro e l'ultimo dà resto 1; tali resti si riproducono poi periodicamente. Se ora indichiamo con r_0 un numero positivo qualunque *primo con* a *e minore di esso* anche i primi m tra i prodotti

$$r_0 g, \quad r_0 g^2, \ldots r_0 g^m, \quad r_0 g^{m+1}, \ldots$$

daranno rispetto ad a, resti differenti da zero, e tra loro, e l'ultimo darà resto r_0; pertanto indicando con $r_1\, r_2 \ldots r_m\ (= r_0)$ tali resti, avremo le congruenze

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_0 g^2 \equiv r_2, \ldots r_0 g^m \equiv r_0 \pmod a$$

se ne deduce

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_1 g \equiv r_2, \ldots r_{m-1} g \equiv r_0 \pmod a$$

e quindi potremo porre le uguaglianze

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \quad r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots r_{m-1} g = ac_m + r_0 \qquad (1')$$

dove, poichè $r_0 < a$, i quozienti interi c risultano minori di g. Concludendo la determinazione di m può farsi in pratica così: *Si divida* $\mathrm{r_0 g}$ *per* a *e sia* $\mathrm{r_1}$ *il resto; si divida* $\mathrm{r_1 g}$ *per* a *e sia* $\mathrm{r_2}$ *il resto,* ecc.; *così si prosegua finchè non si incontra una divisione che dà il resto* $\mathrm{r_0}$, *ciò che deve necessariamente accadere; il numero delle divisioni eseguite è il valore cercato di* m.

b) Con questo procedimento si calcola anche, quando esiste, il *minimo intero* ω che verifica la congruenza $g^\omega \equiv -1 \pmod a$. Infatti supposto che ω esista si ha anche $g^\omega \equiv a-1 \pmod a$, e quindi tra i resti delle m potenze

$$g, \; g^2, \ldots, g^m$$

si incontra il resto $a-1$; ne segue che ω non può superare m, ma siccome nella ipotesi di $\omega=m$ si ha simultaneamente $g^{\omega}\equiv 1$, $g^{\omega}\equiv -1$ (mod. a) e quindi $a=2$, (*) così, *escluso* quest'ultimo caso, sarà $\omega<m$. Ciò posto da $g^{\omega}\equiv -1$ (mod. a) si deduce

$$r_0 g^{\omega}\equiv a-r_0 \pmod a;$$

ma poichè si ha anche per quanto precede,

$$r_{\omega-1}\,g\equiv r_0 g^{\omega}\equiv r_{\omega} \pmod a,$$

si dedurrà

$$r_{\omega}=a-r_0$$

e quindi *tra gli* m *resti differenti dell'algoritmo* (1') *l'* ω^{esimo} *è appunto* $a-r_0$.

Reciprocamente se tra gli m resti delle (1) se ne incontra uno $r_{\omega}=$ $=a-r_0$ avendosi anche

$$r_0 g^{\omega}\equiv r_{\omega-1}\,g\equiv r_{\omega} \pmod a,$$

si dedurrà

$$r_0 g^{\omega}\equiv a-r_0 \pmod a,$$

ossia

$$g^{\omega}\equiv -1 \pmod a,$$

e quindi *esiste* ω. Riassumendo si ha:

Teorema. — *Se* g, a *sono due numeri primi tra loro, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza* $g^x\equiv -1$ (mod a) *sia possibile è che una delle* m *divisioni* (1') *dia il resto* $a-r_0$: *quando ciò si verifica, l'indice* ω *di quel resto (cioè il numero delle divisioni eseguite) è il minimo valore dell'esponente per cui* $g^{\omega}\equiv -1$ (mod a).

Da questo teorema, ricordando che r_0 è uno qualunque tra i $\varphi(a)$ numeri minori di a e primi con esso, si deduce:

Corollario. — Se r_0, r'_0 sono due numeri dati minori di a e primi con esso, e se il resto ω^{mo} dell'algoritmo (1') (corrispondente ad r_0) è $a-r_0$, anche il resto ω^{mo} dell'algoritmo,

$$r'_0 g=ac'_1+r'_1,\quad r'g=ac'_2+r'_2,\ \ldots,$$

corrispondente ad r'_0, sarà $a-r'_0$.

Osservazione. — Nella ipotesi che sia possibile la congruenza $g^x\equiv$ -1 (mod a), torniamo a considerare i numeri ω, m, già definiti; avendosi $g^{\omega}\equiv -1$ (mod a), sarà $g^{2\omega}\equiv 1$ (mod a), quindi 2ω è multiplo di m; ma è, per quanto precede, $\omega<m$ quindi si concluderà che *se esiste* ω *sarà* m $=2\omega$.

(*) Siccome in questo caso g è dispari, perchè primo con 2, sarà $\omega=m=1$.

II.

Periodiche semplici.

6. Prenderemo ora a trattare la generalizzazione delle frazioni decimali periodiche e delle loro proprietà più notevoli.

Sia $\frac{r_0}{a}$ una frazione *irriducibile* che, senza limitare la generalità, possiamo supporre propria, e g un intero qualunque maggiore di 1; supposto dapprima *g primo con a* si considerino le uguaglianze

$$(A) \qquad r_0 g = ac_1 + r_1, \quad r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots \quad r_{n-1} g = ac_n + r_n, \ldots$$

dedotte dalle successive divisioni dei prodotti $r_{s-1}g$ per a, $(s = 1, 2, \ldots \infty)$ lasciandone *illimitato* il numero. Se m è l'esponente al quale *appartiene* (*) g rispetto al modulo a, i resti $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, r_m$ sono differenti da zero e tra loro: inoltre, come abbiamo veduto, r_m è uguale ad r_0.

Ne segue che il gruppo degli m numero $c_1, c_2, \ldots c_m$, si riproduce periodicamente: dimostreremo che il *periodo* $(c_1c_2 \ldots c_m)$ è *irriducibile*, vale a dire che se è $\alpha < m$ non può esistere un altro periodo $(c_1c_2 \ldots c_\alpha)$.

Infatti se $c_1c_2 \ldots c_\alpha$ fosse un periodo si avrebbe

$$c_1 = c_{\alpha+1} = c_{2\alpha+1} = \ldots$$
$$c_2 = c_{\alpha+2} = c_{2\alpha+2} = \ldots$$

e le relazioni (A) si potranno scrivere manifestamente nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} r_0 g = ac_1 + r_1 & r_1 g = ac_2 + r_2 & \ldots r_{\alpha-1} g = ac_\alpha + r_\alpha \\ r_\alpha g = ac_1 + r_{\alpha+1} & r_{\alpha+1} g = ac_2 + r_{\alpha+2} & \ldots r_{2\alpha-1} g = ac_\alpha + r_{2\alpha} \\ r_{2\alpha} g = ac_1 + r_{2\alpha+1} & r_{2\alpha+1} g = ac_2 + r_{2\alpha+2} & \ldots r_{3\alpha-1} g = ac_\alpha + r_{3\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Essendo r_0 diverso da r_α suppongasi $r_0 < r_\alpha$. Confrontando ciascuna delle relazioni della prima linea colla corrispondente nella seconda, si deduce successivamente $r_1 < r_{\alpha+1}$, $r_2 < r_{\alpha+2} \ldots$ e finalmente $r_\alpha < r_{2\alpha}$. Nello stesso modo, confrontando le relazioni della seconda e terza linea si giunge alla relazione $r_{2\alpha} < r_{3\alpha}$ e così seguitando si concluderà

$$r_0 < r_\alpha < r_{2\alpha} < r_{3\alpha} < \ldots;$$

ossia i resti $r_0, r_\alpha, r_{2\alpha}, \ldots$ di cui il numero è illimitato, formano una successione indefinitamente crescente ciò che è assurdo. Dal supporre invece $r_0 > r_\alpha$ si trae in modo analogo che la successione degli stessi resti è indefinitamente decresente, che è pure assurdo; resta dunque stabilito che il periodo dei quozienti $c_1 c_2 \ldots$ consta *necessariamente* di m

(*) Così come è noto si suole indicare il minimo esponente per cui $g^m \equiv 1$ (mod a).

termini come quello dei resti. Ciò posto dalle prime n relazioni (A) dopo averle divise rispettivamente per $ag, ag^2 \ldots . ag^n$ si ricava

$$\frac{r_0}{a} = \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \ldots + \frac{c_n}{g^n} + \frac{r_n}{a} \cdot \frac{1}{g^n},$$

e poichè $\frac{r_n}{a} < 1$ ed n è arbitrario, avremo anche

$$\frac{r_0}{a} - \sum_1^n \frac{c_n}{g^n} < \frac{1}{g^n}, \quad \frac{r_0}{a} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}.$$

Diremo la serie del secondo membro *periodica semplice* di *base* g (*) *generata* dalla frazione $\frac{r_0}{a}$; la somma dei suoi primi n termini è dunque approssimato ad $\frac{r_0}{a}$ a meno $\frac{1}{g^n}$ per difetto. Ricordando poi che m è un divisore di $\varphi(a)$ potremo concludere inoltre che *il numero dei termini periodici è un divisore di* $\varphi(a)$ *e precisamente l'esponente al quale appartiene* g *rispetto al modulo* a: tale numero è costante *per tutte le frazioni irriducibili di denominatore* a.

7. Per esprimere $\frac{r_0}{a}$ in funzione di g e dei termini periodici si moltiplichino le prime m delle (A) rispettivamente per $g^{m-1}, g^{m-2}, \ldots 1$; addizionando le relazioni ottenute si deduce

$$\frac{r_0}{a} = \frac{c_1 g^{m-1} + c_2 g^{m-2} + \ldots + c_m}{g^m - 1}.$$

Poichè sostituendo $g-1$ agli m numeri c il secondo membro diviene 1 mentre il primo è minore di 1, si concluderà che gli m termini periodici $c_1 c_2 \ldots c_m$ non possono essere *tutti* uguali a $g-1$.

8. Supponiamo ora data una periodica semplice

$$\frac{d_1}{g} + \frac{d_2}{g^2} + \ldots + \frac{d_\mu}{g_\mu} + \ldots$$

nella quale i termini periodici $d_1 d_2 \ldots d_\mu$ sono minori di g ed uno *almeno* è minore di $g-1$ si vedrà, reciprocamente che essa ammette la generatrice

$$\frac{d_1 g^{\mu-1} + d_2 g^{\mu-2} + \ldots + d_\mu}{g^\mu - 1}.$$

Infatti questa frazione è minore di 1 ed ha il denominatore primo con g; inoltre applicando ad essa, e anche alla frazione irriducibile equivalente, il procedimento (A) si genera appunto la periodica data: quindi *ogni periodica semplice ammette una generatrice irriducibile che ha il denominatore primo con* g.

(*) Intendendo g come base di un sistema di numerazione, i numeri c_n sono di una cifra e la frazione $\frac{r_0}{a}$ ha per rappresentazione $0, c_1 c_2 \ldots$

PROPRIETÀ DEL NUMERO DEI TERMINI PERIODICI E SUA DETERMINAZIONE.

9. Per indicare che tutte le frazioni irriducibili di denominatore N (N primo con g) generano periodi di K termini diremo anche per brevità, che *il denominatore* N *genera* K. Ciò premesso indicando ancora con a un numero primo con g, supponiamo che si abbia $a = b \cdot c \cdot d \ldots$ ed i fattori b, c, d *primi tra loro due a due;* allora *se* a, b, c, d ... *generano rispettivamente* m, m_1, m_2, ... *sarà* m *il minimo multiplo comune ai numeri* m_1, m_2, m_3 ... (*)

Infatti avendosi per ipotesi

$$g^{m_1} \equiv 1 \pmod{b}, \quad g^{m_2} \equiv 1 \pmod{c}, \ldots\ldots$$

ogni multiplo comune agli esponenti $m_1, m_2, m_3 \ldots$ e nessun altro numero, è un valore dell'esponente che verifica la congruenza

$$g^x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ b \cdot c \cdot d \ldots) \ \text{ossia} \ \pmod{a}$$

perciò m è il minimo multiplo comune di $m_1, m_2, \ldots$ come abbiamo affermato.

I numeri $b, c, d, \ldots$ si possono supporre in particolare potenze di fattori primi distinti del denominatore a, quindi la determinazione del numero dei termini periodici generati da un denominatore qualunque è ricondotta al caso in cui il denominatore è una potenza p^α $(\alpha \geqq 1)$ di un numero primo p non contenuto in g. In tale ipotesi rispetto a p si ha:

Lemma. — *Se* p^α *genera* m *e* $\mathrm{p}^{\alpha+1}$ *un numero* n *differente da* m, *sarà* $\mathrm{n} = \mathrm{mp}$.

Essendo infatti

$$g^m \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \quad g^n \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}} \ \text{e perciò} \pmod{p^\alpha},$$

sarà $n = m\lambda$ con λ *maggiore* di 1. Ma

$$g^{m\lambda} - 1 = (g^m - 1)(g^{m(\lambda-1)} + g^{m(\lambda-2)} + \ldots + 1)$$

e poichè il primo membro di questa uguaglianza è divisibile per $p^{\alpha+1}$, mentre p^α è la *massima* potenza di p che divide il primo fattore del secondo membro, sarà la somma entro l'ultima parentesi divisibile per p: ma avendosi per x qualunque $g^{mx} \equiv 1 \pmod{p}$, ponendo $x = 0, 1, \ldots, \lambda - 1$ e sommando si trae che la predetta somma dà rispetto a p il resto di λ, e perciò il minimo valore di λ che la rende divisibile per p, (essendo diverso da zero) è appunto p come si doveva dimostrare.

Indichiamo ora con ν il numero dei termini periodici generati del denominatore primo p (rispetto a g). Ciò significa che si ha

$$g^\nu \equiv 1 \pmod{p};$$

(*) V. Bertrand, *Aritmetica* (Traduzione di Giovanni Novi). — Bettini, "Sul numero delle cifre del periodo nelle frazioni decimali periodiche„ (*Periodico* Anno XII.) — Lugli, "Sulle frazioni decimali periodiche„ (*Periodico*, Anno II.)

ma indicando con h un numero maggiore di 1, *può* accadere che si abbia anche

$$g^{\nu} \equiv 1 \pmod{p^{h}},$$

ed allora se p^h è la massima potenza di p per cui ha luogo l'ultima congruenza, i denominatori $p, p^2, \dots p^h$ genereranno tutti ν termini periodici, mentre p^{h+1} ne genererà νp. Ciò posto si ha:

TEOREMA. — *Se i denominatori* $p, p^2 \dots p^h$ *generano, rispetto alla base* g, *il medesimo numero* ν *e* p^{h+1} *un numero differente,* p^{h+t} *genererà* νp^t, *eccettuato il caso in cui si ha simultaneamente* $p=2$ e $h=1$.

DIMOSTRAZIONE. — Dall'ipotesi e dal lemma discende che p^h, p^{h+1}, generano rispettivamente ν, νp: il teorema sussiste dunque, pei denominatori p^h, p^{h+1}. Per stabilirlo in generale proveremo che sussiste per p^{h+t+1} supposto che sia vero per p^{h+t-1}, p^{h+t}, essendo t uguale o maggiore di 1; e poichè così si viene a supporre che p^{h+t} genera νp^t, basterà, per il lemma premesso, provare che p^{h+t+1} genera un numero differente, ossia che la differenza

$$g^{\nu p^t} - 1$$

non è divisibile per p^{h+t+1}. Ma siccome si ha

$$g^{\nu p^t} - 1 = (g^{\nu p^{t-1}} - 1)\,(g^{\nu p^{t-1}(p-1)} + g^{\nu p^{t-1}(p-2)} + \dots + 1),$$

ed il primo fattore del secondo membro è divisibile per p^{h+t-1}, ma *non* per una potenza di p di maggior grado, si dovrà dimostrare che *la somma entro l'ultima parentesi non è divisibile per* p^2. A tal fine consideriamo le $p-1$ differenze

$$\Delta_s = g^{\nu p^{t-1}(p-s)} - 1 \quad , \quad s = 1, 2, \dots, p-1;$$

a causa dell'ipotesi esse sono divisibili per p^{h+t-1} ma non per p^{h+t}. per ciò posto

$$\Delta_s = p^{h+t}\,Q_s + R_s \quad \text{con } R_s < p^{h+t},$$

i $p-1$ resti R_s saranno diversi da zero e multipli di p^{h+t-1}; inoltre tali resti sono tutti differenti poichè, indicati con u, s, $(u > s)$ due numeri inferiori a p, si ha:

$$\Delta_s - \Delta_u = g^{\nu p^{t-1}(p-u)}[g^{\nu p^{t-1}(u-s)} - 1],$$

e siccome (per le ipotesi) il primo fattore del secondo membro non contiene p, ed il secondo fattore non è divisibile per p^{h+t} perchè l'esponente di g è minore di νp^t, la differenza $\Delta_s - \Delta_u$ non è divisibile per p^{h+t}. Si deduce che i $p-1$ resti R_s dovranno coincidere, prescindendo dall'ordine, coi numeri

$$p^{h+t-1}, \ 2p^{h+t-1}, \dots (p-1)\,p^{h+t-1}.$$

Ma avendosi

$$\sum_1^{p-1} \Delta_s \equiv \sum_1^{p-1} R_s \pmod{p^{h+t}},$$

si dedurrà

$$g^{\nu p^{t-1}(p-1)}+g^{\nu p^{t-1}(p-2)}+\ldots+1\equiv\frac{p^{h+t}(p-1)}{2}+p\ (\mathrm{mod}\ p^{h+t}),$$

ed anche, poichè h, t non sono minori di 1,

$$g^{\nu p^{t-1}(p-1)}+g^{\nu p^{t-1}(p-2)}+\ldots+1\equiv\frac{p^{h+t}(p-1)}{2}+p\quad(\mathrm{mod}\ p^{3}).$$

Ora se il numero primo p è dispari il numero $\frac{p^{h+t}(p-1)}{2}$ è multiplo di p^3 qualunque sia h; se $p=2$ sussiste la stessa conclusione purchè sia $h>1$, non potendosi escludere, per ipotesi, che sia $t=1$; dunque il primo membro dell'ultima congruenza diviso per p^3 dà il resto p, escluso il solo caso espresso nell'enunciato del teorema: ciò prova quanto si voleva.

10. Quando p è un numero primo dispari, il teorema precedente determina in tutti i casi il numero dei termini periodici generati da una potenza qualunque di p: ma resta da completare l'argomento quando $p=2$. Intanto pel teorema stesso sappiamo che qualunque sia il numero primo p ($p=2$ incluso), se p^h genera ν e p^{h+1} un numero differente di termini, p^{h+t} ne genera νp^t quando è $h>1$. Ciò premesso supponiamo $p=2$; poichè g è primo con p, sarà g un numero dispari e perciò di una delle due forme $4n+1$, $4n+3$:

1°. Sia $g=4n+1$, allora si potrà porre $g=2^h n'+1$ con $h>1$ ed *n' dispari*, onde

$$g\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2^h)\ \text{ma } non\ (\mathrm{mod}\ 2^{h+1});$$

ne segue che i denominatori $2, 2^2, \ldots, 2^h$ generano un periodo di 1 termine e 2^{h+t} un periodo di 2^t termini per quanto abbiamo premesso; quindi detto λ un intero indeterminato non minore di h e mutato $h+t$ in λ si potrà concludere: *Se* g *è della forma* $4n+1$, *il denominatore* 2^λ *genera* $2^{\lambda-h}$ *termini periodici, essendo* h *l'esponente della massima potenza di* 2 *contenuta in* $g-1$.

2°. Sia $g=4n+3$; sarà $g\equiv 1$ mod 2) ma *non* (mod 2^2); (tale ipotesi rispetto a g corrisponde dunque al caso *escluso* nel teorema del paragrafo precedente); ma è

$$g^2-1=8(2n^2+3n+1)$$

quindi detta h' la massima potenza di 2 contenuta in g^2-1, sarà h' non inferiore a 3 e

$$g^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2^{h'})\ \text{ma } non\ (\mathrm{mod}\ 2^{h'+1});$$

perciò il denominatore 2 genera 1 termine, $2^2, 2^3, \ldots 2^{h'}$ ne generano 2, e $2^{h'+t}$ ne genererà $2 \,.\, 2^t=2^{t+1}$ (giacchè $h'\geqq 3>1$). Se quindi denotiamo ancora con λ una indeterminata non inferiore ad h', mutato $h'+t$ in λ si concluderà: *Se* g *è della forma* $4n+3$ *il denominatore* 2^λ *gene-*

rerà $2^{\lambda-h'+1}$ *termini periodici, essendo* h' *l'esponente della massima potenza di* 2 *contenuta in* g^2-1.

CASI PARTICOLARI NOTEVOLI. — *a)* Il primo dei due ultimi teoremi è applicabile supponendo $g=4(2n+1)+1=8n+5$; ma essendo allora $g-1=2^2(2n+1)$, è $h=2$ e $2^{\lambda-h}=2^{\lambda-2}$ per qualunque valore di n; onde 2^λ genera $2^{\lambda-2}$ termini periodici rispetto a tutte le basi della forma $8n+5$.

b) Il teorema ultimo è poi applicabile prendendo $g=8n+3$; ed essendo allora $g^2-1=2^3(8n^2+6n+1)$ si ha per qualunque n, $h'=3$ quindi $2^{\lambda-h'+1}=2^{\lambda-2}$, perciò 2^λ genera $2^{\lambda-2}$ rispetto a tutte le basi della forma $8n+3$. Riassumendo si ha:

Le frazioni irriducibili di denominatore 2^λ, *dove* λ *è un intero maggiore di* 2, *generano costantemente* $2^{\lambda-2}$ *termini periodici rispetto a tutte le basi delle forme* $8n+5$, $8n+3$.

11. Tornando ora a considerare il denominatore primo dispari p, si possono ricercare le basi rispetto alle quali esso genera un numero *prestabilito* ν di termini periodici. A tal fine, supposto come è *necessario* che ν sia un divisore di $\varphi(p)=p-1$, osserviamo che le basi cercate debbono *appartenere* all'esponente ν (§ 6); ma è noto che se ν è un divisore arbitrario di $p-1$ esistono $\varphi(\nu)$ numeri incongrui (mod p) che appartengono a ν, quindi potremo concludere: *se* ν *è un divisore qualunque di* $p-1$ *esistono* $\varphi(\nu)$ *basi incongre* (mod p) *tali che il periodo generato dal denominatore primo* p *consta di* ν *termini*.

Per avere un sistema di tali basi incongrue, supposta nota una qualunque che diremo g, basta fare le $\varphi(\nu)$ potenze g^α dove α assume i $\varphi(\nu)$ valori inferiori a ν e primi con esso, od anche prendere i loro minimi resti positivi rispetto a p. Se $g_1, g_2, \ldots g_\varphi$ sono tali resti le $\varphi(\nu)$ progressioni aritmetiche illimitate

$$g_n,\ g_n+p,\ g_n+2p,\ldots\quad (n=1,2,\ldots,\varphi(\nu))$$

conterranno *tutte* le basi cercate.

Supponendo in particolare $\nu=p-1$, si trae che esistono $\varphi(p-1)$ basi incongrue rispetto al modulo p per le quali le periodiche semplici generate dalle frazioni di denominatore p, hanno un periodo di $p-1$ termini. Tali basi sono le *radici primitive* del numero primo p.

PROPRIETÀ DEI TERMINI PERIODICI.

12. Riprendiamo a considerare i due numeri a e g primi tra loro, e sia $\frac{r_0}{a}$ una frazione propria irriducibile di denominatore a. Sviluppando $\frac{r_0}{a}$ in serie periodica semplice rispetto a g si ha come abbiamo veduto

$$\frac{r_0}{a}=\frac{c_1}{g}+\frac{c_2}{g^2}+\ldots\ldots$$

ove i termini periodici, il cui numero diremo ancora m, sono determinati mediante l'algoritmo

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \quad r_1 g = ac_2 + r_2, \ \ldots \ r^{m-1} g = ac_m + r_m, \tag{2}$$

essendo $r_m = r_0$. Supponiamo che tra gli $m - 1$ resti differenti $r_1, r_2, \ldots r_{m-1}$ vi sia uno r_ω uguale ad $a - r_0$. Dal teorema del n. 5 si deduce allora che ω è il minimo esponente per cui $g^\omega \equiv -1 \pmod{a}$, e quindi, per l'osservazione che segue lo stesso teorema, il numero m è *pari* e si ha precisamente $m = 2\omega$. Ciò posto se si sottraggono le prime ω delle (2) dalla identità $ag = ag$ si ricavano le ω relazioni:

$$\begin{gathered}(a-r_0)g = a(g-c_1-1)+(a-r_1), \ (a-r_1)g = a(g-c_2-1)+(a-r_2), \ldots \\ \ldots, (a-r_{\omega-1})g = a(g-c_\omega-1)+(a-r_\omega);\end{gathered} \tag{3}$$

ma le (2) considerate dalla $(\omega+1)^{\text{esima}}$ alla m^{esima} sono

$$r_\omega g = ac_{\omega+1} + r_{\omega+1}, \ r_{\omega+1} g = ac_{\omega+2} + r_{\omega+2}, \ldots, r_{m-1} g = ac_m + r_m, \tag{4}$$

e poichè è per ipotesi $r_\omega = a - r_0$, dalla prima di queste confrontata colla prima delle (3) si trae, identificando quozienti interi e resti,

$$c_{\omega+1} = g - c_1 - 1, \quad r_{\omega+1} = a - r_1;$$

ne segue confrontando ordinatamente le (3) e (4)

$$\begin{array}{ll} c_{\omega+2} = g - c_2 - 1, & r_{\omega+2} = a - r_2 \\ c_{\omega+3} = g - c_3 - 1, & r_{\omega+3} = a - r_3 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ c_m \ = g - c_\omega - 1, & r_m \ = a - r_\omega \end{array}$$

ossia

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_{\omega+1} = c_2 + c_{\omega+2} = \ldots = c_\omega + c_m = g - 1 \\ r_1 + r_{\omega+1} = r_2 + r_{\omega+2} = \ldots = r_\omega + r_m = a \end{array}\right\} \tag{II}$$

e poichè dal corollario del n. 5 discende inoltre che se $\frac{r'_0}{a}$ è un'altra frazione propria irriducibile di denominatore a il resto ω^{mo} dell'algoritmo ad essa corrispondente sarà $a - r'_0$, avremo concludendo:

Se il resto ω^{mo} dell'algoritmo (2) corrispondente ad una frazione irriducibile $\frac{r_0}{a}$ è $a - r_0$, sarà 2ω il numero dei termini periodici; i termini che occupano lo stesso posto in ciascun mezzo periodo avranno costantemente per somma $g - 1$, ed i corrispondenti resti avranno per somma a: tali proprietà si verificheranno inoltre per tutte le frazioni irriducibili di denominatore a. (*)

(*) Cfr. MUKER, " Sulle frazioni periodiche ". Proprietà dei gruppi in cui si può scomporre il periodo e dei relativi resti. (*Periodico*, A. XII.)

13. Reciprocamente si ha:

Se una frazione irriducibile $\frac{r_0}{a}$ *genera, rispetto a* g *un numero pari* 2ω *di termini periodici, e se inoltre la somma di due termini che occupano lo stesso posto in ogni semiperiodo è costantemente uguale a* $g-1$ *il resto* ω^{mo} *dell'algoritmo* (2) *sarà* $a - r_0$.

Infatti, essendo per ipotesi nelle (2) $m = 2\omega$, ed inoltre

$$g-1 = c_1 + c_{\omega+1} = c_2 + c_{\omega+2} = \ldots = c_\omega + c_m,$$

le stesse uguaglianze (2) divengono

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \quad r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots, \; r_{\omega-1} g = ac_\omega + r_\omega,$$
$$r_\omega g = a(g-1-c_1) + r_{\omega+1}, \quad r_{\omega+1} g = a(g-1-c_2) + r_{\omega+2}, \ldots,$$
$$r_{2\omega-1} g = a(g-1-c_\omega) + r_0.$$

Sommando ogni relazione della prima linea colla corrispondente nella seconda si trae

$$g(r_0 + r_\omega - a) = r_1 + r_{\omega+1} - a, \; g(r_1 + r_{\omega+1} - a) = r_2 + r_{\omega+2} - a, \ldots,$$
$$g(r_{\omega+1} + r_{2\omega-1} - a) = r_0 + r_\omega - a,$$

e quindi, moltiplicando membro a membro, sarà

$$g^\omega (r_0 + r_\omega - a)(r_1 + r_{\omega+1} - a) \ldots (r_{\omega-1} + r_{2\omega-1} - a) =$$
$$= (r_1 + r_{\omega+1} - a)(r_2 + r_{\omega+2} - a) \ldots (r_0 + r_\omega - a).$$

I fattori del secondo membro sono tutti anche nel primo ove si ha di più il fattore g^ω che è maggiore di **1**; è perciò necessario che almeno uno di quei fattori sia nullo e quindi, a causa delle uguaglianze precedenti, saranno nulli anche tutti gli altri: in particolare sarà

$$r_0 + r_\omega - a = 0 \quad \text{ossia} \quad r_\omega = a - r_0$$

come devevasi dimostrare.

14. Per il teorema del n. 5 la relazione $r_\omega = a - r_0$ ha luogo quando è $g^\omega \equiv -1 \pmod{a}$, ed allora soltanto; quindi dagli ultimi teoremi si dedurrà anche che rispetto alla base g, *generano un numero pari di termini periodici colle proprietà vedute* (II) *tutte e sole quelle frazioni il cui denominatore* a *è un divisore della forma* $g^x + 1$, 2 *escluso*: in particolare tutte quelle frazioni aventi per denominatore un numero primo p di cui g è *non residuo quadratico*, giacchè è allora $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ e quindi esiste un intero ω non maggiore di $\frac{p-1}{2}$ per cui si ha

$$g^\omega \equiv -1 \pmod{p}. \; (*)$$

(*) Cfr. Bettini, l. c.

III.

Periodiche miste.

15. Supponiamo ora che il denominatore a della frazione propria *irriducibile* $\frac{r_0}{a}$, contenga qualche fattore primo di g ed uno o più altri non contenuti in g; i prodotti

$$r_0 g, \quad r_0 g^2, \ldots r_0 g^n, \ldots$$

non saranno divisibili per a e perciò i rispettivi resti $r_1, r_2 \ldots r_n, \ldots$ saranno tutti diversi da zero. Cominciamo a far vedere che sono tutti differenti da r_0. A tal fine si osservi che se per qualche valore di n fosse $r_n = r_0$, si avrebbe

$$r_0 g^n \equiv r_0 \pmod{a},$$

onde $g^n - 1$ sarebbe divisibile per a, e quindi conterrebbe in particolare quei fattori primi che sono comuni ad a e g, ciò che è assurdo essendo $g^n - 1$ e g primi tra loro.

Ciò premesso consideriamo le congruenze

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_0 g^2 \equiv r_2, \ldots r_0 g^s \equiv r_s, \ldots \pmod{a};$$

poichè se ne deduce

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_1 g \equiv r_2, \ldots, r_{s-1} g \equiv r_s, \ldots \pmod{a},$$

indicando con $c_1, c_2, \ldots, c_s, \ldots$ i quozienti (interi) delle divisioni per a dei prodotti che sono al primo membro, si avranno le uguaglianze (in numero illimitato)

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \; r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots r_{s-1} g = ac_s + r_s, \ldots \tag{5}$$

ove i numeri c risultano minori di g; se r_s è il *primo* resto che si ripete ed $r_{s+\mu}$ il primo tra i successivi che lo ugnaglia, i primi $s+\mu-1$ resti $r_1, r_2, \ldots, r_{s+\mu-1}$ sono tutti differenti, inoltre i μ resti $r_s, r_{s+1}, \ldots r_{s+\mu-1}$, ed i μ quozienti $c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots, c_{s+\mu}$ si riproducono periodicamente. Dunque esiste un periodo di μ termini, di cui il primo termine c_{s+1} ha l'indice *maggiore* di 1. Ciò stabilito, dimostriamo che *non esiste tra gli* $s+\mu$ *numeri* $c_1, c_2, \ldots, c_{s+\mu}$ *nessun altro periodo*. Infatti sia se è possibile $c_\alpha, c_{\alpha+1}, \ldots, c_{\alpha+\lambda}$, dove $\alpha+\lambda$ non supera $s+\mu$, un periodo *differente* da quello già trovato e sia dapprima $\alpha > 1$. Se è $\alpha+\lambda < s+\mu$ i due resti $r_{\alpha-1}, r_{\alpha+\lambda}$ sono differenti perchè hanno entrambi un indice minore di $s+\mu$; se è invece $\alpha+\lambda = s+\mu$, il resto $r_{\alpha+\lambda} (= r_{s+\mu})$ ugnaglia $r_{\alpha-1}$ *soltanto* quando è $\alpha - 1 = s$ ossia $\alpha = s+1$ ciò che è da escludere perchè i periodi $(c_\alpha \ldots c_{\alpha+\lambda})$, $(c_{s+1} \ldots c_{s+\mu})$ sono differenti per ipotesi. Quando si supponga invece $\alpha = 1$, tutti i resti sono diversi da r_0, e si ha ancora $r_{\alpha+\lambda}$ differente da $r_{\alpha-1}$; dunque i due resti $r_{\alpha-1}$, $r_{\alpha+\lambda}$ sono in ogni caso differenti. Ma avendosi per ipotesi

$$\begin{aligned} c_\alpha &= c_{\alpha+\lambda+1} = c_{\alpha+2\lambda+3} = \ldots \\ c_{\alpha+1} &= c_{\alpha+\lambda+2} = c_{\alpha+2\lambda+2} = \ldots \end{aligned}$$

le (5) considerate dalla $(\alpha)^{\text{esima}}$ in poi si potranno disporre come segue

$$\begin{aligned} &r_{\alpha-1}g = ac_\alpha + r_\alpha, r_\alpha g = ac_{\alpha+1} + r_{\alpha+1}, \ldots, r_{\alpha+\lambda-1}g = ac_{\alpha+\lambda} + r_{\alpha+\lambda} \\ &r_{\alpha+\lambda}g = ac_\alpha + r_{\alpha+\lambda+1}, r_{\alpha+\lambda+1}g = ac_{\alpha+1} + r_{\alpha+\lambda+2} \ldots, r_{\alpha+2\lambda} = ac_{\alpha+\lambda} + r_{\alpha+2\lambda+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ed essendo come abbiamo visto $r_{\alpha-1}$ *diverso* da $r_{\alpha+\lambda}$ si dedurrà, con un ragionamento identico a quello del n. 6, che la successione illimitata di resti

$$r_{\alpha-1}, r_{\alpha+\lambda}, r_{\alpha+2\lambda+1}, \ldots, r_{\alpha+n\lambda+(n-1)}, \ldots$$

è indefinitamente crescente o decrescente, il che è assurdo.

Ciò prova quanto abbiamo affermato. In particolare si deduce che la successione dei quozienti considerata da c_{s+1} in poi non contiene alcun periodo con un numero di termini minore di μ: d'altra parte nemmeno sulla successione *illimitata* $c_1, c_2, c_3, \ldots$ può esistere un periodo $c_\beta\, c_{\beta+1}, \ldots c_{\beta+r}$ di cui il primo indice β sia minore di $s+1$. Infatti in tale ipotesi si ha $\beta - 1 < s$, quindi $r_{\beta-1}$, essendo tra quei resti che non si riproducono od eguale ad r_0, è differente da $r_{\beta+r}$, onde con un ragionamento identico a quello già fatto si giungerebbe al risultato assurdo di una successione illimitata di resti indefinitamente crescente o decrescente. Riassumendo possiamo concludere che se s, $s+\mu$ sono gli indici dei primi due resti uguali nelle (5), il *periodo* (periodo *irriducibile*) *è necessariamente* formato dai μ termini $c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots c_{s+\mu}$: il gruppo $c_1 c_2 \ldots c_s$ è *l'antiperiodo.*

16. Indicando con n un intero qualunque si ricava subito dalle (5)

$$\frac{r_0}{a} = \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \ldots + \frac{c_n}{g^n} + \frac{r_n}{a} \cdot \frac{1}{g^n}$$

e quindi

$$\frac{r_0}{a} - \sum_1^n \frac{c_n}{g^n} < \frac{1}{g^n}, \quad \frac{r_0}{a} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}.$$

La serie $\sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}$ è la *periodica mista* di base g, generata mediante le (5) dalla frazione irriducibile $\frac{r_0}{a}$, quando il denominatore ha fattori primi di g ed altri non contenuti in g.

17. *Determinazione dei numeri* s, μ.

1°. Per determinare il numero s dei termini antiperiodici riprendiamo a considerare le relazioni:

$$r_0 g = ac_1 + r_1;\ r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots r_{s-1}\, g = ac_s + r_s,\ r_s g = ac_{s+1} + r_{s+1}, \ldots.$$

Risulta da queste, e da quanto precede, che anche le $s-1$ frazioni $\frac{r_1}{a}, \frac{r_2}{a}, \ldots \frac{r_{s-1}}{a}$ generano rispettivamente delle periodiche miste aventi per antiperiodi $(c_2 c_3 \ldots c_s), (c_3 c_4 \ldots c_s) \ldots$, ed il periodo comune $c_{s+1}, \ldots c_{s+\mu}$ della frazione $\frac{r_0}{a}$, mentre $\frac{r_s}{a}$ genera una periodica semplice del medesimo periodo.

Ne segue che $\frac{r_s}{a}$ è la *prima* tra le frazioni $\frac{r_1}{a}, \frac{r_2}{a}, \ldots \frac{r_n}{a}, \ldots$ che ridotta ai minimi termini avrà il denominatore primo con g; e quindi se si indica con δ_n il massimo divisore comune ai numeri r_n, a il valore cercato di s sarà il *minimo* valore di n che rende $a : \delta_n$ primo con g (n. 8). Ma poichè è $r_0 g^n \equiv r_n \pmod a$ il numero δ_n è pure massimo divisore comune dei due numeri $r_0 g^n$, a ed anche dei numeri g^n, a, essendo a primo con r_0.

Ora conviene esprimere δ_n per mezzo dei fattori primi comuni ai numeri g, a. A tal fine pongasi

$$a = X_1^h X_2^l \ldots A_1^f . A_2^t \ldots$$
$$g = Y_1^p Y_2^q \ldots A_1^\varphi A_2^\tau \ldots$$

dove X, Y, A sono fattori *primi* tutti *differenti* ed A_1, $A_2 \ldots$ sono quelli comuni. Poichè è

$$g^n = Y_1^{pn} Y_2^{qn} \ldots A_1^{\varphi n} . A_2^{\tau n} \ldots,$$

e δ_n è un prodotto di potenze di soli fattori A, il quoziente $a : \delta_n$ sarà primo con g *solamente* quando n è tale che si abbia

$$\delta_n = A_1^f . A_2^t \ldots$$

ossia per tutti i valori di n che rendono gli esponenti φn, τn, ... rispettivamente *non minori* di f, t, ... E poichè il valore di s è il minimo di tali valori di n, potremo concludere:

Teorema. — *Se* a, g *sono decomposti in fattori primi, ed i termini delle coppie* (f, φ), (t, τ), ... *indicano rispettivamente gli esponenti* (massimi) *di ciascun fattore primo comune, il numero* s *dei termini antiperiodici della frazione irriducibile* $\frac{r_0}{a}$, *rispetto a* g, *sarà il minimo tra i valori di* n *che soddisfano simultaneamente le relazioni:*

$$\varphi n \geqq f, \quad \tau n \geqq t, \ldots$$

Esso è indipendente dal numeratore r_0, *e dai fattori primi del denominatore* a *che non appartengono alla base* g.

Se in particolare si suppone

$$\varphi = \tau = \ldots = \ldots = 1$$

il numero s dei termini antiperiodici e il minimo valore di n per cui si ha ad un tempo

$$n \geqq f, \quad n \geqq t, \ldots$$

e perciò è uguale al maggiore degli esponenti $f, t, \ldots$. Quindi

Se i fattori primi comuni al denominatore a *ed alla base* g *sono contenuti in* g *alla prima potenza, il numero dei termini antiperiodici è il massimo tra gli esponenti che quei fattori primi hanno nel denominatore* a.

2°. Da quanto abbiamo esposto risulta che il periodo della frazione $\frac{r_0}{a}$ è quello di $\frac{r_s}{a}$, e che il massimo divisore comune ai numeri

$$r_s, \ a \quad \text{è} \quad \delta_s = A_1^t A_2^t \ldots;$$

pertanto si dedurrà

$$\frac{r_s}{a} = \frac{r_s : \delta_s}{X_1^h X_2^l \ldots};$$

quindi si può concludere:

Il numero dei termini periodici della periodica mista generata dalla frazione $\frac{r_0}{a}$, *è uguale a quello delle frazioni irriducibili aventi per denominatore il prodotto di tutti i fattori primi uguali e disuguali di* a, *non contenuti in* g.

Spezia, 12 giugno 1902.

Alberto Tagiuri.

PICCOLE NOTE

1. — Sopra un teorema della teoria dei limiti.

Uno dei più importanti teoremi di questa teoria è, com'è noto, il seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione y *di infiniti numeri reali tenda ad un limite determinato e finito, è che, scelto un numero* σ *positivo e piccolo a piacere, possa determinarsi un elemento* y_0 *della successione, tale che per due elementi qualunque* y′, y″ *della successione, successivi ad* y_0, *si abbia*

(1) $$|y' - y''| < \sigma.$$

Comunico in quel che segue una dimostrazione di questo teorema, che per la sua brevità e semplicità, mi sembra degna di nota.

Che la condizione è necessaria, si riconosce immediatamente: per dimostrare che è sufficiente, dividiamo tutti i numeri reali in due classi A, A′ colla legge seguente: un numero α si porrà nella *prima* classe A, quando, scelto nella successione un elemento *qualunque* y_1, vi è sempre *qualche* elemento della successione, successivo ad y_1, maggiore od uguale ad α: se invece *tutti* gli elementi successivi ad un *conveniente* elemento y_1 sono minori di α, questo si porrà nella *seconda* classe A′. Non tutti i numeri reali, si osservi, possono prender posto nella classe A; scelto infatti un numero σ a piacere, e detto y_0 l'elemento corrispondente nell'enunciato del teorema, in forza della (1), nella quale si faccia $y' = y_0 + \sigma$ è della seconda classe A'. Le due classi A, A', si riconosce subito esser contigue: definiscono dunque un numero reale $\alpha = (A, A')$. Dico che si ha:

$$\alpha = \lim y. \tag{2}$$

Sia infatti σ un numero positivo piccolo a piacere, e si determini y_0 in guisa che valga la (1): poichè inoltre i due numeri $\alpha - \sigma$, $\alpha + \sigma$ sono l'uno di A, l'altro di A', potrà trovarsi un *conveniente* elemento y' successivo ad y_0, tale che si abbia per esso

$$\alpha - \sigma \leq y' < \alpha + \sigma,$$

e quindi anche

$$|y' - \alpha| \leq \sigma. \tag{3}$$

Sia ora y un elemento qualunque successivo ad y_0, si avrà:

$$y - \alpha = (y - y') + (y' - \alpha),$$

e quindi anche

$$|y - \alpha| \leq |y - y'| + |y' - \alpha|,$$

cioè per le (1) e (3)

$$|y - \alpha| < 2\sigma,$$

donde si ha poi la (2). Il teorema enunciato è così dimostrato.

Onorato Niccoletti.

II. — **Sovra una formula del Cauchy.**

La formula del Kronecker nel caso di due variabili.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(c)} \frac{F_1 dF_2 - F_2 dF_1}{F_1^2 + F_2^2} = \sum_{(x_i, y_i)} (\text{sign D. 1}), \tag{1}$$

ove con D si indica il determinante funzionale delle F, con sign. D il segno di D nei punti (x_i, y_i) radici comuni alle equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0$, e la sommatoria è estesa ai punti-radice contenuti in c, dà, com'è noto, l'eccesso del numero delle radici delle equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0$, contenute in c, per le quali D è positivo, sul numero delle radici per le quali D è negativo. Quando F_1, F_2 sono le parti di una funzione di variabile complessa

$$f(z) = F_1 + i F_2\,,$$

la (1) dà il numero esatto delle radici della equazione

$$f(z) = 0$$

contenute in c.

Il Cauchy aveva già ottenuta tale determinazione nel suo teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f'}{f}\, dz = \Sigma m = M - N \tag{2}$$

indicando con M il numero degli *zeri*, e con N il numero dei poli di $f(z)$ contenuti in c, essendo ciascun *zero* e ciascun *polo* contato con il suo ordine di molteplicità.

Ora la formula del Kronecker, quando F_1, F_2 sieno le parti di una funzione di variabile complessa, si può dedurre immediatamente dalla formula del Cauchy, trasformando l'integrale di variabile complessa in un integrale curvilineo. Basta in fatto osservare che è in generale:

$$\int_{(c)} w(z)\, dz = \int_{(c)} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{(c)} u dx - v dy + i \int_{(c)} v dx + u dy.$$

Nel nostro caso è $w'(z) = \frac{f'}{f}$, ed

$$\frac{f'}{f} = \frac{F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} + i \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2};$$

per modo che è:

$$\left.\begin{aligned}\int_{(c)} \frac{f'}{f} dz = &\int_{(c)} \frac{F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dx - \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dy \\ &+ i \int_{(c)} \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dx + \frac{F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dy.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ora il primo dei due integrali curvilinei che sono nel secondo membro della (3), si può porre sotto la forma

$$\int_{(c)} \frac{F_1 dF_1 + F_2 dF_2}{F_1^2 + F_2^2} = \frac{1}{2} \int_{(c)} \frac{d(F_1^2 + F_2^2)}{F_1^2 + F_2^2};$$

e ponendo

$$F_1^2 + F_2^2 = \theta,$$

assume la forma

$$\frac{1}{2} \int_{(c)} \frac{d\theta}{\theta};$$

e poichè

$$\int \frac{d\theta}{\theta} = \log(F_1^2 + F_2^2) + \text{const.},$$

integrando lungo il contorno chiuso c, il logaritmo aritmetico riprende lo stesso valore ai due limiti, ed è perciò

$$\int_{(c)} \frac{d\theta}{\theta} = 0.$$

Il secondo dei due integrali curvilinei che sono nel secondo membro della (3), si può agevolmente porre sotto la forma

$$\int_{(c)} \frac{F_1 dF_1 - F_2 dF_2}{F_1^2 + F_2^2} \quad \text{ricordando le note relazioni} \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \; \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Si conclude adunque che l'integrale del Kronecker, nel caso che F_1, F_2 sieno le parti di una funzione di variabile complessa, non è altro che l'integrale del Cauchy sotto altra forma; e così trasformato dà luogo alla domanda: „quale significato avrà tale integrale, quando le F_1, F_2 sieno funzioni qualunque delle variabili reali x, y purchè uniformi nella regione considerata?"

A tale domanda hanno già risposto il Kronecker e il Picard, partendo da punti di vista diversi (Monastberichte der Berliner Akademie, März 1869; *Traité d'Analyse* par É. Picard, T. I, pag. 98-99); in questa nota a me interessava soltanto di rilevare due fatti:

1° che la formula del Kronecker, quando F_1, F_2 sono le parti di una funzione di variabile complessa, si deduce immediatamente dalla formula del Cauchy; quindi non rappresenta (o contiene) un nuovo procedimento per la determinazione del numero delle radici della equazione $f(z) = 0$.

2° conseguentemente: la determinazione contenuta nella formula del Kronecker nel caso di due variabili, si può considerare come il risultato di uno studio più completo dell'integrale del Cauchy posto sotto la seconda forma.

C. Marenghi.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 598, 599, 600, 604 E 605

598. *Trovare la somma delle serie*

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{\underline{|2n}}{2^{2n}(\underline{|n})^2}\cos n\theta, \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1}\frac{9r^2+3r+4}{(3r-1)\,3r\,(3r+1)\,(3r+2)}.$$

GREENSTREET.

Risoluzione della sig.^a Gabrielina Longobardi di Napoli.

1°. Sia

$$S_1=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{\underline{|2n}}{2^{2n}(\underline{|n})^2}\cos n\theta.$$

Essendo

$$\frac{\underline{|2n}}{2^{2n}(\underline{|n})^2}=\frac{1.2.3\ldots(2n-1)\,2n}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots n\times 2^{2n}}=$$

$$=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)\times 2.4.6\ldots 2n}{2.4.6\ldots 2n\times 2.4.6\ldots 2n}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6.2n}$$

si ha

$$S_1=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cos n\theta=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{e^{n\theta i}+e^{-n\theta i}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(e^{\theta i})^n+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(e^{-\theta i})^n\right\}.$$

Ponendo

$$e^{\theta i}=x \quad ; \quad e^{-\theta i}=y$$

si ha

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^n+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}y^n\right\}$$

e quindi

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{(1+x)^{-\frac{1}{2}}+(1+y)^{-\frac{1}{2}}-2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1+e^{\theta i})^{-\frac{1}{2}}+(1+e^{-\theta i})^{-\frac{1}{2}}\right\}-1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[e^{\frac{\theta i}{2}}\left(e^{-\frac{\theta i}{2}}+e^{\frac{\theta i}{2}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[e^{-\frac{\theta i}{2}}\left(e^{\frac{\theta i}{2}}+e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}-1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}2\cos\frac{\theta}{4}\right\}-1$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\sec\frac{\theta}{2}+1}-1.$$

2°. Sia

$$S_2=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{9r^2+3r+4}{(3r-1)\,3r\,(3r+1)\,(3r+2)}.$$

Un termine del precedente sommatorio è, in valore assoluto

$$\frac{9r^2+3r+4}{(3r-1)\,3r\,(3r+1)\,(3r+2)}=\frac{1}{3r-1}-\frac{2}{3r}+\frac{2}{3r+1}-\frac{1}{3r+2}$$

e si ha quindi

$$S_2=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{3r-1}-\sum_{1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{3r+2}+2\left\{\sum_{1}^{\infty}(1-)^{r-1}\frac{1}{3r+1}-\sum_{1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{3r}\right\}$$

ed essendo

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{3r-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\dots$$
$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{3r+2}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\dots$$
$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{3r+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\dots$$
$$\sum_{1}^{\infty}(-2)^{r-1}\frac{1}{3r}\quad=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\dots$$

si ha

$$S_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\dots\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\dots\right)+$$
$$+2\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\dots\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\dots\right)\right]$$

ossia

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\dots\right)\\&=\frac{3}{2}-2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\right)\\&=\frac{3}{2}-2\log 2\\&=\frac{3}{2}-\log 4.\end{aligned}$$

599. *Sia* F *il fuoco,* V *il vertice di una parabola,* P, Q *due punti della medesima tali che le corde* VP, PQ *facciano angoli eguali con la tangente in* P. *Dimostrare che*

$$\frac{VP}{PQ}=\frac{\overline{FV}^2}{\overline{FP}^2}.$$

GREENSTREET

1ª Risoluzione della sig.ª Longobardi di Napoli.

Sia $P\,(x_1, y_1)$ un punto della parabola

(1) $$y^2=2px.$$

L'equazione della tangente in P alla parabola è

(2) $$yy_1=p\,(x+x_1),$$

e quella della retta per l'origine perpendicolare a questa è

$$(3) \qquad y = -\frac{y_1}{p} x,$$

La (3) incontra la (2) nel punto $\left(-\frac{px_1}{p+2x_1}, \frac{x_1 y_1}{p+2x_1}\right)$. La retta per P inclinata alla (2), come la PV passa dunque pel punto $\left(-\frac{y_1^2}{p+2x_1}, \frac{2x_1 y_1}{p+2x_1}\right)$, e quindi la sua equazione è

$$y - y_1 = \frac{2p^2}{y_1(3p+2x_1)}(x - x_1).$$

La precedente incontra la (1), oltre che in P, anche nel punto Q le cui coordinate x, y sono date da

$$x - x_1 = \frac{2(p - my_1)}{m^2} \quad , \quad y - y_1 = \frac{2(p - my_1)}{m},$$

essendo

$$m = \frac{2p^2}{y_1(3p+2x_1)}.$$

Da ciò che precede si ha

$$PV = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \frac{2(p - my_1)}{m^2}\sqrt{1+m^2} = \frac{(p+2x_1)^2}{p^2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

donde

$$(4) \qquad \frac{PV}{PQ} = \frac{p^2}{(p+2x_1)^2}.$$

Si ha inoltre

$$FV = \frac{p}{2},$$

$$FP = \frac{p}{2} + x_1 = \frac{p+2x_1}{2},$$

donde

$$(5) \qquad \frac{FV}{FP} = \frac{p}{p+2x_1}.$$

E dalle (4) e (5) si ha

$$\frac{PV}{PQ} = \frac{\overline{FV}^2}{\overline{FP}^2}.$$

2ª Risoluzione del sig. Occhipinti, R. U. di Palermo.

Conducasi da P e Q le perpendicolari $PR = b$, $QT = b'$ all'asse della parabola fino ad incontrarlo in R e T; da P la PU parallela all'asse stesso fino all'incontro della QT in U e da F la perpendicolare FS alla VP fino all'incontro in S. Posto $VF = \frac{p}{2}$ si ha: $VR = \frac{b^2}{2p}$, $VP = \frac{b\sqrt{b^2+4p^2}}{2p}$, $\overline{VF}^2 = \frac{p^2}{4}$, $\overline{FP}^2 = \frac{(b^2+p^2)^2}{4p^2}$; si tratta dunque di dimostrare che $PQ = \frac{2p^5}{b(b^2+p^2)^2\sqrt{b^2+4p^2}}$.

Ora gli angoli VPF, QPU risultando eguali, i triangoli FPS, PQU sono simili; si ha quindi la proporzionalità tra i lati, cioè:

$$\frac{b^2+p^2}{2p\,.\,PQ}=\frac{FS}{b'-b}=\frac{VP-VS}{VT-VR}\text{; inoltre: } VT=\frac{b'^2}{2p}\text{; } VS=VF\cos\widehat{SVF}\text{;}$$

$$FS=VF\,\text{sen}\,\widehat{SVF}\text{, cioè: } VS=\frac{p}{2}\cos\widehat{SVF}\text{;}$$

$$FS=\frac{p}{2}\,\text{sen}\,\widehat{SVF}\text{ e, pel triangolo PVR:}$$

$$\text{sen}\,\widehat{SVF}=\frac{2p}{\sqrt{b^2+4p^2}}\text{, }\cos\widehat{SVF}=\frac{b}{\sqrt{b^2+4p^2}}\text{, dunque:}$$

$$VS=\frac{bp}{2\sqrt{b^2+4p^2}}\text{, } FS=\frac{p^2}{\sqrt{b^2+4p^2}}\text{;}$$

sostituendo risulta:

$$\frac{b^2+p^2}{2p\,.\,PQ}=\frac{p^2}{(b'-b)\sqrt{b^2+4p^2}}=\frac{b^3+3p^2b}{(b'^2-b^2)\sqrt{b^2+4p^2}}.$$

Eliminando b' fra queste due equazioni, si trova subito:

$$PQ=\frac{b(b^2+p^2)^2\sqrt{b^2+4p^2}}{2p^5}.$$

c. v. d.

600. *Nello sviluppo di* $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$, *dove* n *è numero positivo e intero, quanti termini esistono con coefficienti eguali tra loro e maggiori di tutti gli altri?*

GREENSTREET.

Risoluzione del sig. Occhipinti R. U. di Palermo.

Il termine generale dello sviluppo è $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_m^{\alpha_m}$, dove $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n$. Quindi, se $n\leq m$ si otterrà evidentemente il massimo valore del coefficiente generale prendendo n delle α uguali all'unità e le altre uguali a zero; con ciò il termine generale dello sviluppo assume la forma $n!\,a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$ dove $i_1\,i_2\ldots i_n$ è una qualunque delle $\binom{m}{n}$ combinazioni semplici degli indici $1, 2, \ldots m$ ad n ad n.

Dunque, fintantochè n non supera m, il numero dei termini dello sviluppo, con coefficienti eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri, è $\binom{m}{n}$, e tutti hanno per coefficiente $n!$ Ora supponiamo che sia $n>m$ ed in primo luogo che sia

$$n=km=k(m-1)+k$$

con k intero; in questo caso il massimo valore del coefficiente generale ha luogo evidentemente quando le $m\alpha$ sono tutte eguali a k; con ciò il termine generale dello sviluppo assume la forma: $\frac{n!}{k!\,k!\ldots k!}\,a_1^k\,a_2^k\ldots a_m^k$ donde segue che, quando $n=k(m-1)+k$, il numero dei termini dello sviluppo, con coefficienti eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri, è: $\binom{m}{m}=1$ e questo termine ha per coefficiente

$$\frac{n!}{k!\,k!\ldots k!}.$$

Supponiamo infine che sia $n = h(m-1) + r$ con h, r interi; in questo caso il massimo valore del coefficiente generale non può aver luogo che quando $m-1$ delle α sono tutte eguali ad h e l'altra eguale ad r; con ciò il termine generale dello sviluppo assume la forma: $\frac{n!}{h!\,h!\ldots h!\,.\,r!} a_{i_1}^h a_{i_2}^h \ldots a_{i_{m-1}}^h a_{i_m}^r$, dove $i_1 i_2 \ldots i_m$ è una qualunque permutazione degli indici $1, 2, \ldots m$. Ne segue che, quando $n = h(m-1) + r$, il numero dei termini dello sviluppo, con coefficienti eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri, è m e tutti hanno per coefficiente $\frac{n!}{h!\,h!\ldots h!\,r!}$

Altra risoluzione della sig.ª Longobardi di Napoli.

604. *Due parabole hanno il vertice in comune e gli assi ad angolo retto. Mostrare che la polare reciproca dell'una rispetto all'altra è un'iperbole rettangolare che ha gli assi delle parabole per assintoti.*

CERRUTI.

Risoluzione del sig. Maimeri R. U. di Pavia.

Alla tangente nel vertice ad una parabola corrisponde nella polarità rispetto all'altra il punto all'infinito dell'asse della prima; alla retta all'infinito corrisponde nella medesima polarità il punto all'infinito dell'asse della seconda. Alle due punteggiate projettive descritte da una tangente variabile alla prima parabola sulla tangente nel vertice e sulla retta all'infinito, corrispondono nella polarità considerata, due fasci improprii projettivi di raggi i cui centri sono i punti all'infinito degli assi delle due parabole. Alla retta all'infinito comune a questi due fasci projettivi considerata come appartenente all'uno od all'altro fascio, corrisponde nell'altro fascio l'uno o l'altro degli assi delle due parabole. E poichè questi sono ortogonali, la polare reciproca ecc. ecc.

Altre risoluzioni del sig. Occhipinti e della sig.ª Longobardi.

605. *Nello stesso piano sono date la conica* $F(x, y) = 0$, *e l'ellisse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Dai punti della prima si conducono le tangenti alla seconda. Inviluppo delle corde di contatto.*

CERRUTI.

Risoluzione del sig A. M. — Siano

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$
$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0 \tag{2}$$

l'equazioni della conica data Γ, in coordinate cartesiane e plückeriane, essendo A_{ik} il minore complemento di a_{ik} nel discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

L'inviluppo richiesto è la polare reciproca della conica Γ rispetto all'ellisse C rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Chiamando u, v le coordinate della polare di un punto (x, y) rispetto a C si ha

$$\begin{cases} u = -\dfrac{x}{a^2} \\ v = -\dfrac{y}{b^2} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (4) \begin{cases} x = -a^2 u \\ y = -b^2 v. \end{cases}$$

L'equazione dell'inviluppo richiesto in coordinate plückeriane si ottiene dunque eliminando x, y fra le (1), (4), cioè è

$$a_{11}a^4u^2 + 2a_{12}a^2b^2uv + a_{22}b^4v^2 - 2a_{13}a^2u - 2a_{23}b^2v + a_{33} = 0;$$

e quindi in coordinate cartesiane

$$\begin{vmatrix} a_{11}a^4 & a_{12}a^2b^2 & -a_{13}a^2 & x \\ a_{21}a^2b^2 & a_{22}b^4 & -a_{23}b^2 & y \\ -a_{31}a^2 & -a_{32}b^2 & a_{33} & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{x}{a^2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{y}{b^2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -1 \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\frac{A_{11}}{a^4}x^2 + 2\frac{A_{12}}{a^2b^2}xy + \frac{A_{22}}{b^4}y^2 - 2\frac{A_{13}}{a^2}x - 2\frac{A_{23}}{b^2}y + A_{33} = 0.$$

Altre risoluzioni dei sigg. Alasia, Occhipinti e della sig.ª Longobardi.

NOTA. — Quando il fascicolo precedente era già stampato pervennero alla direzione le risoluzioni delle quistioni 601, 602, 603 inviate dalla sig.ª **Longobardi** e dal sig. **Bianca**.

QUISTIONI PROPOSTE

700. Trovare la relazione che deve esistere tra i coefficienti del polinomio

$$f(x) = a_1x^m + a_2x^{m-1} + \ldots + a_mx + a_{m+1}$$

perchè sia divisibile per $x^2 - \alpha^2$. CANDIDO.

701. Dimostrare che le aree delle linee descritte dal centro e da un fuoco di un'ellisse che sdrucciola sopra una retta fissa, che cioè si muove nel proprio piano toccando una retta fissa in un punto fisso, sono espresse da

$$\frac{\pi}{2}(a-b)^2 \quad ; \quad 2a\pi(a-b)$$

essendo a il semiasse focale e b l'altro.

702. Data un'ellisse ed un punto P nel suo piano, si considerino le coppie di diametri i cui coefficienti angolari hanno un prodotto costante k, e si proiettino gli estremi di ciascun diametro di una coppia sull'altro. Studiare la curva luogo di tali proiezioni e determinare:

1° i luoghi dei punti medi delle corde dal centro O dell'ellisse e dal punto P;

2° i luoghi dei coniugati armonici di O e P rispetto agli estremi delle stesse corde.

Esaminare il caso in cui i due diametri di una coppia siano coniugati o associati ($k = \frac{b}{a}$, essendo a il semiasse focale, b l'altro).

Osservazione. — Nel caso che l'ellisse sia un cerchio, la curva in parola è la proiezione ortogonale della linea d'ombra propria di un'elicoide gobba sopra un piano normale al suo asse.

G. Longobardi.

703. Sia MN una corda normale in M ad una parabola p, inclinata di 45° sull'asse di questa, e sia c il circolo tangente esternamente a p in M di raggio $\frac{MN}{4}$. Si dimostri:

1° che una delle tangenti comuni a p e c è parallela ad MN;

2° che la distanza della tangente in M dal punto d'incontro delle altre due tangenti comuni a p e c è $\frac{3MN}{4}$;

3° che il segmento staccato sulla tangente in M dalle due tangenti suddette è eguale a MN.

704. Si consideri il sistema di circoli tangenti in un punto fisso M ad una parabola data. Il luogo del punto d'incontro delle tangenti comuni alla parabola e ad uno di tali circoli (distinte dalla tangente in M), è una parabola.

705. Due parabole hanno lo stesso vertice O ed i loro assi sono ortogonali. Trovare le coordinate del secondo punto d'incontro O', l'angolo delle parabole in O' e l'area della porzione di piano limitata fra gli archi OO' delle due parabole.

Facendo variare il parametro di una delle due parabole, si trovi per quale valore di esso l'angolo delle parabole in O' sia massimo.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Scentia. *Série Physico-Mathématique.* Paris, C. Naud.

N. 14. I. Macé de Lépinay. — *Frange d'interferenza e loro applicazioni metrologiche,* Febbraio 1902.

Lo scopo dell'Autore con questa pubblicazione è di mettere in evidenza la grande importanza che le frange d'interferenza possono avere nelle misure di alta precisione, e perciò si occupa dei metodi ottici interferenziali e delle loro applicazioni alle misure di lunghezza.

Premesso come un raggio di luce possa essere considerato quale un micrometro naturale della più grande precisione, fa sentire come un sistema di unità fondato sul metodo ottico, in cui, cioè, l'unità di lunghezza sia la lunghezza di un'onda luminosa, l'unità di massa quella di un cubo d'acqua colle dimensioni di una lunghezza d'onda e l'unità di tempo la durata di una vibrazione, possa veramente essere considerato un sistema assoluto, poichè è indipendente da ogni campione materiale, può essere riprodotto in ogni laboratorio, è assolutamente invariabile, col vantaggio altresì che, essendo l'errore relativo nelle misure in ragione inversa della grandezza del campione usato, la lunghezza d'onda luminosa è piccolissima e può essere aggiunta a se stessa indefinitamente senza errore. Soggiunge tosto come l'unità di lunghezza finora sia la sola bene stabilita per tale via; come l'unità di massa sia in via di determinazione, e come l'unità di tempo richiegga ancora una misura più precisa della velocità della luce.

Ciò posto, si propone di esporre le ricerche ed i metodi per misurare le lunghezze in lunghezza d'onda ed esprimerle in frazione del metro, non che riferire l'applicazione di tale misura alla determinazione del chilogrammo.

Per questo, dopo aver indicato in che consiste il fenomeno dell'interferenza luminosa, accenna ai metodi di produrlo cogli specchi di Fresnel, colle lamine sottili e colle lamine debolmente argentate, esaminandone i pregi e difetti e descrivendo i principali rifrattometri interferenziali che possono essere usati nelle misure di precisione. A questo proposito discute gli apparecchi che permettono l'uso di una sorgente luminosa estesa in tutte le direzioni, i quali danno origine a frange localizzate, e gli altri che richiedono finestre strette orientate e danno frange visibili ad ogni distanza, citando infine alcune disposizioni che portano all'uno ed all'altro risultato. Fa poi notare come per avere frange perfettamente nette occorra luce omogenea e limitata da fenditure opportunamente orientate: che, se l'una o l'altra condizione è difettosa, le frange danno alternative di comparsa e scomparsa, e mostra come il fatto dipenda dalla larghezza delle frange e della sorgente e come esso trovi un'applicazione alla misura dei diametri apparenti degli astri. Aggiunge come i vapori metallici sotto debole pressione resi incandescenti con scariche ad alto potenziale dieno le radiazioni più omogenee e come la più semplice sembri quella rossa del cadmio.

Nella seconda parte della monografia l'Autore fa notare l'influenza della temperatura e della pressione sulle misure e si occupa della determinazione di un ordine di interferenza, tanto nella parte frazionaria che intera, riferendo e discutendo i metodi per la 1ª e 2ª operazione. Mostra come la 1ª determinazione sia semplice, mentre la seconda incontri gravi difficoltà, essendovi però sempre la possibilità di migliorare i dati primitivi a seconda del bisogno.

Nella terza parte, dopo aver premesso come i metodi sperimentali più recenti, seguiti per le misure metrologiche, si riducano tutti a misure di lunghezza, nota come sia necessario conoscere i valori assoluti dei campioni ottici, cioè la lunghezza d'onda, e riferisce i vari metodi che permisero di misurare delle grandi lunghezze in frazione di lunghezze d'onda. Così, per es., Michelson e Benoit coll'esattezza di un milionesimo ragguagliarono al metro tipo la lunghezza d'onda nell'aria (a 760 mm. di pressione ed a 15° del termometro in vetro duro) del raggio rosso, verde e bleu del cadmio e trovarono

$$\begin{array}{ll} 1\text{ m.} = 1553163,5\,R & R = 0'',64384722 \\ \phantom{1\text{ m.} =\ } 1966249,7\,V & V = 0\ .50858240 \\ \phantom{1\text{ m.} =\ } 2083372,1\,B & B = 0\ .47999107. \end{array}$$

Accenna poi alle misure ottiche di lunghezza fra due linee o tratti e fra due superfici parallele, ricordando pel 1° caso il processo generale di Benoit e pel 2° caso i tre metodi delle Frange di Talbot, delle frange delle lamine argentate e dell'apparecchio di Michelson. Riferisce infine l'applicazione alla determinazione della massa del decimetro cubo di acqua distillata, priva d'aria, a 4°, mettendo in evidenza mediante i risultati numerici delle ricerche di vari sperimentatori che, sebbene sieno necessarie ancora altre ricerche, i progressi raggiunti negli ultimi anni a tale riguardo sono grandissimi.

Anche da questi cenni sommari si può facilmente intendere quanto sia interessante e di attualità la monografia in considerazione.

RODOLFO BETTAZZI. — *Aritmetica Razionale ad uso dei Ginnasi*. Torino, tip. Salesiana, 1902.

L'egregio Autore svolge nella parte prima, da pag. 5 a pag. 70, il programma della IV classe ginnasiale; nella parte seconda, da pag. 71 a pag. 128, il programma della V classe ginnasiale; e nell'Appendice, da pag. 129 a pag. 153, è esposto il legame esistente fra le grandezze ed i numeri.

Facendo uso abbondante delle idee contenute nel formulario di Matematica del prof. Peano, l'Autore la rompe coraggiosamente coi metodi tradizionali, e dà alla luce un libro veramente nuovo ed originale. La materia è svolta con rigoroso ordine logico; brevi ed esatte le dimostrazioni. Non si fanno convenzioni tacite, nè si ammettono tacitamente proposizioni che si suppongono note all'allievo; ed ove la dimostrazione sarebbe inopportuna o superiore all'intelligenza dell'allievo, la proposizione viene semplicemente enunciata sotto forma di *proposizione principale*.

Le proprietà formali delle quattro operazioni sui numeri interi e sui numeri razionali sono analizzate con somma cura. Di ciascuna operazione se ne studiano prima le proprietà formali indipendenti da qualsiasi sistema di numerazione; poi se ne fa l'applicazione al sistema decimale. Seguono infine alcune brevi, ma utili norme di calcolo mentale.

Assai interessante è l'appendice. Essa è divisa in tre capi. Il Capo I intitolato *la grandezza ed i numeri*, è suddiviso nei seguenti paragrafi: I gruppi finiti. — Confronto dei gruppi. — Composizione dei gruppi. — Le classi discrete di grandezze ed i numeri interi. — Le classi frazionabili di grandezze ed i numeri razionali. — Legame fra la teoria delle grandezze e quella dei numeri.

Il Capo II ha per titolo *la misura*, ed è suddiviso nei seguenti paragrafi: La misura nelle classi discrete. — La misura nelle classi frazionabili. — I cosidetti numeri complessi. — Il sistema metrico decimale.

Il capo III, intitolato *i problemi sulle grandezze*, si suddivide nei seguenti paragrafi: La risoluzione numerica dei problemi sulle grandezze. — Dipendenza fra operazioni su grandezze ed operazioni su numeri. — Proporzionalità.

Da vari anni si va studiando fra i professori di Matematica il modo di migliorare i metodi d'insegnamento, e di introdurre nell'insegnamento secondario il frutto delle moderne ricerche scientifiche fatte sui fondamenti della Matematica. Per ciò che riguarda l'Aritmetica Ragionata, credo che la via giusta sia quella tracciata con questo libro dal prof. Bettazzi; e gli Insegnanti che amano il miglioramento della scuola non mancheranno certo di fare buona accoglienza a questa opera scritta con rigore scientifico, e con metodo veramente moderno.

Marco Nassò.

RICCARDO FELICI

il 20 luglio scorso, dopo breve malattia, si spengeva a S. Alessio presso Lucca. Era nato a Parma l'11 giugno 1819; e dopo aver percorso gli studî, che a quei tempi corrispondevano ai secondarii, per prepararsi alla celebre Scuola Politecnica di Parigi, capitò a Pisa dove fu trattenuto, per fortuna della scienza, dalle lezioni e dall'affetto del Mossotti e del Matteucci. Di quest'ultimo divenne poi l'aiuto (1846), e il successore (1859) nella cattedra di fisica dell'Università di Pisa; alla quale appartenne fino al 1893, e gli allievi suoi si chiamarono Bartoli, Donati, Poloni, Ròiti, Villari, . . .

In Italia, mezzo secolo fa, i fisici sperimentali curavano poco l'aiuto ed il controllo che può dare l'analisi matematica, largamente e convenientemente applicata, allo studio dei fenomeni. È forse il merito principale del Felici quello di essere stato uno dei primi fra noi, se non il primo, a coordinare la ricerca sperimentale cogli svolgimenti e le teorie matematiche, sia che si trattasse di esprimere nel linguaggio del geometra i fenomeni fisici più semplici, una volta stabiliti, e di verificare le conseguenze che il calcolo sa dedurre dalla formola fondamentale; sia che premessa una ipotesi e la sua trattazione matematica, l'esperienza possa esser chiamata a decidere della sua attendibilità.

Questa tendenza del suo spirito a collegare costantemente in una unione feconda e sicura i due metodi di ricerca, si rivela già in una modesta noticina pubblicata colle sue sole iniziali nell'anno V del *Nuovo Cimento* (1847) " *Sulla teoria del circuito galvanico* „: in essa tratta alla maniera del Kirchhoff la propagazione della corrente elettrica in una sfera omogenea e ne fa l'applicazione alla terra. (*)

In quel lavoro egli insiste sull'utilità, in fisica sperimentale, " di prima di-" scutere analiticamente una ipotesi, per indi procedere con buon ordine alla sco-" perta della verità „; pur notando, con fine acume critico. le difficoltà che talvolta s'incontrano; come, in quel caso speciale, nel voler trasportare pari pari i concetti del Fourier, dalla propagazione del calore allo studio della propagazione della corrente elettrica.

Ma dove il Felici dimostrò, una volta di più, tutta l'importanza del metodo analitico-sperimentale, fu nelle tre memorie "*Sulla teoria matematica dell'induzione elettrodinamica* „ pubblicate in sunto negli *Annali di Tortolini* del 1851 e negli *Annales de Chimie et de Physique* del 1852, ed in esteso negli *Annali delle Università Toscane* 1854 e segg. " Dare le formole per una teoria matematica delle correnti d'in-" duzione elettro-dinamica ed elettro-magnetica è lo scopo di questo lavoro, fidato " unicamente a dati dell'esperienza, e col metodo che servì all'Ampère per scoprire " la formola fondamentale che esprime le leggi secondo le quali due elementi fili-" formi si attirano o si respingono (**) „.

Le ricerche di F. E. Neumann (***) e di W. Weber sul medesimo soggetto e le formole a cui essi furono condotti, partono da ipotesi assai complicate e sono puramente matematiche.

Il Weber ammette che, mentre nello stato di riposo l'azione fra due molecole elettriche sia quella indicata dalla formola di Coulomb, nello stato di moto essa varii di valore colla velocità e coll'accelerazione relativa, secondo una formola assai complicata e non prevedibile *a priori*, per quanto connessa a quella di Ampère. Ed il Neumann suppone, che la forza elettro motrice indotta sia proporzionale alla componente di quella elettrodinamica, che esisterebbe se l'elemento indotto fosse percorso da una corrente elettrica, nella direzione della velocità dell'elemento medesimo. Inoltre, in quella memoria si ammette possibile in ogni istante l'applicazione della legge di Ohm alla corrente indotta, e non si considerano, quindi, le correnti indotte dalla scarica di un condensatore; come anche si limita il problema al caso di un circuito indotto filiforme, e si tralasciano le variazioni di forma e la reazione della corrente indotta sul circuito induttore.

Le insuperabili esperienze del Felici, pur fatte *con quattro soldi e otto* come egli stesso ebbe a scrivermi, permettono invece di giungere ad una formola che esprime la forza elettro-motrice indotta, assolutamente indipendente da ogni ipotesi, e che contiene come casi particolari quelle dei due fisici tedeschi. Gli svolgimenti matematici che seguono da quella semplicissima formola, applicata poi dallo stesso Felici al caso della induzione leid-elettrica, magneto-elettrica, unipo-

(*) Ricerche analoghe erano pubblicate quasi contemporaneamente dallo Smaasen negli Annali di Poggendorff.

(**) Il metodo sperimentale del Felici è largamente riassunto nel *Cours de Physique* del Jamin, ed un largo cenno è pur dato nel classico trattato del Maxwell. Le memorie originali furono, in occasione degli onori che la Società Italiana di Fisica rese al suo Presidente Onorario nel 1899, tradotte in tedesco dal Dr. Bernardo Dessau, e ripubblicate nella *Collezione dei classici delle scienze esatte* iniziata dall'Ostwald e continuata dal prof. A. von Oettingen sotto il titolo: *Ueber die mathematische Theorie der electro dynamischen Induction* (Leipzig, W. Engelmann, 1899).

(***) *Rech. sur la th. de l'induction;* memoria letta all'Accad. delle Scienze di Berlino il 27 ottobre 1845, e tradotta da A. Bravais nel *Journal de Liouville* 1848, pag. 113.

lare etc., rimarranno adunque, qualunque siano le idee che avranno predominio sulla scienza. La formola generale, poi, a cui egli giunge è quella stessa adottata dall'Helmholtz.

Ma il Felici non si limitò alla ricerca di fatti quantitativi. Nei suoi interessanti studi sui coibenti dimostrò con esperienze rigorose, che la polarizzazione dei dielettrici è un fenomeno a cui prende parte la massa intera della sostanza e scompare in un tempo inferiore ad $^1/_{1000}$ di secondo. Al quale ultimo proposito è utile ricordare il suo delicatissimo *interruttore*, che permette di valutare fino al ventimillesimo di secondo.

Non è qui il caso di dare una analisi completa del lavoro scientifico di Riccardo Felici. Molto egli fece, e molto più avrebbe pubblicato, (*) se il desiderio di non dare che esperienze inattaccabili, e per conseguenza lo scrupolo della ricerca portato fino all'esagerazione, non lo avessero trattenuto. Questa smania di una rigidità matematica lo turbava anche nelle semplici esperienze da lezione; ed è la vera caratteristica dell'uomo, che al modo brillante ma effimero di coltivare la scienza, preferisce l'indagine severa e profonda, per quanto laboriosa e lunga sempre, ed arida talvolta.

È pur doveroso ricordare, fra i meriti non ultimi del Felici, l'aver mantenuto in vita, con lungo amore e con non lieve sacrifizio morale e materiale, il *Nuovo Cimento;* il giornale fondato da Matteucci e da Piria, che per lunghissimi anni, e nei tempi nostri più tristi, fu l'unica rivista di scienze fisiche che possedesse l'Italia. In essa, oltre i lavori originali che permisero ai migliori fra noi di farsi noti in Italia e fuori, si pubblicavano le traduzioni delle principali memorie straniere, i sunti degli studii che si facevano all'estero: la maggior parte di questi e di quelle erano dovuti all'assiduo e modesto lavoro del Direttore.

Assorto nei suoi studi prediletti la politica non lo attirava, al contrario del suo maestro, il Matteucci. Pure nei tempi del nostro risorgimento politico non rimase inattivo. Col battaglione universitario si trovò a Curtatone, e prese larga parte ai moti che prepararono il '48 ed a quelli che vennero dopo. A lui è dovuto il delicato specillo, col quale fu rintracciata la palla che ferì Garibaldi ad Aspromonte.

Membro effettivo dell'Accademia dei Lincei, ed onorario della Società Reale di Londra, Presidente Onorario della Società Italiana di Fisica, Cavaliere dell'Ordine del Merito Civile di Savoia, se onori maggiori non ebbe, fu perchè nè li cercò, nè li desiderò mai. Semplice nei modi la sua modestia era grandissima, sì che il desiderio di non apparire sembrava quasi un'affettazione.

Diamo in fondo a questo breve articolo l'elenco dei lavori del Felici che ci è stato possibile di rintracciare, ma che speriamo completo. In ognuno di quelli tu trovi la chiarezza e la precisione che si riscontrano in special modo nelle memorie del Poinsot, al cui spirito egli tanto si avvicinava.

R. Pitoni.

1844. Alcune osservazioni intorno alle ricerche del sig. Dutrochet sulla forza epipolica *(Il Cimento,* pag. 134).
1847. Sul circuito galvanico *(N. Cimento)*.
1850. Sulla propagazione della corrente elettrica nell'interno di una sfera. *(Annali di Tortolini,* pag. 312).
1851. Memoria sulle polarità galvaniche secondarie e sull'influenza del calore nella

(*) È da sperare che si ritrovino, nelle sue carte, le traccie dei suoi ultimi studi ed esperienze.

propagazione della corrente elettrica nei liquidi (*Annali delle Università toscane*, tomo II, pag. 173).

Vi si stabilisce che la polarizzazione aumenta rapidamente coll'intensità della corrente primaria e tende verso un massimo. Si studia poi la conducibilità dell'acqua da — 3° a + 100° determinando un'anomalia a + 4°, come confermano ricerche recenti. Si dà una formula che esprime il variare della polarizzazione colla temperatura.

— Saggio di una spiegazione dei fenomeni d'induzione elettro-dinamica (*Annali di Tortolini*, pag. 65, 306, 361, 503).

1852. Mém. sur l'induction électro-dynamique (*Annales de Chimie et de Phys.*).

1853. Note sur les phén. d'induction (*Ibid*).

— Saggio di un'applicazione del calcolo alle correnti indotte dal magnetismo in movimento (*Annali di Tortolini*, pag. 173).

— Sopra i fenomeni d'induzione della bottiglia di Leida (*Ibid*, pag. 237).

1854. Sulla teoria matematica delle correnti indotte in un corpo di forma qualunque (*Ibid*, pag. 35).

— Sulla propagazione della corrente in una sfera (*Annali di Tortolini*).

— Sulla teoria mat. dell'induzione elettrodinamica (memoria negli *Annali delle Univ. Toscane*).

— Terza memoria sull'induzione. (*Annali delle Univ. Toscane*).

1855. Sur les cour. ind. par la rot. d'un conducteur autour d'un aimant (*Annales de Ch. et de Phys.*).

1857. Mémoire sur la loi de Lenz (*Ibid*).

— Exp. sur un cas d'induction où serait nulle l'action électro-dyn. exercée par l'aimant inducteur si le circuit était traversé par un courant (*Ibid*).

1859. Sur la cause des cour. que l'on obtient dans un circuit dont les bouts immobiles s'appuient sur un conducteur tournant autour de l'axe d'un aimant cylindrique (*Ibid*).

1862-63. Esperienze sulla velocità della scarica e sulla durata della scintilla (*Idem*).

1866. Nuova esperienza sopra la velocità della elettricità e sulla durata della scintilla (*Annali Univ. Tosc.* tomo 8°).

Si riprendono i resultati esposti in una nota pubblicata nel *Nuovo Cimento*, 1865; si studiano le influenze sulla durata della scintilla, e si stabilisce per la velocità della elettricità un limite di 260000 chilom. al secondo, in un filo di rame nudo e isolato nell'aria.

1866. Sopra alcune esperienze di elettricità (*N. Cimento*).

1867. Esp. per determinare la legge di oscillazione di un corpo elastico (*Annali Univ. Toscane*).

1871-72. Sulle azioni elettriche dei corpi non conduttori soggetti all'influenza di un corpo elettrizzato (*N. Cimento*).

1873. Esper. sul tempo impiegato da un coibente per ritornare allo stato naturale (*Ibid*).

— Esp. sulla forza elettro-motrice indotta da un solenoide chiuso (*Ibid*).

1874. Sopra un nuovo interruttore e sul suo uso in alcune esperienze d'induzione (*Ibid*).

— Modificazioni all'interruttore galvanico (*Ibid*).

1875. Exposé de quelques exp. qui interessent la théorie de l'Induction (*Journal de Physique* de d'Almeida). Si citano alcune esperienze che non sembrano d'accordo col principio di Neumann).

1876. Sull'az. esercitata da un dielettrico in moto sopra un corpo elettrizzato (*N. Cimento*).

— Notizie sulla vita e sugli scritti di Carlo Matteucci (*Memoria della Società dei XL*).

1882. Sopra un'esperienza di Ampère (*N. Cimento* e *Jour. de Phis.*, 1883).

1884. Appunti per lezioni di fisica sperimentale. Pisa, Pieraccini.

1888. Sul potenziale di un conduttore in movimento sotto la influenza di un magnete (*N. Cimento*).

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 19 agosto 1902.

SULLE PRINCIPALI

operazioni dell'analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti.

(Continuaz., v. fasc. precedente)

---

§ 5. — Formazione ed enumerazione delle combinazioni a due dimensioni di *mn* elementi dati.

In una mia nota (*) ho definite le combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati ed ho descritto un metodo per formarle senza omissione e ripetizione. In un altro lavoro (**) ho definito gli iperdeterminanti e ne ho dimostrate alcune proprietà elementari, esponendo anche un metodo per svilupparli. Descriverò ora un nuovo metodo per la formazione rapida delle combinazioni a due dimensioni e per lo sviluppo degli iperdeterminanti rettangolari; esso ha, su quelli descritti nelle note suddette, il vantaggio di essere più rapido, più sicuro e quindi più pratico. Intanto, per risparmiare al lettore la fatica di consultare i lavori citati, esporrò quanto parmi indispensabile riguardo al concetto di combinazione a due dimensioni ed, a suo tempo, riguardo a quello di iperdeterminante a due dimensioni.

Consideriamo la seguente matrice rettangolare

$$\Delta \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

di dimensioni $\longrightarrow n$ ed $\downarrow m$ (***), nella quale sono distribuiti per orizzontali e verticali mn elementi $a_{11} \dots a_{mn}$. Siano dati $m + n$ numeri positivi interi non nulli $v_1, v_2, \dots v_n, r_1, \dots r_m$ tali che $v_1 + \dots + v_n = r_1 + \dots + r_m$; $v_i \leq m$; $r_j \leq n$. Sia k il valor comune delle somme $v_1 + \dots + v_n$, $r_1 + \dots + r_m$ ed

$$a_{\eta_1 v_1}\, a_{\eta_2 v_2} \dots a_{\eta_k v_k} \dots \qquad (1)$$

(*) *Periodico di Matematica*, tomo XV, sett.-ott. " Sopra un metodo per formare alcune combinazioni di elementi a più indici, dette combinazioni ad 1, 2, 3 ... dimensioni.

(**) *Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. XXXIX, luglio-agosto, " Su una generalizzazione della teoria dei determinanti ".

(***) La dimensione $\longrightarrow$ è il numero degli elementi contenuti in ciascuna orizzontale e la dimensione $\downarrow$ è il numero degli elementi contenuti in ciascuna verticale una successione di k elementi scelti nella matrice Δ per modo che $v_1, v_2, \dots v_n$ di essi appartengano rispettivamente alla $1^a, 2^a, \dots n^{ma}$ verticale ed $r_1, r_2, \dots r_m$ di essi, rispettivamente alla $1^a, 2^a, \dots m^{ma}$ orizzontale. È chiaro che $\eta_{j1}, \eta_{j2}, \dots \eta_{jk}$ è una successione di indici contenente r_1 volte l'indice 1, r_2 l'indice $2, \dots r_m$ l'indice m, e $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k$ è una successione di indici, contenente v_1 volte l'indice 1, r_2 volte l'indice $2, \dots r_n$ volte l'indice n. Orbene dicesi combinazione a due dimensioni di mn elementi $a_{11} \dots a_{1n}, a_{21} \dots a_{2n}, a_{m1} \dots a_{mn}$ una successione di k elementi, scelti tra i dati in modo che r_j di essi abbiano il primo indice uguale ad j, $(j = 1, \dots m)$, e v_i di essi $(i = 1, 2, \dots n)$. abbiano il secondo indice uguale ad i, colle condizioni $r_1 + \dots + r_m = = v_1 + \dots + v_n$; $r_j \leq n$; $v_i \leq m$.

I numeri m ed n diconsi le dimensioni della combinazione: i numeri $r_1, \dots r_m$ si dicono $1^o, \dots m^{mo}$ coefficiente relativo alla dimensione m ed i numeri $v_1, \dots v_n$ si dicono $1^o, \dots n^{mo}$ coefficiente relativo alla dimensione n. È chiaro che ad ogni combinazione a due dimensioni degli elementi $a_{11} \dots, a_{mn}$ corrisponde un gruppo figurativo di elementi scelti nella matrice Δ in modo che r_j di essi appartengano alla orizzontale j^{ma} e v_i alla verticale i^{ma}. Viceversa ad ogni tale gruppo di elementi scelti in Δ corrisponde una combinazione a due dimensioni della a. Perciò, ed anche perchè la matrice Δ è rettangolare, le suddette combinazioni si dicono anche combinazioni rettangolari degli elementi $a_{11} \dots a_{mn}$.

Vedremo in seguito se e come, dati i numeri $m, n, r_1, \dots r_m, v_1, \dots v_n$, si possa formare almeno una delle combinazioni a due dimensioni delle $a_{11} \dots a_{mn}$.

Osserviamo ora che siffatte combinazioni possono anche formarsi con oggetti appartenenti ad una data collezione. Dagli esempi che porteremo apparirà chiaro il significato concreto del concetto di combinazione a due dimensioni.

Esempio 1°. — Sia $\longrightarrow n = 4$, $\updownarrow m = 3$; $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$; $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 2$. Supponiamo che la collezione di dimensioni 4 e 3 comprenda i seguenti dodici oggetti: 1° quattro cerchi rispettivamente colorati in bianco, nero, rosso, verde; 2° quattro rettangoli rispettivamente colorati in bianco, nero, rosso, verde; 3° quattro triangoli anch'essi rispettivamente colorati in bianco, nero, rosso, verde. Possiamo proporci di formare tutti i gruppi di $K = 6$ oggetti, talmente che ogni gruppo contenga r_1 cerchi, r_2 rettangoli, r_3 triangoli, colla condizione che fra i sei oggetti suddetti ve ne siano v_1 colorati in bianco, v_2 colorati in nero, v_3 colorati in rosso e v_4 colorati in verde.

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} \text{bianco} & \text{nero} & \text{rosso} & \text{verde} \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right\| & \begin{array}{l} \text{cerchi} \\ \text{rettangoli} \\ \text{triangoli} \end{array} \end{array}$$

Disponiamo i suddetti oggetti su orizzontali e verticali, in modo che tutti quelli della stessa specie siano su una stessa orizzontale, e tutti quelli dello stesso colore su una stessa verticale. Rappresentandoli coi segni $a_{11} \ldots, a_{34}$, avremo una matrice nella quale ad es. a_{23} rappresenta il rettangolo colorato in rosso, a_{33} il triangolo colorato in verde ecc....; così è manifesto che per saper formare i suddetti gruppi di oggetti, basta saper formare le combinazioni a due dimensioni degli elementi letterali $a_{11}, \ldots a_{34}$, assumendo per coefficienti della dimensione $\downarrow$ 3 i numeri $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ e per coefficienti della dimensione $\longrightarrow$ 4 i numeri $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 2$.

Esempio 2°. — La collezione di oggetti consta di tutti cerchi; quattro di essi sono per metà colorati in bianco, quattro per metà colorati in nero e quattro per metà colorati in rosso; inoltre tre di essi hanno la rimanente metà bianca, tre la hanno nera, tre rossa e tre verde. Si vogliono formare i gruppi di 6 cerchi, talmente che ogni gruppo contenga r_1 cerchi colorati per metà in bianco, r_2 colorati per metà in nero ed r_3 colorati per metà in rosso; inoltre v_1 di essi devono avere la rimanente metà bianca, v_2 nera, v_3 rossa e v_4 verde. Basta indicare i suddetti oggetti con $a_{11} \ldots . a_{34}$ e formare la matrice

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} \text{bianco} & \text{nero} & \text{rosso} & \text{verde} \end{array} & \\ \left\Vert \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right\Vert & \begin{array}{l} \text{bianco} \\ \text{nero} \\ \text{rosso} \end{array} \end{array}$$

nella quale ad es. a_{23} rappresenta il cerchio colorato per metà in rosso e per metà in nero ecc....

Esempio 3°. — Si hanno dodici segni $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4C_1C_2C_3C_4$; Si vogliono formare tutti i gruppi di sei segni per modo che ogni gruppo contenga r_1 delle A, r_2 delle B, r_3 delle C; inoltre tra le lettere di uno stesso gruppo, ve ne devono essere, v_1, v_2, v_3, v_4 aventi rispettivamente l'indice 1, 2, 3, 4. Basta indicare i suddetti segni con $a_{11} \ldots a_{34}$ e formare la matrice

$$\begin{array}{rcl} \text{indici} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ & \left\Vert \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right\Vert & \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

ecc.... Come caso particolare A, B, C possono rappresentare avvenimenti ciascuno dei quali sia accaduto quattro volte negli istanti t_1, t_2, t_3, t_4. E così ad es. A_3 rappresenterebbe l'avvenimento A accaduto nell'istante t_3 ecc....

Esempio 4°. — Si hanno quattro triangoli equilateri rispettivamente di lato a, b, c, d; quattro cerchi rispettivamente di raggio a, b, c, d;

quattro quadrati rispettivamente di lato a, b, c, d. Si vogliono formare i gruppi di sei fra tali figure per modo che ogni gruppo contenga r_1 triangoli equilateri, r_2 cerchi, r_3 quadrati; inoltre fra tali figure ve ne devono essere v_1, v_2, v_3, v_4 aventi il lato od il raggio rispettivamente uguale ad a, b, c, d. Basta formare la matrice

$$\begin{array}{lcccccl} \text{raggio o lato} & a & b & c & d & & \\ & \Vert\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\ \Vert & & \text{triangoli equilateri} \\ & \Vert\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\ \Vert & & \text{cerchi} \\ & \Vert\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ \Vert & & \text{quadrati} \end{array}$$

ecc....

Da quanto è stato detto risulta che se con a_{ij} si indica un elemento (un oggetto od un fatto) di una collezione, gli indici i ed j hanno per ufficio di indicare che tal oggetto o tal fatto gode di due proprietà distinte; alla 1ª si accenna apponendo alla lettera a l'indice i (1° indice), alla 2ª apponendo l'indice j (2° indice).

Torniamo ora alla teoria generale delle combinazioni a due dimensioni. Consideriamo le successioni di indici

$$\eta_1\ \eta_2 \ldots\ldots\ \eta_k \tag{2}$$
$$\theta_1\ \theta_2 \ldots\ldots\ \theta_k \tag{3}$$

che diremo 1ª e 2ª permutazione annessa o relativa alla combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_k\theta_k}$ e riguardiamo come corrispondenti η_i e θ_i.

Conveniamo di ritenere che due elementi diversi della (2) o della (3) facciamo inversione quando il maggiore è a sinistra del minore, ed indichiamo con α il numero delle inversioni fatte da due elementi qualunque della (2), non corrispondenti ad elementi uguali della (3), e con β il numero delle inversioni fatte da due elementi qualunque della (3), non corrispondenti ad elementi uguali della (2). Diremo che la combinazione (1) è di classe pari o dispari, oppure che ad essa compete il segno $+$ od il segno $-$, secondochè il numero $\alpha+\beta$ è pari o dispari. Pertanto il segno di siffatta combinazione è quello di $(-1)^{\alpha+\beta}$.

Il segno di una combinazione non dipende dal modo col quale si succedono gli elementi ad essa appartenenti, ma è lo stesso comunque questi siano disposti. Invero siano $a_{\eta_i\theta_i}, a_{\eta_{i+1}\theta_{i+1}}$ due elementi consecutivi della combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_k\theta_k}$.

Possono darsi i casi seguenti: 1° $\eta_i = \eta_{i+1}$; $\theta_i = \theta_{i+1}$; 2° $\eta_i = \eta_{i+1}$; $\theta_i \neq \theta_{i+1}$; 3° $\eta_i \neq \eta_{i+1}$; $\theta_i = \theta_{i+1}$; 4° $\eta_i \neq \eta_{i+1}$; $\theta_i \neq \theta_{i+1}$.

Consideriamo le successioni

$$\begin{matrix} \eta_1 \ldots \eta_{i+1}\ \eta_i \ldots \eta_k \\ \theta_1 \ldots \theta_{i+1}\ \theta_i \ldots \theta_k \end{matrix} \tag{4}$$

ottenute dalla (2) e (3) scambiando η_i con η_{i+1} e θ_i con θ_{i+1}, e supponiamo che in esse siano contenute rispettivamente α' e β' inversioni, formate in ciascuna da due elementi diversi non corrispondenti ad elementi uguali dell'altra.

Nel 1°, 2° e 3° caso è $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; nel 4° caso si ha $\alpha' = \alpha \pm 1$; $\beta' = \beta \pm 1$ quindi od $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ oppure $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta \pm 2$. Perciò i segni di $(-1)^{\alpha+\beta}$ e $(-1)^{\alpha'+\beta'}$ sono identici. Ora il segno di $(-1)^{\alpha'+\beta'}$ è quello della combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_{i+1}\theta_{i+1}} a_{\eta_i\theta_i} \ldots a_{\eta_k\theta_k}$, la quale si ottiene dalla data scambiando gli elementi consecutivi $a_{\eta_i\theta_i}, a_{\eta_{i+1}\theta_{i+1}}$. Poichè lo scambio di due elementi consecutivi della combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_k\theta_k}$ non fa cambiare il segno di essa, possiamo concludere che anche cambiando comunque l'ordine dei suoi elementi il segno rimane inalterato.

Ciò posto, poichè $\eta_1 \ldots \eta_k$ è una permutazione contenente r_1 volte l'indice $1, \ldots r_m$ l'indice m, potremo sempre supporre la combinazione (1) ridotta alla forma

$$a_{1,s_1} a_{1,s_2} \ldots a_{1,s_{r_1}} a_{2,s_{r_1+1}} \ldots a_{2,s_{r_1+r_2}} \ldots \ldots a_{m,s_k}$$

di modochè percorrendo da sinistra a destra la permutazione dei primi indici della a, incontreremo prima r_1 volte l'indice $1, \ldots$ infine r_m volte l'indice m. Sarà allora $s_1, s_2, \ldots s_k$, la 2ª permutazione ed evidentemente: 1° conterrà v_1 volte l'indice 1, v_2 volte l'indice $2, \ldots v_n$ volte l'indice n; 2° due s appartenenti a due delle a aventi lo stesso primo indice, saranno differenti: così ad es. saranno differenti $s_1, s_2, \ldots s_{r_1}$; $s_{r_1+1}, \ldots, s_{r_1+r_2}$; ecc. ... 3° sarà $k = \Sigma v = \Sigma r$ ed inoltre $r_i \leq n$, $(i = 1, \ldots m)$, $v_j \leq m$, $(j = 1, \ldots n)$. Nella 1ª permutazione relativa alla (4) non è contenuta evidentemente alcuna inversione, vale a dire relativamente alla (4) si ha $\alpha = 0$. Quanto alle inversioni contenute nella $s_1 \ldots s_k$, notiamo che $s_1 \ldots s_{r_1}$ non fanno inversione tra loro, giacchè corrispondono ad elementi uguali (tutti uguali ad 1) della 1ª permutazione; similmente non fanno inversione tra loro gli elementi $s_{r_1+1}, \ldots s_{r_1+r_2}$ ecc. ... di modochè, relativamente alla (4), il numero β è il numero delle inversioni che ciascuno degli elementi appartenenti ad una delle successioni

$$s_1, \ldots s_{r_1};\ s_{r_1+1} \ldots s_{r_1+r_2};\ \ldots\ldots;\ s_{r_1+\ldots+r_{m-1}+1} \ldots s_k$$

fa cogli elementi delle successioni che la seguono. Ne risulta che comunque si permutino nella combinazione (4) gli elementi $a_{1,s_1} \ldots a_{1,s_{r_1}}$ e fra loro e così pure gli elementi $a_{2,s_{r_1+1}} \ldots a_{2,s_{r_1+r_2}}$ pure tra loro ecc., il numero β, e quindi il segno della combinazione, il quale è quello di $(-1)^\beta$, non mutano. Risulta pure che, per saper formare tutte le combinazioni del tipo (4), basta saper formare tutte le permutazioni $s_1, \ldots s_k$, tali che le s appartenenti a ciascuna di esse verifichino le condizioni suddette.

Notiamo ancora che essendo $\theta_1 \ldots \theta_k$ una successione di indici contenente v_1 volte l'indice $1, \ldots v_n$ volte l'indice n, potremo sempre disporre gli elementi della combinazione (1) per modo che essa acquisti la forma

$$a_{\varrho_1,1} \ldots a_{\varrho_{v_1},1}\ a_{\varrho_{v_1+1},2} \ldots a_{\varrho_{v_1+v_2},2} \ldots\ldots a_{\varrho_k,n} \tag{5}$$

La seconda permutazione relativa alla (5) conterrà v_1 volte l'indice $1, \ldots v_n$ volte l'indice n; inoltre tra gli elementi $\varrho_1, \ldots \varrho_k$ della prima permutazione, ve ne saranno r_1 uguali ad $1, \ldots r_m$ uguali a m; saranno poi differenti due ϱ appartenenti a due a aventi lo stesso secondo indice e si avrà: $\Sigma v = \Sigma r = k$; $r_i \leq m$; $v_j \leq n$.

Per saper formare tutte le combinazioni della a, basta adunque saper formare tutte le successioni delle $\varrho_1, \ldots \varrho_k$ soddisfacenti alle suddette condizioni. Essendo poi δ il numero delle inversioni che ciascuno degli elementi delle successioni

$$\varrho_1 \ldots \varrho_{v_1};\ \varrho_{v_1+1} \ldots \varrho_{v_1+v_2};\ \ldots\ldots \varrho_{v_1+\ldots+v_{n-1}+1}, \ldots \varrho_k$$

fa con quelli delle successioni che seguono quella alla quale esso appartiene, sarà $(-1)^\delta$ il segno della combinazione (5).

In seguito scriveremo la permutazione $s_1 \ldots s_k$ nel seguente modo:

$$| s_1 \ldots s_{r_1} | s_{r_1+1} \ldots s_{r_1+r_2} | \ldots . | s_{r_1+\ldots+r_{m-1}+1} \ldots s_k | \tag{6}$$

chiudendo tra due $|\ |$ i secondi indici della a che nella (4) hanno lo stesso primo indice. Così la permutazione delle s resta decomposta in gruppi parziali; il primo gruppo comprende le $s_1, \ldots s_{r_1}$, il secondo gruppo comprende le $s_{r_1+1}, \ldots s_{r_1+r_2}$ ecc.; in generale il gruppo i^{mo} comprende i secondi indici delle a che hanno il primo indice uguale ad i. Scriveremo la 1^a permutazione relativa alla (4)

$$| \underbrace{1\,1 \ldots 1}_{r_1} | \underbrace{2\,2 \ldots 2}_{r_2} | \ldots . | \underbrace{m\, m \ldots m}_{r_m} | \tag{7}$$

decomponendola in gruppi, dei quali l'i^{mo} comprende tutti gli elementi uguali ad i. Considereremo corrispondenti i gruppi i^{mo} della (6) ed i^{mo} della (7), e scrivendo contemporaneamente la 1^a e 2^a permutazione relative ad una combinazione delle a, scriveremo i gruppi corrispondenti in colonna, come qui appresso:

$$\begin{array}{l} | 1\,1 \ldots . \ 1 | 2 \ldots . \quad 2 | \ldots . | m \ldots m | \\ | s_1\, s_2 \ldots s_{r_1} | s_{r_1+1} \ldots s_{r_1+r_2} | \ldots . | s_k \ldots \quad | \end{array} \tag{8}$$

Poichè il segno di una combinazione non cambia cambiando comunque l'ordine degli elementi che le appartengono, si possono disporre comunque gli elementi della 1^a e 2^a permutazione ad essa relativa, purchè però si mantengano sempre sovrapposti due elementi corrispondenti.

Consideriamo ora la matrice

$$\Delta' \equiv \left\| \begin{array}{ccccc} (a_{1n})_{11} & (a_{2n})_{12} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (a_{mn})_{1m} \\ & & \vdots & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & (a_{ij})_{n-j+1,i} & \ldots & \ldots \\ & & \vdots & & \\ (a_{12})_{n-1,1} & (a_{22})_{n-1,2} & \ldots\vdots & \ldots & (a_{m2})_{n-1,m} \\ (a_{11})_{n1} & (a_{21})_{n2} & \ldots\vdots & \ldots & (a_{m1})_{nm} \end{array} \right\|$$

di dimensioni $\longrightarrow n' = m$ ed $\downarrow m' = n$, la quale si ottiene ruotando la matrice Δ di un angolo retto nel senso indicato dalla freccia $\curvearrowleft$. L'elemento a_{ij} di Δ occuperà in Δ' il posto di coordinate $n - j + 1$, ed i; perciò lo abbiamo indicato con $(a_{ij})_{n-j+1,i}$. Assumiamo quali coefficienti relativi alla dimensione $\longrightarrow n'$ di Δ' i numeri $r_1, \ldots r_m$, già assunti quali coefficienti della dimensione $\downarrow m$ di Δ, e similmente assumiamo come coefficienti relativi alla dimensione $\downarrow m'$ di Δ' i numeri $c_1 \ldots c_n$, già coefficienti della dimensione $\longrightarrow n$ di Δ. È chiaro che se

$$\begin{array}{l} |\,1 \;\; 1 \;\ldots 1 \;|\; \ldots . \;|\; m \ldots m \;| \\ |\, s_1 \;\; s_2 \ldots s_{r_1} |\; \ldots . \;|\; \ldots\ldots s_k \;| \end{array} \qquad (9)$$

sono la 1ª e 2ª permutazione di una combinazione relativa alla matrice Δ, saranno

$$\begin{array}{l} |\, s_1 \ldots s_{r_1} |\; \ldots . \;|\; \ldots\ldots s_k \,| \\ |\, 1 \ldots . 1 \;|\; \ldots . \;|\; m \ldots m \,| \end{array} \qquad (10)$$

ancora 1ª e 2ª permutazione di una combinazione relativa alla matrice Δ'. Adunque la 1ª e 2ª permutazione di una combinazione relativa a Δ si possono assumere quali 2ª e 1ª permutazione di una combinazione relativa a Δ' e viceversa. Ne segue che per formare le combinazioni relative ad una delle matrici Δ e Δ' basta formare quelle relative all'altra e scambiare in ognuna di esse gli indici delle a che le appartengono. Come dalla matrice Δ si passa alla Δ' mediante rotazione $\curvearrowleft$ di 90°, così dalla Δ' si ottiene la Δ mediante rotazione $\curvearrowright$ di 90°. e l'elemento che occupa in Δ' il posto di coordinate i, j occuperà in Δ quello di coordinate $j, m' - i + 1$. Notiamo ancora che se da una combinazione relativa a Δ si passa ad una relativa a Δ' scambiando gli indici di ciascuna delle a, i segni delle due combinazioni coincidono, giacchè se per una di esse è $\alpha = 0$, $\beta = \lambda$ sarà per l'altra $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ ed il segno di ambedue sarà quello di $(-1)^\lambda$.

Le combinazioni relative a Δ diventano combinazioni relative a Δ' mediante rotazione $\curvearrowleft$ di 90°; si noti però che se le (9) sono le permutazioni 1ª e 2ª di una combinazione relativa a Δ quelle della combinazione relativa a Δ' ottenuta dalla precedente mediante rotazione $\curvearrowleft$ di 90°, non sono le (10), bensì le

$$\begin{array}{l} | n-s_1+1, \ldots n-s_{r_1}+1 | \ldots . | \ldots \ldots , n-s_k+1 | \\ | 1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 1 | \ldots . | \ldots \ldots \ldots \ldots m | \end{array}$$

Similmente se le (9) sono due permutazioni 1^a e 2^a di una combinazione relativa a Δ', quelle della combinazione relativa a Δ ottenuta dalla precedente mediante rotazione $\curvearrowright$ di 90°, non sono le (10), bensì le:

$$\begin{array}{l} | 1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 1 | \ldots . | \ldots \ldots \ldots \ldots m | \\ | m'-s_1+1 \ldots \ldots m'-s_{r_1}+1 | \ldots . | \ldots . , m'-s_k+1 |. \end{array}$$

Siano ancora

$$\begin{array}{l} | 1 \ldots . 1 | \ldots . | i \ldots i | j \ldots j | \ldots . | m \ldots m | \\ | s_2 \ldots s_{r_1} | \ldots . | \ldots u \ldots | \ldots v \ldots | \ldots . | \ldots \ldots s_k | \end{array}$$

le permutazioni annesse ad una combinazione relativa alla matrice Δ; nella 2^a di esse abbiamo messo in evidenza due elementi, che abbiamo indicati con u, v, rispettivamente appartenenti ai gruppi i^{mo} ed j^{mo}. Riguardo a tali elementi supporremo che siano disuguali, e che in tali gruppi i^{mo} ed j^{mo} nessun altro elemento sia uguale ad u oppure a v.

Possiamo scrivere le due permutazioni nel seguente modo:

$$| 1 \ldots 1 | \ldots \ldots \ldots | i \ldots i | \ldots \ldots \ldots | j \ldots j | \ldots \ldots \ldots | m \ldots m | \ldots \quad (11)$$
$$| \ A_1 \ | A_2 | \ldots | A_{i-1} | u, A_i | A_{i+1} | \ldots | A_{j-1} | A_j, v | A_{j+1} | \ldots | A_{m-1} | \ \ A_m \ \ | \ldots \quad (11')$$

indicando con $A_1, \ldots A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots A_m$ i gruppi 1^o, $(i-1)^{mo}$, $(i+1)^{mo}, \ldots (j-1)^{mo}, \ldots (j+1)^{mo}, \ldots m^{mo}$ della 2^a permutazione, e con A_i il gruppo degli elementi del gruppo i^{mo} diversi da u e con A_j il gruppo degli elementi del gruppo j^{mo} diversi da v.

Consideriamo le permutazioni

$$| 1 \ldots 1 | \ldots \ldots \ldots | i \ldots i | \ldots \ldots \ldots | j \ldots j | \ldots \ldots \ldots | m \ldots m | \ldots \quad (12)$$
$$| \ A_1 \ | A_2 | \ldots | A_{i-1} | v, A_i | A_{i+1} | \ldots | A_{j-1} | A_j, u | A_{j+1} | \ldots | A_{m-1} | \ \ A_m \ \ | \ldots \quad (12')$$

delle quali la 2^a si ottiene dalla (11') scambiando gli elementi u e v. Evidentemente esse sono 1^a e 2^a permutazione di una certa combinazione relativa a Δ.

Sia λ il numero degli elementi di A_i ed A_j compresi tra u e v e cioè, se ad es. $u > v$, maggiori di u e minori di v; sia γ_{iu} ed γ_{iv} il numero degli elementi rispettivamente uguali ad u e v appartenenti ai gruppi $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots A_{j-1}$. Vogliamo dimostrare l'importante

Teorema. — *La combinazione alla quale sono annesse le permutazioni* (11) *ed* (11') *e quella alla quale sono annesse le permutazioni* (12) *e* (12') *hanno o non hanno lo stesso segno, secondochè la somma* $\lambda + \eta_u + \eta_v$ *è dispari o pari.* (*)

Infatti indichiamo con $(A_p A_q)$ il numero delle permutazioni che gli elementi di A_p fanno con quelli di A_q, $(q > p)$, con (u, A_p) il numero di quelle che u fa cogli elementi di A_p, cioè il numero degli elementi di A_p minori di u e con (A_p, u) il numero di quelle che gli elementi di A_p fanno con u, cioè il numero degli elementi di A_p maggiori di u. Sia β il numero di inversioni contenute nella (11') formate da due elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (11) e β' il numero delle inversioni contenute nella (12') formate da due elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (12). Il segno $\equiv$ posto tra due espressioni numeriche intere significhi che sono ambedue pari od ambedue dispari. Sarà:

$$\begin{aligned}\beta = \sum_{1}^{m-1}{}_p &\left\{(A_p A_{p+1}) + \ldots + (A_p A_m)\right\} + \\ &+\left\{(A_1 u) + \ldots + (A_{i-1}, u)\right\} + \left\{(u A_{i+1}) + \ldots + (u A_{j-1}) + (u A_j)\right\} + \left\{(u A_{j+1}) + \ldots + (u A_m)\right\} + (uv) + \\ &+\left\{(A_1 v) + \ldots + (A_{i-1}, v)\right\} + \left\{(A_i v) + (A_{i+1} v) + \ldots + (A_{j-1} v)\right\} + \left\{(v A_{j+1}) + \ldots + (v A_m)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta' = \sum_{1}^{m-1}{}_p &\left\{(A_p A_{p+1}) + \ldots + (A_p A_m)\right\} + \\ &+\left\{(A_1 v) + \ldots + (A_{i-1}, v)\right\} + \left\{(v A_{i+1}) + \ldots + (v A_{j-1}) + (v A_j)\right\} + \left\{(v A_{j+1}) + \ldots + (v A_m)\right\} + (vu) + \\ &+\left\{(A_1 u) + \ldots + (A_{i-1} u)\right\} + \left\{(A_i u) + (A_{i+1}, u) + \ldots + (A_{j-1}, u)\right\} + \left\{(u A_{j+1}) + \ldots + u A_m)\right\}.\end{aligned}$$

Si noti che se u fa inversione con v si ha $(uv) = 1$ e quindi $(vu) = 0$: se u non fa inversione con v si ha $(uv) = 0$ ed $(vu) = 1$. Pertanto

$$\begin{aligned}\beta - \beta' = &\left\{(u A_{i+1}) + \ldots + (u A_j)\right\} + \left\{(A_i v) + \ldots + (A_{j-1} v)\right\} - \\ &- \left\{(v A_{i+1}) + \ldots + (v A_j)\right\} - \left\{(A_i u) + \ldots + (A_{j-1} u)\right\} \pm 1.\end{aligned}$$

Indichiamo con P il gruppo degli elementi contenente quelli dei gruppi A_{i+1}, $A_{i+2} \ldots$, A_{j-1}, A_j, con Q quello contenente gli elementi dei gruppi A_i, $A_{i+1}, \ldots A_{j-2}$, A_{j-1} con R quello contenente gli elementi dei gruppi A_i, A_j e con S quello contenente gli elementi dei gruppi A_{i+1}, $A_{i+2}, \ldots A_{j-2}$, A_{j-1}.

L'ultima relazione ottenuta si può scrivere:

$$\beta - \beta' = (uP) + (Qv) - (vP) - (Qu) \pm 1 \tag{13}$$

giacchè il numero delle inversioni che u fa cogli elementi di $A_{i+1}, \ldots A_j$ è pure il numero delle inversioni che u fa cogli elementi di P ecc.

(*) Si può anche enunciare così: il numero delle inversioni contenute nella (11'), e formate da due elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (11), ha o non ha la stessa parità del numero delle inversioni contenute nella (12'), formate da 2 elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (12), secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari o pari.

Indichiamo con η_u, η_v il numero degli elementi rispettivamente uguali ad u e v contenuti in S; sia poi q il numero totale degli elementi contenuti in Q. Si ha:

$$(Qv) + (vQ) = q - \eta_v.$$

Infatti, sommando il numero delle inversioni che gli elementi di Q fanno con v, con quello delle inversioni che v fa cogli elementi di Q, si ottiene il numero totale degli elementi di q diminuito del numero degli elementi di Q uguali a v, coi quali v non fa inversione. Poichè nessun elemento di A_i è uguale a v per ipotesi, e poichè i gruppi S e Q differiscono soltanto per gli elementi di A_i, ne viene che gli elementi di Q uguali a v sono anche gli elementi di S uguali a v, epperò il loro numero è η_v. Similmente si ha:

$$(Qu) + (uQ) = q - \eta_u.$$

Adunque:

$$(Qv) = q - \eta_v - (vQ)$$
$$(Qu) = q - \eta_u - (uQ).$$

Sostituendo nella (13) a (Qv) e (Qu) le espressioni trovate, avremo:

$$\beta - \beta' = (uP) + q - \eta_v - (vQ) - (vP) - q + \eta_u + (uQ) \pm 1$$

e ricordando il significato del segno $\equiv$

$$\beta + \beta' \equiv (uP) + (uQ) + (vP) + (vQ) + \eta_u + \eta_v + 1.$$

Ora si ha:

$$(uP)+(uQ)=\{(uA_{i+1})+(uA_{i+2})+...+(uA_j)\}+\{(uA_i)+(uA_{i+1})+...+(uA_{j-1})$$

od anche:

$$(uP) + (uQ) = 2\,(uA_{i+1}) + \ldots + 2\,(uA_{j-1}) + (uA_i) + (uA_j)$$

ossia

$$(uP) + (uQ) = 2\,(uS) + (uA_i) + (uA_j)$$

e similmente

$$(vP) + (vQ) = 2\,(vS) + (vA_i) + (vA_j)$$

e pertanto

$$\beta + \beta' \equiv 2\,(uS) + u(A_i) + (uA_j) + 2\,(vS) + (vA_i) + (vA_j) + \eta_u + \eta_v + 1$$

ed ancora

$$\beta + \beta' \equiv (uA_i) + (uA_j) + (vA_i) + (vA_j) + \eta_u + \eta_v + 1$$

ossia

$$\beta + \beta' \equiv (uR) + (vR) + \eta_u + \eta_v + 1.$$

Sia ora ad es. $u < v$. Essendo λ il numero degli elementi di R (cioè di A_i ed A_j) compresi tra u e v (ossia maggiori di u e minori di v), ed essendo λ' il numero degli elementi di B maggiore di v e quindi anche di u, sarà:

$$(uR) = \lambda + \lambda'; \qquad (vR) = \lambda'$$

perciò

$$(uR) + (vR) = 2\lambda' + \lambda$$

e quindi:

$$\beta + \beta' \equiv 2\lambda' + \lambda + \eta_u + \eta_v + 1$$

ossia

$$\beta + \beta' \equiv \lambda + \eta_u + \eta_v + 1.$$

Alla stessa conclusione si arriva se $u > v$. Pertanto la somma $\beta + \beta'$ è pari o dispari secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v + 1$ è pari o dispari, vale a dire secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari o pari. Quindi: β e β' sono ambedue pari od ambedue dispari se $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari; β e β' sono l'uno pari e l'altro dispari se $\lambda\eta_u + \eta_v$ è pari. Ora i segni delle combinazioni alle quali sono annesse le (11') e (12') quali seconde permutazioni, sono rispettivamente quelli di $(-1)^{\beta}$ e $(-1)^{\beta'}$; pertanto essi coincidono o sono disuguali secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari o pari. Vedremo in seguito l'importanza di questa conclusione.

Esempio. — Supponiamo che la (11') sia la

$$|\,321\,|\,25\,|\,623\,|\,4123\,|\,312\,|\,53\,| \tag{14}$$

scambiando gli elementi 5 ed 1 rispettivamente del 2° e 5° gruppo si ha la

$$|\,321\,|\,21\,|\,623\,|\,4123\,|\,352\,|\,53\,|. \tag{14'}$$

Le inversioni contenute nella (14) sono quelle che gli elementi di ciascun gruppo formano con quelli dei gruppi che lo seguono (e mai con quelli dello stesso gruppo); esse sono quarantadue; η_1 è il numero degli elementi uguali ad 1 contenuti in S ossia nel gruppo (6, 2, 3, 4, 1, 2, 3); pertanto $\eta_1 = 1$; invece $\eta_5 = 0$, giacchè l'elemento 5 non è contenuto alcuna volta in S; λ è il numero degli elementi comprese tra 1 e 5 (ossia maggiori di 1 e minori di 5) contenuti nel gruppo R, ossia nel gruppo (2 3 2) che comprende tutti gli elementi del 2° e 5° gruppo della (14), eccettuati gli elementi scambiati 1 e 5. Si ha pertanto $\lambda = 3$, giacchè tutti gli elementi di R sono compresi tra 1 e 5. Adunque

$$\lambda + \eta_1 + \eta_5 = 3 + 1 + 0 = 4.$$

Pertanto la (14') avrà segno contrario a quello della (14). Infatti il numero delle inversioni in essa contenute è dispari od uguale a ventisette.

Casi particolari. — Sono interessanti due casi particolari del teorema precedente.

1°. Se $j = i + 1$ i gruppi $|\, u A_i \,|$ ed $|\, A_j v \,|$ sono consecutivi: in tal caso il gruppo S non esiste e si ha $\tau_{iu} + \tau_{jv} = 0$; $\beta + \beta' \equiv \lambda + 1$.

Pertanto " *se gli elementi scambiati nella* (11') *per aver la* (12') *appartengono a gruppi consecutivi, le combinazioni aventi le* (11') *e* (12') *quali seconde permutazioni sono o non sono dello stesso segno secondochè* λ *è dispari o pari* ".

2°. Se A_i ed A_j mancano, cioè se u è l'unico elemento del gruppo i^{mo} della (11') e v del gruppo j^{mo} della (12'), allora $\lambda = 0$. Se oltre a ciò i gruppi i^{mo} ed j^{mo} rispettivamente contenenti il solo elemento u ed il solo elemento v, sono consecutivi si ha $\lambda = \tau_{iu} = \tau_{jv} = 0$ e $\beta + \beta' \equiv 1$, ossia $\beta + \beta'$ è dispari.

Pertanto: " *se due gruppi della 2ª permutazione relativa ad una data combinazione sono consecutivi e ciascuno contiene un solo elemento, la combinazione cui è annessa quale seconda permutazione quella ottenuta dalla permutazione suddetta mediante lo scambio dei due gruppi considerati, ha segno contrario a quello della combinazione data* ".

Si è già detto, parlando delle permutazioni di n numeri non tutti differenti, che una di esse si considera come avente il segno $+$ od il segno $-$ secondochè il numero β delle inversioni in essa contenute, e formate da due elementi tali che il maggiore sia a sinistra del minore, è pari o dispari. Scambiando in una di tali permutazioni due elementi u e v non consecutivi se ne ottiene un'altra contenente ad esempio β' inversioni. Per quanto si è detto la somma $\beta + \beta'$ è pari o dispari, e quindi le due permutazioni hanno o non hanno lo stesso segno, secondochè la somma $\tau_{ju} + \tau_{jv}$ degli elementi che occupano un posto intermedio ai posti occupati da u e v e che sono uguali ad u od a v, è dispari o pari. Ciò è anche stato dimostrato a parte, parlando del segno delle permutazioni di n numeri non tutti differenti.

Vediamo ora se e come nelle ipotesi $\Sigma r = \Sigma r$; $r_i \leq n$; $r_j \leq m$ si possa formare almeno una combinazione delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$, ossia una permutazione del tipo (6), nella quale le s soddisfano alle condizioni già note.

Consideriamo il seguente quadro Q_0 di numeri

$$\begin{array}{ccccc}
\overbrace{\;\;}^{r_1} & \overbrace{\;\;}^{r_2} & & \overbrace{\;\;}^{r_n} \\
1 & 2 & \ldots\ldots & n \\
1 & 2 & & n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & 2 & & n \\
1 & & &
\end{array}$$

contenente in una prima verticale r_1 numeri uguali ad 1, nella 2ª r_2 uguali a 2, ... nell'ultima r_n uguali ad n. La verticale i^{ma} contiene adunque r_i numeri e diremo che r_i è il suo grado. Formiamo in un modo qualsiasi un gruppo γ_1 di r_1 numeri appartenenti a verticali diverse e scelte tra quelle di grado più elevato (tali cioè che nessun'altra delle rimanenti sia di grado più elevato di quello di una qualunque delle r_1 verticali suddette). Sopprimendo in Q_0 gli elementi di γ_1, rimarrà un altro quadro Q_1, il quale può anche contenere meno di n verticali, il che succede quando qualche verticale di Q_0 contenga un solo elemento e questo sia stato scelto a far parte del gruppo γ_2. Fra tutti i quadri che si possono dedurre da Q_0 sopprimendo r_1 elementi appartenenti a verticali diverse, quelli ottenuti scegliendo tali verticali nel modo indicato, godono evidentemente della proprietà di contenere il massimo numero possibile di verticali. Operiamo ora su Q_1 come abbiamo operato su Q_0, cioè scegliamo r_2 elementi appartenenti a verticali diverse, scelte tra quelle di grado più elevato ecc.... Supponiamo che continuando in tal modo si siano potuti formare i gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$, contenenti rispettivamente $r_1, r_2, \ldots r_m$ elementi, tali che quelli di ciascun gruppo sono tutti diversi. Poichè in Q_0 sono contenuti $v_1 + \ldots + v_n = r_1 + \ldots + r_m$ numeri, è chiaro che ciascuno degli elementi di Q_0 fa parte di uno dei gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$. Ora può darsi che formato il gruppo γ_i, non si possa più formare il gruppo successivo γ_{i+1}, il che succede quando il quadro Q_i, ottenuto da Q_{i-1} sopprimendo in questo gli elementi di γ_i, non contiene r_{i+1} verticali almeno, cioè tante quante ne occorrono per formare il gruppo γ_{i+1} di r_{i+1} elementi. Se è possibile formare almeno in un modo i gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$, allora noi possiamo considerarli come 1°, 2°, ... m^{mo}, gruppo di una permutazione del tipo (6), giacchè in tali gruppi l'elemento i compare appunto v_i volte ed inoltre gli elementi di ciascun gruppo sono tutti differenti. Se dunque sono $\lambda_1, \ldots \lambda_{r_1}$ gli elementi di $\gamma_1, \ldots \lambda_{r_1 + \ldots + r_{m-1}}, \ldots \lambda_k$ quelli di γ_m, sarà

$$|\lambda_1, \ldots \lambda_{r_1}|, \ldots\ldots\ldots |\lambda_{r_1 + \ldots + r_{m-1} + 1}, \ldots \lambda_k|$$

una delle possibili permutazioni del tipo (6), e sarà

$$a_{1,\lambda_1}\, a_{1,\lambda_2} \ldots a_{1,\lambda_{r_1}} \ldots\ldots\ldots a_{m,\lambda_k}$$

una delle combinazioni a due dimensioni delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$.

Se invece non è possibile formare almeno in un modo i gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$, si conclude che non esiste alcuna delle combinazioni delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$.

Un altro processo più rapido e più elegante per giudicare se (soltanto se e non se o come) è possibile formare almeno una combinazione delle a sarà esposto in seguito trattando delle proprietà di un simbolo che rappresenta il numero di tali combinazioni. Vedremo infatti a quali condizioni dovranno soddisfare le r e le v affinchè il valore di tal simbolo, di sua natura intero e positivo, risulti maggiore di zero.

Illustriamo ora quanto abbiamo detto con un esempio. Sia la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array} \right\|$$

di dimensioni $\longleftrightarrow n=5$ ed $\updownarrow m=3$ e supponiamo $v_1=2, v_2=1, v_3=1, v_4=2, v_5=2$; $r_1=1, r_2=3, r_3=4$. Ordinando le verticali di Q_0 rispetto al loro grado si ha il quadro

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{1}^{v_1} & \overbrace{4}^{v_4} & \overbrace{5}^{v_5} & \overbrace{2}^{v_2} & \overbrace{3}^{v_3} \\ 1 & 4 & 5 & & \end{array}$$

Il gruppo γ_1 contiene $r_1=1$ elemento che deve essere scelto nelle verticali di grado più elevato; possiamo sceglierlo in una delle verticali 1ª, 2ª, 3ª, che sono dello stesso grado; scegliendolo nella 1ª, abbiamo il gruppo γ_1 contenente il solo elemento 1, e sopprimendo tal elemento in Q_0, rimane il quadro Q_1

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{\quad 1 \quad}^{v_1-1} & \overbrace{4}^{v_4} & \overbrace{5}^{v_5} & \overbrace{2}^{v_2} & \overbrace{3}^{v_3} \\ & 4 & 5 & & \end{array}$$

Per formare il gruppo γ_1 dobbiamo scegliere in Q_1, $r_2=3$ elementi nelle verticali di grado più elevato; ne sceglieremo adunque uno nella 2ª, uno nella 3ª ed uno nella 1ª, o 4ª, o 5ª, ad es. nella 1ª.

Adunque il gruppo γ_2 contiene gli elementi 4, 5, 1 e sopprimendo in Q_1 tali elementi, si ottiene il quadro Q_2

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{\quad 4 \quad}^{v_4-1} & \overbrace{\quad 5 \quad}^{v_5-1} & \overbrace{2}^{v_2} & \overbrace{3}^{v_3} \end{array}$$

contenente soltanto quattro verticali. Per formare il gruppo γ_3 bisogna scegliere in Q_2, $r_3=4$ elementi, appartenenti alle verticali di grado più elevato; poichè Q_2 contiene soltanto quattro verticali, ciascuna di un sol elemento, il gruppo γ_3 conterrà tutti gli elementi di Q_2, cioè 4, 5, 2, 3.

Formati i gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, potremo comporre la permutazione

$$|\overbrace{1}^{\gamma_1}|\overbrace{4\,5\,1}^{\gamma_2}|\overbrace{4\,5\,2\,3}^{\gamma_3}|$$

alla quale corrisponde la combinazione $a_{11}a_{24}a_{25}a_{21}a_{34}a_{35}a_{32}a_{33}$ delle $a_{11}..a_{35}$.

I gruppi γ_r si possono formare nell'ordine $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, in generale in più di un modo, ma anche formandoli in tutti i modi possibili, non possiamo in generale costrurre tutte le combinazioni delle $a_{11}, \dots a_{35}$. Per es. il gruppo γ_1 si può formare in tre modi, scegliendo quale unico elemento ad esso appartenente uno degli elementi 1, 4, 5. Formato il gruppo γ_1, il gruppo γ_2 può formarsi in due modi; per es. se γ_1 contiene l'elemento 1, γ_2 può contenere gli elementi 4, 5, 2 oppure 4, 5, 3, formati i gruppi γ_1 e γ_2 il gruppo γ_3 può formarsi in un sol modo Pertanto le permutazioni [del tipo (6)], che si possono ottenere formando i gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in tutti i modi possibili sono le sei seguenti:

$$
\begin{array}{l}
|\,1\,|\,4\,5\,2\,|\,1\,4\,5\,3\,| \\
|\,1\,|\,4\,5\,3\,|\,1\,4\,5\,2\,| \\
|\,4\,|\,1\,5\,2\,|\,1\,4\,5\,3\,| \\
|\,4\,|\,1\,5\,3\,|\,1\,4\,5\,2\,| \\
|\,5\,|\,1\,4\,2\,|\,1\,4\,5\,3\,| \\
|\,5\,|\,1\,4\,3\,|\,1\,4\,5\,2\,|
\end{array}
$$

ma esse non sono le sole possibili; un'altra ad es. è la seguente:

$$|\,2\,|\,4\,5\,1\,|\,1\,4\,5\,3\,|$$

Trovando il caso generale, osserviamo ancora, riguardo alla formazione dei gruppi $\gamma_1, \dots \gamma_m$, che volendo constatare la possibilità di formarli almeno in un modo, non è necessario formare per il primo il gruppo γ_1, dopo questi il gruppo γ_2 ecc...: si può ad es. formare dapprima il gruppo γ_i di r_i elementi scelti in Q_0 nelle verticali di grado più elevato, poi il gruppo γ_j di r_j elementi ecc.. Per es. nel caso particolare dianzi esaminato si può formare dapprima il gruppo $\gamma_2 \equiv 1, 4, 5$ poi $\gamma_1 = 2$, infine $\gamma_3 \equiv 1, 4, 5, 3$ ecc... Sempre in ogni caso, se la formazione dei gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ è possibile, si ha una successione di indici atta ad essere considerata quale seconda permutazione di una combinazione a due dimensioni delle a_{11}, a_{mn}. Se esiste una di siffatte combinazioni, è sempre possibile ottenere almeno in un modo i gruppi $\gamma_1, \dots \gamma_m$, in un ordine prestabilito: il contrario accade se non esiste alcuna combinazione delle a.'

In una mia nota "*Sopra un metodo per formare alcune combinazioni di elementi a più indici* ...„ già citato, ho indicato un metodo per la formazione delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati. Esaminandolo se ne può dedurre un criterio per giudicare dell'esistenza di una almeno delle combinazioni della $a_{11}, \dots a_{mn}$, e, se ne esistono, formarne almeno una. Esso però, come mostrerò tra breve, differisce soltanto formalmente da quello che ho dianzi indicato.

Sia S la successione delle v

$$S \equiv v_1, v_2, \dots v_n.$$

Indichiamo con S_{r_1} una seconda successione dedotta dalla S diminuendo di un'unità r_1, numeri. Le S_{r_1} saranno un numero di $\binom{n}{r_1}$.

Da ciascuna S_{r_1} deduciamo tutte le possibili successioni $S_{r_1 r_2}$, diminuendo di una unità r_2 numeri scelti tra quelli che sono diversi da zero. Otterremo un certo numero di $S_{r_1 r_2}$; da ognuna di queste deduciamo tutte le possibili $S_{r_1 r_2 r_3}$ diminuendo di un'unità r_3 numeri diversi da zero e così continuiamo fino ad ottenere le $S_{r_1, \ldots r_m}$. Ora osserviamo che esistono certamente delle S_{r_1}. perchè la S contiene $n \geq r_1$ numeri diversi da zero; però può non esistere alcuna $S_{r_1 r_2}$, il che accade quando nessuna S_{r_1} contenga almeno r_2 numeri diversi di zero ecc...; può non esistere alcuna $S_{r_1 \ldots r_m}$, il che accade quando nessuna $S_{r_1, \ldots r_{m-1}}$ contenga almeno r_m numeri diversi da zero. Quando poi esiste una $S_{r_1, \ldots r_m}$, essa è composta di tutti zero. Infatti corrispondentemente ad una $S_{r_1 \ldots r_m}$. esiste un gruppo di successioni $S, S_{r_1}, S_{r_1 r_2}, \ldots S_{r_1, \ldots r_{m-1}}, S_{r_1 \ldots r_m}$, tale che ciascuna si è dedotta dalla precedente e l'ultima di esse è la $S_{r_1 \ldots r_m}$ in questione. Ora le unità sottratte complessivamente dagli elementi di tali $S, S_{r_1}, \ldots S_{r_1 \ldots r_{m-1}}$ per ottenere la $S_{r_1 \ldots r_m}$ sono $r_1 + \ldots + r_m$, cioè quante ne contiene la S stessa; perciò la $S_{r_1 \ldots r_m}$ non può contenere che soli zero. Supponiamo ora che esista una $S_{r_1 \ldots r_m}$. Essa si sarà ottenuta da una $S_{r_1, \ldots r_{m-1}}$ diminuendo di un'unità r_m numeri aventi i posti $\alpha_1, \ldots \alpha_{r_m}$; la $S_{r_1 \ldots r_{m-1}}$ suddetta si sarà ottenuta da una $S_{r_1 \ldots r_{m-2}}$ diminuendo un'unità r_{m-1} numeri aventi i posti $\beta_1, \ldots \beta_{r_{m-1}}$ ecc. ...; la S_{r_1} si sarà dedotta dalla S diminuendo di un'unità r_1 numeri aventi i posti $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{r_1}$.

Orbene se noi scegliamo nell'ultimo orizzontale della matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

le $a_{m,\alpha_1}, \ldots a_{m,\alpha_{r_m}}$, nella penultima le $a_{m-1,\beta_1} \ldots a_{m-1,\beta_{r_{m-1}}}$ ecc...., nella prima le $a_{1,\varepsilon_1} \ldots a_{1,\varepsilon_{r_1}}$, otteniamo una delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{mn}$. Infatti essendo la $S_{r_1, \ldots r_m}$ composta di tutti zero, nelle $S_{r_1 \ldots r_{m-1}}$, S_{r_1}, S dalle quali è stata dedotta, compariranno, ad es., all'i^{mo} posto, indipendentemente dall'ordine, i numeri $v_i, v_i - 1, v_i - 2, \ldots 1$ e quindi delle a scelte nella matrice suddetta ve ne saranno appunto v_i appartenente alla i^{ma} verticale; è poi evidente che quelle appartenenti ad una data orizzontale, per es. la j^{ma}, sono in numero di r_j. Ad ogni $S_{r_1 \ldots r_m}$ corrisponde adunque una combinazione delle a e viceversa; epperò tante sono le $S_{r_1 \ldots r_m}$ quante le combinazioni delle a. Risulta da quanto si è detto che: *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una combinazione delle* $a_{11}, \ldots a_{mn}$ *è l'esistenza di una* $S_{r_1 \ldots r_m}$.
Un tal criterio è teoricamente semplice, ma è conveniente, dal punto di vista pratico, metterlo sotto un'altra forma. Abbiamo già osservato che nel dedurre le S_{r_1} dalla S, le $S_{r_1 r_2}$ dalle S_{r_1} ecc... può darsi

che non si arrivi ad una $S_{r_1, \dots r_m}$ Per es. non è possibile formare alcuna combinazione delle a appartenenti alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\longleftrightarrow n=4$ ed $\updownarrow m=3$ assumendo $r_1=1, r_2=4, r_3=3;$ $v_1=3, v_2=3, v_3=1, v_4=1$ quantunque sia $r_1+r_2+r_3=v_1+v_2+$ $+v_3+v_4;$ $r_i \leq n, v_j \leq m$, giacchè dovendo ciascuna combinazione contenere gli elementi delle prime due verticali, conterrà due elementi almeno di ciascuna orizzontale, e non potrà quindi contenere un solo elemento della 1ª orizzontale. Non esiste adunque, relativamente a questo caso particolare alcuna $S_{r_1 \dots r_m}$. Nel caso generale deducendo da una S una S_{r_1}, questa una $S_{r_1 r_2}$, ecc... possiamo sempre far in modo che ciascuna successione ottenuta contenga il massimo numero possibile di elementi diversi da zero. Basta a tal uopo, quando si passa da una $S_{r_1 \dots r_i}$ ad una $S_{r_1 \dots r_{i+1}}$, diminuire di un'unità r_{i+1} numeri della $S_{r_1 \dots r_i, r_{i+1}}$ tali che nessuno dei rimanenti sia maggiore di alcuno di essi. Ora se procedendo con tale avvertenza, non riusciamo ad ottenere una $S_{r_1 \dots r_m}$, dobbiamo concludere che non esiste alcuna $S_{r_1, \dots r_m}$ e che è impossibile formare anche una sola combinazione delle $a_{11}, \dots a_{nm}$. Se ad es. si avesse $n=5, m=4;$ $r_1=4, v_1=2, v_3=1, v_4=4, v_5=2;$ $r_1=1, r_2=4, r_3=4, r_4=4$ sarebbe:

$$S \equiv 4, 2, 1, 4, 2.$$

Per dedurre dalla S una S_{r_1} avente il massimo numero possibile di elementi diversi da zero, basterà nella S diminuire di un'unità $r_1=1$ numero, tale che nessuno dei rimanenti lo superi, cioè il 1° od il 5°, ad es. il 1°. Si ha così una S_{r_1} e precisamente la $S_{r_1} \equiv 3, 2, 1, 4, 2$. Se da questa vogliamo dedurre una delle $S_{r_1 r_2}$ aventi il massimo numero possibile di elementi diversi da zero, dobbiamo diminuire di un'unità i numeri 1°, 2°, 4°, 5°, giacchè nessuno di essi è superato da alcuno dei rimanenti. Otteniamo così la $S_{r_1 r_2} \equiv 2, 1, 1, 3, 1$. Analogamente da tale $S_{r_1 r_2}$ deduciamo una $S_{r_1 r_2 r_3}$ avente il massimo numero di elementi diversi da zero, diminuendo di un'unità gli elementi 1°, 2°, 3°, 4° (oppure 1°, 3°, 4°, 5°; 1°, 2°, 4°, 5°); otteniamo la $S_{r_1 r_2 r_3} \equiv 1, 0, 0, 2, 1$ e poichè essa non contiene $r_4=4$ numeri diversi da zero, concludiamo che non esiste alcuna $S_{r_1 r_2 r_3 r_4}$.

Conosciamo adunque due criteri per formare, se esiste, almeno una combinazione a due dimensioni dalle $a_{11}, \dots a_{nm}$. È facile constatare che tali criteri non differiscono sostanzialmente tra loro. Infatti seguendo il primo si deve formare un gruppo γ_1 contenente certi elementi $\tau_1, \dots \tau_{r_1}$ scelti in Q_0 nel modo indicato. Seguendo il secondo si deve dapprima formare una S_{r_1} deducendola dalla S nel modo indicato. Ora si ha:

$$S \equiv v_1, \ldots v_{r_1}, \ldots v_{r_2}, \ldots v_{r_{r_1}}, \ldots v_n$$

dove $v_{r_1}, \ldots v_{r_{r_1}}$ sono r_1 delle v, tali che niuna è superata da alcuna delle rimanenti. Possiamo assumere quale S_{r_1} la

$$S_{r_1} \equiv v_1, \ldots, v_{r_1} - 1, \ldots, v_{r_{r_1}} - 1, \ldots, v_n$$

e quale gruppo γ_1 il gruppo

$$\gamma_1 \equiv \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{r_1}$$

contenente r_1 numeri scelti sulle verticali $\tau_1^{ma}, \ldots \tau_{r_1}^{ma}$ di Q_0 (la verticale i^{ma} è composta di soli i). Similmente alla $S_{r_1 r_2}$, dedotta dalla S_{r_1} precedente, si può far corrispondere un gruppo γ_2 di r_2 elementi ecc... si comprende che se è possibile formare almeno in un modo una $S_{r_1 \ldots r_m}$, sarà pure possibile formare almeno in un modo i gruppi $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ e viceversa. I due criteri sono adunque equivalenti.

Formazione ed enumerazione delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{mn}$. — Vediamo ora con quale processo data una combinazione delle $a_{11} \ldots a_{mn}$ si possano dedurre da essa tutte le rimanenti. Basterà evidentemente saper dedurre dalla permutazione

$$| s_1 \ldots s_{r_1} | \ldots\ldots | \ldots s_k |$$

dei secondi indici, relativa alla suddetta combinazione, tutte le permutazioni analoghe. Occupiamoci dapprima di un caso particolare; supponiamo cioè $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 1$. Ogni combinazione delle a sarà del tipo

$$a_{1,s_1} a_{2,s_2} \ldots\ldots a_{m,s_m}$$

$s_1, s_2 \ldots s_m$, essendo la seconda permutazione contenente v_1 volte l'indice 1, v_2 volte l'indice 2 ecc... Una delle possibili permutazioni $(s_1, \ldots s_n)$ è la $(1 1 \ldots 1 2 2 \ldots 2 \ldots nn \ldots n)$ contenente v_1 numeri uguali ad 1, seguiti da v_2 numeri uguali a 2 ecc... Le seconde permutazioni delle altre combinazioni sono pure permutazioni degli elementi $1, 1, \ldots 1, 2, 2, \ldots 2, \ldots n, n, \ldots n$, e noi già sappiamo come si deve procedere per formarle rapidamente. Siccome poi sappiamo pure determinare il segno di ciascuna permutazione, sapremo pure determinare il segno di ciascuna combinazione delle a, il quale non differisce da quello della 2^a permutazione ad essa relativa.

Esaminiamo ora il caso generale e supponiamo dapprima $m = 2$. Si vogliano ad es. formare le combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\longrightarrow$ 7 e $\updownarrow$ 2, assumendo $r_1 = 4$; $r_2 = 5$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$, $v_6 = 1$, $v_7 = 1$. Cominciando a formare la seconda permutazione di una di esse, ad es. la

$$|\,1\,4\,2\,3\,|\,1\,4\,5\,6\,7\,| \qquad (15)$$

Nella 2ª permutazione delle altre combinazioni gli elementi 1 e 4 devono trovarsi sia nel 1º, sia nel 2º gruppo. Gli elementi che trovansi nella (15) una sola volta sono 2, 3, 5, 6, 7 e le loro combinazioni due a due sono (2, 3), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7). Nella (15) compare nel 1º gruppo la combinazione (2 3), perciò tutte le rimanenti seconde permutazioni si otterranno componendo il 1º gruppo cogli elementi 1, 4 e con quelli di una delle suddette combinazioni binarie ed il 2º cogli elementi 1 e 4 e con quelli fra gli elementi 2, 3, 5, 6, 7, che non appartengono al 1º. Tutte le seconde permutazioni delle a sono adunque le

$$\begin{array}{c}
|\,1\,4\,2\,3\,|\,1\,4\,5\,6\,7\,| \\
|\,1\,4\,2\,5\,|\,1\,4\,3\,6\,7\,| \\
|\,1\,4\,2\,6\,|\,1\,4\,3\,5\,7\,| \\
\vdots \\
|\,1\,4\,6\,7\,|\,1\,4\,2\,3\,5\,|
\end{array} \qquad (16)$$

e tutte le combinazioni delle a sono le:

$$\begin{array}{c}
a_{11}\;a_{14}\;a_{12}\;a_{13}\;a_{21}\;a_{24}\;a_{25}\;a_{26}\;a_{27} \\
a_{11}\;a_{14}\;a_{12}\;a_{15}\;a_{21}\;a_{24}\;a_{23}\;a_{26}\;a_{27} \\
\vdots \\
a_{11}\;a_{14}\;a_{16}\;a_{17}\;a_{21}\;a_{24}\;a_{22}\;a_{23}\;a_{25}
\end{array}$$

Se interessasse determinare il segno di ciascuna delle (16), il quale è anche il segno della combinazione corrispondente, basterebbe dedurre da una di esse, per es. dalla 1ª $|\,1\,4\,2\,3\,|\,1\,4\,5\,6\,7\,|$, le rimanenti nel seguente modo. Si considerino nella (15) gli elementi che fanno parte di uno solo dei due gruppi; essi sono 2 e 3 per il 1º gruppo, 5, 6, 7 per il 2º. Scambiando uno di tali elementi del 1º gruppo con uno di quelli del 2º, per es. il 3 col 5, si ha la

$$|\,1\,4\,2\,5\,|\,1\,4\,3\,6\,7\,|$$

che è la 2ª della (16). Scambiando in una delle due permutazioni già formate uno degli elementi dal 1º gruppo diversi da 1 a 4 con uno di quelli del 2º pure diversi da 1 a 4, per es. scambiando nella 2ª gli elementi 5 del 1º gruppo e 6 del secondo, si ha la

$$1\,4\,2\,6\,|\,1\,4\,3\,5\,6\,7\,|$$

che è la 3ª delle (16). Similmente in una qualunque delle tre permutazioni già formate si potrà scambiare un elemento del 1° gruppo diverso da 1 e 4 con uno del 2° pure diverso da 1 e 4, e così via si continuerà, finchè saranno comparse nel 1° gruppo tutte le combinazioni binarie degli elementi 2, 3, 5, 6, 7, una per ciascuna permutazione. Ora il segno della 1ª permutazione scritta, ossia della | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | è —, giacchè in essa sono contenute tre inversioni; il segno delle rimanenti si ottiene facilmente, giacchè ognuna di esse si deduce da una di segno noto (la 2ª dalla 1ª, la 3ª dalla 2ª...) scambiando due elementi appartenenti a due gruppi consecutivi e tali che ciascuno di essi trovasi in un solo dei due gruppi; basterà applicare il criterio già esposto, che si compendia nel teorema dianzi dimostrato.

Nel caso generale essendo $\longrightarrow n$ e $\downarrow 2$ le dimensioni della matrice data, siano $v_{\alpha_1}\, v_{\alpha_2} \ldots v_{\alpha_p}$ le v uguali a due e $v_{\beta_1}\, v_{\beta_2} \ldots v_{\beta_q}$ quelle uguali ad uno. Sarà $p+q=n$; $k=r_1+r_2=v_{\alpha_1}+\ldots+v_{\alpha_p}+v_{\beta_1}+\ldots+v_{\beta_q}=$ $=2p+q$. Le seconde permutazioni di tutte le combinazioni delle a si formeranno componendo il 1° gruppo con gli elementi $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ e con r_1-p degli elementi $\beta_1, \ldots \beta_q$ scelti comunque, il 2° con gli elementi $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ e coi rimanenti r_2-p degli elementi $\beta_1, \ldots \beta_q$ non appartenenti al 1° gruppo.

Se delle suddette permutazioni interessa determinare il segno, basta formarle come segue. Se ne scrive una qualunque, e se ne determina il segno contando il numero delle inversioni in essa contenute. Il 1° gruppo di essa conterrà gli elementi $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ ed r_1-p degli elementi $\beta_1, \ldots \beta_q$, cioè quelli di una delle combinazioni r_1-p ad r_1-p delle $\beta_1, \ldots \beta_q$; il 2° gruppo conterrà le $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ e quelle fra le $\beta_1, \ldots \beta_q$ che non compaiono nel 1° gruppo. Dalla permutazione scritta si potrà dedurne un'altra scambiando uno degli r_1-p elementi del 1° gruppo non comuni al 2°, con uno degli r_2-p del 2° non comuni al 1°; il segno della nuova permutazione si dedurrà da quello della 1ª conformemente ai criteri già indicati. Così nel 1° gruppo saranno già comparse due delle combinazioni r_1-p ad r_1-p degli elementi $\beta_1, \ldots \beta_q$; da una qualunque delle permutazioni già formate ne dedurremo ora un'altra scambiando uno degli elementi $\beta_1 \ldots \beta_q$. del 1° gruppo con uno degli elementi $\beta_1, \ldots \beta_q$ del 1° gruppo con uno degli elementi $\beta_1, \ldots \beta_q$ del 2° ecc..., così continueremo finchè ci saremo accorti che nel 1° gruppo sono comparse tutte le combinazioni r_1-p ad r_1-p delle $\beta_1, \ldots \beta_q$. Il segno di ciascuna permutazione si potrà determinare seguendo i criteri già indicati, giacchè essa si ottiene da una di segno noto scambiando due elementi appartenenti a due gruppi consecutivi, (il 1° ed il 2°), e tali che nessuno di essi è comune ai due gruppi.

Il numero della combinazioni delle $a_{11}, \ldots a_{2n}$ si determina facilmente. Indichiamolo col simbolo $\begin{bmatrix} v_1, \ldots v_n \\ r_1\, r_2 \end{bmatrix}$; $(r_1, r_2 \leq n$; $\Sigma v = r_1 + r_2$;

$v_i \leq 2$); Osserviamo anzitutto che il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1, \ldots v_n \\ r_1 r_2 \end{bmatrix}$ non dall'ordine di successione delle v. Riferiamoci ad es. alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \end{Vmatrix}$$

per la quale $r_1 = 4$, $r_2 = 5$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$. $v_3 = 1$, $v_4 = 2$. $v_5 = 1$, $v_6 = 1$, $v_7 = 1$. Supponiamo di assumere altri valori per $v_1, \ldots v_n$ ed indichiamoli con $v'_1, \ldots v'_n$. Sia $v'_1 = 1$, $v'_2 = 1$, $v'_3 = 2$, $v'_4 = 1$, $v'_5 = 2$, $v'_6 = 1$, $v'_7 = 1$; come si vede le v' non sono che le v prese in un altro ordine; quando la serie delle $v_1, \ldots v_7$ è la serie dei numeri 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1 il numero delle combinazioni relative alla matrice suddetta è $\begin{bmatrix} 2\,1\,1\,2\,1\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix}$; quando invece è la serie dei numeri $v'_1, \ldots v'_7$ cioè 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1 il numero delle combinazioni è $\begin{bmatrix} 1\,1\,2\,1\,2\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix}$. È facile vedere che tali numeri sono uguali. Infatti sia | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | la 2ª permutazione di una combinazione della 1ª specie; in essa sono ripetuti due volte gli elementi 1 e 4 e compaiono invece una sola volta gli elementi 2, 3, 5. 6, 7. Nella 2ª permutazione di una combinazione della 2ª specie sono invece ripetuti due volte gli elementi 3 e 5 e compaiono una sola volta gli elementi 1, 2, 4, 6, 7. Adunque se in ciascuna permutazione relativa ad una combinazione della 1ª specie sostituiamo l'elemento 3 all'elemento 1, e similmente 5 a 4, 1 a 3, 4 a 5, abbiamo la 2ª permutazione relativa ad una combinazione della 2ª specie e viceversa. Per es. la permutazione suddetta mediante le indicate sostituzioni diventa la | 3 5 2 1 | 3 5 4 6 7 |. Tanto sono adunque le combinazioni della 1ª specie quanto quelle della 2ª, epperò

$$\begin{bmatrix} 2\,1\,1\,2\,1\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,1\,2\,1\,2\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix}.$$

Il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 r_2 \end{bmatrix}$ non dipende adunque dal modo di succedersi delle v, e si dimostrerebbe similmente ch'esso non dipende dall'ordine delle r. Potremo adunque supporlo ridotto alla forma

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} & \overbrace{2 \ldots 2}^{p_2} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}$$

dove, $1 \ldots 1, 2 \ldots 2$ è, fatta astrazione dall'ordine di successione, la serie delle $v_1, \ldots v_n$, contenente p_1 numeri uguali ad 1 e p_2 uguali a 2. Osserviamo ancora che se una delle v ad es. v_i è uguale a 2, si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{i-1}, 2, v_{i+1}, \ldots v_n \\ r_1 r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{i-1}, v_{i+1} \ldots v_n \\ r_1 - 1, r_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti ciascuna delle combinazioni delle a, contiene gli elementi a_{11} ed a_{21}; quindi esse si possono formare associando tali elementi a quelli delle combinazioni relative ad una materia che si ottiene dalla $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \end{vmatrix}$, sopprimendo la verticale i^{ma}, ed assumendo quali coefficienti della dimensione $\longrightarrow n-1$ i numeri $r_1, \dots r_{i-1}, r_{i+1}, \dots r_n$ e quali coefficienti della dimensione $\updownarrow 2$ i numeri r_1-1, r_2-1. Per es. si ha:

$$\begin{bmatrix} 1111222 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111122 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11112 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1111 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1112 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 \\ 03 \end{bmatrix}$$

si ha pertanto in generale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{p_1} \overbrace{2 \dots 2}^{p_2} \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{p_1} \\ r_1 - p_2, r_2 - p_2 \end{bmatrix}$$

ovvero, indicando una successione di λ numeri uguali ad a con $a_{(\lambda)}$,

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1 - p_2,\ r_2 - p_2 \end{bmatrix}.$$

Le differenze $r_1 - p_2$ ed $r_2 - p_2$ non sono mai negative, essendo $p_2 \leq r_1, r_2$. Il simbolo $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1 - p_2,\ r_2 - p_2 \end{bmatrix}$ rappresenta il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow p_1$ con coefficienti uguali ad 1, e $\updownarrow 2$ coi coefficienti $r_1 - p_2$, $r_2 - p_2$. Si ha, come è evidente, e come risulta dal processo esposto per la formazione delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ e $\updownarrow 2$:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1 - p_2,\ r_2 - p_2 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1 - p_2} = \binom{p_1}{r_2 - p_2}$$

Ad es. è:

$$\begin{bmatrix} 2\,11\,2\,111 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11111 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(5)} \\ 23 \end{bmatrix} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

In tal caso è $p_1 = 5$; $p_2 = 2$; $r_1 = 4$; $r_2 = 5$.
Si ha in particolare

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ 0, p_1 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{0} = \binom{p_1}{p_1} = 1.$$

Convenzionalmente scriveremo $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ . \, p_2 \end{bmatrix}$ invece di $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ 0, p_2 \end{bmatrix}$.

Se $p_2 = 0$, si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1 \, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1, \quad r_2 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1} = \binom{p_1}{r_2} = \frac{p_1!}{r_1!\,(p_1 - r_1)!} = \frac{p_1!}{r_1!\, r_2!}.$$

In tal caso è $p_1 = n - r_1 + r_2$ e $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 1$. Il primo gruppo di ciascuna delle seconde permutazioni relative alle combinazioni delle a. è una delle combinazioni r_1 ad r_1 dei numeri $1, 2, \ldots n$; il secondo gruppo contiene quelli di tali numeri che non appartengono al primo.

II caso: m = 3. In seguito, considerando la seconda permutazione di una combinazione delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$, quando diremo di scambiare un elemento di un gruppo con uno di un altro, *intenderemo sempre che lo scambio debba effettuarsi tra due elementi, tali che nessuno di essi sia comune ai due gruppi.* Chiameremo poi con O_2 l'operazione mediante la quale da una permutazione quale ad es. la | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | composta di due gruppi, si deducono le rimanenti, mediante scambi tra un elemento del 1° gruppo ed uno del 2°, e diremo che tali permutazioni sono il risultato della O_2 eseguita sulla | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 |. Essendo | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | A_3 | una permutazione di tre gruppi, (l'ultimo è indicato con A_3), considereremo quale risultato della O_2 eseguita su di essa, il complesso delle permutazioni ottenute assumendo A_3 come terzo gruppo, ed assumendo come 1° e 2° gruppo rispettivamente il 1° e 2° gruppo delle permutazioni ottenute eseguendo O_2 sulla | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 |. Adunque eseguendo la O_2 sulla | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | A_3 | si hanno le permutazioni | 1 4 2 5 | 1 4 3 6 7 | A_3 |; | 1 4 2 6 | 1 4 3 5 7 | A_3 |; . . . ecc.

Esaminiamo ora il caso $m = 3$. Si vogliano ad es. formare le combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\rightarrow 5$ e $\downarrow 3$ assumendo $r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1,\ v_3 = 2,\ v_4 = 1,\ v_5 = 1$ e quindi $K = \Sigma v = \Sigma r = 7$. La seconda permutazione di una di esse è la

$$| \, 1 3 \, | \, 2 1 4 \, | \, 5 3 \, | \tag{17}$$

Eseguendo su essa l'operazione O_2 si hanno le

| 1 2 | 3 1 4 | 5 3 |

| 1 4 | 2 1 3 | 5 3 |

Esse e la (17) sono tutte le seconde permutazioni aventi comune il 3° gruppo | 5 3 |. Gli elementi differenti dei tre gruppi della (17) sono 1, 2, 3, 4, 5. e le loro combinazioni binarie (due a due) sono (1 2) (1 3) (1 4) (1 5) (2 3) (2 4) (2 5) (3 4) (3 5) (4 5). Di esse, nelle permutazioni sinora ottenute, una sola trovasi nel 3° gruppo ed è la (5 3). In una di tali permutazioni scambiamo un elemento del 3° gruppo con uno di quelli dei gruppi 1° o 2°, in modo da far comparire al 3° gruppo un'altra delle suddette combinazioni binarie; (avvertendo al solito che nessuno degli elementi scambiati sia comune ai gruppi ai quali essi appartengono: per es. non si potrebbe scambiare nella | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 | l'elemento 3 del 3° gruppo coll'elemento 1 del 1°, perchè esso elemento 3 è comune al 1° e 3° gruppo); procuriamo inoltre, se è possibile, di scambiare due elementi di due gruppi contigui, cioè del 3° e 2° gruppo. Scambiando ad es. nella | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 | l'elemento 5 del 3° gruppo coll'elemento 2 del 2°, si ha la

| 1 3 | 5 1 4 | 2 3 |

dalla quale, mediante l'operazione O_2, si deducono le

| 1 5 | 3 1 4 | 2 3 |
| 1 4 | 5 1 3 | 2 3 |.

Esse e la | 1 3 | 5 1 4 | 2 3 | sono tutte le permutazioni aventi | 2 3 | quale terzo gruppo. E così abbiamo già formato sei permutazioni. In una qualunque di esse scambiamo un elemento del 3° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, preferibilmente con uno del 2° gruppo che è contiguo al 3°. in modo da far comparire al 3° gruppo una delle suddette combinazioni binarie, diversa però dalle (5 3), (2 3). Scambiando ad es. nella 1ª, cioè la | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 | l'elemento 5 del 3° gruppo coll'elemento 1 del 2° si ha la

| 1 3 | 2 5 4 | 1 3 |

dalla quale mediante l'operazione O_2 si deducono le

1 2	3 5 4	1 3
1 5	3 2 4	1 3
1 4	3 2 5	1 3
3 4	1 2 5	1 3
3 5	1 2 4	1 3
3 2	1 5 4	1 3
2 5	3 1 4	1 3
2 4	3 1 5	1 3
5 4	3 1 2	1 3

Si hanno così tutte le permutazioni aventi comuni il 3° gruppo | 1 3 |. Ed ora si continui nel processo ormai evidente; si ottengano cioè tutte le permutazioni nelle quali il 3° gruppo è una delle combinazioni binarie suddette, diversa però dalle (5 3), (2 3), (1 3). Per es. scambiando nella | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 | gli elementi 4 e 5, rispettivamente del 1° e 3° gruppo, si ha la

| 1 3 | 2 1 5 | 4 3 |

e da questa, mediante la O_2 si hanno le

| 1 2 | 3 1 5 | 4 3 |
| 1 5 | 2 1 3 | 4 3 | .

Similmente scambiando in una delle permutazioni già formate, ad es. nella | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 |, gli elementi 2 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

| 1 3 | 3 1 4 | 5 2 |

sulla quale non si può eseguire la O_2, non potendosi scambiare alcun elemento del 1° gruppo con alcuno del 2°, giacchè tutti gli elementi del 1° gruppo fanno parte del 2°. Scambiando ancora nella | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 | gli elementi 4 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

| 1 3 | 2 1 3 | 5 4 |

sulla quale non si può eseguire la O_2, giacchè gli elementi del 1° gruppo sono pure elementi del 2°. Scambiando nella | 1 3 | 2 1 4 | 5 3 | gli elementi 1 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

| 1 3 | 2 3 4 | 5 1 |

dalla quale, mediante la O_2, si deducono le

| 2 3 | 1 3 4 | 5 1 |
| 4 3 | 2 3 1 | 5 1 |

si sono così già formate ventiquattro permutazioni, quelle cioè nelle quali il terzo gruppo è una delle combinazioni binarie (53), (23), (13), (43), (52), (54), (51). Possiamo ora ottenere le altre, nelle quali il 3° gruppo è una delle combinazioni binarie (21), (24), (14). E così ad esempio scambiando sulla | 1 3 | 5 1 4 | 2 3 | (la 4ª delle permutazioni già formate) gli elementi 1 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

| 1 3 | 5 3 4 | 2 1 |

e da questa, mediante la O_2, si hanno le

| 5 3 | 1 3 4 | 2 1 |
| 4 3 | 5 3 1 | 2 1 |

Scambiando ancora nella | 13 | 514 | 23 | gli elementi 4 e 3 rispettivamente dal 2° e 3° gruppo, si ha la

| 13 | 513 | 24 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. Infine scambiando ad es. nella | 13 | 254 | 13 | (la 7^ma delle permutazioni già formate) gli elementi 4 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo si ha la

| 13 | 253 | 14 |

dalla quale, mediante la O_2, si hanno le

| 23 | 153 | 14 |
| 53 | 213 | 14 |.

Si sono così ottenute trentuna seconde permutazioni delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{35}$; nessun'altra è possibile all'infuori di esse.

Se occorresse determinare il segno di ciascuna permutazione, e quindi anche quello della combinazione ad essa corrispondente, si dovrebbe anzitutto determinare quello della 1ª permutazione formata, cioè la | 12 | 314 | 53 |. In essa sono contenute due inversioni, e perciò le compete il segno $+$; il segno delle rimanenti permutazioni si determinerà seguendo le norme dianzi indicate. Queste sono poi più facili ad applicarsi quando ciascuna delle permutazioni (la 1ª eccettuata) si ottiene da un'altra mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi consecutivi; perciò, nel formare le varie permutazioni, è conveniente, ma non necessario, se vuolsi determinare il segno di ciascuna, operare soltanto scambi tra elementi di due gruppi contigui. In tal modo abbiamo appunto operato nel formare le suddette trentuna permutazioni.

Si è visto testè, che fra le trentuna permutazioni formate, ce n'è almeno una nella quale il terzo gruppo è una qualunque della combinazioni binarie (12), (13) ... degli elementi 1, 2, 3, 4, 5. Ciò non succede, nel caso generale, quando una o più delle $v_1, v_2, \ldots v_n$ è uguale a tre. Per esempio volendo formare le seconde permutazioni delle combinazioni relative alla matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \right\|$$

supponendo $r_1 = 1, r_2 = 3, r_3 = 3; v_1 = 2; v_2 = 3; v_3 = 1; v_4 = 1$, comincierà a scriverne una ad esempio la

| 2 | 231 | 412 |

Essendo $r_2=3$ ogni gruppo di una qualunque di tali permutazioni dovrà contenere l'elemento 2, e quindi delle quattro combinazioni ternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, quelle che possono essere 3° gruppo di una permutazione sono le (123), (234), (214). Nella | 2 | 2 3 1 | 4 1 2 | il 3° gruppo è rappresentato dalla (412). Da essa non si può dedurre alcun'altra permutazione avente comune il 3° gruppo, giacchè non si può eseguire su essa l'operazione O_2. Gli elementi del 3° gruppo non possono poi scambiarsi con quelli del 1°, e soltanto l'elemento 4 di esso può scambiarsi coll'elemento 3 del 2° gruppo. Eseguendo un tal scambio si ha la

| 2 | 2 4 1 | 3 1 2 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. Le due permutazioni formate sono le sole possibili. Per altro esempio vedesi che dalla | 1 3 | 3 1 4 | 2 3 | si possono dedurre soltanto le | 1 3 | 3 1 2 | 4 3 |; | 1 3 | 3 4 2 | 1 3 |; | 4 3 | 3 1 2 | 1 3 |; | 2 3 | 3 4 1 | 1 3 |. Le combinazioni binarie degli elementi 1, 2, 3, 4 sono sei, e quelle che possono costituire il 3° gruppo sono soltanto tre e precisamente quelle che contengono l'elemento 3.

Risulta da quanto è stato detto che per formare le seconde permutazioni di tutte le combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ e $\downarrow 3$, basta: 1° scriverne una e badare se essa contiene elementi comuni ai tre gruppi; 2° formare quelle fra le combinazioni r_3 ad r_3 dei numeri 1, 2, 3 . . . n, che contengono tutti gli elementi comuni ai tre gruppi della permutazione già scritta, e nel caso che non esistano elementi comuni, formare le combinazioni r_3 ad r_3 dei numeri 1, . . . n; 3° eseguire l'operazione O_2 sulla 1ª permutazione formata; 4° scambiare in una delle permutazioni formate un elemento del 3° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il 3° gruppo sia una delle suddette combinazioni r_3^nrie degli elementi 1. . . . n; 5° eseguire la O_2 sulla permutazione ottenuta quale resultato del suddetto scambio ecc. . . . e così continuare, finchè non si è potuto accertare che mediante uno scambio da eseguirsi tra un elemento del 2° gruppo di una delle permutazioni formate ad uno dei gruppi rimanenti, è impossibile ottenere una permutazione nelle quali il 3° gruppo sia una delle combinazioni r_3^arie differente da quelle che hanno figurato, quali 3° gruppo, nelle permutazioni già formate.

Si osservi sempre che: ogniqualvolta si scambia un elemento del 3° gruppo con uno di quelli del 2° e del 1°, lo scambio può effettuarsi su una qualunque delle permutazioni già formate; 2° sulla permutazione ottenuta quale risultato di un dato scambio deve sempre eseguirsi la O_2; 3° l'ordine secondo il quale si può comporre il 3° gruppo cogli elementi di una delle suddette combinazioni r_3^arie è indifferente; 4° la permutazione che deve scriversi per la prima può essere una qualunque delle permutazioni possibili.

L'operazione mediante la quale da una permutazione a tre gruppi detta fondamentale si deducono le altre, seguendo la regola ora enunciata, si indicherà con O_2. Così si dirà ad es. che le seconde permutazioni delle combinazioni delle $a_{11} \dots a_{35}$, (esempio citato testè), si sono ottenute dalla 1ª (fondamentale) | 1 2 | 3 1 4 | 5 2 | eseguendo su essa l'operazione O_2. Tale operazione è stata descritta or ora. Essa può anche eseguirsi se gli elementi differenti dei tre gruppi della permutazione fondamentale non sono numeri consecutivi; in ogni caso, se il 3° gruppo contiene i elementi, esso è sempre una delle combinazioni i^{arie} degli elementi diversi appartenenti alla permutazione fondamentale. Per es. se la permutazione fondamentale fosse la

| 3 | 1 6 | 1 3 |

gli elementi differenti di essa sarebbero 1, 3, 6 e le loro combinazioni due a due, (gli elementi del 3° gruppo sono appunto due), sarebbero (13), (16), (36). Una di esse, la (13), è terzo gruppo nella | 3 | 16 | 13 |, dalla quale, mediante la O_2 si deducono le

| 1 | 3 6 | 1 3 |
| 6 | 1 3 | 1 3 |

Scambiando nella | 3 | 1 6 | 1 3 | gli elementi 6 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

| 3 | 1 3 | 1 6 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. Il terzo gruppo di essa è la combinazione binaria (16). Scambiando infine in una delle permutazioni già formate, ad es. nella | 1 | 3 6 | 1 3 |, gli elementi 6 ed 1 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

| 1 | 3 1 | 6 3 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. In essa il 3° gruppo è la combinazione binaria (63). Adunque il risultato della O_3 eseguita sulla | 3 | 1 6 | 1 3 | è il complesso di altre quattro permutazioni.

È anche da notarsi che può esistere una permutazione a tre gruppi, dalla quale non si possa dedurre alcun'altra permutazione, per l'impossibilità di eseguire anche un sol scambio tra elementi di due gruppi differenti. Tali ad es. sono le permutazioni

| 2 1 | 1 | 3 2 1 |
| 5 4 | 4 | 8 5 4 |

Consideriamo ora una successione a quattro gruppi ad es. la

| 1 2 | 3 1 4 | 5 3 | A_4 |

nella quale il quarto gruppo è indicato con A_4. I primi tre gruppi di essa costituiscono la $|\,12\,|\,314\,|\,53\,|$, sulla quale dianzi abbiamo eseguita la O_3, deducendone altre trenta permutazioni. Orbene diremo risultato della O_3, eseguita sulla suddetta permutazione di quattro gruppi, il complesso delle permutazioni ottenute scrivendo il gruppo A_4 accanto a quelle ottenute eseguendo la O_3 sulla $|\,12\,|\,314\,|\,53\,|$. Esse adunque sono le

$$\begin{array}{l}
|\,13\,|\,214\,|\,53\,|\,A_4\,| \\
|\,14\,|\,312\,|\,53\,|\,A_4\,| \\
|\,13\,|\,514\,|\,23\,|\,A_4\,| \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Occupiamoci ora della determinazione del numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow n$, (coefficienti $v_1, \ldots v_n$), e $\updownarrow 3$, (coeff. r_1, r_2, r_3). Indichiamolo col simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix}$ ed osserviamo che se una delle v, ad es. v_i, è uguale a 3 si ha: (*)

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{i-1}, 3, v_{i+1}, \ldots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{i-1}, v_{i+1} \ldots v_n \\ r_1 - 1,\, r_2 - 1,\, r_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

Per es. è:

$$\begin{bmatrix} 112233 \\ 345 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11223 \\ 234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1122 \\ 123 \end{bmatrix}.$$

Oltre a ciò il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix}$ è indipendente dall'ordine di successione delle v e delle r. Supponiamo che tra le v si trovino p_1 numeri uguali ad 1, p_2 uguali a 2 e p_3 uguali a 3. Sarà: $\Sigma v = r_1 + r_2 + r_3$ ossia $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$; $p_1 + p_2 + p_3 = n$. Potremo sempre ridurre il simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix}$ alla forma:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1}\ \overbrace{2 \ldots 2}^{p_2}\ \overbrace{3 \ldots 3}^{p_3} \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$$

ovvero, giusta la convenzione di indicare la successione $\overbrace{a \ldots\ldots a}^{\lambda}$, di λ numeri uguali ad a, col segno $a_{(\lambda)}$,

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)}\, 2_{(p_2)}\, 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix}$$

(*) Tralascio la dimostrazione di questa ed altre proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1, r_2, r_3 \end{bmatrix}$; esse sono casi particolari di proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ che saranno dimostrate in seguito.

Per la 1ª proprietà, testè enunciata, del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix}$ si ha:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_1 - p_3, & r_2 - p_3, \; r_3 - p_3 \end{bmatrix}$$

ed è $p_1 + 2p_2 = (r_1 - p_3) + (r_2 - p_3) + (r_3 - p_3)$.

Il numero delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{3n}$ è dunque uguale a quello delle combinazioni relative alla matrice

$$M \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,p_1} \ldots a_{1,n-p_3} \\ a_{21} \ldots a_{2,p_1} \ldots a_{2,n-p_3} \\ a_{31} \ldots a_{3,p_1} \ldots a_{3,n-p_3} \end{Vmatrix}$$

ove si assumano quali coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 3 i numeri $r_1 - p_3$, $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ e quali coefficienti della dimensione $\longrightarrow n - p_3$ i numeri $\underbrace{1 \ldots 1}_{p_1}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{p_2}$ (essendo $n = p_1 + p_2 + p_3$ è appunto $n - p_3 = = p_1 + p_2$).

Non è escluso che una delle differenze $r_1 - p_3$, $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ sia nulla. Se è nulla ad es. la $r_1 - p_3$ si ha $r_1 = p_3$ e pertanto $p_1 + 2p_2 = = (r_2 - p_3) + (r_3 - p_3)$. In tal caso si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_2 - p_2 - p_3, \; r_3 - p_2 - p_3 \end{bmatrix} = \frac{p_1!}{(r_2 - p_2 - p_3)!\,(r_3 - p_2 - p_3)!} \quad (*)$$

Due o più delle suddette differenze non possono essere contemporaneamente nulle; se ad es. fosse $r_1 - p_3 = 0$; $r_2 - p_3 = 0$, sarebbe $p_1 + 2p_2 = r_3 - p_3$ ossia $r_3 = p_1 + 2p_2 + p_3$, mentre invece il massimo valore di r_3 è $p_1 + p_2 + p_3 = n$.

Ciascuna della combinazioni relative alla suddetta matrice di dimensioni $\longrightarrow n - p_3$ ed $\updownarrow$ 3 contiene $r_1 - p_3$ fra le $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1,n-p_3}$, le quali si possono considerare come elementi di una delle $\binom{n - p_3}{r_1 - p_3}$ combinazioni $r_1 - p_3$ ad $r_1 - p_3$ di esse $a_{11}, \ldots a_{1,n-p_3}$.

Le $a_{11} \ldots a_{1,n-p_3}$ possono riunirsi in due gruppi; il 1º contenente le $a_{11} \ldots a_{1,p_1}$; il 2º le $a_{1,p_1+1}, \ldots a_{1,n-p_3}$. Ciascuna delle suddette combinazioni delle $a_{11}, \ldots a_{1,n-p_3}$ conterrà ad es. π_1 della $a_{11} \ldots a_{1,p_1}$ e π_2 delle $a_{1,p_1+1}, \ldots a_{1,n-p_3}$ e sarà sempre $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$.

D'altronde è nota la formola d'analisi combinatoria:

$$\binom{p_1 + p_2}{h} = \sum_{\pi_1 + \pi_2 = h} \binom{p_1}{\pi_1} \binom{p_2}{\pi_2}; \qquad \pi_1 \leq p_1; \quad \pi_2 \leq p_2 \qquad (18)$$

(*) Si è scritto convenzionalmente $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix}$ invece di $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ 0, \; r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix}$.

nella quale il segno Σ deve intendersi esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli delle π_1, π_2, tali che $\pi_1 + \pi_2 = h$, e ritenendo $\binom{\lambda}{0} = 1$ anche se $\lambda = 0$. Supponendo $h = r_1 - p_3$, ogni termine del 2° membro della (18) rappresenta il numero dei modi secondo i quali si possono scegliere π_1 delle $a_{11}, \ldots, a_{1,p_1}$ e π_2 delle $a_{1,p_1+1} \ldots \ldots a_{1,n-p_3}$, in modo da avere complessivamente $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$ elementi. Ora ciascuna combinazione relativa alla matrice M contiene π_1 delle $a_{11}, \ldots, a_{1,p_1}$ e π_2 delle $a_{1,p_1+1} \ldots a_{1,n-p_3}$; soppressi tali elementi, ne rimangono altri $r_2 - r_3 - 2p_3$, i quali costituiscono una combinazione relativa ad una matrice che si ottiene dalla M sopprimendo la 1ª orizzontale e le π_1 verticali alle quali appartengono quelle fra le $a_{11} \ldots, a_{1,p_1}$ che fanno parte della combinazione che si considera, ed assumendo quali coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 2 i numeri $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ e quali coefficienti della dimensione $\longleftrightarrow$ $n - p_3 - \pi_1$ i numeri $\underbrace{1 \ldots \ldots \ldots 1}_{p_1 - \pi_1 + \pi_2}, \underbrace{2 \ldots \ldots 2}_{p_2 - \pi_2}$.

Adunque le combinazioni relative alla matrice M, aventi comuni π_1 elementi scelti tra le $a_{11} \ldots; a_{1,p_1}$ e π_2 scelti tra le $a_{1,p_1+1}, \ldots a_{1,n-p_3}$, sono in numero di

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)}\, 2_{(p_2-\pi_2)} \\ r_2 - p_3,\ r_3 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{p_1-\pi_1+\pi_2} \\ (r_2-p_3)-(p_2-\pi_2),\ (r_3-p_3)-(p_2-\pi_2) \end{bmatrix}.$$

E si noti che essendo $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$ e $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$, si ha pure: $(p_1 - \pi_1 + \pi_2) + 2(p_2 - \pi_2) = (r_2 - p_3) + (r_3 - p_3)$ come deve essere.

Si ha pertanto la formola:

$$\begin{bmatrix} r_1 \ldots r_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1-p_3} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2} \begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)}\, 2_{(p_2-\pi_2)} \\ r_2 - p_3,\ r_3 - p_3 \end{bmatrix} = \tag{19}$$

$$= \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1-p_3} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2} \begin{bmatrix} 1_{p_1-\pi_1+\pi_2} \\ (r_2-p_3)-(p_2-\pi_2),\ (r_3-p_3)-(p_2-\pi_2) \end{bmatrix}$$

nella quale il segno Σ deve intendersi esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli delle π_1, π_2 tali che:

$\pi_1 \leq p_1;\ \pi_2 \leq p_2;\ \pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3;\ p_2 + p_3 - r_2 \leq \pi_2;\ p_2 + p_3 - r_3 \leq \pi_2.$

Imponendo a π_1 e π_2 tali condizioni, le differenze $(r_2 - p_3) - (p_2 - \pi_2)$ e $(r_3 - p_3) - (p_2 - \pi_2)$ sono certamente positive. Si può anche (ed è conveniente) assoggettare π_1 e π_2 alle sole condizioni

$$\pi_1 \overline{<} p_1;\ \pi_2 \overline{<} p_2;\ \pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$$

convenendo di ritenere nullo $(=0)$ ogni termine della forma $\begin{bmatrix} 1_{(\lambda)} \\ -h, h \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} 1_{(\lambda)} \\ h, -h \end{bmatrix}$, h essendo positivo e diverso da zero. La (19) sussiste pure cambiando nel 2° membro r_1 in r_2 e quindi r_2 in r_1 oppure r_1 in r_3 e quindi r_3 in r_1. Infatti le considerazioni fatte relativamente alla 1^{a} orizzontale della matrice M si possono fare relativamente a ciascuna delle orizzontali 2^{a} e 3^{a}.

Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

1°. Se $p_3 = 0, p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$, sarà $p_1 + 2p_2 = r_1 + r_2 + r_2$ e si avrà:

$$\left[\begin{matrix} c_1 \ldots c_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{matrix}\right] = \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\left[\begin{matrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)} \\ r_2 - p_2 + \pi_2,\ r_3 - p_2 + \pi_2 \end{matrix}\right] =$$

$$= \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\binom{p_1 - \pi_1 + \pi_2}{r_2 - p_2 + \pi_2}.$$

2°. Se $p_3 = 0$, e $p_2 = 0$, è $r_1 + r_2 + r_3 = p_1$ e dovendo essere $\pi_1 \leqq p_1$; $\pi_2 \leqq p_2$, sarà $\pi_2 = 0$ e quindi il solo sistema di valori delle π_1 e π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1$, sarà il sistema $r_1, 0$; pertanto si ha dalla formola precedente:

$$\left[\begin{matrix} 1_{(p_1)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{matrix}\right] = \binom{p_1}{\pi_1}\left[\begin{matrix} 1_{(p_1-r_1)} \\ r_2\ \ r_3 \end{matrix}\right] = \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_1 - r_1}{r_2} = \frac{p_1!}{r_1!\, r_2!\, r_3!}.$$

3°. Se $p_1 \neq 0$; $p_2 = 0$; $p_3 \neq 0$, è $p_1 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$, e dovendo essere $\pi_2 \leqq p_2$, sarà, $\pi_2 = 0$, quindi il solo sistema di valori di π_1 e π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$, è il sistema $r_1 - p_3, 0$. Si ha quindi dalla (19):

$$\left[\begin{matrix} 1_{(p_1)}\, 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{matrix}\right] = \binom{p_1}{r_1 - p_3}\left[\begin{matrix} 1_{(p_1-r_1+p_3)} \\ r_2 - p_3,\ r_3 - p_3 \end{matrix}\right] =$$

$$= \binom{p_1}{r_1 - p_3}\binom{p_1 - r_1 + p_3}{r_2 - p_3} = \frac{p_1!}{(r_1 - p_3)!\ (r_2 - p_3)!\ (r_3 - p_3)!}.$$

Si noti che essendo $r_1, r_2, r_3, \geqq p_3$, le differenze $r_1 - p_3$, $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ non sono mai negative.

4°. Se $p_3 = 0, p_1 = 0, p_2 \neq 0$, sarà $2p_2 = r_1 + r_2 + r_3$, ed essendo $\pi_1 \leqq p_1$, sarà $\pi_1 = 0$; quindi il solo sistema di valori dalle π_1, π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1$, è il sistema $0, r_1$. Si avrà quindi dalla formola relativa al caso particolare indicato al n. 1:

$$\left[\begin{matrix} 2_{(p_2)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{matrix}\right] = \binom{p_2}{r_1}\left[\begin{matrix} 1_{(r_1)} \\ r_2 - p_2 + r_1,\ r_3 - p_2 + r_1 \end{matrix}\right] = \frac{p_2!}{(p_2 - r_1)!\,(p_2 - r_2)!\,(p_2 - r_3)!}$$

5°. Se $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $p_3 \neq 0$, sarà $2p_2 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$, e dovendo essere $\pi_1 \leqq p_1$, sarà $\pi_1 = 0$; perciò il solo sistema di valori delle π_1, π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$, sarà il sistema $0, r_1 - p_3$. Si avrà adunque dalla (19):

$$\left[\begin{matrix} 2_{(p_2)}\, 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{matrix}\right] = \binom{p_2}{r_1 - p_3}\left[\begin{matrix} 1_{(r_1-p_3)} \\ r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3,\ r_3 + r_1 - p_2 - 2p_3 \end{matrix}\right] =$$

$$= \binom{p_2}{r_1 - p_3}\binom{r_1 - p_3}{r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3}$$

Ora

$$\binom{p_2}{r_1 - p_3} = \frac{p_2!}{(r_1 - p_3)!\,(p_2 - r_1 + p_3)!}$$

e

$$\binom{r_1 - p_3}{r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3} = \frac{(r_1 - p_3)!}{(r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3)!\,\{(r_1 - p_3) - (r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3)\}\,!}$$

e poichè:

$r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3 = p_2 + p_3 - r_3$, (si deduce dalla $2p_2 + 3p_3 = r_1 = r_2 + r_3$), è pure:

$$(r_1 - p_3) - (r_2 + r_1 + p_2 - 2p_3) = p_2 + p_3 - r_2;$$

pertanto:

$$\begin{bmatrix} 2_{(p_2)}\, 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \frac{p_2!}{(p_2 + p_3 - r_1)!\,(p_2 + p_3 - r_2)!\,(p_2 + p_3 - r_3)!}.$$

6°. Se $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$, sarà $3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$, e poichè r_1, r_2, r_3 non sono mai minori di p_3, sarà $r_1 = r_2 = r_3 = p_3 = n$.

In tal caso, dovendo essere $\pi_1 \leqq p_1$, $\pi_2 \leqq p_2$, sarà: $\pi_1 = 0$; $\pi_2 = 0$; si ha pertanto dalla (19):

$$\begin{bmatrix} 3_{(p_3)} \\ p_3\, p_3\, p_3 \end{bmatrix} = 1.$$

Esempio. — Sia da calcolarsi il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{15} \\ a_{21} \ldots\ldots\ldots a_{25} \\ a_{31} \ldots\ldots\ldots a_{35} \end{Vmatrix}$$

assumendo $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 1$ (ne abbiamo formato poc'anzi le seconde permutazioni).

Si ha in tal caso: $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0$, ed i sistemi di valori delle π_1, π_2 tali che: $\pi_1 \leq p_1$, $\pi_2 \leq p_2$, $\pi_1 + \pi_2 = 2$ (2 è il valore di r_1) sono i tre seguenti: 0, 2; 1, 1; 2, 0. Adunque, applicando la formola (19) si trova:

$$\begin{bmatrix} 11122 \\ 232 \end{bmatrix} = \binom{3}{0}\binom{2}{2}\begin{bmatrix} 11111 \\ 32 \end{bmatrix} + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\begin{bmatrix} 111 \\ 21 \end{bmatrix} + \binom{3}{2}\binom{2}{0}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ma

$$\begin{bmatrix} 11111 \\ 32 \end{bmatrix} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

$$\begin{bmatrix} 111 \\ 21 \end{bmatrix} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3 \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1!}{1!} = 1.$$

Pertanto:

$$\begin{bmatrix} 11122 \\ 232 \end{bmatrix} = 1.1.10 + 3.2.3 + 3.1.1 = 10 + 18 + 3 = \text{trentuno}.$$

III caso: m = 4. Si vogliono ad esempio formare le combinazioni relative alle matrice

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{matrix}\right\|$$

di dimensioni $\rightarrow$ 5 e $\downarrow$ 4 assumendo $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$. $r_4 = 4$; $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$. La seconda permutazione di una di esse è la

$$|13|124|53|1234|.$$

Eseguendo su questa l'operazione O_3, si hanno altre trenta permutazioni, le quali assieme alla $|13|124|53|1234|$ costituiscono il complesso delle seconde permutazioni aventi $|1234|$ per ultimo gruppo. Gli elementi della $|13|124|53|$, formata coi gruppi della permutazione suddetta, sono quelli della 1ª delle trentuna permutazioni formate studiando (quando si trattava il caso $m = 3$) le combinazioni relative alla matrice $\left\|\begin{matrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{15} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{31} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\|$, nell'ipotesi $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=2$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 1$. Perciò, se accanto a tali permutazioni scriviamo il gruppo $|1234|$, noi otteniamo le suddette trentuna permutazioni di quattro gruppi. Esse adunque sono le:

$$\begin{array}{ll} 1^a & |13|124|53|1234| \\ 2^a & |12|314|53|1234| \\ 3^a & |14|312|53|1234| \\ 4^a & |13|514|23|1234| \\ \vdots & \quad\quad\quad \vdots \\ 31^{ma} & |53|213|14|1234|. \end{array}$$

Le combinazioni 4 a 4 (4 è il valore di r_4) dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, sono le (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5), (1 3 4 5), (2 3 4 5); nelle permutazioni finora ottenute il quarto gruppo è rappresentato da una sola di esse, la (1 2 3 4). Scambiamo in una qualunque delle trentuna permutazioni formate un elemento del 4° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il 4° gruppo sia un'altra delle suddette combinazioni quaternarie; per es., scambiando nella 1ª l'elemento 4 del quarto gruppo coll'elemento 5 del terzo, si ha la

$$|13|124|43|1235|$$

dalla quale, mediante l'operazione O_3, si possono dedurre tutte le altre permutazioni aventi comune con essa il quarto gruppo $|1235|$. Poichè la $|13|124|43|$ formata coi primi tre gruppi della $|13|124|43|1235|$ contiene $p_1 = 1$ elementi presi una volta, $p_2 = 3$ elementi presi due volte e $p_3 = 0$ elementi presi tre volte, e poichè i gruppi 1°, 2°, 3°, di essa contengono rispettivamente $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$ elementi, il numero delle suddette permutazioni, aventi comune il quarto gruppo | 1 2 3 5 |, sarà, secondo le formole stabilite trattando il caso $m=3$:

$$\begin{bmatrix} 1222 \\ 232 \end{bmatrix} = \binom{1}{0}\binom{3}{2}\begin{bmatrix} 1112 \\ 32 \end{bmatrix} + \binom{1}{1}\binom{3}{1}\begin{bmatrix} 122 \\ 32 \end{bmatrix} = \text{dodici.}$$

E così possiamo dire d'aver già formate $31+12=43$ permutazioni. Si scambi ora in una qualunque di esse un elemento del 4° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il 4° gruppo sia una delle suddette combinazioni quaternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, diversa però dalle (1 2 3 4), (1 2 3 5). Ad es. scambiando nella 4ª (la | 1 3 | 5 1 4 | 2 3 | 1 2 3 4 |) l'elemento 3 del 4° gruppo coll'elemento 5 del 2°, si ha la | 1 3 | 3 1 4 | 2 3 | 1 2 4 5 |, nella quale il 3° gruppo è la combinazione quaternaria (1 2 4 5). Tutte le rimanenti che hanno comune con essa il 4° gruppo, si ottengono eseguendo su di essa l'operazione O_3. Si continui nel processo, ormai evidente, formando le permutazioni nelle quali il 4° gruppo è una delle combinazioni quaternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, diversa però dalle (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5). Si hanno così tutte le seconde permutazioni relative alle combinazioni delle $a_{11} \ldots . a_{45}$. Tra esse ve ne sono: trentuna nelle quali il 4° gruppo è | 1 2 3 4 |; dodici nelle quali è | 1 2 3 5 |; cinque nelle quali è | 1 2 4 5 |; dodici nelle quali è | 1 3 4 5 |; cinque nelle quali è | 2 3 4 5 |. Il numero di esse è adunque:

$$31+12+5+12+5 = \text{sessantacinque.}$$

Ciascuna delle combinazioni quaternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, ha figurato quale ultimo gruppo in una almeno delle suddette sessantacinque permutazioni. Ciò non succede, in generale, quando qualcuna delle v è uguale a 4. Se ad esempio fosse $v_2=4$, ciascun gruppo di una qualunque permutazione dovrebbe contenere l'elemento 2, e quindi l'ultimo gruppo sarebbe sempre una fra le combinazioni quaternarie suddette contenenti il 2, cioè una delle (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5), (2 3 4 5). Se fosse $v_2=4$, $v_3=4$, l'ultimo gruppo sarebbe una delle combinazioni (1 2 3 4), (1 2 3 5), (2 3 4 5), contenenti gli elementi 2 e 3. Cio è evidente.

La forma generale di una permutazione a quattro gruppi è $| A_1 | A_2 | A_3 | A_4 |$ dove A_1, A_2, A_3, A_4 sono gruppi contenenti rispettivamente r_1, r_2, r_3, r_4 elementi qualunque, (non è necessario che gli elementi differenti della permutazione siano numeri consecutivi); tra gli elementi di tal permutazione ve ne saranno poi p_1, p_2, p_3, p_4 presi rispettivamente 1, 2, 3, 4 volte. Se gli elementi differenti sono i numeri $1, 2, \ldots n$, e l'elemento i è ripetuto v_i volte, sarà: $v_i \leq 4$; $r_j \leq n$; $\Sigma v = \Sigma r$. L'operazione mediante la quale da una permutazione a quattro gruppi si deducono le rimanenti, (vale a dire quelle che sono formate cogli stessi elementi), si indicherà con O_4. Eccone la descrizione: 1° si formano quelle fra le combinazioni r_4 ad r_4 degli elementi differenti della permutazione data, che contengono gli elementi (se ve ne sono) comuni a tutti i gruppi; se non vi sono elementi comuni a tutti i gruppi, si formano tutte le combinazioni r_4 ad r_4 degli elementi diversi della permutazione data; 2° si eseguisce su essa l'operazione O_3; 3° si scambia in una delle permutazioni formate un elemento del quarto gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il quarto gruppo sia un'altra delle combinazioni r_4 ad r_4 suddette; 4° si eseguisce sulla permutazione ottenuta l'operazione O_3 ecc.... e così si continua finchè non si è potuto accertare, che mediante uno scambio, da eseguirsi tra un elemento del quarto gruppo di una delle permutazioni formate ed uno dei gruppi rimanenti, è impossibile ottenere una permutazione, nella quale il 4° gruppo sia una delle combinazioni r_4^{arie} suddette, diverse da quelle che già hanno figurato quale quarto gruppo in una delle permutazioni formate.

Se gli elementi differenti della $\mid A_1 \mid A_2 \mid A_3 \mid A_4 \mid$ sono i numeri $1, 2, \ldots n$, si può determinare, se occorre, il segno di essa, il quale è quello di $(-1)^\beta$, β essendo il numero delle inversioni che gli elementi di ciascun gruppo fanno con quelli dei gruppi che esso ha a destra. Noto il segno della $\mid A_1 \mid A_2 \mid A_3 \mid A_4 \mid$, si potrà facilmente determinare quello delle permutazioni da essa dedotte, seguendo i criteri già noti; infatti ciascuna di esse a cominciare dalla 2ª, si deduce da una di segno noto mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi differenti. Giova anche osservare che più facilmente si potrà determinare, ove occorra, il segno delle permutazioni, se si sarà avuta l'avvertenza di dedurre possibilmente ciascuna di esse da un'altra mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi contigui.

Indichiamo ora col simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix}$ il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ (coi coefficienti $v_1, \ldots, v_n$) ed $\updownarrow 4$ (coi coefficienti r_1, r_2, r_3, r_4). Il valore di tal simbolo è indipendente dall'ordine della v e della r (*), dimodoche si può sempre supporlo ridotto alla forma

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}$$

giacchè tra le $v_1, \ldots v_n$ ve ne saranno p_1, p_2, p_3, p_4 rispettivamente uguali ad $1, 2, 3, 4$, (è sempre $v_i \leq 4$). Si ha poi

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ r_1 - p_4, & r_2 - p_4, & r_3 - p_4, \; r_4 - p_4 \end{bmatrix} =$$

$$(20)^* \quad = \sum_{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = r_1 - p_4} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\binom{p_3}{\pi_3} \begin{bmatrix} 1_{(p_1 - \pi_1 + \pi_2)} & 2_{(p_2 - \pi_2 + \pi_3)} & 3_{(p_3 - \pi_3)} \\ r_2 - p_4, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = r_1 - p_4} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\binom{p_3}{\pi_3} \begin{bmatrix} 1_{(p_1 - \pi_1 + \pi_2)} & 2_{(p_2 - \pi_2 + \pi_3)} \\ (r_2 - p_4) - (p_3 - \pi_3), & (r_3 - p_4) - (p_3 - \pi_3), \; (r_4 - p_4) - (p_3 - \pi_3) \end{bmatrix}$$

(*) Non dimostro questa ad altre proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix}$, essendo casi particolari di proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ che sarà studiato accuratamente in seguito.

intendendo il segno Σ esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli, delle π_1, π_2, π_3, tali che:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \leq p_1; \quad \pi_2 \leq p_2: \quad \pi_3 \leq p_3; \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = r_1 - p_4 \\ (r_2 - \pi_4) - (p_3 - \pi_3) \geq 0; \quad (r_3 - \pi_4) - (p_3 - \pi_3) \geq 0; \quad (r_4 - p_4) - (p_3 - \pi_3) \geq 0 \end{array}\right\}$$

I numeri π_1, π_2, π_3 possono anche assoggettarsi alle sole condizioni

$$\pi_1 \leq p_1: \quad \pi_2 \leq p_2; \quad \pi_3 \leq p_3: \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = r_1 - p_4$$

ritenendo però

$$\begin{bmatrix} 1_{(p)} & & 1_{(r)} \\ h & k & l \end{bmatrix} = 0$$

se uno (o più) dei numeri h, k, l è negativo.

La (20) sussiste pure se si cambia r_1 in r_2 ed r_2 in r_1, oppure r_1 in r_3 ed r_3 in r_1, oppure r_1 in r_4 ed r_4 in r_1.

Si hanno casi particolari che non esamineremo a parte, e che sono compresi nella (20), quando una o due o tre delle p_1, p_2, p_3, p_4 siano zero. In qualunque caso dev'essere: $\Sigma v = \Sigma r$ ossia $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + + 4p_4 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. Inoltre $r_1 \geq p_4$; $r_1 \leq n$; $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n$.

Altri casi speciali si hanno quando una o due delle differenze $r_1 - p_4$, $r_2 - p_4$, $r_3 - p_4$, $r_4 - p_4$ fossero zero. Tre di esse non possono essere contemporaneamente zero; se fosse ad es. $r_1 - p_4 = 0$; $r_2 - p_4 = 0$; $r_3 - p_4 = 0$, sarebbe $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + p_4 = r_4$, il che non può essere, giacchè il massimo valore di r_4 è $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n$.

Se $r_1 - p_4 = 0$ si ha $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$ e quindi:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ 0, & r_2 - p_4, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & \\ r_2 - p_3 - p_4, & r_3 - p_3 - p_4, & r_4 - p_3 - p_4 \end{bmatrix}$$

E similmente

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & \\ r_1 - p_4, & 0, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & \\ r_1 - p_3 - p_4, & r_3 - p_3 - p_4, & r_4 - p_3 - p_4 \end{bmatrix}$$

ecc. ecc.

Se due delle differenze suddette sono nulle, ad es. se è $r_1 - p_4 = 0$, $r_2 - p_4 = 0$, si ha

$$\begin{bmatrix} & & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ 0, & 0, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & \\ -p_3, & r_3 - p_3 - p_4, & r_4 - p_3 - p_4 \end{bmatrix} = 0$$

a meno che non sia $p_3 = 0$; quindi se due delle differenze $r_1 - p_4$, $r_2 - p_4$, $r_3 - p_4$, $r_4 - p_4$ sono nulle, e $p_3 = 0$, il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix}$ è zero.

Esempio. — Il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow 5$, coi coefficienti $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$ e $\updownarrow 4$, coi coefficienti $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$, (abbiamo già visto come si fa a formarne le seconde permutazioni che sono sessantacinque), è $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (*). Si ha infatti: $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=2$, $p_4=0$. I sistemi di valori delle π_1, π_2, π_3 tali che: $\pi_1 \leq 1$; $\pi_2 \leq 2$; $\pi_3 \leq 2$; $\pi_1+\pi_2+\pi_3 = r_1 - p_4 = 2$, sono i cinque seguenti:

	$p_1=1$	$p_2=2$	$p_3=2$
	$\pi_1\ +$	$\pi_2\ +$	$\pi_3\ =2$
1°	0	0	2
2°	0	1	1
3°	0	2	0
4°	1	0	1
5°	1	1	0

Pertanto, si ha per la (20):

$$\begin{bmatrix} 12233 \\ 2324 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(1)}\, 2_{(2)}\, 3_{(2)} \\ 2\ 3\ 2\ 4 \end{bmatrix} = \binom{1}{0}\binom{2}{0}\binom{2}{2}\begin{bmatrix} 14 \\ 324 \end{bmatrix} + \binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\begin{bmatrix} 22 \\ 213 \end{bmatrix} +$$
$$+ \binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{2}{0}\begin{bmatrix} 30 \\ 102 \end{bmatrix} + \binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{1}\begin{bmatrix} 03 \\ 213 \end{bmatrix} + \binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{0}\begin{bmatrix} 11 \\ 102 \end{bmatrix}.$$

Applicando la (19) si trova:

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 324 \end{bmatrix} = \text{ventidue};\quad \begin{bmatrix} 22 \\ 213 \end{bmatrix} = \text{otto};\quad \begin{bmatrix} 30 \\ 102 \end{bmatrix} = \text{tre}$$
$$\begin{bmatrix} 03 \\ 213 \end{bmatrix} = \text{tre};\quad \begin{bmatrix} 11 \\ 102 \end{bmatrix} = \text{uno}$$

pertanto:

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 1\,.\,22 + 4\,.\,8 + 1\,.\,3 + 2\,.\,3 + 1\,.\,2 = \text{sessantacinque}.$$

Abbiamo testè imparato ad esprimere il simbolo $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ mediante simboli del tipo $\begin{bmatrix} \lambda_1\,\lambda_2 \\ \rho_1\,\rho_2\,\rho_3 \end{bmatrix}$. Procediamo ora alla ricerca di un'altra espressione dello stesso simbolo. Dividiamo le r_1, r_2, r_3, r_4 in due gruppi: il 1° contenga due qualunque di esse ad es. le r_1, r_2; il 2° le due rimanenti, cioè le r_3, r_4. Consideriamo le due matrici

$$\mu_1 \equiv \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \end{Vmatrix}$$
$$\mu_2 \equiv \begin{Vmatrix} a_{31}\, a_{32} \dots a_{3n} \\ a_{41}\, a_{42} \dots a_{4n} \end{Vmatrix}$$

(*) Scriviamo $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ invece di $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & 4_{(0)} \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

ed assumiamo quali coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 2 di μ_1 i numeri r_1, r_2, e quali coefficienti della dimensione $\rightarrow n$, n interi positivi anche nulli $h_1, \dots h_n$, tali che: $h_i \leq 2$; $h_i \leq v_i$; $h_i \geq v_i - 2$; $\Sigma h = r_1 + r_2$ e tali inoltre che, dicendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ il numero di quelli rispettivamente uguali ad 1 e 2 ed η_1, η_2 il numero di quelle fra le differenze $v_1 - h_1$, $v_2 - h_2, \dots v_n - h_n$ che sono rispettivamente uguali ad 1 e 2, sia: $\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$; $\eta_2 \leq r_3, r_4$. Al solito supponiamo che tra le v ve ne siano p_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ uguali ad j. Sarà $\Sigma p = n$. Assumiamo quali coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 2 della matrice μ_2 i numeri r_3, r_4, e quali coefficienti della dimensione $\rightarrow n$ i numeri $v_1 - h_1$, $v_2 - h_2, \dots v_n - h_n$. Essendo $\Sigma v = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ e $\Sigma h = r_1 + r_2$ sarà $\Sigma(v - h) = r_3 + r_4$. Consideriamo la matrice

$$\mu \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} \, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \, a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} \, a_{32} \dots a_{3n} \\ a_{41} \, a_{42} \dots a_{4n} \end{Vmatrix}$$

È chiaro che associando gli elementi di una combinazione relativa alla μ_1 con quelli di una relativa alla μ_2, si ha una combinazione relativa alla matrice μ, quando si assumano quali coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 4 di essa i numeri r_1, r_2, r_3, r_4 e quali coefficienti della dimensione $\rightarrow n$ i numeri $v_1, \dots v_n$. Si ha pertanto

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} & 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} & 2_{(\eta_2)} \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} \tag{21}$$

intendendo il segno Σ esteso a tutti i sistemi di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ai sistemi corrispondenti delle η_1, η_2 (noto un sistema di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, il sistema corrispondente delle η_1, η_2 è perfettamente determinato; i sistemi di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ si possono poi facilmente determinare; basta a tal uopo determinare i sistemi di valori delle $h_1, \dots h_n$ soddisfacenti alle condizioni già enunciate; a ciascun sistema delle h corrisponde un sistema delle ε) (*). Uno stesso termine $\begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} & 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} & 2_{(\eta_2)} \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ comparirà in generale più di una volta, per es. $\lambda_{\varepsilon_1, \varepsilon_2; \eta_1, \eta_2}$ volte, dimodochè la (21) si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \lambda_{\varepsilon_1, \varepsilon_2; \eta_1, \eta_2} \begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} & 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} & 2_{(\eta_2)} \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} \tag{21'}$$

intendendo il segno Σ esteso a tutti i gruppi delle coppie $(\varepsilon_1 \, \varepsilon_2)$, $(\eta_1 \, \eta_2)$ differenti per la coppia $(\varepsilon_1 \, \varepsilon_2)$ oppure per la coppia $\eta_1 \, \eta_2$. Si noti poi

(*) Gioverà pure notare, come mostreremo tra breve con un esempio, che a sistemi differenti di valori delle h può corrispondere lo stesso sistema di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ o sistemi differenti di valori delle η_1, η_2.

che formati i sistemi di valori delle $h_1 \dots h_n$ se ne deducono i sistemi di valori delle $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ed i corrispondenti delle $\eta_1 \eta_2$; non vi è perciò difficoltà alcuna nel determinare per ogni gruppo $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $(\eta_1 \eta_2)$, il numero $\lambda_{\varepsilon_1 \varepsilon_2, \eta_1 \eta_2}$ corrispondente, che rappresenta quante volte esso gruppo trovasi ripetuto nella totalità dei gruppi.

Esempio. — Si vuol calcolare il valore del simbolo $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & 4_{(0)} \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, che scriveremo anche $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Tal valore, come si è visto precedentemente, è sessantacinque. Esso è anche il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{15} \\ \vdots & & \\ a_{41} & \dots\dots & a_{45} \end{Vmatrix}$$

assumendo quali coefficienti della dimensione $\rightarrow$ 5 i numeri $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$, $v_4 = 3$, $v_5 = 3$, e quali coefficienti della dimensione $\downarrow$ 4; numeri $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$. Si ha relativamente al suddetto simbolo: $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$, $p_4 = 0$; $\Sigma p = 5$: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$. I valori delle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, devono soddisfare alle condizioni: $h_i \leq 2$, $\Sigma h = 5$, $h_1 \leq 1$, $h_2 \leq 2$, $h_3 \leq 2$, $h_4 \leq 3$, $h_5 \leq 3$; dovendo poi essere $h_i \geq v_i - 2$, i minimi valori di h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 sono rispettivamente $0, 0, 0, 1, 1$, e pertanto dev'essere: $2 \geq h_1 \geq 0$, $2 \geq h_2 \geq 0$, $2 \geq h_3 \geq 0$; $2 \geq h_4 \geq 1$; $2 \geq h_5 \geq 1$.

I possibili sistemi di valori delle $h_1, \dots h_5$ soddisfacenti alle suddette condizioni si ottengono facilmente colle seguenti considerazioni. Si deve avere $\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$; $\varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 = r_1 + r_2 = 5$. Formiamo adunque i sistemi di valori positivi interi, anche nulli, delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; tali che:

$\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 5.$ $\qquad\qquad$ Essi sono:

ε_1	ε_2
1	2
3	1
5	0

Consideriamo il 1°; esso contiene i numeri 1 e 2. Ne segue che i sistemi di valori delle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, al quale esso corrisponde, comprendono un numero uguale ad uno, due numeri uguali a due, ed i rimanenti numeri uguali a zero.

Non potendo h_4 ed h_5 essere zero, si avranno per h_4 ed h_5 i seguenti sistemi di valori: $h_4 = 1, h_5 = 2$; $h_4 = 2, h_5 = 1$; $h_4 = 2, h_5 = 2$. Consideriamo i tre numeri $1, 2, 2$. In corrispondenza al sistema di valori $h_4 = 1, h_5 = 2$, rimane di essi il 2, che può essere valore di h_2 ed h_3 ma non di h_1; idem per il sistema $h_4 = 2, h_5 = 1$; invece in corrispondenza al sistema $h_4=2, h_5=2$, dei numeri 1, 2, 2 rimane l'1, che può essere valore di h_1, h_2, h_3.

Pertanto i sistemi di valori delle h corrispondenti al sistema di valori $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=2$, sono:

	$h_1 \leq 1$,	$h_2 \leq 2$,	$h_3 \leq 2$,	$h_4 \leq 2$,	$h_5 \leq 2$	
1°	0	0	2	1	2	$\varepsilon_1=1;\ \varepsilon_2=2$
2°	0	2	0	1	2	
3°	0	0	2	2	1	
4°	0	2	0	2	1	
5°	0	0	1	2	2	
6°	0	1	0	2	2	
7°	1	0	0	2	2	

Consideriamo il 2° sistema di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; $\varepsilon_1=3, \varepsilon_2=1$.

I sistemi di valori delle h ai quali esso corrisponde comprendono adunque tre numeri uguali ad 1, un numero uguale a 2, ed i rimanenti uguali a zero. I valori possibili di h_4 ed h_5 sono adunque: $h_4=1, h_5=1$; $h_4=1, h_5=2$; $h_4=2, h_5=1$.

Si considerino i numeri 1, 1, 1, 2. Se $h_4=1, h_5=1$, restano a distribuirsi i numeri 1, 2, e di questi il 2 può essere valore soltanto di h_2 ed h_3; se $h_4=1, h_5=2$ restano a distribuirsi i numeri 1, 1 che possono essere valori di due qualunque delle h_1, h_2, h_3; id. id. se $h_4=2, h_5=1$. Adunque i sistemi di valori delle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, corrispondenti al sistema $\varepsilon_1=3, \varepsilon_2=1$, sono:

	$h_1 \leq 1$,	$h_2 \leq 2$,	$h_3 \leq 2$,	$h_4 \leq 2$,	$h_5 \leq 2$	
8°	0	1	2	1	1	$\varepsilon_1=3;\ \varepsilon_2=1.$
9°	1	0	2	1	1	
10°	0	2	1	1	1	
11°	1	2	0	1	1	
12°	0	1	1	1	2	
13°	1	0	1	1	2	
14°	1	1	0	1	2	
15°	0	1	1	2	1	
16°	1	0	1	2	1	
17°	1	1	0	2	1	

Al sistema di valori $\varepsilon_1=5, \varepsilon_2=0$ corrisponde, com'è facile constatare, un solo sistema di valori delle h, che è il seguente:

18°	1	1	1	1	1	$\varepsilon_1=5;\ \varepsilon_2=0.$

Sono adunque 18 i sistemi di valori delle $h_1, \ldots h_5$.

I sistemi corrispondenti di valori delle $v_1-h_1, v_2-h_2, v_3-h_3, v_4-h_4, v_5-h_5$ ossia $1-h_1, 2-h_2, 2-h_3, 3-h_4, 3-h_5$ sono:

	$1-h_1$,	$2-h_2$,	$2-h_3$,	$3-h_4$,	$3-h_5$	η_1	η_2
1°	1	2	0	2	1	2	2
2°	1	0	2	2	1	2	2
3°	1	2	0	1	2	2	2
4°	1	0	2	1	2	2	2
5°	1	2	1	1	2	2	2
6°	1	1	2	1	1	4	1
7°	0	2	2	1	1	4	1
8°	1	1	0	2	2	2	2
9°	0	2	0	2	2	2	2
10°	1	0	1	2	2	0	3
11°	0	0	2	2	2	2	2
12°	1	1	1	2	2	0	3
13°	0	2	1	2	1	4	1
14°	0	1	2	2	1	2	2
15°	1	1	1	1	1	2	2
16°	0	2	1	1	2	4	1
17°	0	1	2	1	2	2	2
18°	0	1	1	2	2	2	2

Per ciascun sistema abbiamo anche scritta la coppia corrispondente di valori delle η_1, η_2 (η_1 indica quanti numeri del sistema sono uguali ad 1, ed η_2 quanti sono uguali a 2).

Le coppie corrispondenti (i^{ma} ed i^{ma}), $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; η_1, η_2 sono:

1ª . . . 7ma $\Big\{ \overset{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(12)}\overset{\eta_1\eta_2}{(22)}$; (12) (22); (12) (22); (12) (22); (12) (41); (12) (41); (12) (22)

8ª . . 17ma $\Big\{$ (31) (22); (31) (03); (31) (22); (31) (03); (31) (41); (31) (22); (31) (22); (31) (41); (31) (22); (31) (22);

18ª $\{$ (50) (22)

Le coppie differenti sono:

(12) (22)	presa	5	volte,	vale a dire	$\lambda_{12,22}=5$
(12) (41)	"	2		"	$\lambda_{12,41}=2$
(31) (22)	"	6		"	$\lambda_{31,22}=6$
(31) (03)	"	2		"	$\lambda_{31,03}=2$
(31) (41)	"	2		"	$\lambda_{31,41}=2$
(50) (22)	"	1		"	$\lambda_{50,22}=1$

Per ciascuna coppia dev'essere $\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$; $\eta_2 \leq r_3, r_4$ ossia $\varepsilon_2 \leq 2, 3$; $\eta_2 \leq 2, 4$. La coppia (31) (03) non soddisfa a tali condizioni, perciò non *dobbiamo tenerne alcun conto*. Facendo la somma dei prodotti

$$\lambda_{\varepsilon_1\varepsilon_2,\,\eta_1\eta_2}\begin{bmatrix}1_{(\varepsilon_1)}\,2_{(\varepsilon_2)}\\ r_1\quad r_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1_{(\eta_1)}\,2_{(\eta_2)}\\ r_3\quad r_4\end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{bmatrix}1_{(1)}2_{(2)}3_{(2)}\\ 2\ 3\ 2\ 4\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1_{(1)}2_{(2)}\\ 2\ \ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1_{(2)}2_{(2)}\\ 2\ \ 4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1_{(1)}2_{(2)}\\ 2\ \ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1_{(4)}2_{(1)}\\ 2\ \ 4\end{bmatrix}+$$
$$+6\begin{bmatrix}1_{(3)}2_{(1)}\\ 2\ \ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1_{(2)}2_{(2)}\\ 2\ \ 4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1_{(3)}2_{(1)}\\ 2\ \ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1_{(4)}2_{(1)}\\ 2\ \ 4\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1_{(5)}2_{(0)}\\ 2\ \ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1_{(2)}2_{(2)}\\ 2\ \ 4\end{bmatrix}.$$

Ora applicando le formole dimostrate trattando il caso $m=2$, si ha:

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)}\,2_{(2)} \\ 2\;3 \end{bmatrix}=1;\ \begin{bmatrix} 1_{(2)}\,2_{(2)} \\ 2\;4 \end{bmatrix}=2;\ \begin{bmatrix} 1_{(4)}\,2_{(1)} \\ 2\;4 \end{bmatrix}=4;$$

$$\begin{bmatrix} 1_{(3)}\,2_{(1)} \\ 2\;3 \end{bmatrix}=3\ \begin{bmatrix} 1_{(1)}\,2_{(2)} \\ 2\;4 \end{bmatrix}=1\ \begin{bmatrix} 1_{(5)}\,2_{(0)} \\ 2\;3 \end{bmatrix}=10.$$

E pertanto:

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)}\,2_{(2)}\,3_{(2)} \\ 2\;3\;2\;4 \end{bmatrix}=5.1.1+2.1.4+6.3.1+2.3.4+1.10.1=$$
$$=5+8+18+24+10=\text{sessantacinque}.$$

Abbiamo detto di non tener conto della coppia (3 1) (0 3), non essendo verificate per essa le condizioni $\varepsilon_2 \leqq r_1, r_2;\ \eta_2 \leqq r_3, r_4$. Se ne avessimo tenuto conto il prodotto ad essa corrispondente sarebbe stato $2.\begin{bmatrix} 1_{(3)}\,2_{(1)} \\ 2\;3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(3)} \\ 2\;4 \end{bmatrix}$.

Ora si ha:

$$\begin{bmatrix} 1_{(3)}\,2_{(1)} \\ 2\;3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_{(3)} \\ 1\;2 \end{bmatrix}=3;\ \begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(3)} \\ 2\;4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(0)} \\ -1,1 \end{bmatrix}$$

dimodochè basta ritenere, come abbiamo osservato a suo tempo $\begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(0)} \\ -1,1 \end{bmatrix}=0$ per non alterare i resultati, anche tenendo conto della coppia (3 1), (0 3). Ritenendo adunque uguali a zero i simboli $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ nei quali vi sono delle r negative, le condizioni $\varepsilon_2 \leqq r_1, r_2;\ \eta_2 \leqq r_3, r_4$ si possono trascurare.

Evidentemente questo secondo metodo per calcolare il valore di $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)}\,2_{(p_2)}\,3_{(p_3)}\,4_{(p_4)} \\ r_1\;\;r_2\;\;r_3\;\;r_4 \end{bmatrix}$ non è meno semplice del 1°.

Formazione delle combinazioni relative ad una matrice qualunque. — Passiamo ora a trattare il caso generale. Relativamente alla formazione delle combinazioni che si riferiscono ad una matrice di dimensione $\rightarrow n$ e $\downarrow 2, 3, 4$ abbiamo definite le operazioni corrispondenti O_2, O_3, O_4. Trattandosi delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ e $\downarrow 5, 6, \ldots$ si potrebbero definire altre operazioni corrispondenti O_5, $O_6 \ldots$ la cui descrizione, dopo gli esempi addotti, non offre difficoltà.

Consideriamo la O_{m-1}, ossia l'operazione colla quale dalla seconda permutazione di una combinazione relativa ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ ad $\downarrow m-1$, si possono dedurre le seconde permutazioni delle combinazioni rimanenti. Diremo che esse sono il risultato della O_{m-1} eseguita sulla suddetta permutazione, ed essendo $|A_1|A_2|\ldots|A_{m-1}|A_m|$ una permutazione di m gruppi, diremo risultato della O_{m-1} eseguita su di essa, il complesso delle permutazioni formate scrivendo il gruppo

$| A_m |$ a destra delle permutazioni che si ottengono eseguendo la O_{m-1} sulla $| A_1 | A_2 | \dots | A_{m-1} |$. E ciò anche se gli elementi diversi della $| A_1 | \dots | A_m |$ non sono numeri interi consecutivi.

Sia ora la matrice:

$$T \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

di dimensioni $\longrightarrow n$ coi coefficienti $r_1, \dots r_n$, ed $\updownarrow m$ coi coefficienti $r_1, \dots r_m$. Diciamo O_m l'operazione colla quale dalla seconda permutazione di una combinazione relativa a tal matrice si possono dedurre le seconde permutazioni delle combinazioni rimanenti. La descrizione della O_m è la seguente. 1°. Si considerano gli elementi diversi della permutazione sulla quale si deve eseguire la O_m e si formano quelle delle combinazioni r_m ad r_m di essi (r_m è il numero degli elementi dell'ultimo gruppo) che contengono gli elementi comuni a tutti i gruppi; se poi non vi sono elementi comuni a tutti i gruppi, si formano tutte le combinazioni r_m ad r_m degli elementi differenti della suddetta permutazione. 2°. Si eseguisce su essa l'operazione O_{m-1}. 3°. In una delle permutazioni già formate si scambia un elemento dell'ultimo gruppo con uno dei gruppi rimanenti in modo da ottenere una permutazione nella quale l'ultimo gruppo sia una delle suddette permutazioni r_m^{arie}, diversa però da quelle che compaiono, quali ultimo gruppo, nelle permutazioni già formate. 4°. Si eseguisce la O_{m-1} sulla permutazione ottenuta ecc... e così si continua, finchè non si è potuto accertare che mediante uno scambio da eseguirsi tra un elemento del 4° gruppo di una delle permutazioni già formate ed uno dei gruppi rimanenti, è impossibile ottenere una permutazione, nella quale il 4° gruppo sia una delle combinazioni r_m^{arie} suddette, diversa da quelle che già hanno figurato quale 4° gruppo in una delle permutazioni formate.

Se interessa determinare il segno di ciascuna permutazione, che è anche quello della combinazione corrispondente, basterà rammentare che esso è quello di $(-1)^\beta$, β essendo il numero delle inversioni che gli elementi di ciascun gruppo fanno con quelli dei gruppi che esso ha a destra. Il segno della 1ª permutazione si determinerà calcolando direttamente il numero delle inversioni in essa contenute. Il segno delle permutazioni rimanenti si potrà determinare ricorrendo ai criteri già enunciati, giacchè ciascuna di esse si deduce da una permutazione di segno noto, (la 2ª dalla 1ª, la 3ª dalla 1ª o dalla 2ª ecc.), mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi differenti. E sarà conveniente per determinare il segno con maggiore rapidità che tali gruppi siano possibilmente contigui.

Alba, luglio 1902.

(continua) Dott. Niccolò Traverso.

UN PROBLEMA SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

1. Un metodo generale per la enumerazione delle soluzioni intere non negative di una equazione lineare indeterminata

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \lambda.$$

a coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_n, \lambda$ interi non negativi, è indicato da Eulero: (*) Il numero delle soluzioni della detta specie è dato dal coefficiente di v^r nello sviluppo in serie della funzione di v:

$$\frac{1}{1-v^{a_1}} \frac{1}{1-v^{a_2}} \cdots \frac{1}{1-v^{a_n}}.$$

In particolare si riconosce subito che la equazione

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda \tag{1}$$

ammette tante soluzioni intere non negative quante sono le unità dell'n^{mo} numero figurato d'ordine λ, ossia

$$\binom{n+\lambda-1}{\lambda}.$$

Se non che la enumerazione medesima, anche nel caso particolare (1), offre qualche difficoltà se si assoggettano i numeri interi x_i alle condizioni

$$x_i \leqq i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n). \tag{2}$$

Del caso generale si sono occupati abbastanza specialmente gli inglesi Sylvester, Cayley, Mac-Mahon ed altri. Sembra però che il caso particolare accennato sotto le condizioni (2) non sia stato finora considerato, e siccome la conoscenza della sua soluzione torna utile in qualche applicazione, io mi propongo di trattarlo in questa nota.

2. Indichiamo con A_λ il numero delle soluzioni intere non negative della (1) soddisfacenti alle condizioni (2). Evidentemente A_λ è il coefficiente di v^λ nello sviluppo del prodotto

$$(1+v)(1+v+v^2)(1+v+v^2+v^3)\ldots(1+v+v^2+\ldots+v^n),$$

e si può porre

$$(1+v)(1+v+v^2)(1+v+v^2+v^3)(1+v+v^2+\ldots+v^n) = \sum_{r=0}^{r=N} A_r v^r, \tag{3}$$

(*) V. A. Le Besgue, *Exercices d'Analyse numerique*. Leiber et Faraguet, Paris, 1859.

con

$$N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La difficoltà accennata sta precisamente nello investigare la legge di formazione dei coefficienti del polinomio $\Sigma A_r v^r$, perchè il procedimento diretto della moltiplicazione non si presta a fornirla. Riuscendo invece con altri processi alla determinazione dei coefficienti A_r si perviene indirettamente alla esecuzione del prodotto (3).

3. Fin da ora si possono riconoscere alcune proprietà dei numeri interi A_r.

Dapprima si operi la sostituzione $v' = \frac{1}{v}$ nella identità (3) e poscia si moltiplichino i due membri per v^N; si ottiene

$$\Sigma A_r v^{N-r} = \Sigma A_r v^r,$$

da cui segue

$$A_r = A_{N-r}.$$

In particolare è

$$A_0 = A_N = 1.$$

Dunque: *La equazione* (1) *ha tante soluzioni intere non negative soddisfacenti alle condizioni* (2), *quante ne ha l'altra*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N - \lambda$$

della medesima specie.

In secondo luogo facendo $v = 1$ nella (3), risulta

$$\sum_{r=0}^{r=N} A_r = \underline{|n+1},$$

da cui, osservando che le condizioni (2) portano alla limitazione $0 \leq \lambda \leq N$, si conclude che: *Le equazioni* (1) *ammettono tutte insieme soltanto* $\underline{|n+1}$ *soluzioni intere non negative soddisfacenti alle condizioni* (2).

L'ultima relazione insieme con quelle precedenti permette di calcolare la somma $\sum_{r=0}^{r=N} rA_r$. Invero per mezzo della eguaglianza $A_r = A_{N-r}$, si ha

$$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{2} \Sigma \sum_{r=0}^{r=N} A_r \; N$$

e quindi

$$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{4} \underline{|n+1}\, n(n+1)$$

che riceverà una notevole interpretazione.

4. Veniamo ora alla determinazione dei coefficienti A_r. Si metta la (3) sotto la forma

$$(1-v)(1-v^2)(1-v^3)\ldots(1-v^{n+1}) = (1-v)^{n+1} \sum_{r=0}^{r=N} A_r v^r,$$

e si derivino logaritmicamente i due membri, tenendo presenti gli sviluppi in serie

$$\frac{d}{dv}\log(1-v^k) = -\sum_{r=1}^{r=\infty} kv^{kr-1}, \quad (k=1,2,\ldots,n+1)$$

assolutamente convergenti per $|v|<1$; si ottiene l'altra identità

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} v^{r-1} + 2\sum_{r_1=1}^{r_1=\infty} v^{2r_1-1} + 3\sum_{r_2=1}^{r_2=\infty} v^{3r_2-1} + \ldots + (n+1)\sum_{r_n=1}^{r_n=\infty} v^{(n+1)r_n-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{r=1}^{r=\infty} v^{r-1} - \frac{\sum_0^N rA_r v^{r-1}}{\sum_0^N A_r v^r}.$$

Ordiniamo il primo membro rispetto alle potenze crescenti di v: I coefficienti k dei termini simili a v^{r-1} soddisfanno alla condizione $kr_{k-1}-1=r-1$, ossia $kr_{k-1}=r$, e sono, perciò, divisori di r non superiori ad $n+1$. Reciprocamente: Ogni divisore k di r non superiore ad $n+1$, è coefficiente di un termine simile a v^{r-1}, perchè, se è $km=r$, con m intero e positivo e $k\leqq n+1$, quando la successione r_{k-1} assume il valore $r_{k-1}=m$ si ha $kr_{k-1}-1=r-1$. Pertanto il coefficiente di v^{r-1} nel primo membro è la somma $s(r)$ di tutti i divisori di r non superiori ad $n+1$, e la eguaglianza precedente, isolando la frazione del secondo membro, si può scrivere così:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\left\{n+1-s(r)\right\}.v^{r-1} = \frac{\sum_0^N rA_r v^{r-1}}{\sum_0^N A_r v^r}.$$

Da qui si ottiene una relazione ricorrente nella A, moltiplicando i due membri per $\sum_0^N A_r v^r$ e identificando poi i coefficienti di v^{r-1}:

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i C_{r-i-1} = rA_r \quad , \quad \text{se è } r\leqq N \tag{4}$$

e

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i C_{r-i-1} = 0 \quad , \quad \text{se è } r > N, \tag{5}$$

dove si è posto

$$n+1-s(i+1) = C_i.$$

Ora, come si è notato, il numero intero λ deve verificare la condizione (4) per effetto delle (2), onde osservando che è $A_0=1$, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
-\lambda A_\lambda + C_0A_{\lambda-1} + C_1A_{\lambda-2} + \ldots + C_{\lambda-2}A_1 &= -C_{\lambda-1}\\
-(\lambda-1)A_{\lambda-1} + C_0A_{\lambda-2} + \ldots + C_{\lambda-3}A_1 &= -C_{\lambda-2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
-1A_1 &= -C_0.
\end{aligned}$$

Queste relazioni considerate come λ equazioni lineari nelle λ incognite A_λ, $A_{\lambda-1}, .. A_1$, col determinante $(-1)^\lambda \underline{|\lambda} \neq 0$, risolute rispetto ad A_λ, forniscono:

$$A_\lambda = \frac{1}{\underline{|\lambda}} \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_{\lambda-2} & C_{\lambda-1} \\ -(\lambda-1) & C_0 & C_1 & \ldots & C_{\lambda-3} & C_{\lambda-2} \\ 0 & -(\lambda-3) & C_0 & \ldots & C_{\lambda-4} & C_{\lambda-3} \\ 0 & 0 & -(\lambda-2). & \ldots & C_{\lambda-5} & C_{\lambda-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & . & -1 & C_0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Così in particolare, escludendo

$$A_0 = A_N = 1,$$

si trovano

$$A_1 = A_{N-1} = n$$

$$A_2 = A_{N-2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$A_3 = A_{N-3} = \frac{(n+3)(n^2-2)-2n}{6}$$

$$A_4 = A_{N-4} = \frac{6(n-6)+6n(n-3)+3(n-1)(n^2-4)+n(n+3)(n^2-2)-2n^2}{24}$$

. . . .

. . . .

5. Conosciuti i valori di

$$A_0, A_1, \ldots A_N$$

corrispondenti ad n, quelli corrispondenti ad $n+1$, se ne deducono facilmente. Il modo, rivelato anche dalla identità (3), può essere dimostrato con la induzione nella maniera seguente:

Si indichino con $A_i^{(n)}$ e $C_i^{(n)}$ i valori di A_i e C_i corrispondenti ad n e si supponga vera la eguaglianza

$$A_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i}^{(n)} \; (*)$$

sino ad un intero determinato j della successione

$$1, 2, \ldots, \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

dopo avere osservato la sua validità per $j=0$, riducendosi ad $A_0^{(n+1)} = A_0^{(n)} = 1$. Basta far vedere che essa permane valida mutandovi j in $j+1 \overline{\gtrless} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Si muti n in $n+1$ nella (4) applicata per

$$r = j+1 \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

(*) A secondo membro bisogna porre $A_{j-i}^{(n)} = 0$, quando è $j < i$, oppure $j - i > \frac{n(n+1)}{2}$.

si avrà

$$(j+1)\, A_{j+1}^{(n+1)} = C_0^{(n+1)} A_j^{(n+1)} + C_1^{(n+1)} A_{j-1}^{(n+1)} + \ldots + C_j^{(n+1)} A_0^{(n+1)}.$$

Si tenga conto della supposizione fatta, e poi si osservi, quanto alle $C_i^{(n+1)}$, che secondochè l'indice i, aumentato di 1, è multiplo, o no, di $n+2$, si ha

$$C_i^{(n+1)} = C_i^{(n)} - n - 1,$$

oppure

$$C_i^{(n+1)} = C_i^{(n)} + 1;$$

di modo che si ha:

$$\begin{aligned}
(j+1)A_{j+1}^{(n+1)} = {} & (C_0^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i}^{(n)} + (C_1^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i-1}^{(n)} + \ldots + \\
& \qquad + (C_n^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i-n}^{(n)} \\
& + (C_{n+1}^{(n)} - n - 1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i-n-1}^{(n)} + (C_{n+2}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i-n-2}^{(n)} + \ldots + \\
& \qquad + (C_{2(n+2)-2}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i-2(n+2)+2}^{(n)} \\
& + (C_{2(n+2)-1}^{(n)} - n - 1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i-2(n+2)+1}^{(n)} + \ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (C_{j-n-2}^{(n)}+1) & \sum_{i=0}^{i=n+1} A_{n+2-i}^{(n)} + (C_{j-n-1}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1} A_{n+1-i}^{(n)} + \ldots + (C_j^{(n)}+1)A_0^{(n)},
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
(j+1)\, A_{j-1}^{(n+1)} = {} & (C_0^{(n)} A_j^{(n)} + C_1^{(n)} A_{j-1}^{(n)} + \ldots + C_j^{(n)} A_0^{(n)}) \\
& + (C_0^{(n)} A_{j-1}^{(n)} + C_1^{(n)} A_{j-2}^{(n)} + \ldots + C_{j-1}^{(n)} A_0^{(n)}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (C_0^{(n)} A_{j-n-1}^{(n)} + C_1^{(n)} A_{j-n-2}^{(n)} + \ldots + C_{j-n-1}^{(n)} A_0^{(n)}) \\
& + (n+2)\,(A_0^{(n)} + A_1^{(n)} + \ldots + A_{j-n-1}^{(n)}) \\
& + (n+1)\, A_{j-n}^{(n)} + nA_{j-n+1}^{(n)} + \ldots + 2A_{j-1}^{(n)} + A_j^{(n)} \\
& - (n+2)\,(A_0^{(n)} + A_1^{(n)} + \ldots + A_{j-n-1}^{(n)}).
\end{aligned}$$

Tenendo conto delle stesse relazioni (4) e semplificando risulta

$$A_{j+1}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j+1-i}^{(n)},$$

che è la (7), dove si muti j in $j+1$. Essa è dunque valida per tutti i valori di

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1, \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Segue, per mezzo della (7), che i numeri

$$A_0^{(n+1)}, A_1^{(n+1)}, A_2^{(n+1)}, \ldots, A_{n+1}^{(n+1)}, A_{n+2}^{(n+1)}, \ldots, A_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}^{(n+1)}$$

possono essere ottenuti sommando in colonna gli elementi del quadro

$$\begin{array}{l}
A_0^{(n)},\ A_1^{(n)},\ A_2^{(n)} \ldots A_{n+1}^{(n)},\ A_{n+2}^{(n)} \ldots A_N^{(n)} \\
\qquad A_0^{(n)},\ A_1^{(n)} \ldots A_n^{(n)},\ A_{n+1}^{(n)} \ldots A_{N-1}^{(n)},\quad A_N^{(n)} \\
\qquad\qquad A_0^{(n)} \ldots A_{n-1}^{(n)},\ A_n^{(n)} \ldots A_{N-2}^{(n)},\quad A_{N-1}^{(n)},\ A_N^{(n)} \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad A_0^{(n)},\ A_1^{(n)} \ldots A_{N-n-1}^{(n)},\ A_{N-n}^{(n)},\ A_{N-n-1}^{(n)} \ldots A_N^{(n)},
\end{array}$$

costituito da $n+2$ righe.

In questo modo, partendo da

$$A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = 1,$$

si calcolano

$$A_0^{(2)},\ A_1^{(2)},\ A_2^{(2)},\ A_3^{(2)}$$

poi

$$A_0^{(3)},\ A_1^{(3)},\ A_2^{(3)},\ A_3^{(3)},\ A_4^{(3)},\ A_5^{(3)},\ A_6^{(3)},$$

e così di seguito.

Il calcolo può disporsi come segue:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & & & \\
 & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & \\
 & & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & \\
 & & & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 9 & 15 & 20 & 22 & 20 & 15 & 9 & 4 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

6. Per $r = N + 1$ le (5) portano ad un'altra proprietà dei coefficienti A, dove interviene esplicitamente la funzione numerica $s(r)$.

In vero con tale ipotesi si ottiene

$$\sum_{i=0}^{i=N} A_i \{n + 1 - s(N - i + 1)\} = 0.$$

da cui

$$(n+1) \sum_{i=0}^{i=N} A_i = \sum_{i=0}^{i=N} A_i s(N - i + 1),$$

ossia (N. 3):

$$\sum_{i=0}^{i=N} A_i s(N - i + 1) = (n + 1)\, \underline{|n + 1}.$$

7. L'applicazione cui alludevamo a principio riguarda la ricerca del numero delle permutazioni di $n+1$ elementi le quali presentino rispetto ad una di esse un dato numero λ di inversioni. (*)

Se $1, 2, \ldots n+1$ è la permutazione principale degli indici degli elementi considerati,

$$i_1, i_2, \ldots i_{n+1}$$

la permutazione che presenta λ inversioni, ed x_r il numero delle inversioni che i_{r+1} forma con gli indici che lo precedono, deve essere

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda$$

con

$$x_i \leqq i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

E la questione essendo subito ricondotta alla ricerca del numero delle soluzioni della equazione (1) in numeri interi non negativi, soddisfacenti alle condizioni (2), è risoluta dalla formola (6).

La formola $A_\lambda = A_{N-\lambda}$, l'altra dimostrata in fine al N. 3 e quella del N. 5, ricevono rispettivamente le seguenti interpretazioni.

Tra le permutazioni di $n+1$ *elementi ne esistono tante con un numero* λ *di inversioni, quante ne esistono con* $\frac{n(n+1)}{2} - \lambda$ *inversioni.* (**)

Il numero totale delle inversioni presentate dalle permutazioni di $n+1$ *elementi è* $\frac{1}{4} \underline{|n+1} \, n(n+1)$. (**)

Tra le permutazioni di $n+1$ *elementi, ne esistono tante con un numero* $\lambda \leqq n+1$ *di inversioni, quante ne esistono complessivamente tra le permutazioni di* n *elementi, che ammettono* $0, 1, 2, \ldots, \lambda$ *inversioni.*

Tra le permutazioni di $n+1$ *elementi, ne esistono tante con un numero* $\lambda > n+1$ *di inversioni, quante ne esistono complessivamente tra le permutazioni di* n *elementi che ammettono* $\lambda - (n+1), \lambda - n, \ldots, \lambda - 1, \lambda$ *inversioni.*

8. In ultimo è notevole il seguente teorema di Aritmetica che discende dalla formola (6):

Il determinante d'ordine λ*:*

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_{\lambda-2} & C_{\lambda-1} \\ -(\lambda-1) & C_0 & C_1 & \ldots & C_{\lambda-3} & C_{\lambda-2} \\ 0 & -(\lambda-2) & C_0 & \ldots & C_{\lambda-4} & C_{\lambda-3} \\ 0 & 0 & -(\lambda-3) & \ldots & C_{\lambda-5} & C_{\lambda-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & C_0 \end{vmatrix}$$

con

$$C_i \doteq n + 1 - s(i+1),$$

dove $s(i+1)$ *è la somma di tutti i divisori di* $i+1$ *non superiori ad* $n+1$, *rappresenta un numero intero divisibile per* $\underline{|\lambda}$ *ed il quoziente resta inalterato mutandovi* λ *in* $\frac{n(n+1)}{2} - \lambda$. (***)

G. Mignosi.

(*) Cfr. Capelli. "Lezioni d'Algebra complementare," p. 115.

(**) Cfr. Lucas. "Theorie des nombres," p. 78.

(***) Teoremi analoghi diede E. Fergola nel *Giorn. di Mat. di Battaglini.* (Anno I, 1863).

NUOVE PROPRIETÀ DEI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO

(Saggio di Geometria recente)

Molte riviste scientifiche ed alcune opere di matematica contengono numerose relazioni fra gli elementi lineari ed angolari del triangolo; così per la Geometria classica meritano speciale menzione: *Théorèmes et problèmes*, di Catalan. *Rélations entre les éléments du triangle*, (1893) di H. Vuibert ecc.; (*) per la Geometria recente basterà ricordare le Note pubblicate nei « Nouvelles annales mathématiques élémentaires » di G. De-Lonchamps, nel « Mathesis » ed in altre importanti riviste italiane ed estere specialmente per cura di Lemoine, Brocard, Thiry, Neuberg, Mansion, Cesàro ecc.; e le opere: di A. Poulain, *Principes de la nouvelle géométrie du triangle*; di Casey John, *A sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*; del D.r A. Emmerich, *Die Brocardschen Gebilde*; di C. Alasia, *La recente geometria del triangolo*, e molte altre.

Colla presente Nota crediamo di portare un modesto contributo alla *Geometria recente* proponendoci lo studio della seguente questione:

« Trovare le *coordinate angolari* (α, β, γ), e le *coordinate ceviane* (x, y, z) « dei *punti notevoli* del triangolo, (**) ed esprimere per ciascuno di essi « i tre *parametri lineari* ai quali abbiamo dato il nome di *valore del* « *segmento fisso* q, dell'*altezza equivalente* h, e della *costante ango-* « *lare* Δ ». (***)

Nella seconda parte risolveremo la medesima questione per i punti posti sui lati del triangolo e sui loro prolungamenti.

(*) L'opera del Vuibert contiene 110 relazioni fra gli elementi lineari, 59 fra gli elementi angolari e 104 fra elementi lineari ed angolari, cioè un totale di 273 relazioni colle rispettive dimostrazioni.

(**) Si dicono *punti notevoli* d'una figura piana quei particolari punti del piano della figura, i quali, quando siano dati, equivalgono ad assegnare due condizioni a cui la figura deve soddisfare; la loro posizione si può esprimere in funzione degli elementi della figura stessa.

(***) Si dicono *ceviane*, in omaggio al nome del matematico milanese Giovanni Ceva (1648-1727), le rette passanti pei vertici del triangolo; il primo che introdusse questa denominazione fu l'abate Poulain (*Journal de mathématiques élémentaires*, 1888, p. 278). Noi abbiamo dato il nome di *coordinate ceviane* ad un nuovo sistema di coordinate goniometriche o trigonometriche (*Un nuovo sistema di coordinate trilineari.* " Le matematiche pure ed applicate ").

Le *coordinate angolari* di un punto P rispetto al triangolo di riferimento ABC non sono altro che gli angoli α, β, γ sotto cui sono visti i lati a, b, c.

La convenzione da noi stabilita è che essi angoli sieno misurati sempre consecutivamente, per cui in alcuni casi sono tutti positivi, cioè nel senso dell'ordine ciclico dei vertici di un triangolo, in alcuni casi tutti e tre negativi; la loro somma sarà: $\pm 2\pi$.

Le *coordinate ceviane* del punto P non sono altro che le sue distanze dai vertici del triangolo di riferimento.

Il *segmento fisso* del punto P è la base d'un triangolo *fondamentale* che ha il vertice in uno di quelli del triang. di rif. p. es. C e per lati le proiezioni dei due lati *invertiti* sulle direzioni degli stessi due lati cioè $a . \operatorname{sen} \beta$ e $b . \operatorname{sen} \alpha$ e per angolo al vertice la *differenza angolare* $(\gamma - C)$.

L'*altezza equivalente* del punto P è l'altezza del triangolo equivalente a quello di riferimento ed avente per base il segmento fisso q.

La *costante angolare* del punto P è il terzo lato d'un triangolo ipotetico avente p. es. il vertice in C e per lati i prodotti $\operatorname{sen} \alpha . \operatorname{sen} (\beta - B)$, $\operatorname{sen} \beta . \operatorname{sen} (\alpha - A)$ e per angolo al vertice quello stesso del triangolo di riferimento.

PARTE PRIMA.

§ 1. **Centro del circolo inscritto I.** — Esso è l'incontro delle tre bisettrici degli angoli del triangolo; nel sistema dell'inversione isogonale corrisponde a sè stesso.

Evidentemente le sue *coordinate angolari* sono:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = \frac{A}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{B}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \gamma = \frac{C}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Dalla considerazione del triangolo IBC si ottiene

$$IC = z = a \frac{\operatorname{sen} \frac{B}{2}}{\operatorname{sen} \alpha} = a \frac{\operatorname{sen} \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

ossia

$$z = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}} = \frac{ab}{p} \cos \frac{C}{2}$$

Analogamente

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} = \frac{bc}{p} \cos \frac{A}{2} \\ y = \sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}} = \frac{ca}{p} \cos \frac{B}{2} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Queste *coordinate ceviane* si possono anche ottenere

$$IC = z = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\Omega}{p \operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}.$$

Il valore del *segmento fisso* q si trova applicando una delle nostre formule generali

$$z = \frac{ab}{q} \operatorname{sen} (\gamma - C) = \frac{ab}{q} \cos \frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Identificando le formule (3) e (2) si ricava

$$q = p \qquad (4)$$

cioè: « *Pel centro del circolo inscritto il valore del segmento fisso è quello del semiperimetro del triangolo* ».

Per facilitare le ricerche sulle proprietà dei punti notevoli del triangolo ricordiamo qui due proprietà sui punti isogonali che abbiamo dimostrato in altro lavoro, (*) e sono: «1°. *Due punti coniugati isogonali hanno lo stesso valore assoluto del segmento fisso* q, dell'altezza equivalente h, e della costante angolore Δ. 2°. Essi due punti hanno pure in valore assoluto le funzioni trig. *seno* e *coseno* delle *coordinate angolari* dell'uno eguali alle omonime delle *differenze angolari* dell'altro e viceversa ».

Il valore dell'*altezza equivalente* è

$$h=\frac{2\Omega}{q}=2r. \tag{5}$$

Il valore dell'altezza equivalente è uguale a quello del diametro del cerchio inscritto.

Il valore della *costante angolare* si deduce dalla relazione

$$\frac{q}{\Delta}=\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

si avrà

$$\Delta=\frac{p}{a}\operatorname{sen} A=\frac{2p\Omega}{abc}=\frac{p}{2R}. \tag{6}$$

Il valore della costante angolare è quello del rapporto del semiperimetro al diametro del circolo circoscritto.

Nel caso particolare del triangolo equilatero si avrà

$$q=\frac{3}{1}a \quad , \quad h=\frac{a}{\sqrt{a}} \quad , \quad \Delta=\frac{3}{2}\sqrt{3}=3 \,.\, \operatorname{sen} 60^\circ.$$

Nel triangolo equilatero il valore del segmento fisso è $\frac{3}{2}$ *del lato;*

" " " *dell'altezza equivalente è il lato diviso per* $\sqrt{3}$;

" " " *della costante angolare è uguale a 3 volte il seno del suo angolo.*

§ 2. **Centro del circolo ex-inscritto I_a.** — È questo il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo A e delle bisettrici dei due angoli esterni in B e C, il circolo è tangente al lato a ed al prolungamento degli altri due lati b, c; nel sistema dell'inversione isogonale corrisponde a sè stesso.

Evidentemente le *coordinate angolari* sono:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\frac{A}{2}+3\,\frac{\pi}{2} \\ \beta=\frac{B}{2} \\ \gamma=\frac{C}{2} \\ \hline \alpha+\beta+\gamma=2\pi \end{array}\right\} \tag{7}$$

(*) G. Delitala, "Alcune proprietà dell'*inversione isogonale*". Revista trimestral de Matematicas di José Rius y Casas n. 76.

Per ottenere le coordinate ceviane si consideri p. es. il triangolo I_aBC, si avrà

$$I_aC = z_a = a\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}}.$$

In modo analogo si otterrà

$$y_a = \sqrt{ca\frac{p-c}{p-a}}.$$

Invece la terza coord. ceviana x_a si ricava dalla considerazione del triangolo I_aCA

$$I_aA = x_a\, b\frac{\cos\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} = \sqrt{bc\frac{p}{p-a}}.$$

Quindi le coord. ceviane del centro I_a si possono riassumere

$$\left.\begin{aligned} x_a &= \sqrt{bc\frac{p}{p-a}} = \frac{bc}{p-a}\cos\frac{A}{2} \\ y_a &= \sqrt{ca\frac{p-c}{p-a}} = \frac{ca}{p-a}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \\ z_a &= \sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}} = \frac{ab}{p-a}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Per gli altri due centri I_b, I_c si ottengono formule analoghe

$$\left.\begin{aligned} x_b &= \sqrt{bc\frac{b-c}{p-b}} = \frac{bc}{p-b}\operatorname{sen}\frac{A}{2} \\ y_b &= \sqrt{ca\frac{p}{p-b}} = \frac{ca}{p-b}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \\ z_b &= \sqrt{ab\frac{p-a}{p-b}} = \frac{ab}{p-b}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} (9) \quad \left.\begin{aligned} x_a &= \sqrt{bc\frac{p-b}{p-c}} = \frac{bc}{p-c}\operatorname{sen}\frac{A}{2} \\ y_c &= \sqrt{ca\frac{p-a}{p-c}} = \frac{ca}{p-c}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \\ z_a &= \sqrt{ab\frac{p}{p-c}} = \frac{ab}{p-c}\cos\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} (10)$$

Pel centro I_a si ottiene il valore del segmento fisso q_a dalla relazione generale

$$z_a = \frac{ab}{q_a}\operatorname{sen}(\gamma - C) = \frac{ab}{q_a}\operatorname{sen}\gamma$$

$$z_a = \sqrt{ab_x\frac{p-b}{p-a}} = \frac{ab}{q_a}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \tag{11}$$

ossia, identificando colla (8) si avrà

$$\text{Analogamente saranno}\ \left.\begin{aligned} q_a &= p-a \\ q_b &= p-b \\ q_c &= p-c \end{aligned}\right\} \Sigma q_a = p = q \Bigg\}. \tag{12}$$

Il valore del segmento fisso del centro del circolo ex-inscritto è uguale alla differenza fra il semiperimetro ed il rispettivo lato di tangenza.

La somma dei tre segmenti fissi è uguale al semiperimetro del triangolo, ossia al segmento fisso del centro del circolo inscritto.

L'*altezza equivalente* h_a si ottiene

$$\left.\begin{array}{ll} & h_a = \frac{2\Omega}{q_a} = \frac{2\Omega}{p-a} = 2r_a \\ \text{Analogamente} & h_b = 2r_b \quad \Sigma h_a = 2(r_a + r_b + r_c) \\ & h_c = 2r_c \end{array}\right\}. \tag{13}$$

Il valore dell'altezza equivalente è uguale al diametro del rispettivo circolo di tangenza ex-inscritto.

La costante angolare si ottiene dalla relazione

$$\left.\begin{array}{ll} & \Delta_a = q_a \frac{\operatorname{sen} A}{a} = 2\frac{(p-a)\Omega}{abc} = \frac{p-a}{2R} \\ \text{Analogamente} & \Delta_b = \frac{p-b}{2R} \qquad \Sigma\Delta_a = \frac{2R}{p} = \Delta \\ & \Delta_c = \frac{p-c}{2R} \end{array}\right\}. \tag{14}$$

Il valore della costante angolare è uguale al rapporto della rispettiva differenza lineare al diametro del circolo circoscritto al triangolo. La somma delle tre costanti angolari è uguale alla costante angolare del cerchio inscritto.

Quindi si dedurranno le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{c} q : q_a : q_b : q_c = \Delta : \Delta_a : \Delta_b : \Delta_c : = p : (p-a) : (p-b) : (p-c) \\ h : h_a : h_b : h_c = r : r_a : r_b : r_c \end{array}\right\} \tag{15}$$

che danno luogo ad altre proprietà dei punti notevoli del triangolo.

Inoltre dalle (2) e (8) si possono dedurre le distanze del centro del circolo inscritto dai centri dei circoli ex-inscritti, esse sono

$$\left.\begin{array}{l} D_a = x_a - x = a\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \\ D_b = y_b - y = b\sqrt{\frac{ca}{p(p-b)}} \\ D_c = z_c - z = c\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \end{array}\right\} \tag{16}$$

Si deduce pure

$$\left.\begin{array}{l} x \,.\, x_a = x_b\, x_c = bc \\ y \,.\, y_a = y_b\, y_c = ca \\ z \,.\, z_a = z_b\, z_c = ab \end{array}\right\} \tag{17}$$

Inoltre si ha

$$x : y : z : = (p-a)\, x_a : (p-b)\, y_b : (p-c)\, z_c \tag{18}$$

ed anche

$$D_a : D_b = \sqrt{\frac{a(p-b)}{b(p-a)}} \tag{19}$$

e le analoghe.

Tutte queste relazioni possono dare luogo ad altrettante proprietà dei punti notevoli considerati facili ad enunciarsi.

Altre relazioni si possono ottenere dalle (16), cioè

$$D^2_a + D^2_b + D^2_c = \frac{4R}{p}(ar_a + br_b + cr_c). \tag{20}$$

E ponendo le distanze dei cerchi ex-inscritti $I_aI_b = E_c$, ecc. si avrà

$$\left.\begin{array}{ll} & E^2_c = D^2_a + D^2_b + 2D_aD_b \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{4R}{r}\times c(p-c) \\ \text{analogamente saranno} & E^2_a = \frac{4R}{r}\times a(p-a) \\ & E^2_b = \frac{4R}{r}\times b(p-b) \\ \text{quindi} & E^2_a + E^2_b + E^2_c = \frac{4R}{r}[2p^2 - (a^2+b^2+c^2)] \end{array}\right\} \tag{21}$$

Nel caso particolare del triangolo equilatero saranno

$$\left.\begin{array}{l} q_a = q_b = q_c = \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}q \\ h_a = h_b = h_c = a\sqrt{3} = \frac{1}{3}h \\ \Delta_a = \Delta_b = \Delta_c = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\Delta \end{array}\right\} \tag{22}$$

che danno tutte luogo ad altrettante proprietà, inoltre si ha che:

I parametri del centro del circolo ex-inscritto al triangolo equilatero sono la terza parte di quelli del circolo inscritto.

§ 3. **Centro del circolo circoscritto O.** — È questo il punto d'incontro delle tre mediatrici del triangolo; esso è il coniugato isogonale dell'ortocentro H, quindi avranno con questo eguali in valore assoluto i tre parametri lineari.

Da una semplice ispezione della figura risulta chiaro che le *coordinate angolari* del centro O, sono

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = 2A \\ \beta = 2B \\ \gamma = 2C \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{array}\right\} \tag{23}$$

Le coordinate ceviane sono eguali al raggio del circolo circoscritto cioè

$$x = y = z = \frac{bc}{q}\operatorname{sen} A = \ldots = R. \tag{24}$$

Da questa si può dedurre il valore del *segmento fisso* q, cioè

$$q = \frac{bc \operatorname{sen} A}{R} = \frac{2\Omega}{R} = \frac{2p \cdot r}{R}. \tag{25}$$

Pel centro del circolo circoscritto O *e per l'ortocentro* H *il valore del segmento fisso è uguale all'area del triangolo divisa per la metà del raggio del circolo circoscritto.*

Perciò sarà

$$h = \frac{2\Omega}{q} = \mathrm{R}. \tag{26}$$

Pel centro del cerchio circoscritto e dell'ortocentro il valore dell'altezza equivalente è eguale al raggio di quel circolo.

Sarà pure

$$\Delta = q\,\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\Omega}{\mathrm{R}^2} = \frac{rp}{\mathrm{R}^2} = \frac{abc}{4\mathrm{R}^2}. \tag{27}$$

Pel centro del cerchio circoscritto e per l'ortocentro il valore della costante angolare è uguale al rapporto dell'area del triangolo pel quadrato del raggio del cerchio circoscritto.

Come applicazione delle suddette formule possiamo trovare l'espressioni delle distanze del centro del cerchio circoscritto O dal centro del circolo inscritto I e dai centri dei circoli ex-inscritti I_a, I_b, I_c che diremo rispettivamente (d, d_a, d_b, d_c). Considerando il triangolo OAI si avrà:

$$d^2 = x^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}x \;\text{sen}\left(\mathrm{C} + \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} - 2r)$$

analogamente

$$\left.\begin{aligned}
d^2_a &= x^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}x_a \;\text{sen}\left(\mathrm{C} + \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2r_a)\\
d^2_b &= y^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}y_b \;\text{sen}\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2r_b)\\
d^2_c &= z_c + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}z_c \;\text{sen}\left(\mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2r_c)\\
\hline
d^2 + d^2_a &+ d^2_b + d^2_c = 12 \times \mathrm{R}^2
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

La prima di queste cinque relazioni rappresenta il noto teorema d'Eulero (*) l'ultima esprime la proprietà:

La somma dei quadrati delle distanze del circolo circoscritto dai centri dei circoli inscritti ed ex-inscritti è uguale a 12 volte il quadrato del circolo circoscritto.

§ 4. **Ortocentro H.** — È questo l'incontro delle altezze del triangolo. Evidentemente le *coordinate angolari* sono

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \pi - \mathrm{A}\\
\beta &= \pi - \mathrm{B}\\
\gamma &= \pi - \mathrm{C}\\
\hline
\Sigma &= 2\pi
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

(*) Esso fu pubblicato per la prima volta nel 1747 (*Nouvelles annales mathématiques*, 1845, p. 397).

Le *coordinate ceviane* sono

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{bc}{q}\operatorname{sen} 2A = 2R\cos A \\ y' &= \frac{ca}{q}\operatorname{sen} 2B = 2R\cos B \\ z' &= \frac{ab}{q}\operatorname{sen} 2C = 2R\cos C \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Le coordinate ceviane dell'ortocentro sono date dal prodotto del diametro del cerchio circoscritto pel coseno del rispettivo angolo del triangolo.

I parametri lineari furono dati nel § precedente.

§ 5. **Baricentro G.** — È questo il punto d'incontro delle tre mediane del triangolo che le divide nel rapporto di $1:2$ a cominciare dal lato.

Si possono scrivere immediatamente le *coordinate ceviane* del punto G ricordando dalla geometria l'espressione della mediana

$$a^2 + b^2 = 2m^2_c + \frac{1}{2}c$$

dalla quale si ricava

$$z = \frac{2}{3}m_c = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2\right)}$$

Analogamente si avrebbe

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} \\ x &= \frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \\ y &= \frac{1}{3}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Per trovare le *coordinate angolari* del baricentro si cominciano a calcolare gli angoli che le medesime formano coi lati adiacenti che indichiamo con A′, A″ quelli che fa la mediana coi lati AB, AC e così (B′, B″), (C′, C″) le altre due coppie. Calcolati questi angoli si ha evidentemente

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \pi - (B' + C'') \\ \beta &= \pi - (C' + A'') \\ \gamma &= \pi - (A' + B'') \\ \hline \alpha + \beta + \gamma &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Si possono quindi scrivere le *coordinate ceviane* ricorrendo alle nostre formule generali

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{ab}{q}\operatorname{sen}(C + A' + B'') \\ x &= \frac{bc}{q}\operatorname{sen}(A + B' + C'') \\ y &= \frac{ca}{q}\operatorname{sen}(B + C' + A'') \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Identificando le (31) colle (33) si potrà ricavare l'espressione del valore del segmento fisso q, cioè

$$q = \frac{3ab \operatorname{sen}(C + A' + B'')}{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}} \tag{34}$$

e le due analoghe a questa.

Si ricaveranno l'espressioni dell'altezza equivalente e della costante angolare ricorrendo alle formule generali

$$h = \frac{2\Omega}{q} \quad , \quad \left.\frac{\Delta}{q} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\right\}. \tag{35}$$

§ 6. **Punto di Lemoine K.** — È questo il punto d'incontro delle simediane, esso è il coniugato isogonale del baricentro, quindi per la proprietà enunciata più sopra, avrà i tre *parametri* eguali in valore e segno a quelli del baricentro.

Si possono anche, in virtù dell'altra proprietà enunciata, scrivere immediatamente le *coordinate ceviane*

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(B' + C'') \\ y' &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(C' + A'') \\ z' &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(A' + B'') \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Le *coordinate angolari* sono evidentemente

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \pi - (B'' + C') \\ \beta &= \pi - (C'' + A') \\ \gamma &= \pi - (A'' + B') \\ \hline \Sigma &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Perciò le formule (33) si possono ancora scrivere

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(B'' + C') \\ y &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(C'' + A') \\ z &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(A'' + B') \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

che sono le *coordinate ceviane* del baricentro G.

Si ottengono i seguenti rapporti fra le coordinate ceviane dei due punti G e K

$$\frac{x}{x'} = \frac{\operatorname{sen}(B'' + C')}{\operatorname{sen}(B' + C'')} \quad , \quad \frac{y}{y'} = \frac{\operatorname{sen}(C'' + A')}{\operatorname{sen}(C' + A'')} \quad , \quad \frac{z}{z'} = \frac{\operatorname{sen}(A'' + B')}{\operatorname{sen}(A' + B'')} \tag{38}$$

§ 7. **Primo punto di Brocard M.** — Se sopra ciascuno dei lati del triangolo si costruiscono gli archi capaci del supplemento di uno dei due angoli adiacenti, mantenendo l'ordine ciclico, i tre archi s'intersecheranno in un medesimo punto conosciuto col nome del suo autore *primo punto di Brocard o punto positivo o punto retrogrado di Brocard* per distinguerlo dal suo isogonale detto *secondo punto, o punto negativo o diretto di Brocard* e che si suole invece rappresentare colla lettera N.

Le coordinate ceviane formeranno quindi pel punto M coi lati del triangolo l'angolo costante ω detto *angolo di Brocard* il cui valore è dato dalla relazione

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Le *coordinate angolari* del primo punto di Brocard evidentemente sono

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = \pi - B \\ \beta = \pi - C \\ \gamma = \pi - A \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{array}\right\} \qquad (39)$$

Sarà nel vertice C l'angolo di Brocard ω e le *coordinate ceviane* saranno

$$\left.\begin{array}{r} y = a\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}B} \\ z = b\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}C} \\ x = c\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}A} \end{array}\right\} \qquad (40)$$

Ed applicando le nostre formule generali si otterranno le stesse *coordinate ceviane*

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{ca}{q}\operatorname{sen}A \\ z = \dfrac{ab}{q}\operatorname{sen}B \\ x = \dfrac{bc}{q}\operatorname{sen}C \end{array}\right\} \qquad (41)$$

Identificando le (40) e (41) si ricava il *valore del segmento fisso* q

$$q = c \times \frac{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}\omega} = a\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}\omega} = b\frac{\operatorname{sen}C\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}\omega}. \qquad (42)$$

E si può scrivere ancora

$$q = \frac{2\Omega}{\operatorname{sen}\omega} \times \frac{\operatorname{sen}A}{a}$$

e le analoghe.

Il valore dell'*altezza equivalente* sarà

$$h = \frac{2\Omega}{q} = a \times \frac{\text{sen}\ \omega}{\text{sen A}} \tag{43}$$

e le analoghe

cioè: *Pei punti di Brocard l'*altezza equivalente *è uguale al prodotto di uno dei lati del triangolo pel rapporto dei seni dell'angolo di Brocard e dell'angolo opposto al lato.*

Il valore della *costante angolare* si ottiene dalla relazione

$$\frac{\Delta}{q} = \frac{\text{sen A}}{a} = \ldots$$

quindi

$$\Delta = \frac{q}{h}\ \text{sen}\ \omega = \frac{q^2}{2\Omega}\ \text{sen}\ \omega \tag{44}$$

da cui

$$\text{sen}\ \omega = \Delta \times \frac{h}{q} \tag{45}$$

cioè: *Il seno dell'angolo di Brocard è uguale al prodotto della costante angolare pel rapporto dell'altezza equivalente al segmento fisso dello stesso punto di Brocard.*

Si può trovare direttamente l'espressione del segmento fisso q applicando le nostre formule generali, cioè

$$q^2 = b^2\ \text{sen}^2 \text{A} + c^2\ \text{sen}^2 \text{C} - bc\ \text{sen A sen 2C} \tag{46}$$

e le analoghe.

§ 8. **Secondo punto di Brocard N.** — Le coordinate angolari di questo punto sono

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \pi - \text{C} \\ \beta = \pi - \text{A} \\ \underline{\gamma = \pi - \text{B}} \\ \Sigma = 2\pi \end{array}\right\} \tag{47}$$

Le *coordinate ceviane* sono

$$\left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{ca}{q}\ \text{sen C} = c\ \dfrac{\text{sen}\ \omega'}{\text{sen B}} \\ z' = \dfrac{ab}{q}\ \text{sen A} = a\ \dfrac{\text{sen}\ \omega'}{\text{sen C}} \\ x' = \dfrac{bc}{q}\ \text{sen B} = b\ \dfrac{\text{sen}\ \omega'}{\text{sen A}} \end{array}\right\} \tag{48}$$

Come conseguenza delle formule (41) e (48) si deduce

$$\left.\begin{array}{l} x : x' = \text{sen C} : \text{sen B} = c : b \\ y : y' = \text{sen A} : \text{sen C} = a : c \\ z : z' = \text{sen B} : \text{sen A} = b : a \end{array}\right\} \tag{49}$$

I valori dell'angolo ω' e dei tre parametri sono eguali a quelli dell'angolo ω e dei rispettivi del primo punto di Brocard M.

Si deduce ancora dalle (40) e (48)

$$x \cdot y \cdot z = x' \cdot y' \cdot z' = abc \frac{\operatorname{sen}^3 \omega}{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C} = \left(\frac{q}{\Delta} \operatorname{sen} \omega\right)^3 \qquad (50)$$

e si ha la proprietà:

La radice cubica del prodotto delle coordinate ceviane di ciascuno dei punti di Brocard è uguale al seno dell'angolo di Brocard pel rapporto del segmento fisso alla costante angolare degli stessi punti.

E sostituendo per sen ω il suo valore dato dalla formula (45) si ottiene ancora

$$x \cdot y \cdot z = x' \cdot y' \cdot z' = h^3 \qquad (51)$$

quindi la proprietà:

Il prodotto delle coordinate ceviane *di ciascuno dei due punti di Brocard è comune ed uguale al cubo dell'*altezza equivalente *dei medesimi.*

Ma pel *centro del circolo circoscritto* O si era trovato: $x = y = z = R$ e $h = R$ dunque anche questo punto notevole gode la stessa proprietà dei *punti di Brocard*, di essere cioè:

$$x \cdot y \cdot z = h^3. \qquad (53)$$

Ed il suo coniugato isogonale, ossia l'ortocentro H, avrà

$$x' \cdot y' \cdot z' = 8h^3 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C. \qquad (53)$$

Si osserva un'altra analogia fra i due punti di Brocard e l'ortocentro: *Essi hanno le medesime coordinate angolari però con ordine spostato, formate dai supplementi degli angoli del triangolo.*

§ 9. **Punti isotomici; punto di Gergonne L_1 e punto di Nagel L_2.** — Si dicono *rette isotomiche* due rette uscenti da un vertice del triangolo e che determinano sul lato opposto due punti equidistanti dal suo punto di mezzo; i due punti si dicono *isotomici* fra di loro.

Le rette isotomiche a tre rette concorrenti in un punto L_1 sono concorrenti anch'esse in un secondo punto L_2; questi due punti si dicono *punti reciproci di Lonchamps* che li scoperse nel 1866 od anche *punti isotomici* e le tre coppie di rette si dicono *rette reciproche.*

È noto dalla Geometria del triangolo che le ceviane passanti per i punti di contatto A_1, B_1, C_1 del circolo inscritto s'incontrano in un punto L_1 detto *punto di Gergonne;* e che le rette o ceviane passanti per i punti A_2, B_2, C_2 di contatto dei tre cerchi ex-inscritti, s'incontrano pure in un secondo punto L_2 detto *punto di Nagel;* essi due punti L_1, L_2 sono isotomici.

Tralasciamo di esaminare i *punti associati di Gergonne* ed altri punti isotomici.

Per due punti qualunque *reciproci* facilmente si ottiene la relazione

$$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{x \operatorname{sen} \beta}{y \operatorname{sen} \alpha} \quad , \quad \frac{BC_2}{AC_2}=\frac{x' \operatorname{sen} \beta'}{y' \operatorname{sen} \alpha'}$$

quindi

$$\frac{x \operatorname{sen} \beta}{y \operatorname{sen} \alpha}=\frac{x' \operatorname{sen} \beta'}{y' \operatorname{sen} \alpha'}$$

Analogamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{y \operatorname{sen} \gamma}{z \operatorname{sen} \beta}&=\frac{y' \operatorname{sen} \gamma'}{z' \operatorname{sen} \beta'} \\ \frac{z \operatorname{sen} \alpha}{x \operatorname{sen} \gamma}&=\frac{z' \operatorname{sen} \alpha}{x' \operatorname{sen} \gamma'} \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

e si può enunciare la proprietà generale dei punti reciproci:

Le distanze dei vertici del triangolo dalle ceviane reciproche passanti pel terzo vertice sono proporzionali fra di loro.

Occupiamoci dei punti reciproci detti di Gergonne e di Nagel. Evidentemente sono verificate le seguenti identità

$$\left.\begin{aligned} AC_1&=AB_1=BC_2=CB_2=r \cot \frac{A}{2}=p-a \\ BA_1&=BC_1=CA_2=AC_2=r \cot \frac{B}{2}=p-b \\ CB_1&=CA_1=AB_2=BA_2=r \cot \frac{C}{2}=p-c \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Indichiamo con A_1, A_2 gli angoli che le due rette reciproche fanno coi lati AC, AB, sarà $A_3=A-(A_1+A_2)$ l'angolo compreso fra le due ceviane reciproche. Analogamente diciamo con B_1, B_2 gli angoli delle altre due rette reciproche coi lati BA, BC sarà $B_3=B-(B_1+B_2)$; lo stesso dicasi per gli angoli C_1, C_2, $C_3=G-(G_1+G_2)$.

Dal triangolo AA_1C del quale si conoscono due lati b e $(p-c)$ e l'angolo compreso C si potrà determinare l'angolo A_1 e così dagli analoghi triangoli si potranno determinare gli angoli A_2; B_1, B_2; C_1, C_2.

Ciò premesso potremo scrivere le *coordinate angolari* del punto di Gergonne L_1 e del punto di Nagel L_2, esse sono:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1=\pi-C+(C_2-B_2) & \alpha_2=\pi-B+(B_1-C_1) \\ \beta_1=\pi-(A_1+C_2) & \beta_2=B+(A_2+C_1) \\ \gamma_1=C+(A_1+B_2) & \gamma_2=\pi-(A_2+B_1) \\ \hline \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2\pi & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=2\pi \end{array}\right\} \tag{56}$$

E le rispettive *differenze angolari* saranno:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1-A=B+(C_2-B_2) & \alpha_2-A=C+(B_1-C_1) \\ \beta_1-B=\pi-B-(A_1+C_2) & \beta_2-B=(A_2+C_1) \\ \gamma_1-C=(A_1+B_2) & \gamma_2-C=\pi-C+(A_2+B_1) \\ \hline \Sigma_1=\pi & \Sigma_2=\pi \end{array}\right\} \tag{57}$$

Le *coordinate ceviane* saranno:

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 = \frac{bc}{q_1} \operatorname{sen}(B + C_2 - B_2) & x_2 = \frac{bc}{q_2} \operatorname{sen}(C + B_1 - C_1) \\ y_1 = \frac{ca}{q_1} \operatorname{sen}(B + A_1 + C_2) & y_2 = \frac{ca}{q_2} \operatorname{sen}(A_2 + C_1) \\ z_1 = \frac{ab}{q_1} \operatorname{sen}(A_1 + B_2) & z_2 = \frac{ab}{q_2} \operatorname{sen}(C + A_2 + B_1) \end{array}\right| \qquad (58)$$

I tre *parametri lineari* (q_1, h_1, Δ_1), (q_2, h_2, Δ_2) si deducono dalle nostre formule generali:

$$\left.\begin{array}{l} q^2_1 = b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma_1 + c^2 \operatorname{sen}^2 \beta_1 + 2bc \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \gamma_1 \cos(\alpha_1 - A) \\ h_1 = \frac{2\Omega}{q_1} \\ \frac{\Delta_1}{q_1} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \end{array}\right| \qquad (59)$$

e le analoghe

Analoghe formule per l'altro punto.

Infine ricordando le relazioni (55) si possono scrivere per i punti di Gergonne e di Nagel i seguenti rapporti eguali:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_1 \operatorname{sen} \beta_1}{y_1 \operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{x_2 \operatorname{sen} \beta_2}{y_2 \operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{p-a}{p-b} \\ \frac{y_1 \operatorname{sen} \gamma_1}{z_1 \operatorname{sen} \beta_1} = \frac{y_2 \operatorname{sen} \gamma_2}{z_2 \operatorname{sen} \beta_2} = \frac{p-b}{p-c} \\ \frac{z_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{x_1 \operatorname{sen} \gamma_1} = \frac{z_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{x_2 \operatorname{sen} \gamma_2} = \frac{p-c}{p-a} \end{array}\right| \qquad (60)$$

ed enunciare la seguente proprietà:

Il rapporto delle distanze dei vertici del triangolo dalle ceviane reciproche passanti pel terzo vertice è uguale al rapporto inverso delle rispettive differenze lineari.

In modo analogo si potrebbero studiare altri *punti notevoli* del triangolo; il *reciproco* del *baricentro* corrisponde a se stesso.

(Continua)

Prof. G. Delitala.

PICCOLE NOTE

1. — Sull'integrazione indefinita delle funzioni inverse.

Sia la funzione $y = f(x)$ finita, continua e dotata di derivata prima non nulla in un intervallo generico (ax).

In tali condizioni l'equazione $y = f(x)$ si può risolvere rispetto ad x, così da avere x eguale ad una funzione finita, continua e derivabile $\varphi(y)$ della variabile y:

cambiando materialmente y in x nella funzione φ, ottengo la funzione $\varphi(x)$, detta la funzione *inversa* di $f(x)$; adotto anzi la notazione già usata da altri scrivendo $\varphi(x) = f^{-1}(x)$.

Ciò premesso dimostro la seguente proposizione:

Se l'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ *contenuta assieme alla sua inversa in dato corpo* Γ (*) *è esprimibile per funzioni dello stesso corpo (quello, ad esempio, costituito dalle trascendenti elementari), appartiene pure allo stesso corpo l'integrale della funzione inversa* $f^{-1}(x)$.

Dimostrazione. — Sia una curva $y = f^{-1}(x)$ riferita al solito sistema cartesiano; l'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le due ordinate corrispondenti all'ascissa a ed a quella generica x sarà

$$A = \int_a^x f^{-1}(x)\,dx \tag{1}$$

Opero adesso una semplicissima trasformazione di assi, prendendo la direzione positiva delle x per direzione positiva delle y, e quella positiva delle y per quella positiva delle x; in tal modo l'equazione delle curva divieno evidentemente

$$y = f(x)$$

e gli estremi dell'arco considerato (riferiti ai nuovi assi) avranno per ordinate a ed x e per ascisse $f^{-1}(a)$ ed $f^{-1}(x)$; quindi l'area B, così limitata, sarà

$$B = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Siccome poi chiamando C l'area del rettangolo che ha per lati a e $f^{-1}(a)$, si ha

$$C = af^{-1}(a), \quad \text{ed} \quad A + B + C = xf^{-1}(x),$$

se ne ricava per la (1) e la (2)

$$\int_a^x f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx - af^{-1}(a),$$

dove, fondendo in un'unica costante d'integrazione il termine $af^{-1}(a)$ e gli altri due termini costanti che provengono dai due integrali A e B, per effetto dei limiti inferiori a ed $f^{-1}(a)$, si ottiene senz'altro

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx + \text{costante}.$$

Questa relazione prova l'asserto, giacchè i tre termini del secondo membro, e quindi la loro somma, appartengono al corpo Γ.

Infatti, uno di essi vi appartiene perchè costante; per ipotesi vi appartengono x ed $f^{-1}(x)$, e quindi il loro prodotto; vi appartiene inoltre l'integrale indefinito di $f(x)$, integrale che per un momento chiamerò $F(x)$; ora $\int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx$ si ottiene da $F(x)$ sostituendovi $f^{-1}(x)$ al posto di x, eseguendo dunque una operazione corrispondente ad una funzione del corpo Γ sopra l'elemento $f^{-1}(x)$ che per ipotesi appartiene al corpo Γ.

(*) Intendo per *corpo* di funzioni un insieme di funzioni tali che, operando sopra di esse, sia razionalmente, sia con una generica funzione dell'insieme, si ottengano sempre elementi dell'insieme.

Per definizione di detto corpo, non veniamo, con tali operazioni, ad uscirne, c. d. d.

Osservazione I. — La relazione trovata

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx + \text{costante},$$

oltre a dimostrare la proposizione, contiene senz'altro la regola per integrare qualunque funzione della cui inversa si sia già conseguito l'integrale.

Esempio:

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx = x \operatorname{sen}^{-1} x - \int^{\operatorname{sen}^{-1} x} \operatorname{sen} x\,dx + \text{costante}; \tag{3}$$

abbiamo

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x; \quad \text{quindi} \quad \int^{\operatorname{sen}^{-1} x} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos \operatorname{sen}^{-1} x = -\sqrt{1-x^2},$$

e perciò la (3) diviene

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + \text{costante}.$$

Osservazione II. — Il teorema che abbiamo dimostrato geometricamente, può dimostrarsi anche direttamente colla semplice derivazione della relazione trovata

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx + \text{costante};$$

in effetto, derivandola, si ha

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(x) + x\frac{df^{-1}(x)}{dx} - f[f^{-1}(x)]\frac{df^{-1}(x)}{dx}; \tag{4}$$

ma, per definizione, è certamente

$$f[f^{-1}(x)] = x$$

e quindi la (4) si riduce a un'identità, come infatti si deve ottenere, se la relazione precedente è vera.

Dott. Ettore Da Rin.

II. — **Sopra un modo semplice di generazione della serie di Taylor.**

Sia $f(x)$ una funzione finita e continua in un certo intervallo $(x, x+h)$, e supponiamo che le sue successive derivate esistano e siano pure funzioni di x finite e continue nell'intervallo considerato.

Supponiamo di dividere l'intervallo dato in n intervalli eguali:

$$\left(x, x+\frac{h}{n}\right),\ \left(x+\frac{h}{n}, x+\frac{2h}{n}\right),\ \left(x+\frac{2h}{n}, x+\frac{3h}{n}\right)\ldots\left(x+\frac{(n-1)h}{n}, x+h\right).$$

Applicando ad $f(x)$ in ciascuno di questi intervalli il teorema del valore medio si ha:

$$f(x+h) - f\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right) = \frac{h}{n} f'(\alpha_n)$$
$$f\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right) - f\left(x+\frac{(n-2)h}{n}\right) = \frac{h}{n} f'(\alpha_{n-1})$$

. . . .

. . . .

$$f\left(x+\frac{2h}{n}\right)-f\left(x+\frac{h}{n}\right)=\frac{h}{n}f'(\alpha_2)$$
$$f\left(x+\frac{h}{n}\right)-f(x)\qquad=\frac{h}{n}f'(\alpha_1)$$

dove $x+\frac{(r-1)h}{n}<\alpha_r<x+\frac{rh}{n}$.

Sommando queste eguaglianze membro a membro, si ha

$$f(x+h)-f(x)=h\sum_n^1\frac{f'(\alpha_r)}{n},$$

ossia

$$\Delta_1=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_n^1\frac{f'(\alpha_r)}{n}.$$

Se ora facciamo tendere n all'infinito i termini del sommatorio divengono infinitesimi, e, giacchè il sommatorio tende allora ad un limite finito, possiamo sostituirli con le quantità:

$$\frac{f'\left(x+\frac{h}{n}\right)}{n},\ \frac{f'\left(x+\frac{2h}{n}\right)}{n},\ldots\ldots\frac{f'(x+h)}{n},$$

che per $n=\infty$ divengono pure infinitesimi dello stesso ordine dei primi.

Avremo cioè

$$\Delta_1=\lim_{n=\infty}\sum_n^1\frac{f'\left(x+\frac{rh}{n}\right)}{n}.$$

Applicando ancora il teorema del valor medio alla funzione $f'(x)$, abbiamo

$$f'\left(x+\frac{h}{n}\right)=f'(x)+\frac{h}{n}f''(\beta_1)$$
$$f'\left(x+\frac{2h}{n}\right)=f'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\frac{h}{n}f''(\beta_2)=f'(x)+\frac{h}{n}[f''(\beta_1)+f''(\beta_2)]$$
$$f'\left(x+\frac{3h}{n}\right)=f'\left(x+\frac{2h}{n}\right)+\frac{h}{n}f''(\beta_3)=f'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\frac{h}{n}[f''(\beta_2)+f''(\beta_3)]=$$
$$=f'(x)+\frac{h}{n}[f''(\beta_1)+f''(\beta_2)+f''(\beta_3)]$$

. . . .

. . . .

$$f'(x+h)=f'\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)+\frac{h}{n}f''(\beta_n)=\ldots$$
$$\ldots=f'(x)+\frac{h}{n}[f''(\beta_1)+f''(\beta_2)+\ldots+f''(\beta_n)].$$

dove

$$x+\frac{(r-1)h}{n}<\beta_r<x+\frac{rh}{n}.$$

Quindi

$$\sum_n^1 f'\left(x+\frac{rh}{n}\right)=nf'(x)+h\sum_n^1\frac{(n-r+1)f''(\beta_r)}{n}$$

da cui

$$\Delta_1=f'(x)+h\lim_{n=\infty}\sum_n^1\frac{(n-r+1)f''(\beta_r)}{n^2}$$

e

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 - f(x)}{h} = \lim_{n=\infty} \sum_n^1 \frac{(n-r+1) f(\beta_r)}{n^2}.$$

Un'osservazione analoga a quella fatta più sopra riguardo agli infinitesimi del secondo membro ci conduce alla sostituzione analoga; avremo cioè:

$$\Delta_2 = \lim_{n=\infty} \sum_n^1 \frac{(n-r+1) f'\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^2}.$$

Continuando questo procedimento, sviluppando cioè i termini del sommatorio e facendo ancora la sostituzione degli infinitesimi avremmo ora:

$$\Delta_2 = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\Sigma r}{n^2} f'(x) + h \sum_n^1 \frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2} \; \frac{f''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^3} \right];$$

ed essendo

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma r}{n^2} = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

si avrà

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_2 - \frac{f''(x)}{2}}{h} = \lim_{n=\infty} \sum_n^1 \frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2} \; \frac{f''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^3}.$$

In simil maniera si otterrebbe

$$\Delta_4 = \frac{\Delta_3 - \frac{f'''(x)}{6}}{h} = \lim \sum_n^1 \frac{(n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)}{6} \; \frac{f''''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^4},$$

$$\Delta_5 = \frac{\Delta_4 - \frac{f''''(x)}{24}}{h} = \lim \sum_n^1 \frac{(n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)(n-r+4)}{24} \; \frac{f'''''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^5}$$

. . . .

È facile ora vedere la legge di formazione dei coefficienti dei termini dei sommatori considerati, giacchè ognuno di essi è formato dalla somma di tutti i coefficienti dei termini del sommatorio precedente a cominciare dal corrispondente termine; abbiamo infatti

$$r = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{r}{1}; \qquad \frac{r(r+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + r;$$

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{6} = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{r(r+1)}{2}; \quad \text{ecc.}$$

Essendo

$$1, \; 1, \; 1, \; 1, \; \ldots \; 1,$$

la prima serie di coefficienti, le altre saranno i successivi ordini dei numeri figurati; ed avremo allora in generale

$$\Delta_p = \lim \frac{\Sigma \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-2)}{(p-1)!}}{n^p} f^{(p)}(x) +$$

$$+ h \sum_n^1 \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{p!} \; \frac{f^{(p+1)}\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^{p+1}}$$

ed essendo

$$\sum_{n}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-2)}{(p-1)\,!} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p\,!}\,.$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum \dfrac{r(r+1)\ldots(r+p-2)}{(p-1)\,!}}{n^p} = \frac{1}{p\,!}\,.$$

abbiamo anche:

$$\Delta_{p+1} = \frac{\Delta_p - \dfrac{f^{(p)}(x)}{p\,!}}{h} = \lim_{n=\infty} \sum_{n}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{p\,!} \, \frac{f^{(p-1)}\left(x+\dfrac{rh}{n}\right)}{n^{p-1}}\,.$$

Ponendo successivamente $p = 1, 2, 3 \ldots$ e chiamando per brevità $R_{p-1}(x)$ il sommatorio del secondo membro, si ha

$$\Delta_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = R_1(x), \quad \text{da cui} \quad f(x+h) = f(x) + h\,R_1(x),$$

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 - f'(x)}{h} = R_2(x), \quad \text{da cui} \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h^2 R_2(x),$$

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_2 - \dfrac{f''(x)}{2\,!}}{h} = R_3(x), \quad \text{da cui} \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2\,!} f''(x) + h^3 R_3(x);$$

ed in generale otteniamo

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2\,!} f''(x) + \frac{h^3}{3\,!} f'''(x) \ldots + \frac{h^p}{p\,!} f^{(p)}(x) + h^{p+1} R_{p+1}(x)\,.$$

Se al crescere di p, R_p tende a 0, la serie

$$f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2\,!} f''(x) \ldots + \frac{h^p}{h\,!} f^{(p)}(x) \ldots$$

sarà convergente, e la somma dei suoi primi termini si potrà, prendendo p abbastanza grande, far differire da $f(x+h)$ di tanto poco quanto si vuole; potremo quindi scrivere:

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^p}{p\,!} f^p(x)$$

espressione della serie di Taylor.

Guido Ascoli.
Studente del R. Ist. tecnico di Livorno.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 606, 607, 608, 609, 610 E 611

606. *È dato un fascio di coniche ed un punto P. Si trovi il luogo del punto d'incontro del diametro che passa per P colla polare di P. Caso in cui il fascio di coniche si riduce ad un fascio di circoli.* Greenstreet.

Parte I. — **Risoluzione della sig.ª Longobardi e del sig. Barisien.**

Il fascio di coniche sia rappresentato dall'equazione

(1) $$\varphi + k\psi = 0;$$

Nota. — Parvennero le risoluzioni delle quistioni 604, 605 inviate dal sig. Barisien quando il n. precedente era già in macchina.

le coordinate x, y dei centri sono date da

$$\varphi'_x + k\psi'_x = 0 \qquad \varphi'_y + k\psi'_y = 0.$$

L'equazione di ogni diametro di (1) è dunque

$$\varphi'_x + k\psi'_x + m(\varphi'_y + k\psi'_y) = 0;$$

questa è l'equazione del diametro per un punto dato $(x_1\, y_1)$. se m ha valore tale da farla verificare da $x = x_1$, $y = y_1$, cioè se

$$\varphi'_{x_1} + k\psi'_{x_1} + m(\varphi'_{y_1} + k\psi'_{y_1}) = 0,$$

intendendo per φ'_{x_1} il valore che assume $\varphi'_x = \frac{d\varphi}{dx}$ per $x = x_1$ etc. L'equazione di ogni diametro per P di (1) è dunque

$$(\varphi'_x + k\psi'_x)(\varphi'_{y_1} + k\psi'_{y_1}) - (\varphi'_{x_1} + k\psi'_{x_1})(\varphi'_y + k\psi'_y) = 0,$$

ovvero

$$\varphi'_x\varphi'_{y_1} - \varphi'_{x_1}\varphi'_y + k(\varphi'_x\psi'_{y_1} - \varphi'_{x_1}\psi'_y + \psi'_x\varphi'_{y_1} - \psi'_{x_1}\varphi'_y) + k^2(\psi'_x\psi'_{y_1} - \psi'_{x_1}\psi'_y) = 0,$$

ovvero

(2) $$(\varphi'_x\, \varphi'_y) + k[(\varphi'_x\, \psi'_y) + (\psi'_x\, \varphi'_y)] + k^2(\psi'_x\, \psi'_y) = 0,$$

intendendo per

$$(\mathrm{AB}) = \mathrm{AB}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}.$$

La polare di P rispetto a (1) è

(3) $$(\varphi'_{x_1} + k\psi'_{x_1})x + (\varphi'_{y_1} + k\psi'_{y_1})y + \varphi'_{z_1} + k\psi'_{z_1} = 0.$$

Eliminando k tra la (2) e la (3) si ha l'equazione del luogo richiesto dei punti d'incontro del diametro di P con la polare di P.

Dalla (3) si ha

$$k = -\frac{p_\varphi}{p_\psi},$$

essendo

$$p_\varphi = \varphi'_{x_1}x + \varphi'_{y_1}y + \varphi'_{z_1} = 0 \qquad p_\psi = \psi'_{x_1}x + \psi'_{y_1}y + \psi'_{z_1} = 0$$

le equazioni delle polari di P rispetto a $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Se sostituiamo nella (2) il precedente valore di k si ha pel luogo richiesto l'equazione

$$(\varphi'_x\, \varphi'_y)\, p_\psi{}^2 + [(\varphi'_x\, \psi'_y) + (\psi'_x\, \varphi'_y)]\, p_\psi\, p_\varphi + (\psi'_x\, \psi'_y)\, p^2_\varphi = 0.$$

Parte II. — **Risoluzione del sig. Barisien.**

L'equazione dei circoli di un fascio riferito all'asse radicale e alla retta dei centri è

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y + \mathrm{K} = 0,$$

dove K è fisso e λ variabile. La retta che unisce il punto fisso P (x_1, y_1) col centro $(0, \lambda)$ del circolo ha per equazione

$$\frac{y - \lambda}{y_1 - \lambda} = \frac{x}{x_1}$$

ovvero

$$\lambda(x - x_1) = xy_1 - yx_1.$$

La polare di P rispetto al circolo ha per equazione

$$xx_1 + yy_1 - \lambda(y + y_1) + \mathrm{K} = 0.$$

Eliminando λ fra le due ultime equazioni si ha

$$(xx_1 + yy_1 + K)(x - x_1) = (y + y_1)(xy_1 - yx_1)$$

ossia

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - K}{x_1}\right) - K = 0.$$

Il luogo cercato è dunque un circolo che passa per P ed ha il centro sull'asse radicale del fascio dato.

607. *La retta che unisce un punto M di un'iperbole con uno dei fuochi incontra in N, N' gli assintoti. Dimostrare che le lunghezze MN, MN' sono funzioni razionali delle coordinate di M.*

BARISIEN.

Risoluzione della sig.na Longobardi.

Sia $M(x_1, y_1)$ un punto dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Un fuoco dell'iperbole è $F(c, o)$, essendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, e le equazioni dei suoi assintoti sono

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{2}$$

L'equazione di MF è

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - c}(x - x_1). \tag{3}$$

La retta (3) incontra le rette (2) nei punti

$$N\left(\frac{acy_1}{ay_1 - b(x_1 - c)}, \frac{bcy_1}{ay_1 - b(x_1 - c)}\right)$$

$$N' = \left(\frac{acy_1}{ay_1 + b(x_1 - c)}, \frac{-bcy_1}{ay_1 + b(x_1 - c)}\right)$$

si ha dunque

$$MN = \frac{(ay_1 - bx_1)(cx_1 - a^2)}{a[ay_1 - b(x_1 - c)]}$$

$$MN' = \frac{(ay_1 + bx_1)(cx_1 - a^2)}{a[ay_1 + b(x_1 - c)]}$$

cioè le lunghezze di MN e MN' sono funzioni razionali delle coordinate x_1, y_1, di M.

Altra risoluzione del sig. Occhipinti.

608. *Luoghi dei fuochi e dei vertici delle coniche tangenti a due rette date in due punti dati.*

609. *Luogo dei vertici delle iperboli che hanno un assintoto fisso e sono tangenti ad una retta data in un punto dato.*

BARISIEN.

Risoluzione della sig.a Longobardi.

1) Le rette date siano gli assi, ω il loro angolo e (a, o), (o, b) siano i punti dati. L'equazione d'ogni conica avente un dato fuoco (x, y) è

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + 2(x - X)(y - Y)\cos\omega = (Ax + By + C)^2. \tag{1}$$

Le ascisse x dei punti di incontro della (1) con l'asse della x sono da

$$(x - X)^2 + Y^2 - 2(x - X)Y\cos\omega = (Ax + C)^2$$

cioè sono le radici dell'equazione

(2) $x^2(1-A^2)-2x(X+Y\cos\omega+AC)+X^2+Y^2+2XY\cos\omega-C^2=0.$

La (1) è tangente dell'asse della x nel punto $(a, 0)$ se le due radici di (2) sono eguali ad a; e ciò ha luogo se

$$(X+Y\cos\omega+AC)^2=(1-A^2)(X^2+Y^2+2XY\cos\omega-C^2)$$
$$\frac{X+Y\cos\omega+AC}{1-A^2}=a.$$

Dalle precedenti si ha

$$A^2=\frac{a^2+C^2-(X^2+Y^2+2XY\cos\omega)}{a^2}$$
$$AC=\frac{X^2+Y^2+2XY\cos\omega-C^2-a(X+Y\cos\omega)}{a}$$

donde

$$\frac{a^2+C^2-(X^2+Y^2+2XY\cos\omega)}{a^2}=\left[\frac{X^2+Y^2+2XY\cos\omega-C^2-a(X+Y\cos\omega)}{aC}\right]^2$$

ovvero

(3) $C^2[a^2+X^2+Y^2+2XY\cos\omega-2a(X+Y\cos\omega)]=[X^2+Y^2+2XY\cos\omega-a(X+Y\cos\omega)]^2.$

Similmente, pel contatto con l'asse delle y nel punto (o, b) si ha l'altra equazione

(4) $C^2[b^2+X^2+Y^2+2XY\cos\omega-2b(X\cos\omega+Y)]=[X^2+Y^2+2XY\cos\omega-b(X\cos\omega+Y)]^2.$

Eliminando C^2 tra (3) e (4) si ha l'equazione del luogo dei fuochi (X, Y) delle coniche tangenti all'asse delle x nel punto (a, o) e all'asse delle y nel punto (o, b). Detto luogo è la quartica.

(5) $$(X^2+Y^2+2XY\cos\omega)(b^2X^2-a^2Y^2)-$$
$$-2ab[bX^2(X+Y\cos\omega)-aY^2(X\cos\omega+Y)]+a^2b^2(X^2-Y^2)=0$$

che ha un punto doppio nell'origine.

2) Le equazioni delle coniche tangenti agli assi nei punti (a,o), (o,b) sono date da

(6) $$(bx+ay-ab)^2+Kxy=0$$

al variare di K, e le coordinate x, y del centro sono date dalle equazioni

$$2b(bx_1+ay_1-ab)+ky_1=0 \quad ; \quad 2a(bx_1+ay_1-ab)+kx_1=0.$$

Il coefficiente di direzione del diametro per un punto (x, y) della (6) è

$$m=\frac{y(k+4ab)-2ab^2}{x(k+4ab)-2a^2b}.$$

Il coefficiente di direzione della tangente alla (6) nel suo punto (x, y) è

$$m'=-\frac{2b(bx+ay-ab)+ky}{2a(bx+ay-ab)+kx}.$$

Il punto (x, y) è un vertice di (6) se il diametro e la tangente per esso sono perpendicolari: ciò ha luogo se

$$(m+m')\cos\omega+mm'+1=0$$

ovvero

$$[2a(bx+ay-ab)+kx][x(k+4ab)-2a^2b]-[2b(bx+ay-ab)+ky][y(k+4ab)-2ab^2]=$$
$$=2\cos\omega(bx-ay)[(k+4ab)(bx+ay)-4a^2b^2].$$

Eliminando k tra la precedente e la (6) si ha l'equazione dei luogo dei vertici delle coniche tangenti all'asse delle x nel punto (a, o) e all'asse delle y nel punto (o, b) detto luogo è la curva di quinto ordine

$$\begin{aligned} &x^2[ab(2bx-ab)-(bx-ay)^2](-bx+ay+ab)-\\ &-y^2[ab(2ay-ab)-(bx-ay)^2](bx-ay+ab)-\\ &-2xy\cos\omega(bx-ay)[ab(bx+ay)-(bx-ay^2]=0\end{aligned}$$

che ha un punto triplo nell'origine.

3) Ponendo nella (5) e nell'ultima equazione $b=\infty$ si hanno le equazioni dei luoghi dei fuochi e dei vertici delle coniche che sono tangenti nel punto (a, o) all'asse della x e hanno l'asse delle y per assintoto.

Dette equazioni sono

$$x^2[x^2+y^2+2xy\cos\omega-2a(x+y\cos\omega)]+a^2(x^2-y^2)=0$$
$$x^2(a-x)[(a-x)^2+2xy\cos\omega]-y^2(a^2+x^2)(a+x)=0$$

e l'ultima risolve la quistione 609.

Altra risoluzione del sig. Occhipinti.

610. (700) (*) *Trovare la relazione che deve esistere tra i coefficienti del polinomio* $f(x)=a_1x^m+a_2x^{m-1}+\ldots+a_mx+a_{m+1}$ *perchè sia divisibile per* $x^2-\alpha^2$.

CANDIDO.

Risoluzione del sig. Occhipinti.

Affinchè $f(x)$ sia divisibile per $x^2-\alpha^2$ è necessario e sufficiente che lo sia per $x-\alpha$ e per $x+\alpha$, cioè che si abbia contemporaneamente: $f(\alpha)=0$, $f(-\alpha)=0$ da cui, eliminando α, si ha

$$\begin{vmatrix} 0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,0 & 0 & a_1 & a_2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a_m & a_{m+1} \\ 0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,0 & a_1 & a_2 & a_3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a_{m+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & a_{m+1}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,0 & 0 \\ 0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,0 & 0 & (-1)^m a_1 & (-1)^{m-1}a_2\ldots -a_m & a_{m+1} \\ 0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,0 & (-1)^m a_1 & (-1)^{m-1}a_2 & (-1)^{m-2}a_3\ldots a_{m+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^m a_1\ldots a_{m-2} & a_{m-1} & -a_m & a_{m+1}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

614. (704) *Si consideri il sistema di circoli tangenti in un punto fisso* M *ad una parabola data. Il luogo del punto d'incontro delle tangenti comuni alla parabola e ad uno di tali circoli (distinti dalla tangente in* M*), è una parabola.*

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Occhipinti.

Sia MT la tangente in M; fissata una tangente p alla parabola, è determinato un sol cerchio tangente alla p ed alla TM in M (escludendo fra le tangenti co-

(*) Le quistioni numerate dal 610 al 615 corrispondono a quelle del fascicolo precedente dal 700 al 705 così numerate in causa di un errore tipografico.

muni la TM), e quindi una tangente q comune alla parabola ed al cerchio (diversa da p e TM). Viceversa data una tangente q è determinata pure unicamente, colla stessa costruzione, una tangente p.

Si consideri allora una trasversale r arbitraria: fra le serie di punti d'incontro della r con le rette p e q interviene una corrispondenza tale, che, ad un punto (intersezione di r con p) corrisponda un punto Q (intersezione di r con q) e viceversa. Dunque si hanno su R due punti di coincidenza, cioè due punti del luogo cercato che è perciò una conica. Esso passa evidentemente per M.

Per decidere della natura di essa osserviamo che, quando il raggio del cerchio tangente alla parabola in M cresce indefinitamente, il punto di concorso delle due tangenti comuni (distinte dalla tangente in M) si allontana indefinitamente da M, dunque al limite, quando il cerchio si riduce alla retta doppia MT su cui si confondono le tangenti comuni il punto di concorso (punto del luogo) sarà all'infinito sulla retta MT.

La conica è dunque una parabola il cui asse è la retta MT ed il cui vertice è M.

Altra risoluzione del sig. Niccolai.

QUISTIONI PROPOSTE

616. Gli archi massimi condotti da un punto P ad un circolo minore, della superficie sferica verificano la relazione

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,PM \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}\,P_1M = \text{costante}.$$

CASSANI.

617. Si descrivano tre semiperbole ciascuna delle quali abbia per assintoti due lati di un triangolo equilatero, e sia tangente al terzo. La minima distanza fra due di esse è $(\sqrt{2}-1)\,l$, essendo l la lunghezza del lato del triangolo.

GREENSTREET.

618. Calcolare il raggio del circolo tangente ad una data iperbole e ad uno dei suoi assintoti nel centro dell'iperbole.

Caso dell'iperbole equilatera.

619. Il luogo dei punti d'incontro di due parabole che, essendo tangenti ad una retta fissa ed avendo un fuoco comune in un punto dato, hanno inoltre costante l'angolo dei loro assi, si compone di due circoli.

620. Si proietti un punto M variabile di una ellisse sui due assi in P e Q, e si proiettino i punti P, Q in P', Q' sulla tangente e in P'', Q'' sulla normale in M alla ellisse.

Si trovino le aree delle curve del sesto ordine luoghi dei punti P', Q', P'', Q'', e delle curve di sest'ordine inviluppi delle rette PP', PP'', QQ', QQ''.

E.-N. BARISIEN.

BIBLIOGRAFIA

Scentia. *Série Phisico-Mathématique.* Paris, C. Naud.

N. 16. Eugenio Néculcéa. — *Il fenomeno di Kerr ed i fenomeni elettro-ottici,* Febbraio 1902.

In questa notevole monografia viene esaminato con molta profondità il *fenomeno di Kerr* o della *doppia rifrazione elettrica*, corrispondente al fatto che un mezzo isotropo diviene birifrangente sotto l'azione di un campo elettrico.

Nella prima parte del lavoro sono ricordate le ricerche sperimentali. Cioè Kerr, disponendo convenientemente fra gli elettrodi del secondario di un rocchetto di Ruhmkorff una lamina di vetro ed osservandola attraverso un polariscopio, vide ch'essa esercitava un'azione depolarizzante sulla luce che l'attraversava in direzione normale alle linee di forza elettrica. L'effetto era massimo, se il piano di polarizzazione era a 45° delle linee di forza (1ª posizione); irregolare o nullo, se questo era parallelo o normale ad esse (2ª posizione). Inoltre esigeva un certo tempo a prodursi e scomparire; cresceva d'intensità colla tensione elettrica; mentre il verso delle linee di forza non aveva influenza. L'azione del campo elettrico corrispondeva all'effetto prodotto da una *compressione* pel vetro e pel quarzo ed a quello di una *trazione* per la resina.

Kerr attribuì il fatto all'orientazione polare delle particelle del dielettrico sotto l'azione del campo, in armonia all'ipotesi di Faraday sulla polarizzazione elettrica dei dielettrici.

Brongersma riprese le esperienze di Kerr, migliorando le condizioni sperimentali, e potè seguire e descrivere i diversi aspetti che, col variare d'intensità del campo, presenta la luce attraverso una lamina di vetro e di spato, quando il piano di polarizzazione è nella 1ª e 2ª posizione.

Kerr verificò che il fatto si presenta anche nei liquidi, con modalità affatto analoghe quando si passa dalla 1ª alla 2ª posizione. Però in tal caso il fenomeno è istantaneo e la luce trasmessa varia assai d'intensità con quella del campo, presentando colla 1ª posizione due plaghe molto intense vicino agli elettrodi e sfumata verso l'equatore e dintorni, e presentando colla 2ª posizione solo un sottile orlo di luce vivissima alle estremità ed una debole illuminazione nel resto del campo visivo, mentre che una zona equatoriale molto estesa resta oscura. Per alcune sostanze, le più numerose, il raggio è polarizzato perpendicolarmente alle linee di forza (corpi otticamente elettro-positivi), per altre invece è polarizzato parallelamente alle linee stesse (corpi otticamente elettro-negativi). I dielettrici positivi agiscono come il vetro sottoposto a trazione secondo una direzione parallela alle linee di forza, i negativi come il vetro compresso. Vi è poi una relazione intima fra i caratteri chimici dei composti ed il loro potere elettro-ottico.

Röntgen, ripetendo le ricerche di Kerr sui liquidi, ne conferma i risultati, osservando in più che, quando il piano di polarizzazione passa dalla 1ª alla 2ª posizione, il fenomeno è complementare.

Tale fatto potè meglio essere precisato e descritto da Brongersma, il quale, usando a vicenda elettrodi sferici col metallo nudo e ricoperto di vetro (come due bulbi di termometro) potè altresì notare che nel 1° caso il liquido è in continuo movimento, mentre nel 2° sta in quiete. Non osservò invece, come apparve a Kerr ed a Röntgen una scarica oscura attraverso il dielettrico, la quale avrebbe una notevole importanza per l'ipotesi di un'azione perturbatrice esercitata dall'elettricità sulla luce.

Dalle ricerche quantitative risultò a Kerr che, in un campo elettrico uniforme, *la differenza di cammino, espressa in lunghezza d'onda, delle due componenti della luce polarizzata perpendicolarmente e parallelamente alla direzione del campo è proporzionale al quadrato della forza elettrica.*

Della costante di proporzionalità, detta *costante di Kerr*, viene riferito poi il calcolo e la misura assoluta di Lemoine. E per essa, definita come *il ritardo, espresso in lunghezza d'onda, di una vibrazione luminosa polarizzata in un piano normale alla forza elettrica, l'intensità di questa essendo di* 1 U. E. S. *e lo spessore, attraversato dal raggio luminoso in direzione perpendicolare, di 1 cm.*, risulta il valore di $3{,}70 \,.\, 10^{-7}$.

Infine vengono ricordate le ricerche di Blondlot e quelle di Abraham e Lemoine, dirette a stabilire se decorre un tempo apprezzabile fra l'azione del campo e l'apparire della birifrangenza nei liquidi, le quali portarono rispettivamente alla conclusione che, se ritardo vi è, esso non può superare $\frac{1}{40000}$ ed $\frac{1}{400000000}$ di 1'', e viene inoltre ricordata la disposizione di Rücker per proiettare il fenomeno di Kerr.

Nella seconda parte è esposta la teoria matemetica di Pockels, fondata sull'ipotesi che la costante dielettrica del mezzo coibente varii proporzionalmente all'intensità del campo, e quella di Voigt, il quale parte dalle equazioni sulla teoria elettromagnetica della luce, che Hertz generalizzò per la spiegazione dei fenomeni di dispersione, e le modifica in altre ancor più generali, per adattarle alla spiegazione delle azioni ottiche di un campo elettrico, mediante le ipotesi semplici che l'azione del campo dipenda dalla presenza delle particelle ponderabili, che i fenomeni sieno conservativi, che abbia luogo la sovrapposizione di vibrazioni differenti, che le componenti del campo debbano entrare colla potenza più piccola possibile; equazioni, le quali possono spiegare i fenomeni già osservati e suggerire nuove esperienze per fenomeni che sembrano risultare dalla teoria, ma che ancora non furono confermati dall'esperienza.

A tale proposito nella terza parte è studiato analiticamente un fenomeno elettrico analogo al fenomeno di Zeeman. Vale a dire le formole di Voigt per i mezzi che danno bande di assorbimento intense prevedono, come azione del campo elettrico, degli spostamenti o degli sdoppiamenti di questi raggi. Ora tale azione elettrica sulla posizione delle bande di assorbimento, analoga all'azione magnetica conosciuta, può essere considerata come l'inverso del fenomeno di Zeeman. La discussione assegna al fenomeno un valore piccolissimo, e quest'è la ragione per cui non fu ancora avvertito.

Nell'*Appendice* infine è fatta menzione delle ricerche di Schmidt, il quale trovò che il fenomeno di dispersione, legato a quello della doppia rifrazione elettrica, varia da una sostanza all'altra; che la costante elettro-ottica diminuisce colla temperatura e non è una costante addiettiva, inquantochè le soluzioni non sembrano in proposito seguire alcuna legge semplice.

GEROSA.

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo II. Hoepli, 1902.

Annunziammo già il principio di questa importantissima pubblicazione fatta dall'editore U. Hoepli, coi tipi della tip. matematica di Palermo sotto gli auspici del comitato per le onoranze al grande matematico estinto.

Il II° volume testè apparso alla luce comprende 35 memorie inserite negli *Annali di matematica pura ed applicata* dal 1858 al 1887, cioè dal tomo I, della I^a^ serie al tomo XIV della II^a^ serie. Revisori del volume sono stati i professori Cerruti, Gerbaldi, Loria, Pascal, Pittarelli, Reina, Tonelli.

Opere matematiche di Eugenio Beltrami, pubblicate per cura della facoltà di scienze della R. Università di Roma. Tomo I con ritratto e biografia dell'Autore. Hoepli, 1902.

Eugenio Beltrami era stato incaricato col Cremona di dirigere la stampa delle opere del Brioschi, ma nel febbraio del 1900 lo seguì nella tomba ed immediatamente la facoltà di scienze di Roma, decretò di raccogliere e ripubblicare in edizione nuova e completa tutti i suoi scritti scientifici.

Ed ora è uscito il primo, dei quattro volumi almeno, che costituiranno l'intera collezione, nello stesso formato delle opere del Brioschi.

Questo I volume comincia con un estratto della bella commemorazione del Beltrami letta dal senatore Cremona nella solenne adunanza dell'Accademia dei Lincei tenuta il 10 giugno 1900, e contiene 26 Memorie pubblicate nei primi 8 anni di studio cioè dal 1861 al 1868 in vari giornali italiani e stranieri. Fra queste si trovano le celebri memorie: *Ricerche di analisi applicata alla geometria. — Sulla flessione delle superfici rigate. — Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. — Delle variabili complesse sopra un piano qualunque. — Saggio d'interpetrazione della geometria non-Euclidea. — Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.*

RONCA E BASSANI. — *Balistica esterna.* RONCA. — *Manuale di Balistica esterna.* RONCA. — *Manuale del tiro.* PESCI E RONCA. — *Abbachi per il tiro.* RONCA E PESCI. — *Abbachi generali della Balistica*	Tip. Giusti Livorno, 1902.

Non è dell'indole di questo giornale il parlare di libri tecnici, ma quelli di cui vogliamo occuparci (con la brevità che ci è imposta dalla ristrettezza dello spazio) hanno un carattere che interessa anche i giovani studiosi delle scienze esatte, perchè sono un esempio di una delle tante utili e immediate applicazioni alle cose pratiche e più comuni della vita, a cui conducono le matematiche pure. Infatti dai libri in parola appare come, partendo da teorie matematiche, si possa arrivare, con processo continuo alle più importanti applicazioni dell'alta Balistica e mano mano fino alle più semplici e pratiche regole di tiro che si insegnano ai tiratori di fucili e di cannone.

Gli autori della Balistica, cominciano per trattare un problema noto di meccanica " il movimento dei proiettili nel vuoto „ ma ne traggono occasione per parlare del tiro e per dedurre regole e formole che si applicano anche nell'aria. Segue poi un lungo ed interessante studio del problema fisico della resistenza dell'aria, problema che finora la scienza non ha ancora saputo completamente risolvere. E perciò gli A. non potendo in un trattato occuparsi di teorie più o meno complete e fondate, hanno principalmente mostrate le soluzioni sperimentali del detto problema.

Ma hanno raccolto una così lunga messa di dati e leggi sperimentali, ed hanno saputo dare all'interessante soggetto uno svolgimento così chiaro e così completo, che gli studiosi di fisica potranno rendersi un conto esatto di ciò che gli artiglieri richiedono da loro e trovare argomento di ricerche importantissime.

Agli autori lo studio in parola è poi servito per stabilire il modo di considerare la resistenza, nella soluzione del problema del moto dei proiettili nell'aria, problema a cui essi dedicano, come è naturale, la maggior parte del libro ed intorno al quale, mentre presentano molte quistioni originali, ed altre mettono sotto una luce nuova, fanno interessanti ricerche proprie che saranno assai utili ai pratici.

Inoltre la quistione generale è stabilita con notevole chiarezza e sono raccolte le soluzioni più importanti fornite finora dai vari autori. Ma questa raccolta è coordinata con un indirizzo unico e logico, in modo che il lettore non perde mai di vista lo scopo proposto, e si rende un conto chiaro delle gravi difficoltà del problema e dei vantaggi delle varie soluzioni. Sono così ricordate, e ciò interessa anche gli studiosi di matematiche, le opere dei più illustri scenziati che si occuparono di artiglieria nei due secoli scorsi e di ognuno è dato un riassunto più o meno esteso secondo l'interesse che presenta. Naturalmente quindi la maggiore ampiezza di esposizione è data all'opera oramai celebre del Siacci, e gli A. con molta cura ne mettono in mostra tutta l'importanza.

Espongono poi largamente una soluzione da essi stessi trovata, e finalmente completano il capitolo con uno studio anch'esso originale, inteso a fornire i mezzi per legare le formule del tiro con i risultati del tiro, ciò che è naturalmente di una importanza pratica notevole.

Dopo ciò seguono altri argomenti di carattere tecnico, tra i quali importa rilevare quello importantissimo relativo al modo di costruire le tavole di tiro che è trattato con speciale competenza, e finalmente il libro termina con un esteso studio sul calcolo delle probabilità.

Completa il libro stesso un Manuale di Balistica che contiene tutte le tavole numeriche che servono alla Balistica e tutti gli esempi numerici delle numerose teorie che in essa sono trattate.

Ma questo secondo libro è molto più di un semplice manuale, perchè costituisce per sè stesso un trattato in cui sono state soppresse le dimostrazioni delle formole, per sostituirle con esempi numerici. Numerose citazioni indicano i punti della Balistica dove quelle dimostrazioni si trovano e così il lettore, mentre ha tracciata chiaramente la via da seguire per risolvere ogni questione, ha il modo di rendersi conto di quello che fa. S'intende perciò che il libro, nonostante il modesto titolo, non è da confondere con gli ordinari aridi manuali, e mentre non potremo mai dire abbastanza la sua grande utilità per le applicazioni, lo riteniamo prezioso per i pratici.

Nel manuale stesso si mostra anche come i problemi della Balistica si possono risolvere senza calcoli di sorta con i metodi della Nomografia, ed a questo scopo risponde l'Album degli Abbachi generali della Balistica che costituisce un vero trionfo della Nomografia stessa.

Il " Manuale del Tiro „ si occupa di questioni assolutamente tecniche. L'autore dopo aver ricordate le formole fondamentali della Balistica ne deduce quelle che l'artiglieria impiega durante i tiri: studia poi le cause di variazioni del movimento dei proiettili e le regole di correzione, le probabilità pratiche di colpire, la ricerca degli elementi di tiro col sussidio delle tavole di tiro e degli abbachi, gli effetti dei proiettili e finalmente i metodi per eseguire e dirigere il tiro.

La Letteratura militare è ricchissima di opere sul tiro, ma nessuno aveva tentato fin'ora di riunire in un libro solo tutti gli argomenti ad esso relativo.

L'autore perciò ha fatto un libro nuovo nella forma, importante nello scopo, originale in gran parte nella sostanza e che merita la maggior considerazione.

L'esposizione delle formole del tiro è molto chiara ed ordinata. Il capitolo sulla correzione del tiro è in gran parte originale e fornisce una raccolta di regole applicabili tanto in mare che in terra, ciò che rappresenta una interessante novità. Lo studio sulle probabilità di colpire, nuovo specialmente per ciò che riguarda il tiro navale, ed in gran parte per ciò che riguarda le tolleranze nel tiro, interessa anche i profani e conduce l'autore ad elevate conseguenze sul modo di combattere. Lo studio sulla ricerca degli elementi del tiro porta l'autore ed il prof. Pesci a numerose applicazioni di Nomografia e si può affermare che mai questa nuova scienza fu così largamente adoperata per risolvere le questioni pratiche. L'album poi che contiene gli abbachi *(abbachi per il tiro)* è una vera novità e, perchè fin'ora, mai era apparso tutto un album nomografico applicato ad una particolare scienza.

Lo studio sull'effetto dei proiettili è completo ed interessante ed è arricchito da una notevole formola di perforazione dell'autore, e finalmente la raccolta delle regole per eseguire e dirigere il tiro, oltre a riuscire molto utile, perchè permette di studiare e paragonare specie di tiri differentissime, contiene le regole del tiro navale che costituisce uno studio originale mai finora tentato in una maniera così completa.

G. P.

HILBERT. — *The fundations of geometry* Autorized translation by E. J. Townsend Ph. D. Chicago. — The open court publishing company, 1902.

L'originale tedesco ebbe origine dal corso di letture fatto dall'autore sulla geometria Euclidea durante il semestre invernale 1898-99, e fu pubblicato nel 1899 in occasione della inaugurazione del monumento a Gauss-Weber in Gottinga. Poco dopo ne fu fatta una traduzione francese con aggiunte, ed ora il prof. Townsend dell'Università d'Illinois ne ha pubblicata la traduzione inglese.

Come si capisce dal titolo, il libro è un nuovo tentativo di una scelta di *postulati semplici, completi* e *indipendenti* su cui si possa fondare l'intera geometria Euclidea, che deve aggiungersi ai molti di cui è ricca la nostra letteratura, fra i quali primeggiano i *fondamenti* del nostro Veronese.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 30 settembre 1902.

SULLE PRINCIPALI

operazioni dell'analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti.

(Continuaz., e fine v. fasc. precedente)

Enumerazione delle combinazioni relative ad una matrice qualunque. — Occupiamoci ora della determinazione del numero delle combinazioni relative alla matrice T suddetta.

Indicandolo col simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_i \ldots v_j \ldots v_n \\ r_1 \ldots\ldots\ldots r_m \end{bmatrix}$, si dirà che la serie dei numeri $v_1, \ldots v_n$ è il numeratore di esso, e la serie dei numeri $r_1 \ldots r_m$ il denominatore; sarà al solito $\Sigma v = \Sigma r$; $r_i \leq m$; $r_j \leq n$. Vedremo tra breve in qual modo, dato un sistema di valori delle v ed r soddisfacenti a tali condizioni, si possa giudicare se il valore del suddetto simbolo è o non è diverso da zero: in altri termini se esiste o non esiste almeno una combinazione relativa alla matrice T. Intanto osserviamo che:

1°. Il valore del suddetto simbolo è indipendente dall'ordine di successione delle v e delle r. Infatti $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_j \ldots v_i \ldots v_n \\ r_1 \ldots\ldots\ldots r_m \end{bmatrix}$ è il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{array}{c} v_1 \ldots v_{i-1}, v_j, v_{i+1} \ldots v_{j-1}, v_i, v_{j+1} \ldots\ldots v_n \\ \hline \end{array}$$

$$T_1 \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{array}{c} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{array} \quad (*)$$

Ora se $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots a_{i\lambda}$; $a_{j\mu}, a_{j\nu}, \ldots a_{j\varrho}$ sono elementi delle verticali i^{ma} ed j^{ma} della T, appartenenti ad una combinazione ad essa relativa, sostituendo ad essi rispettivamente $a_{j\alpha}, a_{j\beta}, \ldots a_{j\lambda}$; $a_{i\mu}, a_{i\nu}, \ldots a_{i\varrho}$, si ha una combinazione relativa alla T_1 e viceversa. Pertanto il numero delle combinazioni relative alla T è uguale a quello delle combinazioni relative alla T_1 e viceversa. Segue che il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ non cambia scambiando tra loro due delle v; esso è pertanto indipendente dall'ordine di successione delle v. Analogamente si dimostra che esso è indipendente dall'ordine di successione delle r.

2°. Il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ non cambia, scambiando il nu-

---

(*) Scriveremo anche in seguito sopra ciascuna verticale ed a destra di ciascuna orizzontale di una matrice, il numero che indica quanti elementi di tal verticale od orizzontale devono appartenere a ciascuna combinazione relativa ad essa matrice.

meratore ed il denominatore. Infatti ciò equivale a ruotare di 90° la matrice T.

3°. In ogni combinazione relativa alla T si trovano v_η elementi $a_{h\eta}, a_{k\eta} \ldots a_{s\eta}$ appartenenti alla η^{ma} verticale di T; il complesso di tali elementi è una delle combinazioni v_η a v_η delle $a_{1\eta}, a_{2\eta}, \ldots a_{m\eta}$; il complesso degli elementi rimanenti appartenenti alla suddetta combinazione è una delle combinazioni relative alla matrice.

$$
\begin{array}{c|c}
v_1 \;\ldots\; v_{\eta-1} \;.\; v_{\eta+1} \;\ldots\; v_n & \\
\hline
\left\|\begin{array}{cccc}
a_{11} \ldots a_{1,\eta-1} & a_{1,\eta+1} \ldots a_{1n} \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
a_{m1} \ldots a_{m,\eta-1} & a_{m,\eta+1} \ldots a_{mn}
\end{array}\right\| &
\begin{array}{l}
r_1 \\ \vdots \\ r_h - 1 \\ \vdots \\ r_k - 1 \\ \vdots \\ r_s - 1 \\ \vdots \\ r_m
\end{array}
\end{array}
$$

Il numero di tali combinazioni è $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{\eta-1}, v_{\eta+1} \ldots v_n \\ r_1, \ldots r_h - 1, \ldots r_k - 1, \ldots r_s - 1, \ldots r_m \end{bmatrix}$. Si ha pertanto:

$$\begin{bmatrix} v_1 v_2 \ldots v_{\eta-1}, v_\eta, v_{\eta+1} \ldots v_n \\ r_1 r_2 \ldots\ldots\ldots\ldots r_m \end{bmatrix} = \sum_{h,k,\ldots s} \begin{bmatrix} v_1 v_2 \ldots v_{\eta-1}, v_{\eta+1} \ldots\ldots v_n \\ r_1, \ldots r_h - 1, \ldots r_k - 1, \ldots r_s - 1, \ldots r_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

intendendo il segno Σ esteso a tutte le combinazioni $h, k, \ldots s$, (v_η a v_η), dei numeri $1, 2, \ldots m$, e supponendo soppressi nel denominatore $r_1, \ldots, r_h - 1, \ldots r_m$ quelli fra i termini $r_h - 1, r_k - 1, \ldots r_s - 1$ che sono uguali a zero. Similmente si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots v_n \\ r_1 \ldots r_{\theta-1}, r_\theta, r_{\theta+1} \ldots r_m \end{bmatrix} = \sum_{h,k,\ldots s} \begin{bmatrix} v_1, \ldots v_h - 1, \ldots v_k - 1, \ldots v_s - 1, \ldots v_n \\ r_1 \ldots\ldots r_{\theta-1}, r_{\theta+1} \ldots\ldots r_m \end{bmatrix} \quad (23)$$

intendendo il segno Σ esteso alle combinazioni $h, k, \ldots s$, (r_θ ad r_θ) dei numeri $1, 2, \ldots n$, e supponendo soppressi nel numeratore $v_1 \ldots, v_h - 1, \ldots v_n$ quelli fra i termini $v_h - 1, v_k - 1, \ldots v_s - 1$ che sono uguali a zero.

In seguito, alle (22) e (23) daremo una forma più comoda dal punto di vista pratico; osserviamo intanto che quando uno dei numeri n ed m è uguale a 3, esse permettono di calcolare con facilità il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_3 \end{bmatrix}$. Si voglia ad es. calcolare il valore del simbolo $\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,2\,2 \\ 2\,3\,2 \end{bmatrix}$. Trattando della formazione ed enumerazione delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ e $\updownarrow 2$ si è visto che il loro numero si calcola colla formola

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \; r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{p_1} \, 2_{p_2} \\ r_1 \; r_2 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1 - p_2} = \binom{p_1}{r_2 - p_2}$$

Si ha del pari:

$$\begin{bmatrix} v_1\ v_2 \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\ v_2 \\ 1_{,q_1}\ 2_{,q_2} \end{bmatrix} = \binom{q_1}{v_1 - q_2} = \binom{q_1}{v_2 - q_2}$$

dove q_1 e q_2 è il numero degli elementi del denominatore $r_1, \dots r_m$ rispettivamente uguali ad 1 e 2.

Ora si ha applicando la (23):

$$\begin{bmatrix} 11122 \\ 232 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 00122 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 01022 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 01112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 01121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10022 \\ 23 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 10112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11012 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11021 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11111 \\ 23 \end{bmatrix}$$

e sopprimendo gli zeri nei numeratori dei termini del 2° membro

$$\begin{bmatrix} 11122 \\ 232 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 122 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 122 \\ 23 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11111 \\ 23 \end{bmatrix} =$$
$$= 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 10 = \text{trentuno.}$$

Quando uno dei numeri n ed m sia uguale a 4, il simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$ si potrà esprimere, ricorrendo alle (22) e (23), per mezzo di simboli contenenti al numeratore od al numeratore tre soli termini, (numeri), ed il valore di questi nuovi simboli si potrà facilmente calcolare; ma in seguito impareremo un processo più rapido per calcolare in ogni caso il valore di $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$.

La proprietà (1) del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$ ci permette di ridurlo, se già non lo è, alla forma

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{p_1}\ \overbrace{2 \dots 2}^{p_2} \dots\dots \overbrace{m \dots m}^{p_m} \\ \underbrace{1 \dots 1}_{q_1}\ \underbrace{2 \dots 2}_{q_2} \dots\dots \underbrace{n \dots n}_{q_n} \end{bmatrix} \qquad (\alpha)$$

che diremo *forma canonica secondaria*, disponendo gli elementi del numeratore (denominatore) in modo che percorrendolo da sinistra a destra si incontrino prima quelli uguali ad 1, poi quelli uguali a 2, ... infine quelli uguali ad m (n). Sia p_i, $(i = 1, \dots m)$, il numero degli elementi del numeratore uguali ad i e q_i, $(i = 1, \dots n)$, il numero di quelli del denominatore pure uguali ad i. Convenzionalmente scriveremo il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1\ p_2 \dots p_m \\ q_1\ q_2 \dots q_n \end{Bmatrix}$ invece del simbolo (α).

Adunque è, per convenzione,

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1\ldots 1}^{p_1}\ldots \overbrace{m\ldots m}^{p_m} \\ \underbrace{1\ldots 1}_{q_1}\ldots \underbrace{n\ldots n}_{q_n} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_m \end{Bmatrix}$$

Indicando con $i_{(p_i)}$ una successione $i\,i \ldots i$ di p_i numeri uguali ad i si ha pure:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \ldots m_{(p_m)} \\ 1_{(q_1)} \ldots n_{(q_n)} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}$$

Siccome tra le $v_1 \ldots v_n$ non sempre se ne trovano di quelle uguali ad i, potrà darsi che sia $p_i = 0$; così pure può darsi che qualcuna delle q sia zero. Ogni qualvolta sia $p_i \neq 0$ e $p_{i+1} = p_{i+2} = \ldots = p_m = 0$; $q_j \neq 0$ e $q_{j+1} = q_{j+2} = \ldots = q_n = 0$, scriveremo $\begin{Bmatrix} p_1\, p_2 \ldots p_i \\ q_1\, q_2 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ invece di $\begin{Bmatrix} p_1\, p_2 \ldots p_i\, 0 \ldots 0 \\ q_1\, q_2 \ldots q_j\, 0 \ldots 0 \end{Bmatrix}$. In $\begin{Bmatrix} p_1\, p_2 \ldots p_i \\ q_1\, q_2 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ è sempre $p_i \neq 0$ e $q_j \neq 0$; ciò però non esclude che alcune delle $p_1 \ldots p_{i-1}$ e $q_1 \ldots q_{j-1}$ possono essere zero. Ogni simbolo della forma $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ si dirà ridotto a *forma canonica primaria*; la sua caratteristica è che nè il numeratore nè il denominatore contengono zeri finali.

L'ipotesi $i = m$; $j = n$ corrisponde adunque al fatto che il numeratore ed il denominatore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}$ non contengono zeri finali. Le condizioni alle quali devono soddisfare le v ed r del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$, si traducono facilmente in condizioni alle quali devono soddisfare le p e le q del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$. Intanto dev'essere: $i \leq m$; $j \leq n$. La condizione $\Sigma\, v = \Sigma\, r$ diventa $p_1 + 2p_2 + \ldots + ip_i = q_1 + 2q_2 + \ldots + jq_j$. Il numero delle v è $p_1 + \ldots + p_i$, quello delle r è $q_1 + \ldots + q_j$; pertanto dev'essere $p_1 + \ldots + p_i = n$; $q_1 + \ldots + q_j = m$; quindi ancora $p_r \leq n$; $q_s \leq m$, cioè ogni p non può superare n ed ogni q non può superare m.

È chiaro che se $i = m$ ed $j = n$, i simboli $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}'$ non differiscono. Osserviamo ora che:

1°. Il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ non è indipendente dall'ordine di successione delle p o delle q. Ciò è evidente.

2°. Esso non cambia scambiando il numeratore col denominatore cioè:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} q_1 \dots q_j \\ p_1 \dots p_i \end{Bmatrix}'.$$

Ciò si deduce dalla proprietà 2ª del simbolo $\begin{bmatrix} r_1 \dots r_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$.

Occupiamoci ora di qualche trasformazione del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ nei casi 1° $i = m, j \mathrel{\dot{=}} n$: 2° $i \mathrel{\dot{=}} m, j = n$; 3° $i = m, j = n$. Sia dapprima $i = m$ ed $j \mathrel{\dot{=}} n$; sarà: $p_m = 0$. Allora affinchè $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_m \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ sia diverso da zero, dev'essere $q_1 = q_2 = \dots = q_{p_m - 1} = 0$.

Infatti il supporre p_m diverso da zero equivale a supporre che in ogni combinazione relativa alla matrice T si trovino tutti gli elementi di p_m verticali, perciò nessuna orizzontale potrà contenere meno di p_m elementi. cioè non vi sono orizzontali contenenti $1, 2, \dots p_m - 1$ elementi di ciascuna combinazione; pertanto $q_1 = \dots = q_{p_m - 1} = 0$.

Sicchè supponendo 1° $p_m \mathrel{\dot{=}} 0$; 2° che il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_m \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ sia diverso da zero, potremo scriverlo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots\dots\dots\dots p_m \\ 0 \dots 0, q_{p_m}, q_{p_m+1}, \dots q_j \end{Bmatrix}'$, il quale ridotto a forma canonica secondaria diventa:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots\dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{m \dots m}^{p_m} \\ \underbrace{p_m \dots p_m}_{q_{p_m}} \quad \underbrace{j \dots j}_{q_j} \end{bmatrix}$$

Applicando a questo la proprietà 3ª del simbolo $\begin{bmatrix} r_1 \dots r_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$, possiamo sopprimere l'ultimo elemento del numeratore e scrivere:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots\dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{m \dots m}^{p_m} \\ \underbrace{p_m \dots p_m}_{q_{p_m}} \quad \underbrace{j \dots j}_{q_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots\dots\dots\dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{m \dots\dots m}^{p_m - 1} \\ \underbrace{p_m - 1, \dots p_m - 1}_{q_{p_m}} \dots \underbrace{j - 1 \dots j - 1}_{q_j} \end{bmatrix}.$$

Infatti, essendo $\Sigma q = m$ e quindi $q_{p_m} + \dots + q_j = m$, le combinazioni m ad m degli elementi del denominatore $\underbrace{p_m \dots p_m}_{q_{p_m}} \dots \underbrace{j \dots j}_{q_j}$ si riducono ad una che si ottiene prendendoli tutti. Nel nuovo simbolo ottenuto (nel quale il numeratore termina con $p_m - 1$ elementi uguali ad m) possiamo ancora sopprimere l'ultimo elemento m del numeratore, e così via possiamo continuare finchè, dopo aver soppresso tutti gli elementi del numeratore uguali ad m, otteniamo il simbolo:

$$\left[\begin{matrix} \overbrace{1\dots1}^{p_1} & \dots\dots & \dots & \overbrace{m-1,\dots,m-1}^{p_{m-1}} \\ \underbrace{0\dots0}_{q_{p_m}} & \underbrace{1\dots1}_{q_{p_m+1}} & \dots & \underbrace{j-p_m,\dots,j-p_m}_{q_j} \end{matrix}\right]$$

il quale, ridotto a forma canonica primaria, diventa:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \dots\dots\dots\dots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\dots(q_j)_{j-p_m} \end{Bmatrix}'$$

che contiene nel denominatore $j-p_m$ elementi (numeri) aventi rispettivamente il valore $q_{p_m+1}, q_{p_m+2}, \dots q_j$. (*) Adunque, se $p_m \neq 0$, è:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_m \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} p_1 \dots\dots\dots\dots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\dots(q_j)_{j-p_m} \end{Bmatrix}' \qquad (\beta_m)$$

Adunque il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_m \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$, nel quale $p_m \neq 0$, si può trasformare in un altro analogo, tale che il numeratore contenga soltanto gli elementi $p_1 \dots p_{m-1}$.

Analogamente, se $i \neq m$ e $j = n$, sarà $q_n \neq 0$, e si avrà:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_n \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} (p_{q_n+1})_1\,(p_{q_n+2})\dots(p_i)_{i-q_n} \\ q_1 \dots\dots\dots\dots q_{n-1} \end{Bmatrix}' \qquad (\beta_n)$$

E se $i = m$ ed $j = n$, vale a dire se $p_m, q_n \neq 0$, applicando dapprima la trasformazione (β_m), si ha:

$$\begin{Bmatrix} p_1 p_2 \dots p_m \\ q_1 q_2 \dots q_n \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} p_1 \quad p_2 \quad \dots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\dots(q_n)_{n-p_m} \end{Bmatrix}'$$

Essendo $p_1 + \dots + p_{m-1} + p_m = n$ sarà $p_1 + \dots + p_{m-1} = n - p_m$, cioè il simbolo contenuto nel 2° membro è tale che la somma dei termini del numeratore è uguale al numero dei termini del denominatore; possiamo adunque applicare ad esso la trasformazione (β_n) ed abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \dots\dots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1 \quad (q_n)_{n-p_m} \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} (p_{q_n+1})_1\,(p_{q_n+2})_2\dots(p_{m-1})_{m-q_n-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\dots(q_{n-1})_{n-p_m-1} \end{Bmatrix}'$$

(*) Indicando uno di essi con (q_{p_m+r}) vogliamo appunto specificare che esso occupa il posto r^{mo} e che il suo valore è q_{p_m+r}.

Come si vede gli elementi del numeratore del 2° membro sono $(p_{q_n+1})_1$ ecc.... Per comprendere ciò si rifletta che nella trasformazione β_n il 1° elemento del numeratore del 2° membro si ottiene apponendo a p l'indice q_n+1, il quale si forma aggiungendo un'unità a q_n, cioè all'ultimo elemento del denominatore del 1° membro. Ora nel simbolo che costituisce il 2° membro dell'ultima identità scritta (la quale si ottiene applicando a tal simbolo la trasformazione β_n), gli elementi del denominatore sono indicati con $(q_{p_m+1})_1 \ldots (q_n)_{n-p_m}$, ma i loro valori rispettivi sono $q_{p_m+1}, \ldots q_n$: pertanto l'indice da apporre a p per avere il 1° elemento del numeratore del 2° membro sarà q_n+1. E volendo indicare che l'elemento così ottenuto occupa il 1° posto lo indicheremo con (p_{q_n+1}). Si comprende parimenti come gli altri elementi siano appunto $(q_{p_m+2})_2$ ecc.....

Risulta dalle due ultime identità:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} (p_{q_n+1})_1\,(p_{q_n+2})_2 \ldots (p_{m-1})_{m-q_n-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2 \ldots (q_{n-1})_{n-q_m-1} \end{Bmatrix} \qquad (\beta_{mn})$$

la quale serve a trasformare il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}$ quando p_m e q_n non sono zero.

Risulta da quanto si è detto che al simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ si può applicare 1° la trasformazione (β_m) se la somma degli elementi (numeri) del denominatore è uguale al numero di quelli del numeratore: 2° la (β_n) se la somma degli elementi del numeratore è uguale al numero di quelli del denominatore; 3° la (β_{mn}) se sono soddisfatte ambedue le condizioni precedenti (cioè se $i=m; j=n$ e $p_m, q_n \neq 0$).

Esempi. — Si consideri il simbolo $\begin{Bmatrix} 222 \\ 00111 \end{Bmatrix}'$. Si ha:

$$\sum_1^3 ip_i = \sum_1^5 iq_i \text{ cioè } 2.1+2.2+2.3=0.1+0.2+1.3+1.4+1.5.$$

Inoltre

$$2+2+2=6, \quad \text{cioè} \quad n=6; \quad 0+0+1+1+1=3 \quad \text{cioè} \quad m=3;$$

si vede che la somma degli elementi del denominatore è uguale al numero degli elementi del numeratore, quindi si può applicare la trasformazione (β_m), ritenendo $p_1=2$, $p_2=2$, $p_3=2$; $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=1$, $q_4=1$, $q_5=1$. Si ha pertanto

$$\begin{Bmatrix} 222 \\ 00111 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 22 \\ 111 \end{Bmatrix}'$$

Come altro esempio si consideri il simbolo $\begin{Bmatrix} 000203 \\ 00042 \end{Bmatrix}'$. Si ha $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=0$, $p_4=2$, $p_5=0$, $p_6=3$; $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_4=0$, $q_5=2$

quindi $\Sigma\, ip_i = \Sigma\, iq_i$; $m = \Sigma\, q = 6$; $n = \Sigma\, p = 5$. Vedesi che la somma degli elementi del numeratore è uguale al numero di quelli del denominatore e la somma degli elementi del denominatore è uguale al numero di quelli del numeratore. Si può adunque applicare la trasformazione (β_{mn}). Si ha:

$$\left\{ \begin{matrix} 000203 \\ 00042 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 020 \\ 4 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 02 \\ 4 \end{matrix} \right\}' \quad (*)$$

Si consideri da ultimo il simbolo $\left\{ \begin{matrix} 0201 \\ 202 \end{matrix} \right\}'$ per il quale sono soddisfatte le solite condizioni: si ha $n = 3$; $m = 4$; il numero degli elementi del numeratore è 4, quello degli elementi del denominatore è 3; si può adunque applicare la trasformazione (β_{mn}). Ciò facendo si ha:

$$\left\{ \begin{matrix} 0201 \\ 202 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0201 \\ 203 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}.$$

Il simbolo $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ non ha veramente alcun significato. Tuttavia è facile convincersi che $\left\{ \begin{matrix} 0201 \\ 202 \end{matrix} \right\} = 1$. Infatti il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 2 & 4 & \\ \hline & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 3 \\ & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 3 \end{array}$$

è appunto $\left[\begin{matrix} 224 \\ 1133 \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} 0201 \\ 202 \end{matrix} \right\}$. Ma di tale combinazione evidentemente non ne esiste che una sola ed è la $a_{13}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}$. Devesi adunque ritenere

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1.$$

Osserviamo ancora che non può esistere un simbolo $\left\{ \quad \right\}$ con valore diverso da zero, avente il solo numeratore od il solo denominatore costituito da zeri. Se ad esempio fosse $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ q_1 \ldots q_i \end{matrix} \right\} \neq 0$, sarebbe $0 = \Sigma\, iq_i$, il che è assurdo a meno che non sia $q_1 = q_2 \ldots = q_i = 0$. In tal caso il simbolo si riduce alla forma $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ e vale 1.

(*) Gli zeri finali del numeratore e denominatore di ogni simbolo $\left\{ \quad \right\}'$, possono evidentemente sopprimersi.

Proponiamoci ora la seguente

Questione. — Dati due sistemi di numeri $r_1, \ldots v_n; r_1 \ldots r_m$ soddisfacenti alle condizioni $\Sigma v = \Sigma r$; $v_h \leq m$; $r_k \leq n$, esiste(?) almeno una combinazione relativa alla matrice

$$T \equiv \begin{array}{c|c} v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_n & \\ \hline a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} & r_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} & r_m \end{array}$$

Abbiamo imparato a suo tempo non solo a giudicare dell'esistenza di una siffatta combinazione, ma anche se esistono combinazioni relative alla matrice T, a costruirne almeno una. Qui trattiamo la sola questione dell'esistenza di una combinazione, riferendoci al simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$. Se una combinazione esiste il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ dev'essere almeno uguale ad 1. Riducendolo a forma canonica primaria avremo un certo simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$. Si tratta adunque di vedere se dati due sistemi di numeri $p_1 \ldots p_i \ldots; q_1 \ldots q_j$, (i quali si costruiscono subito dati i sistemi $v_1 \ldots v_n; r_1 \ldots r_m$), soddisfacenti alle condizioni $\sum_1^i h p_h = \sum_1^j k q_k$; $p_h \leq m$; $q_k \leq n$; $m = \Sigma q$; $n = \Sigma p$, il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ è zero od è maggiore di zero.

Per risolvere tale importante questione occorrono alcune considerazioni preliminari.

Supponiamo data una successione (che chiameremo talvolta anche serie) di numeri positivi interi non tutti nulli $\eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, ed un intero positivo $\lambda \neq 0$, tale che $\lambda \leq \alpha + \beta + \ldots + \eta$. Diremo che α è il 1° elemento della successione, β il 2°, γ il 3° ecc. Consideriamo i numeri λ, $\lambda - \alpha$, $\lambda - \alpha - \beta$, $\lambda - \alpha - \beta - \gamma$, $\lambda - \alpha - \beta - \gamma - \delta$ ecc. e facciamoli corrispondere rispettivamente ai numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$. Percorrendo la successione λ, $\lambda - \alpha$, $\lambda - \alpha - \beta, \ldots$ da destra a sinistra incontreremo un numero che non supererà il suo corrispondente della successione $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Infatti se fosse sempre $\lambda > \alpha$; $\lambda - \alpha > \beta$: $\lambda - \alpha - \beta > \gamma$ ecc. . . . sarebbe anche $\lambda > \alpha$; $\lambda > \alpha + \beta$; $\lambda > \alpha + \beta + \gamma \ldots$ infine $\lambda > \alpha + \beta + \ldots + \eta$, contrariamente all'ipotesi $\lambda \leq \alpha + \ldots + \eta$ precedentemente stabilita. Supponiamo ad esempio che sia $\lambda - \alpha - \beta - \gamma < \delta$. Allora la successione di numeri

$$\eta, \zeta, \varepsilon + \lambda - \alpha - \beta - \gamma, \gamma + \delta - (\lambda - \alpha - \beta - \gamma), \beta, \alpha, 0$$

si dirà *successione trasformata* della $\eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ mediante il numero λ. Scriviamo le due successioni, cioè la $\eta, \ldots, \alpha$ e la sua trasformata mediante λ in modo che i primi, secondi, ... elementi di ambedue sieno in colonna (gli elementi si contano da destra a sinistra)

$$\begin{array}{llllll} & & \lambda-\alpha-\beta-\gamma<\delta & ;\ \lambda-\alpha-\beta>\gamma & ;\ \lambda-\alpha>\beta & ;\ \lambda>\alpha \\ \hline \eta, \zeta, & \varepsilon, & \delta, & \gamma & ,\ \beta & ,\ \alpha \\ \eta, \zeta, & \varepsilon+\{\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)\}, & \gamma+\delta-\{\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)\}, & \beta & ,\ \alpha & ,\ 0 \end{array}$$

Le operazioni che permettono di dedurre dalla $\ldots\gamma, \beta, \alpha$ la sua trasformata mediante λ, sono le seguenti. Dal numero λ si sottraggono successivamente i numeri $0, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ fino ad avere il minimo resto intero positivo, anche nullo, possibile. Nelle ipotesi fatte, potremo sottrarre α, β, γ, ma non δ. Allora i numeri della trasformata corrispondenti ad α, β, γ sono $0, \alpha, \beta$ (cioè lo zero e quelli sottratti eccettuato l'ultimo). Per avere il numero della trasformata corrispondente a δ, si toglie il suddetto resto minimo dalla somma del numero δ col precedente γ della successione data; per avere il numero corrispondente ad ε, si aggiunge ad ε il suddetto resto minimo; infine i numeri corrispondenti a quelli seguenti ε, cioè $\zeta, \eta \ldots$ sono ancora $\zeta, \eta \ldots$

Conservando relativamente ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ le ipotesi suddette, considereremo quale trasformata della successione

$$\delta \qquad\qquad , \gamma, \quad \beta, \quad \alpha$$

la seguente

$$\lambda-(\alpha+\beta+\gamma) \mid \gamma+\delta-\{\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)\}, \quad \beta, \quad \alpha, \quad 0.$$

L'elemento $\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)$ della trasformata si dirà *eccedente* ed useremo separarlo dal contiguo con un tratto verticale. Adunque la trasformata di una successione ha un termine eccedente, quando per avere il massimo intero contenuto in λ occorre sommare tutti i termini della successione, eccettuato l'ultimo. Il termine eccedente è poi sempre uguale al più piccolo dei resti positivi $\lambda-\alpha$, $(\lambda-\alpha)-\beta$, $(\lambda-\alpha-\beta)-\gamma, \ldots$, cioè a quel resto che abbiamo dianzi chiamato minimo.

La trasformata di $\delta, \gamma, \beta, \alpha$, avente per termine eccedente $\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)$, è evidentemente la trasformata senza termini eccedenti di $0, \delta, \gamma, \beta, \alpha$.

Esempi. — La serie trasformata della

$$4\,2\,1\,1\,0\,1\,1\,0$$

mediante il numero 3 è la

$$4\,2\,2\,0\,1\,1\,0\,0.$$

Per ottenerla togliamo dal numero 3 successivamente gli elementi 1°, 2°, ... della serie data dicendo: $3-0=3$; $3-1=2$; $2-1=1$;

$1-0=1$; $1-1=0$. Siamo così arrivati al quinto termine, 1, della serie data, e l'ultimo resto (minimo) positivo ottenuto è zero. Pertanto i primi cinque elementi della trasformata sono lo zero e poi alla sua sinistra i primi quattro elementi 0 1 1 0 della serie data. L'elemento della trasformata corrispondente al sesto della serie data, il quale è 1, si ottiene sommando tal sesto elemento col quinto, e togliendo dalla somma il resto minimo 0; esso è dunque 2.

L'elemento corrispondente al settimo della serie data, il quale è 2, si ottiene sommando tal elemento col resto minimo 0: esso adunque è 2. L'elemento ottavo della trasformata coincide coll'elemento ottavo della serie data.

Come altro esempio la trasformata della

$$4\,2\,1\,1\,2$$

mediante 5, è la

$$5\,2\,1\,2\,0.$$

Per costruirla si è detto: $5-2=3$; $3-1=2$; $2-1=1$, che è il resto minimo. Perciò i termini corrispondenti ai primi tre della serie data sono 0, 2, 1. Il termine corrispondente al 4° (un 2), sarà $2+1-1$, ossia 2, e si ottiene sommando tal quarto termine col precedente e diminuendo la somma del resto minimo; il termine corrispondente al 5° sarà $4+1=5$, e si ottiene aggiungendo il resto minimo al 5° termine della serie data.

La trasformata della

$$5\,1\,1$$

mediante 5, è la

$$3\mid 3\,1\,0$$

Si è detto: $5-1=4$; $4-1=3$, che è il resto minimo; quindi i termini corrispondenti ai primi due della serie data sono 0, 1 ecc.... Poichè per avere il massimo intero contenuto in 5 occorre sommare tutti gli elementi della serie data, eccettuato l'ultimo, (è un altro 5), la trasformata avrà un termine eccedente uguale al resto minimo 3.

Se $\lambda \leq \alpha$, allora il numero λ è il resto minimo, e la trasformata della

$$\ldots \delta, \gamma, \beta, \qquad \alpha$$

è la

$$\ldots \delta, \gamma, \beta+\lambda, \ \alpha-\lambda.$$

Ad es. la trasformata della

$$2\,3\,1\,4$$

mediante 3, è la

$$2\,3\,4\,1.$$

Un'altra norma, meno pratica, ma teoricamente non priva di importanza, per costrurre la serie trasformata di una data, è la seguente. Sia ad es. $\lambda-\alpha-\beta-\gamma$ il più piccolo dei resti $\lambda-0, \lambda-\alpha, \lambda-\alpha-\beta\ldots.$

Se $\lambda > \alpha$, chiameremo i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \lambda - \alpha - \beta - \gamma, 0, 0$ rispettivamente $1^o, 2^o, 3^o, 4^o, 5^o$, diminutore, e li indicheremo con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$. Sono questi i numeri che figurano quali sottraendi nelle differenze $\lambda - \alpha$, $(\lambda - \alpha) - \beta$, $(\lambda - \alpha - \beta) - \gamma$, $\delta - (\lambda - \alpha - \beta - \gamma)$, $\varepsilon - 0$, $\zeta - 0$. Se invece $\lambda \leq 0$, si assumano quali $1^o, 2^o, 3^o \ldots$ diminutore i numeri $\lambda, 0, 0, 0 \ldots$. Si ha allora che se σ_i è il termine i^{mo} della serie data, l'i^{mo} della trasformata è $\sigma_i - \delta_i + \delta_{i-1}$, ritenendo $\delta_0 = 0$, se $i = 0$. Se $\lambda > \alpha$, ed il numero dei termini della serie data tolti successivamente da λ per avere il resto minimo è ν, i termini $(\nu + 3)^{mo}$, $(\nu + 4)^{mo}$ ecc... della trasformata sono uguali ai termini corrispondenti della serie data. Se la trasformata ha un termine eccedente, esso è sempre uguale all'ultimo dei diminutori $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, se questo è diverso da zero; in caso contrario è uguale al 1^o diminutore diverso da zero incontrato percorrendo la serie dei diminutori da destra a sinistra.

Sono conseguenza della definizione di trasformata di una serie data le seguenti proprietà:

1^o la somma dei termini di una serie di numeri è uguale a quella dei termini di una sua trasformata qualunque.

2^o se una serie di numeri termina con ν zeri, per costrurre una sua trasformata si può supporre che tali zeri manchino, costrurre la trasformata della serie che si ottiene dalla data sopprimendo tali zeri, e scriverli poi di seguito ai termini di tal trasformata.

Se di una successione $\alpha_\theta \alpha_{\theta-1} \ldots \alpha_1$ di θ elementi si fa la trasformata mediante λ, di questa la trasformata mediante μ, di questa la trasformata mediante ν ecc..., l'ultima trasformata ottenuta si dirà la trasformata di $\alpha_\theta \ldots \alpha_1$ mediante il sistema di numeri $\alpha, \mu, \nu, \ldots$ e si diranno elementi eccedenti di essa tutti quelli che non occupano i primi θ posti (contati da destra a sinistra). Useremo separare tali elementi eccedenti dagli altri con un tratto verticale. Sono notevoli le seguenti proprietà:

1^o. La trasformata di $\alpha_\theta \ldots \alpha_1$ mediante il sistema di numeri $\lambda, \mu, \nu \ldots$, non dipende dall'ordine di successione di essi.

2^o. Se $\beta_\eta \ldots \beta_1$ sono gli elementi della trasformata di $\alpha_\theta \ldots \alpha_1$ mediante il sistema $\lambda, \mu, \nu \ldots$, $(\eta \geq \theta)$, si ha:

$$(\eta - \theta + 1)\alpha_\theta + (\eta - \theta + 2)\,\alpha_{\theta-1} + \ldots + \eta\alpha_1 - (\lambda + \mu + \nu + \ldots) = \\ = \beta_\eta + 2\beta_{\eta-1} + 3\beta_{\eta-2} + \ldots + \eta\beta_1$$

ossia

$$(\eta - \theta)\,(\alpha_\theta + \alpha_{\theta-1} + \ldots + \alpha_1) + (\alpha_\theta + 2\alpha_{\theta-1} + \ldots + \theta\alpha_1) - (\lambda + \mu + \nu \ldots) = \\ = \beta_\eta + 2\beta_{\eta-1} + \ldots + \eta\beta_1$$

e se $\eta = \theta$, vale a dire se la trasformata non ha elementi eccedenti:

$$\alpha_\theta + 2\alpha_{\theta-1} + \ldots + \theta_{\alpha_1} - (\lambda + \mu + \nu \ldots) = \beta_\theta + 2\beta_{\theta-1} + \ldots + \theta\beta_1.$$

Tali proprietà sussistono anche se il sistema di numeri $\lambda \ldots$, comprende il solo numero λ.

Esempio. — Facendo la trasformata di 5, 1, 1 mediante il sistema 5, 5 si hanno le

$$\begin{array}{r|l}
 & 5\,1\,1 \text{ successione data} \\
3 & 3\,1\,0 \text{ trasformata della precedente mediante } 5 \\
1\,5 & 1\,0\,0 \quad \text{"} \qquad \text{"} \qquad \text{"} \qquad \text{"} \qquad 5
\end{array}$$

La trasformata ottenuta è la 15 | 100 che ha due termini eccedenti. Tra breve avremo occasione di esaminare altri esempi.

Ed ora torniamo alla questione che ci eravamo proposti. Conoscendo i valori di $p_1, \ldots p_i,\ q_1, \ldots q_i$ dobbiamo giudicare se $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_i \end{Bmatrix}' \geq 0$. Riducendo tal simbolo a forma canonica secondaria, basterà giudicare se

$$\Bigg[\begin{matrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} \\ \underbrace{1 \ldots 1}_{q_1} \end{matrix} \begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \begin{matrix} \overbrace{i \ldots i}^{p_i} \\ \underbrace{j \ldots j}_{q_i} \end{matrix}\Bigg] \geq 0$$

ovvero ancora, se esistono o no combinazioni relative alla matrice

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & i & \ldots & i & \\
\hline
 & a_{11} & \ldots & a_{1,p_1} & \ldots & a_{1,n-p_i+1} & \ldots & a_{1n} & 1 \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & a_{q_1,1} & \ldots & a_{q_1,p_1} & \ldots & a_{q_1,n-p_i+1} & \ldots & a_{q_1,n} & 1 \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & j \\
 & a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mn} & j
\end{array}$$

Ricordiamo ora quanto abbiamo già detto riguardo alla questione(*) se e come data la matrice

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & v_1 & \ldots & v_n & \\
\hline
 & a_{11} & \ldots & a_{1n} & r_1 \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} & r_m
\end{array}$$

si possa formare almeno una combinazione ad essa relativa, e ragioniamo, per maggior semplicità, su un caso particolare. Si voglia ad es. vedere se

$$\begin{bmatrix} 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5 \\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \end{bmatrix} \geq 0.$$

(*) È stata trattata al § 5° prima dell'argomento: *Formazione ed enumerazione delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{mn}$*.

Si ha relativamente a tal simbolo: $v_1=1$, $v_2=1$, $v_3=2$, $v_4=2$, $v_5=3$, $v_6=3$, $v_7=3$, $v_8=4$, $v_9=4$, $v_{10}=4$, $v_{11}=5$, $v_{12}=5$; $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$, $r_4=3$, $r_5=5$, $r_6=5$, $r_7=5$, $r_8=5$, $r_9=5$, $r_{10}-5$. Formiamo il quadro Q_0 di numeri

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & & & & 11 & \underline{12}
\end{array}\right\} \equiv Q_0$$

di $n=12$ verticali, delle quali l'i^{ma} contiene v_i elementi uguali ad i. Sopprimendo in esso l'elemento sottolineato, cioè $r_1=1$ elementi appartenenti ad r_1 verticali diverse e tali che nessuna delle rimanenti contenga un numero di verticali maggiore, (la qual operazione potrà in generale farsi in più di un modo: per es. nel nostro caso si potrebbe sopprimere l'ultimo elemento 11 della penultima verticale), abbiamo un altro quadro Q_1.

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & & & & \underline{11} &
\end{array}\right\} \equiv Q_1 .$$

Operando su Q_1 come abbiamo operato su Q_0, ma relativamente al numero r_2, (cioè sopprimendo l'elemento sottolineato di Q_1), abbiamo il quadro

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & \underline{11} & \underline{12}
\end{array}\right\} \equiv Q_2 .$$

E da questo, poichè $r_3=3$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & &
\end{array}\right\} \equiv Q_3 .$$

Da questo, essendo $r_4=3$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & \underline{11} & \underline{12}
\end{array}\right\} \equiv Q_4 .$$

Da questo, essendo $r_5 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \underline{11} & \underline{12} \\ & & & & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & & & & & \end{array}\right\} \equiv Q_5 .$$

Da questo, essendo $r_6 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & & 3 & 4 & 5 & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & 11 & 12 \end{array}\right\} \equiv Q_6 .$$

Da questo, essendo $r_7 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \underline{11} & \underline{12} \\ & & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & & & & & & & \end{array}\right\} \equiv Q_7 .$$

Da questo, essendo $r_8 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & \ldots\ldots \end{array}\right\} \equiv Q_8 .$$

Da questo, essendo $r_9 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \equiv Q_9 .$$

Ed operando su Q_9, relativamente al numero $r_{10} = 5$, non rimane più alcun elemento. Sappiamo già che ciò accadendo esiste almeno una combinazione relativa alla matrice:

$$\begin{array}{cc} 1\,1\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,5\,5 & \\ \mu \equiv \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{10,1} & \cdots\cdots\cdots & a_{10,12} \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

e sappiamo pure che considerando i gruppi di numeri

$\gamma_1 \equiv 12$ (dodici)	di $r_1 = 1$ elementi
$\gamma_2 \equiv 11$ (undici)	" $r_2 = 1$ "
$\gamma_3 \equiv 11, 12$	" $r_3 = 2$ "

$$
\begin{array}{lllllllll}
\gamma_4 \equiv & 8, & 9, & 10 & & \text{di} & r_4 = 3 & \text{elementi} \\
\gamma_5 \equiv & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 & \text{"} & r_5 = 5 & \text{"} \\
\gamma_6 \equiv & 5, & 6, & 7, & 11, & 12 & \text{"} & r_6 = 5 & \text{"} \\
\gamma_7 \equiv & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 & \text{"} & r_7 = 5 & \text{"} \\
\gamma_8 \equiv & 3, & 4, & 5, & 11, & 12 & \text{"} & r_8 = 5 & \text{"} \\
\gamma_9 \equiv & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 & \text{"} & r_9 = 5 & \text{"} \\
\gamma_{10} \equiv & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & \text{"} & r_{10} = 5 & \text{"}
\end{array}
$$

dei quali l'i^{mo} contiene gli elementi soppressi in Q_{i-1} per avere Q_i, $(i = 1, 2, \ldots 9)$, la $a_{1,13}\, a_{2,11}\, a_{3,11}\, a_{3,12}\, a_{48}\, a_{49}\, a_{4,10}\, a_{58}\, a_{59}\, a_{5,10}\, a_{5,11}\, a_{5,12}\, a_{65}\, a_{66}\, a_{67}\, a_{6,11}\, a_{6,12}\, a_{76}\, a_{77}\, a_{78}\, a_{79}\, a_{7,10}\, a_{83}\, a_{84}\, a_{85}\, a_{8,11}\, a_{8,12}\, a_{96}\, a_{97}\, a_{98}\, a_{99}\, a_{9,10}\, a_{10,1}\, a_{10,2}\, a_{10,3}\, a_{10,4}\, a_{10,5}$ è una delle combinazioni relative alla matrice μ.

Adunque

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,5\,5 \\ 1\,1\,2\,3\,5\,5\,5\,5\,5\,5 \end{bmatrix} > 0.$$

Formiamo ora relativamente al quadro Q_0 la successione di numeri

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2$$

che supporremo contati da destra a sinistra. Il 1º elemento di essa e il numero (2) delle verticali di Q_0 contenenti cinque elementi (cinque è il massimo valore di r_i), il 2º è il numero delle verticali contenenti quattro elementi ecc.

Immaginando invece i suddetti numeri contati da sinistra a destra, potremmo dire che l'i^{mo} di essi rappresenta il numero delle verticali di Q_0 contenenti i elementi. Tal numero sarebbe zero, quando in Q_0 non vi fossero verticali di i elementi.

Costruendo le analoghe successioni relativamente ai quadri Q_1, $Q_2, \ldots Q_9$ si hanno le

$$
\begin{array}{rrrrr}
2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\
2 & 2 & 3 & 5 & 0 \\
2 & 2 & 5 & 3 & 0 \\
2 & 2 & 8 & 0 & 0 \\
2 & 7 & 3 & 0 & 0 \\
4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
7 \mid 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 \mid 5 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ora è agevole constatare che l'ultima di esse è la trasformata della $(1^a, 2, 2, 3, 3, 2)$, mediante il sistema di numeri $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 5$, $r_6 = 5$, $r_7 = 5$, $r_8 = 5$, $r_9 = 5$, e che se si costruisce la trasformata di tal trasformata $7 \mid 50000$ mediante il numero $r_{10}=5$, si ottiene la

$$12 \mid 00000$$

nella quale i termini non eccedenti sono tutti uguali a zero. Questa legge è generale. Infatti se $\ldots \eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, è la successione di numeri relativa ad un dato quadro Q_r, e se ρ è il numero degli elementi di quella verticale che ne contiene in maggior numero, α è il numero delle verticali di ρ elementi, β il numero di quelle di $\rho-1$ elementi ecc...,(non sempre le $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ saranno tutte diverse da zero), operando su Q_r relativamente ad un certo numero λ, si otterrà un altro quadro Q_o, ed è facile convincersi che il numero delle verticali di Q_o contenenti i elementi sarà $\sigma_i - \delta_i + \delta_{i-1}$, dove σ_i è il numero di quelle di Q_r contenenti i elementi, e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sono il 1°, 2°, 3°... diminutore relativi alla successione... $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, formati colla legge che abbiamo enunciata parlando della trasformata di una successione data.

Tornando al nostro caso particolare si vede che la successione di numeri 2, 2, 3, 3, 2 relativa al quadro Q_o, è il numeratore del simbolo $\left\{\begin{matrix}2\,2\,3\,3\,2\\2\,1\,1\,0\,6\end{matrix}\right\}'$ il quale si ottiene dal simbolo

$$\left[\begin{matrix}1\,1\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,5\,5\\1\,1\,2\,3\,5\,5\,5\,5\,5\,5\end{matrix}\right]$$

riducendolo a forma canonica primaria.

La conclusione alla quale arriviamo è adunque la seguente: *volendo giudicare se*

$$\left\{\begin{matrix}p_1 \ldots p_l\\q_1 \ldots q_l\end{matrix}\right\}' \leq 0$$

si tenti di costrurre la trasformata della successione $p_1 \ldots p_l$ *mediante il sistema di numeri*

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{q_1}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{q_2} \ldots \underbrace{j \ldots j}_{q_l}$$

se i termini non eccedenti di essa sono tutti zero, si conclude:

$$\left\{\begin{matrix}p_1 \ldots p_l\\q_1 \ldots q_l\end{matrix}\right\}' > 0.$$

Se ciò non accade, il valore del suddetto simbolo è zero.

Esempio. — Si vuol giudicare se

$$\left\{\begin{matrix}4\,2\,1\,1\,0\,0\,0\,2\\1\,1\,1\,0\,5\end{matrix}\right\}' \geq 0.$$

Facendo la trasformata della successione 42110002 mediante il sistema di numeri 12355555, si ha:

		4	2	1	1	0	0	0	2
		4	2	1	1	0	0	1	1
		4	2	1	1	0	1	1	0
		4	2	2	0	1	1	0	0
		5	3	0	1	1	0	0	0
		8	0	1	1	0	0	0	0
	3	5	1	1	0	0	0	0	0
	6	3	1	0	0	0	0	0	0
1	8	1	0	0	0	0	0	0	0

Tra i termini non eccedenti di tal trasformata, che è la

$$1\,|\,8\,|\,10000000$$

ve ne è uno diverso da zero; pertanto

$$\left\{\begin{matrix}42\,11\,0002\\ 11105\end{matrix}\right\}' = 0.$$

Osserviamo ancora che praticamente nel formare la trasformata di una successione mediante un sistema di numeri, gli zeri finali delle successioni che via via si ottengono si possono omettere. E così ad es. volendo fare la trasformata della successione 2, 2, 3, 3, 2, mediante il sistema dei numeri 1123555555, scriveremo:

	2	2	3	3	2	successione data
	2	2	3	4	1	trasformata della precedente mediante 1
	2	2	3	5	.	
	2	2	5	3	.	
	2	2	8	.	.	
	2	7	3	.	.	
	4	8	.	.	.	
	9	3	.	.	.	
2	10	.	.	.	.	
7	5	.	.	.	.	
12	0	0	0	0	0	

L'ordine dei numeri (1, 1, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5) che determinano le singole trasformazioni, è poi indifferente.

Notiamo infine che nel formare la trasformata di una successione mediante un sistema di numeri, si osserverà che siano verificate per le varie successioni ottenute le seguenti condizioni:

1°. La somma dei numeri di ciascuna successione (compresa la data) è costante.

2°. La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando il 1° numero di una delle successioni formate per 1, (si suppongono qua i numeri di una successione contati da sinistra a destra), il 2° per 2, il 3° per 3 ecc. aumentata della somma dei numeri che determinano le singole trasformazioni, (li abbiamo indicati nella teoria con $\lambda, \mu, \nu \dots$), è uguale a tante volte la somma dei termini della successione iniziale data, quanti sono i termini eccedenti della successione che si considera, più la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando il 1° numero della successione iniziale data per 1, il 2° per 2, il 3° per 3 ecc... Ciò come conseguenza delle proprietà, testè enunciate, relativamente alla trasformata di una successione mediante un dato sistema di numeri.

Determinazione del valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$. Vediamo da ultimo in qual modo dati i valori di $p_1 \dots p_i$, $q_1 \dots q_j$ si possa calcolare il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}$. Consideriamo dapprima il caso nel quale $i \leq 2$ e due al più delle q siano diverse da zero e non maggiori di 2. Le formole possibili sono:

$$\begin{Bmatrix} p_1 p_2 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{Bmatrix}' = \binom{p_1}{j - p_2}; \qquad \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{Bmatrix}' = \binom{p_1}{j}$$

nelle quali si suppone che l'elemento 2 del denominatore, occupi il posto j^{mo}, (si è perciò indicato con $(2)_j$)

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \end{Bmatrix}' = \binom{p_1}{h} = \binom{p_1}{k}; \begin{Bmatrix} p_1 p_2 \\ 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \end{Bmatrix}' = \binom{p_1}{h - p_2} = \binom{p_2}{k - p_2}$$

nelle quali si suppone che gli elementi uguali ad 1 del denominatore occupino i posti h^{mo} e k^{mo}. È da notare che il denominatore dei simboli $\begin{Bmatrix} p_1 p_2 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{Bmatrix}'$ e $\begin{Bmatrix} p_1 p_2 \\ 0_1 \dots (1)_h, 0 \dots (1)_k \end{Bmatrix}'$ deve contenere almeno $p_2 - 1$ zeri iniziali, giacchè se ciò non fosse, tali simboli non avrebbero significato. Si può anche considerare il simbolo $\begin{Bmatrix} 0, p_2 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{Bmatrix}'$. Affinchè esso abbia significato dev'essere $p_2 = n$; inoltre il denominatore deve contenere n elementi. Infatti se il numero degli elementi del denominatore è j, si ha $0 . 1 + 2 . p_2 = 2j$ (si ricordi la condizione di $\Sigma i p_i = \Sigma j q_j$); perciò $j = p_2 = n$. Si ha poi:

$$\begin{Bmatrix} 0, n \\ 0, 0, \dots (2)_n \end{Bmatrix}' = 1.$$

Il simbolo $\left\{ \begin{matrix} 0, p_2 \\ 0, \ldots (1)_h, 0, \ldots (1)_k \end{matrix} \right\}'$ non ha senso; perciò:

$$\left\{ \begin{matrix} 0, p_2 \\ 0, \ldots (1)_h, 0, \ldots (1)_k \end{matrix} \right\}' = 0.$$

Le formole precedenti si dimostrano riducendo i simboli $\left\{ \quad \right\}'$ a forma canonica secondaria; si traducono allora in formole già dimostrate, trattando del numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ e $\downarrow 2$.

Similmente riferendoci ad una matrice di dimensioni $\rightarrow 2$ e $\downarrow m$, e supponendo relativamente al simbolo $\left\{ \begin{matrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{matrix} \right\}'$ che sia $j \leq 2$ e che due al più delle p siano diverse da zero e non maggiori di 2, avremo le formole:

$$\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \ldots (2)_j \\ q_1 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{j}; \qquad \left\{ \begin{matrix} 0, 0, \ldots (2)_j \\ q_1 q_2 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{j - q_2}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \ldots (1)_h, 0 \ldots (1)_k \\ q_1 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{h} = \binom{q_1}{k}; \left\{ \begin{matrix} 0 \ldots (1)_h, 0, \ldots (1)_k \\ q_1 q_2 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{h - q_2} = \binom{q_1}{k - q_2}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \ldots (2)_m \\ 0, m \end{matrix} \right\}' = 1; \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 \ldots (1)_h, 0 \ldots (1)_k \\ 0, q_2 \end{matrix} \right\}' = 0.$$

Il simbolo $\left\{ \begin{matrix} 0 \ldots (1)_h, 0, \ldots (1)_k \\ 0, q_2 \end{matrix} \right\}'$ non ha senso; nei simboli $\left\{ \begin{matrix} 0 \ldots (1)_h, 0, \ldots (1)_k \\ q_1 \end{matrix} \right\}'$ e $\left\{ \begin{matrix} 0, \ldots (1)_h, 0, \ldots (1)_k \\ q_1 q_2 \end{matrix} \right\}'$ il numeratore deve contenere almeno $q_2 - 1$ zeri iniziali.

E così possiamo dire di saper calcolare il valore di $\left\{ \begin{matrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{matrix} \right\}'$ quando la somma degli elementi del numeratore o del denominatore è *due*.

Vediamo ora in qual modo si possa esprimere il simbolo $\left\{ \begin{matrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{matrix} \right\}'$ mediante altri tali che la somma degli elementi o termini del numeratore (denominatore) sia inferiore di un'unità a quella dei termini del numeratore (denominatore) del simbolo stesso. Riducendo a forma canonica secondaria i simboli che compaiono nella (22), possiamo scriverla:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} \ldots \overbrace{h \ldots h}^{p_h} \ldots \overbrace{i \ldots i}^{p_i} \\ \underbrace{1 \ldots 1}_{q_1} \ldots \ldots \ldots \ldots \underbrace{j \ldots j}_{q_j} \end{bmatrix} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} \ldots \overbrace{h \ldots h}^{p_h} \ldots \overbrace{i \ldots i}^{p_i} \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \alpha_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

intendendo il segno Σ esteso a tutte le successioni $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ di m numeri (si noti che $q_1 + \ldots + q_j = m$) dedotta dalla

$$\underbrace{1 \ldots . 1}_{q_1} \ldots \underbrace{j \ldots . j}_{q_j}$$

diminuendo di un'unità h numeri di essa comunque scelti ($h \neq 0$ e quindi $p_h \neq 0$). Di tali numeri ve ne saranno π_1 scelti tra quelli uguali ad 1, π_2 scelti tra quelli uguali a 2, $\ldots \pi_j$ scelti tra quelli uguali ad j e sarà $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_j = h$. Ora è chiaro che nella successione ottenuta diminuendo di un'unità gli h numeri scelti, ve ne saranno $q_1 - \pi_1 + \pi_2$ uguali a $1, \ldots q_{j-1} - \pi_{j-1} + \pi_j$ uguali ad $j-1$, infine $q_j - \pi_j$ uguali ad j. Consideriamo uno speciale sistema di valori delle $\pi_1, \ldots \pi_j$ tali che sia $\pi_1 \leqq q_1 ; \ldots \pi_j \leqq q_j ; \pi_1 + \ldots + \pi_j = h$. Nel 2° membro della (24) compariranno $\binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2} \cdots \binom{q_j}{\pi_j}$ termini uguali a

$$\left[\begin{array}{l} \overbrace{1 \ldots \ldots \ldots 1}^{p_1} \ldots \overbrace{h \ldots h}^{p_h - 1} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \overbrace{i \ldots \ldots i}^{p_i} \\ \underbrace{1 \ldots \ldots \ldots 1}_{q_1 - \pi_1 + \pi_2} \ldots \ldots \ldots \underbrace{j-1, \ldots j-1}_{q_{j-1} - \pi_{j-1} + \pi_j}, \underbrace{j \ldots \ldots j}_{q_j - \pi_j} \end{array}\right]$$

giacchè si possono scegliere π_λ numeri delle successioni $\underbrace{\lambda \ldots \ldots \lambda}_{q_\lambda}$ in $\binom{q_\lambda}{\pi_\lambda}$ modi. Si ha pertanto, essendo $h \neq 0$ e quindi $p_h \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} \ldots \overbrace{h \ldots h}^{p_h} \ldots \overbrace{i \ldots i}^{p_i} \\ \underbrace{1 \ldots 1}_{q_1} \ldots \ldots \ldots \ldots \underbrace{j \ldots j}_{q_j} \end{array}\right] =$$

$$= \sum_{\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_j = h} \binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2} \cdots \binom{q_j}{\pi_j} \left[\begin{array}{l} \overbrace{1 \ldots \ldots \ldots 1}^{p_1} \ldots \ldots \overbrace{h \ldots h}^{p_h - 1} \ldots \ldots \overbrace{i \ldots i}^{p_i} \\ \underbrace{1 \ldots \ldots \ldots 1}_{q_1 - \pi_1 + \pi_2} \ldots \underbrace{j-1 \ldots j-1}_{q_{j-1} - \pi_{j-1} + \pi_j} \underbrace{j \ldots j}_{q_j - \pi_j} \end{array}\right]$$

ovvero, riducendo i simboli $[\ ]$ a forma canonica primaria

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 \ldots p_h \ldots p_i \\ q_1 \ldots \ldots \ldots q_j \end{array} \right\}' =$$

$$= \sum_{\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_j = h} \binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2} \cdots \binom{q_j}{\pi_j} \left\{ \begin{array}{l} p_1 p_2 \ldots \ldots \ldots, (p_h - 1)_h, \ldots \ldots \ldots p_i \\ (q_1 - \pi_1 + \pi_2)_1, \ldots (q_{j-1} - \pi_{j-1} + \pi_j)_{j-1}, (q_j - \pi_j)_j \end{array} \right\}' \quad (25)$$

intendendo il segno Σ esteso ai sistemi di valori positivi interi anche nulli delle $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_j$ tali che $\pi_1 + \ldots \pi_j = h$; $\pi_\lambda \leq q_\lambda$. Scrivendo nel 2° membro $(p_h - 1)_h$, abbiamo voluto indicare che l'elemento h^{mo} del numeratore ha il valore $p_h - 1$, e parimenti scrivendo $(q_\lambda - \pi_\lambda + \pi_{\lambda+1})_\lambda$, $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, si è voluto indicare che l'elemento λ^{mo} del denominatore ha il valore $q_\lambda - \pi_\lambda + \pi_{\lambda+1}$. Si conviene poi che sia $\binom{\tau}{0} = 1$, per qualunque intero positivo τ anche nullo.

Come vedesi abbiamo raggiunto lo scopo prefissoci, giacchè nei simboli che compaiono nel 2° membro della (25) la somma dei termini del numeratore è uguale a $p_1 + \ldots + p_i - 1$.

Similmente si ha:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots\ldots\ldots p_i \\ q_1 \ldots q_h \ldots q_j \end{Bmatrix}' =$$

$$= \sum_{\pi_1 + \ldots + \pi_i = h} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2} \ldots \binom{p_i}{\pi_i} \begin{Bmatrix} (p_1 - \pi_1 + \pi_2)_1 \ldots (p_{i-1} - \pi_{i-1} + \pi_i)_{i-1}, (p_i - \pi_i)_i \\ q_1 \ldots\ldots, (q_h - 1)_h, \ldots\ldots\ldots\ldots q_j \end{Bmatrix}' \quad (25')$$

essendo $\pi_\lambda \leq p_\lambda$, $(\lambda = 1, 2, \ldots i)$.

Ed ora volendo calcolare il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ dopo aver constatato che esso non è zero, si comincierà ad esprimerlo mediante simboli nei quali la somma dei termini ad es. del numeratore è $p_1 + \ldots + p_i - 1$. Ciascuno di questi potrà a sua volta essere espresso mediante altri nei quali la somma dei termini del numeratore è $p_1 + \ldots + p_i - 2 \ldots$, e così via sino ad avere l'espressione di $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ mediante simboli nei quali la somma dei termini del numeratore è due. Il valore di ciascuno di tali simboli si calcolerà facilmente per mezzo delle formole note.

Se $i = m$ od $j = n$, prima di applicare il processo suddetto si trasformerà il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$, mediante una delle trasformazioni, (β_m), (β_n), (β_{mn}), e si opererà sul nuovo simbolo ottenuto anzichè sul dato. Nell'applicare la (25) o la (25') è indifferente il valore da attribuirsi ad h, purchè l'h^{mo} termine del numeratore, se si applica la (25), o del numeratore, se si applica la (25'), sia diverso da zero.

Dopo aver espresso $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ mediante simboli nei quali la somma dei termini ad es. del numeratore è $p_1 + \ldots + p_i - 1$, non è *necessario* esprimere ciascuno di essi mediante altri nei quali la somma dei termini del numeratore sia $p_1 + \ldots + p_i - 2$; si può ad es. esprimerli mediante altri nei quali la somma dei termini del denominatore è $q_1 + \ldots + q_j - 1$; ciò che è essenziale si è di ottenere un'espressione di $\left\{\begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix}\right\}'$ contenente soltanto simboli nei quali la somma dei termini del numeratore o del denominatore sia *due*.

Gioveranno ancora nell'applicazione delle (25) e (25') le seguenti considerazioni d'indole pratica.

1°. In corrispondenza di un dato sistema di valori di $\pi_1 \dots \pi_j$ si ha un prodotto $\binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2}\dots\binom{q_{j-1}}{\pi_{j-1}}\binom{q_j}{\pi_j}$. A tal sistema di valori corrisponde pure nel 2° membro della (25) un simbolo $\left\{\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}'$, nel quale gli elementi del numeratore sono $q_1 - \pi_1 + \pi_2, q_2 - \pi_2 + \pi_3, \dots q_j - \pi_j$.

Orbene scritto il prodotto $\binom{q_1}{\pi_1}\dots\binom{q_j}{\pi_j}$, si scrivono facilmente questi elementi sottraendo dal numeratore q_r di ciascun fattore $\binom{q_r}{\pi_r}$ il corrispondente denominatore π_r ed aggiungendo al resto il denominatore del fattore $\binom{q_{r+1}}{\pi_{r+1}}$ successivo.

Fa eccezione l'elemento $q_j - \pi_j$ che si ottiene facendo la differenza tra il numeratore ed il denominatore di $\binom{q_j}{\pi_j}$.

2°. Supponiamo che debbansi sviluppare i simboli $\left\{\begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots p_j \end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix} u_1 \dots u_i \\ v_1 \dots v_j \end{matrix}\right\}'$, differenti almeno per il denominatore, mediante altri tali che la somma dei termini del numeratore sia uguale a $p_1 + \dots + p_i - 1$. Supponiamo ancora che sviluppando sia l'uno sia l'altro simbolo, si dia ad h lo stesso valore. Tra i sistemi di valori delle π tali che $\pi_1 + \dots + \pi_j = h$ e $\pi_\lambda \leq q_\lambda$, ve ne saranno forse alcuni per i quali sarà pure $\pi_\lambda \leq u_\lambda$. Se $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j$ è uno di siffatti sistemi, nello sviluppo di $\left\{\begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix}\right\}'$ gli corrisponderà il termine

$$\binom{q_1}{\xi_1}\binom{q_2}{\xi_2}\dots\binom{q_j}{\xi_j}\left\{\begin{matrix} p_1 \dots\dots\dots\dots, (p_h - 1)_h, \dots\dots\dots p_i \\ (q_1 - \xi_1 + \xi_2)_1, (q_2 - \xi_2 + \xi_3)_2, \dots (q_j - \xi_j)_j \end{matrix}\right\}'$$

e nello sviluppo di $\left\{\begin{matrix} u_1 \dots u_i \\ v_1 \dots v_j \end{matrix}\right\}'$ il termine

$$\binom{v_1}{\xi_1}\binom{v_2}{\xi_2}\dots\binom{v_j}{\xi_j}\left\{\begin{matrix} u_1 \dots\dots\dots\dots, (u_h - 1)_h, \dots\dots\dots u_i \\ (v_1 - \xi_1 + \xi_2)_1, (v_2 - \xi_2 + \xi_3)_2, \dots v_j - \xi_j)_j \end{matrix}\right\}'$$

Scritto il 1° di tali termini, si potrà scrivere più rapidamente il 2° osservando che l'elemento $v_\lambda - \xi_\lambda + \xi_{\lambda+1}$ del denominatore, $(\lambda = 1, \dots j)$, si ottiene da $q_\lambda - \xi_\lambda + \xi_{\lambda+1}$ aggiungendovi la differenza $v_\lambda - q_\lambda$, se $v_\lambda > q_\lambda$, e togliendosi la differenza $q_\lambda - v_\lambda$, se $q_\lambda > v_\lambda$. Questo modo di calcolare gli elementi del denominatore $v_1 - \xi_1 + \xi_2, \ldots v_j - \xi_j$ è utile, ma non necessario, quando i sistemi $\xi_1, \ldots \xi_j$ validi per lo sviluppo sia di $\left\{ \begin{matrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{matrix} \right\}'$ sia di $\left\{ \begin{matrix} u_1 \ldots u_i \\ v_1 \ldots v_j \end{matrix} \right\}'$ sono molti; nè è escluso il caso che tutti i sistemi $\pi_1, \ldots \pi_j$ relativi allo sviluppo di $\left\{ \begin{matrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{matrix} \right\}'$ siano validi anche per lo sviluppo di $\left\{ \begin{matrix} u_1 \ldots u_i \\ v_1 \ldots v_j \end{matrix} \right\}'$.

Esempi. — 1°. Si debba dapprima calcolare il valore di $\left\{ \begin{matrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{matrix} \right\}'$(*) nel quale il numeratore e il denominatore, come il lettore può agevolmente constatare, soddisfano alle condizioni volute affinchè sia $\left\{ \begin{matrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{matrix} \right\}' \neq 0$. Si ha: $i=2; j=3; p_1=3; p_2=2; q_1=0; q_2=2; q_3=1$. Si vede subito che diminuendo di un'unità la somma degli elementi del denominatore, essa si riduce a *due*.

Applicheremo adunque la (25'). Possiamo fare $h=2$, giacchè l'elemento del denominatore che occupa il posto h^{mo} (il 2°) è diverso da zero. I sistemi di valori delle π_1, π_2, (le π sono due, giacchè due sono gli elementi del numeratore, cioè $i=2$), sono:

$\pi_1 \leq 3$ π_1	+	$\pi_2 \leq 2$ π_2	$=h=2$
0		2	
1		1	
2		0	

Adunque

$$\left\{ \begin{matrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{matrix} \right\}' \binom{3}{0}\binom{2}{2}\left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 5\,0 \end{matrix} \right\}' + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 2\,1 \end{matrix} \right\}' + \binom{3}{2}\binom{2}{0}\left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 1\,2 \end{matrix} \right\}'.$$

Ma

$$\left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 5\,0 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 5 \end{matrix} \right\} = 10; \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 3\,1 \end{matrix} \right\}' = 3; \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,1 \\ 1\,2 \end{matrix} \right\}' = 1. \qquad (**)$$

pertanto:

$$\left\{ \begin{matrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{matrix} \right\}' = 1\,.\,10 + 6\,.\,3 + 3\,.\,1 = \text{trentuno.}$$

(*) Riducendo tal simbolo a forma canonica primaria esso diventa $\left[\begin{matrix} 1\,1\,1\,2\,2 \\ 2\,2\,3 \end{matrix} \right]$. Il valore di esso è trentuno, e si è calcolato trattando del metodo per determinare il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $m \longrightarrow n$ e $\downarrow 3$

(**) Veggansi le formole che insegnano a calcolare il valore di un simbolo $\left\{ \quad \right\}'$, quando la somma degli elementi del numeratore o del denominatore è due.

2°. Debbasi ancora calcolare il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}'$ il quale è maggiore di zero, come il lettore può facilmente verificare costruendo la trasformata della successione 1 1 2 0 1 mediante il sistema di numeri 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2. Si ha in tal caso: $i=4$; $j=2$; $p_1=1, p_2=1, p_3=2, p_4=0, p_5=1$; $q_1=4$; $q_2=5$. Applichiamo la (25) supponendo $h=1$, il che è lecito essendo l'h^{mo} (il 1°) elemento del numeratore diverso da zero. I sistemi di valori delle π_1, π_2 tali che

$\pi_1 \leq 5$		$\pi_2 \leq 4$	
π_1	$+$	π_2	$=h=1$
0		1	
1		0	

sono

pertanto:

$$\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}' = \binom{4}{0}\binom{5}{1}\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 5\,4 \end{Bmatrix}' + \binom{4}{1}\binom{5}{0}\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 3\,5 \end{Bmatrix}'$$

In ciascuno dei simboli $\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 5\,4 \end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 3\,5 \end{Bmatrix}$ la somma degli elementi del numeratore è quattro; giova adunque esprimerli mediante altri nei quali la somma degli elementi del numeratore sia tre. Applicando la (25) si ha, supponendo $h=2$:

$$\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 5\,4 \end{Bmatrix}' = \binom{5}{0}\binom{4}{2}\begin{Bmatrix} 0\,0\,2\,0\,1 \\ 7\,2 \end{Bmatrix}' +$$

$$+ \binom{5}{1}\binom{4}{1}\begin{Bmatrix} 0\,0\,2\,0\,1 \\ 5\,3 \end{Bmatrix}' + \binom{5}{2}\binom{4}{0}\begin{Bmatrix} 0\,0\,2\,0\,1 \\ 3\,4 \end{Bmatrix}'$$

Come il lettore può agevolmente verificare, i sistemi di valori delle π_1, π_2, relativi allo sviluppo di $\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 5\,4 \end{Bmatrix}'$ sono: 0, 2; 1, 1; 2, 0. Volendo ora procedere allo sviluppo del simbolo $\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 3\,5 \end{Bmatrix}'$, supponendo ancora $h=2$, possiamo valerci dell'osservazione 2ª; osserviamo anzi tutto che i sistemi di valori della π_1, π_2 relativi a tal sviluppo sono ancora 0, 2; 1, 1; 2, 0, cioè coincidono con quelli relativi allo sviluppo di $\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 5\,4 \end{Bmatrix}'$. Gli elementi del denominatore 3, 5, si ottengono da quelli del denominatore 5, 4, diminuendo il 1° di due unità ed aumentando il 2° di un'unità. Perciò se nello sviluppo di $\begin{Bmatrix} 0\,1\,2\,0\,1 \\ 5\,4 \end{Bmatrix}'$ sostituiamo 3 e 5 rispettivamente a 5 e 4 nei prodotti $\binom{5}{0}\binom{4}{2}$, $\binom{5}{1}\binom{4}{1}$, $\binom{5}{2}\binom{4}{0}$, e nei denominatori dei simboli $\begin{Bmatrix} 0\,0\,2\,0\,1 \\ 7\,2 \end{Bmatrix}'$,

$\begin{Bmatrix}00201\\53\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}00201\\34\end{Bmatrix}'$ diminuiamo il 1° elemento di due unità ed aumentiamo il 2° di una, otteniamo lo sviluppo di $\begin{Bmatrix}01201\\35\end{Bmatrix}'$. Chi ha appena un po' di pratica fa queste operazioni immediatamente con molta facilità.

Si ha adunque:

$$\begin{Bmatrix}01201\\35\end{Bmatrix}'=\binom{3}{0}\binom{5}{2}\begin{Bmatrix}00201\\53\end{Bmatrix}'+$$
$$+\binom{3}{1}\binom{5}{1}\begin{Bmatrix}00201\\34\end{Bmatrix}'+\binom{3}{2}\binom{5}{0}\begin{Bmatrix}00201\\15\end{Bmatrix}'.$$

Occorre ancora sviluppare i simboli;

$$\begin{Bmatrix}00201\\72\end{Bmatrix}',\ \begin{Bmatrix}00201\\53\end{Bmatrix}',\ \begin{Bmatrix}00201\\34\end{Bmatrix}',\ \begin{Bmatrix}00201\\15\end{Bmatrix}',$$

che sono i soli simboli differenti trovati sviluppando $\begin{Bmatrix}01201\\54\end{Bmatrix}'$ e $\begin{Bmatrix}01201\\35\end{Bmatrix}'$ e nei quali la somma dei termini del numeratore è tre, mediante altri nei quali la somma dei termini del numeratore sia due. Si ha dalla (25), supponendo ad es. $h=3$:

$$\begin{Bmatrix}00201\\72\end{Bmatrix}'=\binom{7}{1}\binom{2}{2}\begin{Bmatrix}00101\\80\end{Bmatrix}'+$$
$$+\binom{7}{2}\binom{2}{1}\begin{Bmatrix}00101\\61\end{Bmatrix}'+\binom{7}{3}\binom{2}{0}\begin{Bmatrix}00101\\42\end{Bmatrix}'$$

A tal sviluppo corrispondono i sistemi seguenti di valori delle π_1, π_2: 1,2; 2,1; 3,0. Volendo scrivere lo sviluppo di $\begin{Bmatrix}00201\\53\end{Bmatrix}'$, per $h=3$, osserviamo che i sistemi di valori delle π_1, π_2 ad esso relativi sono 1,2; 2,1; 3,0; 0,3, tre dei quali sono validi per lo sviluppo di $\begin{Bmatrix}00201\\72\end{Bmatrix}'$. Applicando l'osserv. 2ª limitatamente ai termini dello sviluppo di $\begin{Bmatrix}00201\\53\end{Bmatrix}'$ corrispondenti ai sistemi di valori 1,2; 2,1; 3,0; abbiamo:

$$\begin{Bmatrix}00201\\53\end{Bmatrix}'=\binom{5}{1}\binom{2}{3}\begin{Bmatrix}00101\\61\end{Bmatrix}'+\binom{5}{2}\binom{3}{1}\begin{Bmatrix}00101\\42\end{Bmatrix}'+$$
$$+\binom{5}{3}\binom{3}{0}\begin{Bmatrix}00101\\23\end{Bmatrix}'+\binom{5}{0}\binom{3}{3}\begin{Bmatrix}00101\\80\end{Bmatrix}'$$

Similmente si ha per $h=3$:

$$\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\3\,4\end{Bmatrix}'=\binom{3}{1}\binom{4}{2}\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\4\,2\end{Bmatrix}'+\binom{3}{2}\binom{4}{1}\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\2\,3\end{Bmatrix}'+$$
$$+\binom{3}{3}\binom{4}{0}\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\0\,4\end{Bmatrix}'+\binom{3}{0}\binom{4}{3}\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\6\,1\end{Bmatrix}'.$$

Per tale sviluppo i sistemi di valori delle π_1, π_2 coincidono con quelli relativi allo sviluppo precedente; perciò l'oss. 2ª è applicabile a tutti i termini dello sviluppo precedente.

Infine è, per $h=8$:

$$\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\1\,5\end{Bmatrix}'=\binom{1}{1}\binom{5}{2}\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\2\,3\end{Bmatrix}'+\binom{1}{0}\binom{5}{3}\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\4\,2\end{Bmatrix}'.$$

Mediante le formole che permettono di calcolare il valore di un simbolo $\begin{Bmatrix}\ \\ \ \end{Bmatrix}'$ nel quale la somma degli elementi del numeratore o del denominatore è due, possiamo determinare il valore dei simboli differenti che abbiamo incontrato sviluppando i simboli $\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\7\,2\end{Bmatrix}'$ $\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\5\,3\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\3\,4\end{Bmatrix}'$. Abbiamo:

$$\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\6\,1\end{Bmatrix}'=\binom{6}{2}=15;\quad \begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\4\,2\end{Bmatrix}'=\binom{4}{1}=4;\quad \begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\2\,3\end{Bmatrix}'=\binom{2}{0}=1$$
$$\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\8\,0\end{Bmatrix}'=\binom{8}{3}=56;\qquad \begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\0\,4\end{Bmatrix}'=0$$

(il valore di $\begin{Bmatrix}0\,0\,1\,0\,1\\0\,4\end{Bmatrix}'$ non è >0; si può constatare che la trasformata di $0\,0\,1\,0\,1$ mediante il sistema 2, 2, 2, 2, ha un elemento non eccedende diverso da zero). Adunque:

$$\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\5\,3\end{Bmatrix}'=15\,.\,15+30\,.\,4+10\,.\,1+1\,.\,56=411$$
$$\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\3\,4\end{Bmatrix}'=18\,.\,4+12\,.\,1+1\,.\,0+4\,.\,15=144$$
$$\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\1\,5\end{Bmatrix}'=10\,.\,1+10\,.\,4=50$$
$$\begin{Bmatrix}0\,0\,2\,0\,1\\7\,2\end{Bmatrix}'=7\,.\,56+42\,.\,15+35\,.\,4=1162$$

E poi:

$$\begin{Bmatrix}0\,1\,2\,0\,1\\3\,5\end{Bmatrix}'=10\,.\,411+15\,.\,144+3\,.\,50=6420$$
$$\begin{Bmatrix}0\,1\,2\,0\,1\\5\,4\end{Bmatrix}'=6\,.\,1162+20\,.\,411+10\,.\,144=16632$$

Ed infine:

$$\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}' = 5\,.\,16632 + 20\,.\,6420 = 211560 \text{ (duecentoundicimila cinquecento sessanta).}$$

Il simbolo $\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}'$ rappresenta il numero delle combinazioni relative ad es. alla matrice:

$$\begin{array}{c c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{matrix} & \\
\left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{15} \\ \vdots & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ a_{91} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{95} \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}
\end{array}$$

Se fosse necessario formarle, per poterle enumerare, nell'ipotesi che se ne potesse formare una per ogni cinque minuti secondi di tempo (?) occorrerebbero duecentonovantatre ore e cinquanta minuti primi; invece chi ha anche poca pratica nel maneggio dei suddetti simboli, può comodamente calcolare il valore di $\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}'$ in venti minuti primi!

§ 6. Nozioni sugli iperdeterminanti; metodi per svilupparli e per determinare il numero dei loro termini. (*)

Consideriamo la matrice di mn numeri qualunque $a_{11} \ldots a_{mn}$:

$$\begin{array}{c c}
v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_n & \\
T \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} r_1 \\ \\ r_m \end{matrix}
\end{array}$$

e sceglíamone σ, $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$, tali che v_i di essi appartengano alla verticale i^{ma} ed r_j all'orizzontale j^{ma} (supponiamo verificate per le $v_1 \ldots v_n$, $r_1 \ldots r_m$ le solite condizioni $\Sigma v = \Sigma r$; $v_i \leq m$; $r_j \leq n$). Consideriamo

(*) Per le proprietà di tali enti, specialmente per quelle relative allo sviluppo di un iperdeterminante si può consultare il lavoro già citato " Su una generalizzazione della teoria dei determinanti ", *Giornale di Battaglini*, vol. XXXIX; fasc. Luglio-Agosto 1901.

il prodotto $a_{\eta_1\theta_1} \dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$, ed attribuiamo ad esso il segno che competerebbe alla successione $a_{\eta_1\theta_1}, \dots, a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$ considerata come una combinazione relativa alla matrice suddetta, cioè il segno di $(-1)^{\alpha+\beta}$, dove α è il numero delle inversioni formate da due elementi della successione.

$$\eta_1, \eta_2, \dots \dots \eta_\sigma$$

non corrispondenti ad elementi uguali della

$$\theta_1, \theta_2, \dots \dots \theta_\sigma$$

e β è il numero delle inversioni formate da due θ non corrispondenti a due η uguali: [si suppongono corrispondenti η_λ e θ_λ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$]. La somma di tutti i prodotti del tipo $a_{\eta_1\theta_1} \dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$, presi ciascuno col proprio segno si chiamerà *iperdeterminante rettangolare o semplicemente iperdeterminante delle* $a_{11}, \dots a_{mn}$, ed il suo valore Δ si indicherà col simbolo:

$$\Delta = \begin{array}{c|ccc|c} & v_1 & \dots\dots\dots\dots & v_n & \\ \hline & a_{11} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} & r_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & a_{m1} & \dots\dots\dots\dots & a_{mn} & r_m \end{array}$$

Il numero v_i dicesi grado della verticale i^{ma}, il numero r_j grado della orizzontale j^{ma}. Risulta pertanto facilmente che: i determinanti sono iperdeterminanti di grado 1 in tutte le verticali ed orizzontali.

Essendo $\pm a_{\eta_1\theta_1} \dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$ un termine dell'iperdeterminante, sarà $\eta_1 \dots \eta_\sigma$ una successione contenente r_1 volte l'indice $1, \dots r_m$ volte l'indice m, e $\theta_1 \dots \theta_\sigma$ una successione contenente v_1 volte l'indice $1, \dots v_n$ volte l'indice n. Il segno di $a_{\eta_1\theta_1} \dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$ considerata come una combinazione relativa alla matrice T, non cambia, come già sappiamo, cambiando comunque l'ordine delle a ad essa appartenenti, pertanto: *il segno di un termine di un iperdeterminante non cambia, permutando comunque i suoi fattori.* È chiaro che il numero dei termini di un iperdeterminante è uguale al numero delle combinazioni relative alla matrice T; perciò indicandolo con N si ha:

$$N = \begin{Bmatrix} p_1 p_2 \dots p_i \\ q_1 q_2 \dots q_j \end{Bmatrix}'$$

dove al solito p_λ è il numero delle v uguali a λ, e q_μ il numero delle r uguali a μ. Il calcolo di N, noti i valori delle v e delle r, non offre alcuna difficoltà, dopo quanto abbiamo detto a proposito del numero delle combinazioni relative alla matrice T.

Relativamente allo sviluppo di un iperdeterminante, consideriamo dapprima il caso nel quale gli elementi di esso sono numeri rappresentati per mezzo dei segni $a_{11} \dots a_{mn}$. Formate le combinazioni relative alla matrice T, (v. art. 5°), e determinato il segno di ciascuna, basterà considerare tali combinazioni come prodotti e sommarli algebricamente; si avrà così lo sviluppo dell'iperdeterminante in questione.

Ma può darsi che gli elementi dell'iperdeterminante siano numeri non rappresentati coi segni $a_{11} \dots a_{mn}$. Debbasi ad es. procedere allo sviluppo dell'iperdeterminante

$$\Delta = \begin{array}{c|ccccc|c} & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 4 & 1 & 2 \\ & 6 & -2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ & 2 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{array}$$

Si consideri la matrice

$$\mu = \begin{array}{c||ccccc||c} & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & \\ \hline & 1_1 & 2_2 & -3_3 & 4_4 & 1_5 & 2 \\ & 6_1 & -2_2 & 1_3 & 1_4 & -1_5 & 3 \\ & 2_1 & 0_2 & -1_3 & 1_4 & -3_5 & 2 \end{array}$$

la quale contiene gli elementi (numeri) appartenenti alle linee di Δ, ciascuno munito di un indice che è il numero d'ordine della verticale alla quale esso appartiene. Dimodochè il valore ad es. di 2_2 è 2, di -2_2 è -2, di -3_3 è -3 ecc.... Sappiamo (§ 5) che per formare le combinazioni relative alla matrice μ, si comincia a formare la seconda permutazione di una qualunque di esse. (Abbiamo visto in qual modo i noti valori delle v ed r, possa sempre scriversi, se esiste, la 2ª permutazione di una combinazione relativa ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ e $\downarrow 3$). Sia essa ad es.

$$|\, 1\, 3 \,|\, 1\, 2\, 4 \,|\, 3\, 5 \,|.$$

Scegliendo nella matrice μ gli elementi 1° e 3° della 1ª orizzontale, 1°, 2° e 4° della 2ª, 3° e 5° della 3ª, abbiamo una delle combinazioni relative a tal matrice. Essa è la $|\, 1_1 - 3_3 \,|\, 6_1 - 2_2\, 1_4 \,|\, -1_3 - 3_5 \,|$. Come vedesi, abbiamo distinto i suoi elementi in tre gruppi: il 1° comprende quelli appartenenti alla 1ª orizzontale, il 2° quelli appartenenti alla 2ª, il 3° quelli appartenenti alla 3ª. E notiamo pure che gli indici di tali elementi sono appunto gli elementi della permutazione:

$$|\, 1\, 3 \,|\, 1\, 2\, 4 \,|\, 3\, 5 \,|$$

Il segno della suddetta combinazione è quello di $(-1)^\beta$, β essendo il numero delle inversioni che gli elementi di ciascuno dei gruppi $|\, 1\, 3 \,|$, $|\, 1\, 2\, 4 \,|$, $|\, 3\, 5 \,|$, fanno con quelli dei gruppi posti alla loro destra.

Si ha nel nostro caso $\beta = 3$, e pertanto il segno della combinazione suddetta è il $-$. Consideriamo ora la combinazione

$$-\mid 1_1 - 3_3 \mid 6_1 - 2_2\, 1_4 \mid -1_3 - 3_5 \mid$$

quale simbolo atto a rappresentare il prodotto dei numeri $1, -3, 6, -2, 1, -1, -3$, da prendersi col segno $-$. Avremo così il valore di un primo termine dell'iperdeterminante in questione

$$(1) \ldots\ldots -\mid 1_1 - 3_3 \mid 6_1 - 2_2\, 1_4 \mid -1_3 - 3_5 \mid \; = -(+108) = -108.$$

Diremo *permutazione annessa* a tal prodotto la permutazione $\mid 1\,3 \mid 1\,2\,4 \mid 3\,5 \mid$ degli indici dei fattori.

Per avere il valore degli altri termini dell'iperdeterminante, consideriamo le seconde permutazioni delle rimanenti combinazioni relative alla matrice μ. Sappiamo già con quale processo esse si possono dedurre dalla $\mid 1\,3 \mid 1\,2\,4 \mid 3\,5 \mid$, e come si possa pure determinare il segno di ciascuna (v. § 5°, formazione delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow n$ e $\updownarrow 3$). Per eseguire l'operazione ω_2 sulla $\mid 1\,3 \mid 1\,2\,4 \mid 3\,5 \mid$, cioè sulla permutazione annessa al prodotto (1), si può dapprima scambiare l'elemento 2 del 2° gruppo con l'elemento 3 del 1°. Si passa così alla $\mid 1\,2 \mid 1\,3\,4 \mid 3\,5 \mid$, alla quale corrisponde il termine dell'iperdeterminante

$$+\mid 1_1\, 2_2 \mid 6_1\, 1_3\, 1_4 \mid -1_3 - 3_5 \mid \; = +(+36) = 36. \ldots\ldots \qquad (2)$$

da prendersi col segno $+$, giacchè il segno di $(-1)^{\beta}$ è, relativamente alla $\mid 1\,2 \mid 1\,3\,4 \mid 3\,5 \mid$, il segno $+$.

Ora il termine (2) si può dedurre dal termine (1) nel seguente modo. Data una coppia di due elementi a_{hi}, a_{kj} appartenenti ad orizzontali e verticali diverse della matrice.

$$T \equiv \begin{array}{ccccccc|c}
c_1 & \ldots & c_i & \ldots & c_j & \ldots & c_n & \\
\hline
a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & r_1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{h1} & \ldots & a_{hi} & \text{———} & a_{hj} & \ldots & a_{hn} & r_h \\
\vdots & & \mid & \times & \mid & & & \vdots \\
a_{k1} & \ldots & a_{ki} & \text{———} & a_{kj} & \ldots & a_{kn} & r_k \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & r_m
\end{array}$$

si dirà *coppia coniugata*, la coppia degli elementi a_{hj}, a_{ki} e si dirà che sono coniugati a_{hi} ed a_{hj}, a_{ki} ed a_{kj}. Pertanto gli elementi di due coppie coniugate sono collocate ai vertici di uno stesso rettangolo, quelli di una stessa coppia stanno ai due vertici opposti, e due coniugati stanno ai due vertici di uno stesso lato orizzontale.

Si consideri ora nella matrice μ la coppia di elementi $-3_3, -2_2$ cioè quella di quelli tra i fattori del prodotto (1) i cui indici sono gli elementi scambiati per passare dalla $|13|124|35|$ alla $|12|134|35|$. Si consideri la coppia coniugata della $-3_2, -2_2$ cioè la $2_2 . 1_3$, e nel prodotto (1) si sostituisca a ciascuno dei fattori $-3_3, -2_2$ il suo coniugato, e cioè 2_2 a -3_3 ed 1_3 a -2_2. Si avrà allora il prodotto (2), che ha quale permutazione annessa la $|12|134|35|$. Prendendo questo prodotto col segno corrispondente a tal permutazione (è il segno di $(-1)^\beta$, dove β è il numero delle inversioni che gli elementi di ognuno de' gruppi $|12|$, $|134|$, $|35|$ fanno con quelli dei gruppi che gli stanno a destra) si avrà un altro termine dell'iperdeterminante in questione.

In generale se h *e* k *sono elementi della permutazione annessa ad un termine dell'iperdeterminante* Δ *e se scambiando in questa* h *con* k *si ottiene la* 2^a *permutazione di una combinazione relativa alla matrice* T, *sostituendo in tal termine ai fattori aventi gli indici* h *e* k *i loro coniugati, si ottiene un nuovo termine di* Δ. *Quanto alla determinazione del segno di esso, sappiamo già con quali norme,* (v. § 5°), *conosciuto il segno del termine dato di* Δ, *cioè quello della sua permutazione annessa, si possa determinare il segno del termine di* Δ *da esso derivato, cioè quello della sua permutazione annessa.*

Supponiamo ora scritto un termine di Δ; sappiamo già con quali operazioni dalla permutazione ad esso annessa si possono dedurre le permutazioni annesse ai termini rimanenti, giacchè sappiamo dedurre dalla 2^a permutazione di una combinazione relativa ad una matrice, quelle relative alle combinazioni rimanenti.

Quindi se in corrispondenza di ciascun scambio che ci permetta di passare dalla permutazione annessa ad un termine di Δ *a quella annessa ad un altro termine, eseguiamo l'operazione che consiste nel sostituire ai due fattori di esso termine (quelli aventi per indici gli elementi scambiati della permutazione annessa) i loro coniugati, avremo tanti termini di* Δ *quante sono le seconde permutazioni delle combinazioni relative alla matrice* T, *e sommando i valori di questi termini, ciascuno preso col segno della rispettiva permutazione annessa, avremo il valore di* Δ.

E si noti ancora che nel passare da un termine all'altro di Δ, non è affatto necessario di scrivere a parte la permutazione annessa al 1° e dedurre poi da esse quelle annesse al 2°, al 3° ecc...., giacchè la permutazione annessa ad un dato termine risulta già dalla semplice scritturazione di esso, grazie alla convenzione di munire ogni elemento dell'iperdeterminante di un indice rappresentante il numero d'ordine della verticale alla quale esso appartiene.

ALBA, luglio 1902. DOTT. NICOLÒ TRAVERSO.

NUOVE PROPRIETÀ DEI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO

(Saggio di Geometria recente)

(Continuazione e fine, vedi fascicolo precedente)

PARTE SECONDA.

In questa seconda parte ci proponiamo di risolvere la questione seguente:

« Trovare le coordinate angolari (α, β, γ), le coordinate ceviane (a', b', c') « ed il valore dei parametri lineari (q, h, Δ) per i punti posti sui lati « del triangolo o sui loro prolungamenti ».

Per la convenzione da noi stabilita sulle misure angolari, le coordinate angolari di un punto posto sopra uno dei lati del triangolo sono sempre positive e tali che per es. pel punto D posto sul lato a saranno

$$\alpha = \pi \quad , \quad \beta + \gamma = \pi, \tag{1}$$

quelle del punto E od F sul prolungamento dello stesso lato sono

$$\alpha = -\pi \quad , \quad \beta + \gamma = -\pi, \tag{2}$$

Inoltre due delle coordinate ceviane sono allineate nella direzione del lato e per i tre punti D, E (dalla parte del vertice C) F (dalla parte del vertice B) soddisfano la condizione

$$b' + c' = a \quad , \quad \pm b' \mp c' = a, \tag{3}$$

e la terza coordinata ceviana a', è la congiungente col vertice opposto; essa si determina, o applicando il teorema di Stewart, o coll'uso delle nostre formule di cui quello è un caso particolare. (*) Di conseguenza saranno sempre positivi i parametri lineari pel punto D e negativi per i punti E, F.

Ricordiamo qui le note formule generali

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(\alpha - A) \\ b' &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(\beta - B) \\ c' &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(\gamma - C) \\ q^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2\gamma + c^2 \operatorname{sen}^2\beta + 2bc \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos(\alpha - A) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) G. Delitala, " Un corollario del teorema di Stewart ", *Periodico di Matematica.*

e le analoghe
$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}=\dfrac{q}{\Delta}=2R \\ h=\dfrac{2\Omega}{q}\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Poniamo l'angolo $CAD = A_1$; $DAB = A_2$, sarà $A = A_1 + A_2$. Le *coordinate angolari* del punto D sono

$$\left\{\begin{array}{ll}\alpha = \pi & \text{Il valore del } \textit{segmento fisso } q \text{ è} \\ \beta = \pi - (C + A_1) & q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\operatorname{sen}^2\beta \\ \gamma = C + A_1 & \quad = a^2 \operatorname{sen}^2(C + A_1) \\ \hline \Sigma = 2\pi & \text{ossia } q = a \operatorname{sen}\beta = a \operatorname{sen}(C + A_1)\end{array}\right\} \qquad (6)$$

L'*altezza equivalente* h sarà

$$h = \frac{2\Omega}{a \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\Omega}{a \operatorname{sen}(C + A_1)}.$$

Il valore della *costante angolare* Δ, è

$$\Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(C + A_1).$$

Le *coordinate ceviane* sono

$$\left.\begin{array}{l} a' = \dfrac{bc \operatorname{sen} A}{a \operatorname{sen}\beta} = \dfrac{2\Omega}{a \operatorname{sen}(C + A_1)} = h \\ b' = \dfrac{c \operatorname{sen}(\gamma - B)}{\operatorname{sen}\beta} = c\,\dfrac{\operatorname{sen}(A - A_1)}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \\ c' = \dfrac{b \operatorname{sen}(\gamma - C)}{\operatorname{sen}\beta} = b\,\dfrac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen}(C + A_1)}\end{array}\right\}, \qquad (7)$$

essendo così $b' + c' = a$.

Eliminando dalle tre ultime equazioni scritte b' e c' si ottiene l'espressione dell'angolo A_1

$$\cot A_1 = \frac{a \cos C + c \cos A - b}{c \operatorname{sen} A - a \operatorname{sen} C} = \frac{0}{0} \qquad (8)$$

la quale, com'era da prevedersi, si presenta sotto forma indeterminata, essendo la posizione del punto D determinata mediante uno dei due angoli A_1, A_2, oppure da β o da γ, o dalla distanza o dal rapporto delle distanze dai vertici B e C o dalla distanza dal vertice A.

Si possono quindi enunciare le seguenti proprietà:

1°. *Pei punti posti sopra un lato del triangolo di riferimento o sul prolungamento, il valore del* segmento fisso *q non è altro che la proiezione del lato sul quale trovasi il punto sulla perpendicolare alla corrispondente ceviana del vertice opposto.*

2°. *Il valore della* costante angolare Δ *è dato sempre dal prodotto del seno dell'angolo opposto pel seno dell'angolo d'inclinazione della ceviana corrispondente sul lato medesimo.*

3°. *Il valore dell'*altezza equivalente *h, non è altro che la coordinata ceviana del vertice opposto.*

Nel caso particolare del punto posto sul lato a a distanza infinita per es. dal punto G dalla parte del vertice C, o di H dalla parte del vertice B, si avrebbero i seguenti valori:

$$\text{G}\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=\gamma=-\pi\\ \hline \Sigma=-2\pi\end{cases}\quad \begin{cases}q=0\\ \Delta=0\\ h=\infty\end{cases}\quad \begin{cases}a'=\infty\\ b'=\infty\\ c'=\infty\end{cases}\quad \text{H}\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=\beta=-\pi\\ \hline \Sigma=-2\pi\end{cases}\qquad (9)$$

Esaminiamo ora che cosa diventano le formule ultime trovate nel caso particolare di punti notevoli sui lati del triangolo, cioè dei punti d'intersezione delle rette passanti pei punti notevoli del triangolo.

I. — *Triangolo rettangolo*. Il punto D è sull'ipotenusa a.

1°. Saranno pel *piede della perpendicolare*

$$\begin{cases}\alpha=\pi\\ \beta=\dfrac{\pi}{2}\\ \gamma=\dfrac{\pi}{2}\\ \hline \Sigma=2\pi\end{cases}\quad \begin{cases}q^2=b^2+c^2\\ q^2=a^2\\ \hline a^2=b^2+c^2\\ q=a\end{cases}\quad \begin{cases}a'=h=\dfrac{bc}{a}\\ b'=c\,.\cos B\\ c'=b\cos C\end{cases}\quad \Delta=1\qquad (10)$$

Come corollario si deducono le note proprietà del triangolo rettangolo

$$\left.\begin{aligned}b'\times c'=bc\cos B\cos C=b\,\text{sen}\,C\times c\,\text{sen}\,B=a'^2\\ a\times c'=\frac{b^2c\cos C}{a'}=\frac{b^2c\,\text{sen}\,B}{a'}=b^2\end{aligned}\right\}\qquad (11)$$

2°. Saranno pel *piede della bisettrice* dell'angolo retto

$$\begin{cases}\alpha=\pi\\ \beta=\dfrac{\pi}{4}+B=\dfrac{3}{4}\pi-C\\ \gamma=\dfrac{\pi}{4}+C=\dfrac{3}{4}\pi-B\\ \hline \Sigma=2\pi\end{cases}\quad \begin{cases}q^2=(b^2+c^2)\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)=a^2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)\\ q=\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)\\ \Delta=\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)\end{cases}\qquad (12)$$

$$\begin{cases}a'=h=\dfrac{bc}{a\,.\,\Delta}\\ b'=\dfrac{\sqrt{2}\,c}{2\,.\,\Delta}\\ c'=\dfrac{\sqrt{2}\,b}{2\,.\,\Delta}\end{cases}\qquad b':c'=c:d\qquad (13)$$

si deduce la nota proprietà della bisettrice.

3°. Saranno pel *piede della mediana* dell'angolo retto

$$\begin{cases}\alpha=\pi\\ \beta=2\pi\\ \gamma=2C\\ \hline \Sigma=2\pi\end{cases}\quad \begin{cases}q^2=(b^2+c^2)\,\text{sen}^2\,2B=a^2\,\text{sen}^2\,2B=a^2\,\text{sen}^2\,2G\\ q=a\,\text{sen}\,2B=4a\cos B\,\text{sen}\,B=2b\cos B\\ \Delta=\dfrac{2b\cos B}{a}\end{cases}\qquad (14)$$

$$\left\{\begin{aligned} a' &= h = \frac{c}{2\cos B} = \frac{a}{2} = R \\ b' &= \frac{ca \operatorname{sen} B}{2b \cos B} = \frac{a}{2} \\ c' &= \frac{a \operatorname{sen} G}{2 \cos B} = \frac{a}{2} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Si ritrova così la nota proprietà del triangolo rettangolo.

II. — *Triangolo obliquangolo.* 1°. Piede della perpendicolare abbassata dal vertice A.

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \pm \pi \\ \beta &= \pm \frac{\pi}{2} \\ \gamma &= \pm \frac{\pi}{2} \\ \hline \Sigma &= \pm 2\pi \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ q^2 = a^2 \\ \hline a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \ \ \text{(il noto teorema)} \\ q = \pm a, \qquad \Delta = \pm \operatorname{sen} A \end{array}\right. \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} a' &= \pm h = \frac{bc}{a} \operatorname{sen} A = c \operatorname{sen} B \\ b' &= c \cos B \\ c' &= b \cos C \end{aligned}\right. \tag{17}$$

cioè si ritrova il noto teorema di trigonometria sui triangoli rettangoli.

2°. Piede della bisettrice dell'angolo A.

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \pi \\ \beta &= \pi - \left(G + \frac{A}{2}\right) \\ \gamma &= \pi - \left(B + \frac{A}{2}\right) \\ \hline \Sigma &= 2\pi \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \operatorname{sen}^2 \left(B + \frac{A}{2}\right) \\ q^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \left(B + \frac{A}{2}\right) = a^2 \operatorname{sen}^2 \left(C + \frac{A}{2}\right) \\ q = a \operatorname{sen} \left(B + \frac{A}{2}\right) = a \operatorname{sen} \left(C + \frac{A}{2}\right) \\ \Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \left(B + \frac{A}{2}\right) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \left(C + \frac{A}{2}\right) \end{array}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} a' &= h = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}\left(B + \frac{A}{2}\right)} \\ b' &= c \frac{\operatorname{sen} \frac{3}{2} A}{\operatorname{sen}\left(B + \frac{A}{2}\right)} \\ c' &= b \frac{\operatorname{sen} \frac{3}{2} A}{\operatorname{sen}\left(B + \frac{A}{2}\right)} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Si deduce $b' : c' = c : b$ che è la nota proprietà delle bisettrici d'un triangolo qualunque.

3°. Piede della bisettrice estrema col vertice in A.

$$\begin{cases} \alpha = -\pi \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} - \left(C + \right) \\ \gamma = -\dfrac{3\pi}{2} + \left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ \hline \Sigma = -2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos^2\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ q^2 = a^2\cos^2\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ q = -a\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ \Delta = -\operatorname{sen} A\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} a' = -h = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right)} \\ b' = -\dfrac{c\,.\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right)} \\ c' = \dfrac{b\,.\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right)}\,. \end{cases} \tag{21}$$

4°. Piede della mediana pel vertice A.

$$\begin{cases} \alpha = \pi \\ \beta = \pi - (C + A_1) \\ \gamma = (C + A_1) \\ \hline \Sigma = 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\operatorname{sen}^2(C - A_1) \\ q^2 = a^2\operatorname{sen}^2(C + A_1) \\ q = a\operatorname{sen}(C + A_1) \\ \Delta = \operatorname{sen} A\operatorname{sen}(C + A_1) \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} a' = h = \dfrac{c\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \\ b' = c\,\dfrac{\operatorname{sen}(A - A_1)}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \\ c' = b\,\dfrac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \end{cases} \tag{23}$$

Ed essendo per ipotesi $b' = c'$, dalle ultime due relazioni identificando si può ricavare l'angolo incognito A_1

$$\cot A_1 = \frac{b + c\,.\cos A}{b\operatorname{sen} A} \tag{24}$$

Analogamente si può scrivere

$$\cot A_2 = \frac{c + b\cos A}{b\operatorname{sen} A}\,. \tag{25}$$

Si ha la riprova nella eguaglianza $A = A_1 + A_2$.

5°. Piede della simediana pel vertice A.

$$\begin{cases} \alpha = \pi \\ \beta = (B + A_1) \\ \gamma = \pi - (B + A_1) \\ \hline \Sigma = 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc)\,\text{sen}^2\,(B + A_1) \\ q\ = a\,\text{sen}\,(B + A_1) \\ \Delta = \text{sen A sen}\,(B + A_1) \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} a' = h = \dfrac{c\,\text{sen B}}{\text{sen}\,(B + A_1)} \\ b' = c\,\dfrac{\text{sen}\,A_1}{\text{sen}\,(B + A_1)} \\ c' = b\,\dfrac{\text{sen}\,(A - A_1)}{\text{sen}\,(B + A_1)} \end{cases} \tag{27}$$

Si vede che gli angoli componenti A_1, A_2 sono identici a quelli della mediana ma scambiati di posizione.

6°. Piede delle mediatrici dei due lati b e c del triangolo.

$$\begin{cases} \pm\alpha_1 = \pi \\ \pm\beta_1 = \pi - 2C \\ \pm\gamma_1 = 2C \\ \hline \Sigma = \pm\,2\pi \end{cases} \begin{cases} \pm\alpha_2 = \pi \\ \pm\beta_2 = 2B \\ \pm\gamma_2 = \pi - 2B \\ \hline \Sigma = \pm\,2\pi \end{cases} \begin{cases} q_1 = \pm\,\text{sen}\,2C \\ \Delta_1 = \pm\,\text{sen A sen}^2\,2C \end{cases} \begin{cases} q_2 = \pm\,a\,\text{sen}^2\,B \\ \Delta_2 = \pm\,\text{sen A sen}^2\,2C \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} a'_1 = \pm\,h_1\,\dfrac{b}{2\cos C} \\ b'_1 = c\,\dfrac{\text{sen}\,(A - C)}{\text{sen}^2\,C} \\ c'_1 = \dfrac{b}{2\cos C} \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_2 = \pm\,h_2\,\dfrac{c}{2\cos B} \\ b'_2 = \dfrac{c}{2\cos B} \\ c'_2 = b\,\dfrac{\text{sen}\,(A - B)}{\text{sen}^2\,B} \end{cases} \tag{29}$$

Risultano: $a'_1 = c'_1$, $a'_2 = b'_2$.

7°. Piede delle ceviane dei punti di Brocard pel vertice A del triangolo

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pi \\ \beta_1 = B + w \\ \gamma_1 = \pi - (B + w) \\ \hline \Sigma_1 = 2\pi \end{cases} \begin{cases} \alpha_2 = \pi \\ \beta_2 = \pi - (C + w) \\ \gamma_2 = (C + w) \\ \hline \Sigma_2 = 2\pi \end{cases} \begin{cases} q_1 = a\,\text{sen}(B + w) \\ \Delta_1 = \text{sen A sen}(B + w) \end{cases} \begin{cases} q_2 = a\,\text{sen})C + w) \\ \Delta_2 = \text{sen A sen}(C + w) \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} a'_1 = h_1 = \dfrac{a\,\text{sen}\,(B + w)}{bc} \\ b'_2 = \dfrac{c\,\text{sen}\,w}{\text{sen}\,(B + w)} \\ c'_1 = \dfrac{b\,\text{sen}\,(A - w)}{\text{sen}\,(B + w)} \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_2 = h_2 = \dfrac{bc}{a\,\text{sen}\,(C + w)} \\ b'_2 = c\,\dfrac{\text{sen}\,(A - w)}{\text{sen}\,(C - w)} \\ c'_2 - b\,\dfrac{\text{sen}\,w}{\text{sen}\,(C + w)} \end{cases} \tag{31}$$

Si deduce la proprietà

$$q_1 : q_2 = \Delta_1 : \Delta_2 = h_2 : h_1\,\text{sen}\,(B + w) : \text{sen}\,(C + w) \tag{32}$$

8°. Piede delle ceviane dei punti di Gergonne e di Nagel pel vertice A del triangolo.

Si possono ottenere le due *coordinate ceviane* allineate sul lato a, dalla definizione stessa dei punti reciproci:

$$\left.\begin{aligned} D_1B = D_2C = b'_1 = c'_2 = (p-a) \\ D_1C = D_2B = c'_1 = b'_2 = (2a-p) \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

le quali sono eguali due a due fra di loro.

Per trovare i tre parametri lineari e quindi la terza coordinata ceviana per ciascuno dei due punti o piedi D_1, D_2 basterà calcolare prima i due angoli $D_1AB = A_1$, $D_2AC = A_2$.

Si ottengono rispettivamente dalle due relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen}(A_1+B)}{\operatorname{sen} A_1} = \frac{c}{p-a} \qquad\qquad \frac{\operatorname{sen}(A_2+C)}{\operatorname{sen} A_2} = \frac{b}{p-a} \\
&\text{dalle quali si ricavano} \\
&\cot A_1 = \frac{c-(p-a)\cos B}{\operatorname{sen} B} \qquad\qquad \cot A_2 = \frac{b-(p-a)\cos C}{\operatorname{sen} C} \,. \\
&\text{Saranno quindi} \\
&q_1 = a \operatorname{sen}(A_1+B) \qquad\qquad q_2 = a \operatorname{sen}(A_2+C) \\
&\Delta_1 = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(A_1+B) \,. \qquad\qquad \Delta_2 = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(A_2+C) \\
&a'_1 = h_1 = \frac{bc}{a \operatorname{sen}(A_1+B)} \qquad\qquad a'_2 = h_2 = \frac{bc}{a \operatorname{sen}(A_2+C)}
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Anche qui si deduce la proprietà

$$\left.\begin{aligned} q_1 : q_2 = \Delta_1 : \Delta_2 = h_2 : h_1 = \operatorname{sen}(A_1+B) : \operatorname{sen}(A_2+C) \\ = c \,.\, \operatorname{sen} A_1 : b \,.\, \operatorname{sen} A_2 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

che si può enunciare così: *Il rapporto diretto dei due parametri lineari* q *o dei due* Δ *e l'inverso dei due parametri* h *dei due punti reciproci* D_1 *e* D_2 *è uguale al rapporto delle rispettive distanze dalle ceviane passanti per questi punti.*

Uno studio analogo si potrebbe fare per altri punti speciali sui lati del triangolo, ed esaminare i casi particolari che si possono presentare nelle varie specie di triangoli e che noi tralasciamo, sembrando più che sufficienti i casi sopra esaminati.

Prof. G. Delitala.

PICCOLE NOTE

Dimostrazione di un teorema di calcolo combinatorio. — È noto che *il numero delle combinazioni con ripetizione di* n *elementi, della classe* k, *è uguale a quello delle combinazioni semplici di* $n+k-1$ *elementi, della classe* k; brevemente

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}.$$

La semplice dimostrazione che segue ha il vantaggio di stabilire l'uguaglianza dei due numeri indipendentemente dalla conoscenza di essi.

DIMOSTRAZIONE. — In una combinazione con ripetizione di classe k degli n elementi $a_1\, a_2 \ldots a_n$, sia a_i contenuto α_i volte. Sarà:

$$(1) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \text{ ed intero.}$$

Ad ognuna di tali combinazioni corrisponde una soluzione della (1), e reciprocamente. Quindi: *La* (1) *ammette* $C'_{n,k}$ *soluzioni.*

Dati ora $n + k - 1$ elementi $b_1\, b_2 \ldots b_{n+k-1}$, ogni loro combinazione semplice della classe k si potrà ottenere sopprimendo $n - 1$ elementi $b_{r_1}\, b_{r_2} \ldots b_{r_{n-1}}$. Dei k rimanenti α_1 precedano b_{r_1}, α_2 siano fra b_{r_1} e b_{r_2} ecc. α_n seguano $b_{r_{n-1}}$. Sarà ancora:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \text{ ed intero.}$$

Ad ogni combinazione semplice delle b_j della classe k corrisponde quindi una soluzione della (1), e reciprocamente. Segue: *La* (1) *ammette* $C_{n+k-1,k}$ *soluzioni.*

Confrontando i due enunciati si deduce:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} \qquad \text{c. d. d.}$$

Pavia. LUIGI BRUSOTTI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 613, 615, 616, 617 E 618

613. (703) (*) *Sia* MN *una corda normale in* M *ad una parabola* p, *inclinata di* 45° *sull'asse di questa, e sia* c *il circolo tagente esternamente a* p *in* M *di raggio* $\frac{MN}{4}$. *Si dimostri:*

1°. *Che una delle tangenti comuni a* p *e* c *è parallela ad* MN;

2°. *Che la distanza della tangente in* M *dal punto d'incontro delle altre due tangenti comuni a* p *e* c *è* $\frac{3\,MN}{4}$;

3°. *Che il segmento staccato sulla tangente in* M *dalle due tangenti suddette è uguale a* MN.

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Niccolai.

Essendo

$$y^2 = 2px$$

l'equazione della parabola p, si trova immediatamente che:

$$(1) \quad x + y + \frac{p}{2} = 0, \qquad (2) \quad x - y - \frac{3p}{2} = 0$$

(*) Le quistioni numerate dal 610 al 615 corrispondono a quelle, del fasc. I (Anno XVIII) dal 700 al 705, così numerate in causa di un errore tipografico.

sono le equazioni della tangente e dalla normale in M $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ e che inoltre $MN = 4p\sqrt{2}$.

L'equazione del circolo tangente esternamente in M alla parabola p di raggio $p\sqrt{2}$ in coordinate plükeriane è:

(3) $$\left(\frac{p}{2}u + 2pv - 1\right)^2 = 2p^2(u^2 + v^2);$$

per cui le tangenti comuni a p e a c si determinano, cercando le soluzioni comuni alla (3) e alla equazione della parabola in coordinate plükeriane

(4) $$2u = pv^2.$$

Si conclude che le tangenti comuni alla parabola e al circolo distinte dalla (1) sono le:

(5) $$x - y + \frac{p}{2} = 0, \qquad x + 7y + \frac{49}{2}p = 0,$$

e la prima parte del teorema si fa manifesta.

2°. Il punto comune alle (5) ha per coordinate: $\left(-\frac{7}{2}p, -3p\right)$, per cui, chiamando d_1 la sua distanza dalla (1), si ha:

$$d_1 = 3p\sqrt{2}.$$

3°. La (1) incontra le (5) rispettivamente nei punti:

$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{2}p, -4p\right)$ la distanza dei quali è eguale a $4p\sqrt{2}$.

615. (705) *Due parabole hanno lo stesso vertice O ed i loro assi sono ortogonali. Trovare le coordinate del secondo punto d'incontro O', l'angolo delle parabole in O' e l'area della porzione di piano limitata fra gli archi OO' delle due parabole.*

Facendo variare il parametro di una delle due parabole, si trovi per qual valore di esso l'angolo delle parabole in O' sia massimo.

Barisien.

Risoluzione del sig. Occhipinti e del prof. Nannei.

Siano P e Q le due parabole ed $y^2 - 2px = 0$, $x^2 - 2qy = 0$ le rispettive equazioni; le coordinate del punto O' si ottengono risolvendo il sistema precedente rispetto ad x ed y ed escludendo i valori $x = 0$, $y = 0$ che danno le coordinate di O. Allora si ottiene:

$$x = 2\sqrt[3]{pq^2}, \quad y = 2\sqrt[3]{p^2q}.$$

Ora le equazioni delle tangenti a P e Q in O' sono rispettivamente:

$$2\sqrt[3]{p^2q}\; y = px + 2\sqrt[3]{p^4q^2} \quad , \quad qy = 2\sqrt[3]{pq^2}\; x - 2\sqrt[3]{p^2q^4}$$

ed i loro coefficienti angolari sono $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, $2\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, e quindi la tangente dell'angolo φ di queste rette, cioè dell'angolo delle parabole in O', è

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{pq}}{\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2}}.$$

Facendo variare, per es., p, l'espressione precedente è massima (o minima) quando

$$\frac{1}{3}\left(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}\right)p^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}=0$$

cioè quando $p=q$. Questo valore di p rende negativa la seconda derivata di $\operatorname{tg}\varphi$ rispetto a p, come si verifica con un calcolo facile, dunque corrisponde ad un massimo.

Sia infine, A l'area della porzione di piano limitata fra gli archi OO' delle due parabole; ed R il rettangolo che ha per vertici O, O' e le proiezioni di O' sugli assi. È facile vedere che $A=\frac{1}{3}R$, e siccome R è eguale al prodotto delle coordinate di O' si ricava

$$A=\frac{1}{3}pq.$$

616. *Gli archi massimi condotti da un punto* P *ad un circolo minore, della superficie sferica verificano la relazione*

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}PM\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}PM_1=\text{costante.}$$

CASSANI.

Risoluzione del prof. Padoa.

Se O è il centro della superficie sferica, Q il punto opposto a P, R l'intersezione di PQ col piano della circonferenza minore, e se MM_1 è la corda comune a questa circonferenza e ad una circonferenza massima arbitraria passante per P, dimostrerò che

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}PM\,.\,\operatorname{tang}\frac{1}{2}PM_1$$

è eguale a

$$\frac{OP-OR}{OP+OR}\quad\text{ovvero a}\quad\frac{OP+OR}{OP-OR}$$

secondochè R è un punto di OP o di OQ.

1) R sia un punto di OP. Qualora P non dimezzi l'arco MM_1, sia M l'estremo della corda che è più prossimo a P; quindi, rappresentati con 2α e 2β gli angoli POM_1 e POM, sarà $\alpha > \beta$. La proiezione di O su MM_1 sia S; l'angolo SOM è la semisomma degli angoli 2α e 2β, cioè $\alpha+\beta$. L'intersezione di OP con MM_1 è R; l'angolo SOR è la differenza fra gli angoli SOM e POM, cioè fra $\alpha+\beta$ e 2β, quindi è $\alpha-\beta$. Dopo ciò, si ha

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OS}{OR}\qquad \cos(\alpha+\beta)=\frac{OS}{OM}$$

da cui, rammentando che

$$\operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)},$$

semplificando e sostituendo OP ad OM, risulta

$$\operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\beta=\frac{OP-OR}{OP+OR}\qquad\text{c. d. d.}$$

2) R sia un punto di OQ. In tal caso, quanto precede sussiste sol che si cambi P in Q. Quindi, rappresentati con $2\alpha'$ e $2\beta'$ gli angoli POM_1 e POM, poichè

$$\alpha'=90^\circ-\alpha\qquad \beta'=90^\circ-\beta$$

da cui

$$\operatorname{tang}\alpha' \,.\, \operatorname{tang}\beta' = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta},$$

risulta

$$\operatorname{tang}\alpha' \,.\, \operatorname{tang}\beta' = \frac{OP + OR}{OP - OR} \qquad \text{c. d. d.}$$

617. *Si descrivano tre semiperbole ciascuna delle quali abbia per assintoti due lati di un triangolo equilatero, e sia tangente al terzo.*

La minima distanza fra due di esse è $(\sqrt{2}-1)l$, *essendo* l *la lunghezza del lato del triangolo.*

GREENSTREET.

Risoluzione del sig. Occhipinti.

Sia h l'iperbole che ha per assintoti AB, AC e h' quella che ha per assintoti AB, BC, e, indicando con O il piede della perpendicolare condotta da C ad AB, si prenda OB per asse positivo delle x e OC per asse positivo delle y.

Essendo $OB = \frac{l}{2}$, $OA = -\frac{l}{2}$, $OC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, l'equazioni delle rette AC, BC sono rispettivamente

(1) $$2x\sqrt{3} - 2y + l\sqrt{3} = 0, \qquad 2x\sqrt{3} + 2y - l\sqrt{3} = 0.$$

L'equazione di un'iperbole che ha per assintoti AB, AC è

$$y(2x\sqrt{3} - 2y \times l\sqrt{3}) = k,$$

e quindi quella dell'iperbole h si trova determinando k per mezzo della condizione che essa deve passare per il punto medio di AB che ha per coordinate

$$x = \frac{1}{2}\,OB = \frac{l}{4}, \qquad y = \frac{1}{2}\,OC = \frac{l\sqrt{3}}{4}.$$

Si trova così $k = -\frac{3}{4}l^2$, e quindi l'equazione di h è

(2) $$8y^2 - 8\sqrt{3}\,xy - 4l\sqrt{3}y + 3l^2 = 0;$$

e similmente quella di h' è

(3) $$8y^2 + 8\sqrt{3}\,xy - 4l\sqrt{3}y + 3l^2 = 0.$$

Per la simmetria della figura apparisce evidente che la minima distanza fra i punti delle due iperboli h, h' è eguale alla distanza delle due rette ad esse tangenti e parallele all'asse y.

La tangente ad h o h' parallela alla y si trova imponendo la condizione che la (2) o la (3) risolute rispetto alla y abbiano una radice doppia. Tali equazioni sono dunque

$$x = \frac{l(\sqrt{2}-1)}{2} \qquad x = -\frac{l(\sqrt{2}-1)}{2}$$

e la distanza delle due rette è $l(\sqrt{2}-1)$.

618. *Calcolare il raggio del circolo tangente ad una data iperbole e ad uno dei suoi assintoti nel centro dell'iperbole.*

Caso dell'iperbole equilatera.

Risoluzione del sig. Occhipinti, R. U. di Palermo.

Prendiamo come asse delle y l'assintoto dell'iperbole, cui deve esser tangente il circolo da costruire, e la perpendicolare a questa retta dal centro O dell'iperbole come asse delle x; l'equazione dell'iperbole data è allora della forma

(1) $$ax^2 + 2hxy + c = 0,$$

dove si debbono supporre noti almeno i rapporti di due coefficienti al terzo; p. es. ad h che non può mai mancare. L'equazione di un cerchio tangente in O all'asse delle y è

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0 \tag{2}$$

dove r dinota il raggio. Se questo circolo deve toccare la iperbole, bisogna che l'equazione

$$(a^2 + 4h^2)\,x^4 - 8h^2\,rx^3 + 2acx^2 + c^2 = 0$$

che si ottiene eliminando y fra la (1) e (2) abbia una radice doppia, cioè che si abbia altresì

$$(a^2 + 4h^2)\,x^2 - 6h^2rx + ac = 0.$$

Eliminando r fra queste due, si ricava

$$x = \sqrt{\frac{ac \pm 2c\sqrt{a^2 + 3h^2}}{a^2 + 4h^2}};$$

conseguentemente

$$r = \frac{c\,(a \pm \sqrt{a^2 + 3h^2})\sqrt{a^2 + 4h^2}}{3h^2\sqrt{ac \pm 2c\sqrt{a^2 + 3h^2}}}.$$

Supponiamo nella (1) $a > 0$; allora se gli assintoti della iperbole data formano un angolo acuto, deve essere necessariamente $c > 0$, quindi per x deve prendersi il solo valore corrispondente al segno $+$; se l'angolo degli assintoti è retto, allora dev'essere naturalmente $c < 0$, quindi per x è da prendersi il solo valore corrispondente al segno $-$; infine, se l'angolo degli assintoti è ottuso, sussiste il risultato precedente. Corrispondentemente si ha il valore di r in ogni caso, supposto sempre $a > 0$ (al qual caso possiam sempre ridurci). Se l'iperbole è equilatera, allora $a = 0$ epperò, posto $\frac{c}{h} = -k^2$ si ha: $r^2 = \frac{2k^2}{3\sqrt{3}} = \frac{k}{3} \times \frac{k}{\operatorname{sen} 60^\circ}$. Si ha dunque la seguente costruzione per trovare il raggio r: Si costruisca il triangolo equilatero di lato k: il diametro AB del cerchio circoscritto sarà $\frac{k}{\operatorname{sen} 60^\circ}$; si riporti su AB, a partire da A il terzo di k fino in C: da C la perpendicolare ad AB fino ad incontrare il cerchio circoscritto in D: AD è il raggio cercato

QUISTIONI PROPOSTE

621. Per un punto P del piano di una conica data si conduca una retta variabile che incontri la conica in A e B. Si trovi l'inviluppo del circolo di diametro AB.

622. Siano MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 le normali condotte da un punto M ellisse di centro O. Il luogo dei punti M tali che

$$k\,(\overline{MN}_1^2 + \overline{MN}_2^2 + \overline{MN}_3^2 + \overline{MN}_4^2) + k'\,(\overline{ON}_1^2 + \overline{ON}_2^2 + \overline{ON}_3^2 + \overline{ON}_4^2) = l^2$$

è una conica, che diventa un circolo, quando $k = k'$, e una coppia di rette quando $k = -k'$.

Quistione analoga per la parabola, essendo O il vertice.

623. Un punto M si sposta sopra una semicirconferenza di diametro AB. Siano P, P' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base AM, e Q, Q' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base BM. Si trovino i luoghi di P, P', Q, Q' e dei punti medi di PQ, P'Q', PQ' e P'Q.

624. Essendo r, θ le coordinate polari d'un punto M d'una curva d'area s, e V l'angolo della tangente col raggio vettore, dimostrare che il raggio di curvatura ρ in M è

$$\rho = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

625. Dimostrare che

$$\lim_{(x=1)} \left[\frac{(x+1)\left[\frac{(x+1)}{x} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}\right]}{x-1} \right] = 2.$$

626. Trovare l'area compresa fra la curva

$$y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c$$

e l'asse delle x, quando x varia da 0 a 2π.

627. Dimostrare che l'area della curva

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2) = (a+b)^4 (x^2 - y^2)$$

è

$$U = \frac{2(a+b)^3}{a-b} \left[\frac{a^2+b^2}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right];$$

e che, quando $a = b$, quest'area diventa

$$U = 16a^2.$$

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Capelli. — *Istituzioni di analisi algebrica.* Terza edizione con aggiunte delle Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. — Napoli, Pellerano, 1902. L. 11.

Quest'opera del valente professore dell'Università di Napoli è troppo universalmente nota agli studiosi, e se ne è occupato altre volte anche il Periodico, perchè occorra parlare lungamente di essa. Ci limiteremo quindi ad accennare in che cosa essa differisce dalle precedenti edizioni.

Mentre nella prima e seconda edizione si supponeva già noto tutto ciò che forma argomento dei corsi ordinari di aritmetica razionale ed algebra elementare nei licei, in questa terza edizione lo studio dei numeri è preso *ab ovo*, e quindi gli ordinari elementi di aritmetica ed algebra ed i complementi di questa sono fusi in un tutto armonico ed omogeneo. Per questa ragione l'egregio Autore ha molto opportunamente cambiato il primitivo titolo in quello di *Istituzioni di analisi algebrica*, che meglio si addice all'opera nella sua nuova forma. L'esposizione dei primi fondamenti della teoria dei numeri è fatta con l'*indirizzo combinatorio*, seguendo i concetti ampiamente svolti dall'Autore in tre memorie pubblicate l'anno scorso nel *Giornale di Battaglini*, che egli dirige.

Le altre più notevoli modificazioni ed aggiunte consistono nel maggiore sviluppo dato agli elementi di analisi combinatoria e alla moderna teoria dei gruppi; in un nuovo capitolo (VIII), in cui sono esposte le *generalità sulla continuità e derivabilità delle funzioni di variabili reali;* nella esposizione degli elementi della teoria delle funzioni ellittiche. K.

CARRARA. — *I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza.* Studio storico-critico. Problema 1°. La quadratura del circolo. (Estratto dalla *Rivista di fisica, matematica e scienze naturali.*)

Il Prof. Bellino Carrara ha iniziato con questo primo volume di circa 170 pagg. la storia dei tre celebri problemi, quadratura del circolo, duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo, che hanno inutilmente affaticato i Matematici dalla più remota antichità fino ai giorni nostri, e dei quali soltanto in epoca recente è stata dimostrata l'impossibilità per mezzo della riga e compasso, benchè fosse già da lungo intraveduta, come risulta dal fatto che nel 1775 l'Acc. di Parigi deliberò di non prendere più in esame le pretese risoluzioni dei detti problemi e dell'altro del moto perpetuo.

La storia del problema della quadratura del circolo è tratteggiata in questo volume con la diligenza, e abilità, che distinguono l'egregio autore, in forma facile e dilettevole. Dopo avere accennato alle varie ragioni che resero celebre questo problema, anche presso i non matematici, quanto il *lapis philosophorum* e l'*elisir di vita* dal primo valore di $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ dato da *Ahmes* circa 2000 anni prima di Cristo, si giunge attraverso all'opera dei Greci, dei Romani, degli Arabi nell'Antichità, dei popoli latini nel Medio Evo e nel Rinascimento, fino alle dimostrazioni dell'irrazionalità di π e π^2 di *Lambert* e dal *Legendre*, alle dimostrazioni recenti della trascendenza di e e di π date da *Hermite* e *Lindemann*, al contributo dato da *Weierstrass* alla quistione, all'integratore di *Abdank-Abakanowicz*.

Sarebbe bene che i molti illusi i quali si affannano ancora in una ricerca inutile, leggessero questo libro per non perdere il tempo e risparmiarsi di dire e scrivere degli spropositi. K.

ERNESTO PASCAL. — *I gruppi continui di trasformazioni.* (Parte generale della teoria). Milano, Hoepli, 1903. Lire 3.

Fra le più importanti opere dovute ad uno dei grandi ingegni matematici del secolo scorso, a SOPHUS LIE, vi è la " *Teoria dei gruppi continui di trasformazioni* ", opera notevole e per se stessa e per le splendide applicazioni che si son fatte a diversi rami dell'Analisi e della Geometria. Il LIE, insieme ai suoi valorosi discepoli ENGEL e SCHEFFERS, molto scrisse sulla Teoria dei gruppi, e certamente a gran disagio si troverebbe chi, ancor novello negli studi delle parti più elevate delle Matematiche, volesse sulle opere stesse di LIE cominciare lo studio di così difficili teorie. Ben a proposito pensò quindi il Chia.mo Prof. PASCAL di facilitare lo studio della Teoria dei gruppi, offrendo ai giovani studiosi, cui dedicò il suo lavoro, un libro che contiene quanto forma le parti più notevoli di detta Teoria.

Il lavoro del Prof. PASCAL si divide in 5 Capitoli. Per dare un'idea degli argomenti in esso trattati, accenniamo sommariamente al contenuto di ciascun Capitolo.

Nel Cap. I, (Teoria generale dei gruppi di trasformazioni), stabilito il concetto di trasformazione, e data la definizione di gruppi continui di trasformazioni, l'Autore, dopo aver fatto un cenno di alcuni gruppi più comuni (gruppi lineari, proiettivi, Cremoniani), passa alla ricerca delle *Equazioni differenziali caratteristiche di un gruppo*, ricerca che conduce al teorema detto da LIE, *il primo teorema fondamentale della teoria dei gruppi.* Costruite sotto una forma generale le trasformazioni relative *ad un gruppo ad un parametro*, trovate le formole esplicite *canoniche* per le trasformazioni di un gruppo ad un parametro, vien data la definizione di trasformazione infinitesimale del gruppo, mostrando come ogni simbolo di trasformazione infinitesimale si possa ridurre ad una forma speciale, detta *canonico*. Dimostrate varie proprietà dei simboli delle trasformazioni infinitesimali, l'Autore dimostra una formola che dà il prodotto di due trasformazioni finite date sotto forma canonica. Il problema della determinazione delle trasformazioni infinitesime, prodotto di due altre, era già stato trattato dall'autore in una sua Nota: Sulla *formola* del prodotto di due trasformazioni finite, ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), v. 34, 1901), servendosi di alcune identità fra i simboli di trasformazioni infinitesime, identità contenute in una Nota prec.: *Sopra alcune identità fra i simboli*, ecc. L'Autore studia poi i sistemi completi di Equazioni: $\sum\limits_{h=1}^{n} \xi_{ih} \dfrac{df}{dx_h} = 0$, $(i = 1 \ldots r)$, ossia sistemi completi di Equazioni a derivate parziali. lineari, di primo ordine, nei cui coefficienti non entra la funzione incognita f. Risolto il problema della costruzione, mediante r trasformazioni infinitesime indipendenti, di ∞^{2r} trasformazioni ad r parametri essenziali, e dimostrati alcuni teoremi relativi ai gruppi ad r parametri, contenenti la trasformazione identica e alcune proprietà di un assieme di ∞^{2r} trasformazioni, vengono trovate delle relazioni *caratteristiche* fra le r trasformazioni infinitesime di un gruppo ad r parametri, contenente la trasformazione identica, e date due dimostrazioni del cosidetto *secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi*; di tali dimostrazioni una è del Lie, l'altra è dovuta all'Autore stesso, che giunge ai medesimi risultati, in modo molto semplice, servendosi della formola del prodotto di due trasformazioni finite. Il Capitolo si chiude con la dimostrazione del *terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi*.

Nel Cap. II, data la definizione di invariantività di una funzione rispetto ad un gruppo, viene studiata l'invariantività, rispetto ad un gruppo, dapprima di un sistema di equazioni finite, di poi di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, della forma sopra indicata, e quindi di un sistema di trasformazioni infinitesime; il Cap. si chiude con un cenno sulla permutabilità di due trasformazioni, o di due gruppi, e sulle trasform. infinit. e sottogruppi invarianti di un gruppo dato.

Il Cap. III tratta delle proprietà relative alla costituzione di gruppi; l'Autore espone notevoli proprietà sulla transitività, ed imprimitività dei gruppi, sulla sostantività di un gruppo, sull'isomorfismo e similitudine di due gruppi. Allo studio delle proprietà principali di certi gruppi, che restano determinati in vario modo, dato un gruppo fondamentale, è dedicato il Cap. IV, ove partendo da risultati stabiliti nel Cap. I e III, vengono dedotte delle proprietà relative al gruppo *aggiunto*, al gruppo *di struttura*, al gruppo *parametrico*, al gruppo *isomorfo ad un gruppo imprimitivo*; vengono poi studiati i gruppi *ampliati* e i gruppi *reciproci dei gruppi semplicemente transitivi ad n parametri essenziali*. L'ultimo Cap. infine tratta della teoria invariantiva dei gruppi ampliati.

In alcune note messe in fine al testo e nel testo stesso, sono brevemente riprodotte alcune ricerche speciali dell'Autore stesso. Oltre a quelle più sopra citate, notiamo alcune ricerche sui numeri Bernouilliani (cfr. Sopra i numeri Bernouilliani, Rend. Ist. Lomb. 2. t. 35, 1902), la dimostrazione del terzo teorema di Lie (cfr. Rend. Ist. Lomb. 2, t. 35, 1902 pag. 419), e la costruzione delle trasformazioni infinitesime del gruppo parametrico di un gruppo dato, del quale sieno assegnate le trasformazioni infinitesime. L'opera del prof. Pascal riuscirà certamente di grande aiuto a quanti desiderano studiare poi i lavori del Lie; un desiderio mi permetto di esternare, e credo sarà di tutti quelli che prenderanno conoscenza del lavoro del prof. Pascal: che ben presto esca un nuovo volume riguardante la Teoria delle trasformazioni di contatto, altra delle creazioni del genio di Lie. acr.

Ernesto Pascal. — *Calcolo infinitesimale*. Vl. 2, Ed. II. Milano, Hoepli, 1902.

Tale opera del prof. Pascal, già nota ai cultori delle matematiche, contiene la materia che si suole svolgere in un corso ordinario di calcolo infinitesimale.

La nuova edizione contiene numerose modificazioni ed aggiunte e miglioramenti, sebbene sia stato lasciato inalterato l'ordinamento e lo schema fondamentale del lavoro, giacchè l'Autore, a proposito della novità introdotta in alcuni recenti trattati della promiscua esposizione dei due calcoli, differenziale e integrale dice: « Non l'ho fatto, non essendomi convinto dei vantaggi scientifici e didattici che presenta questa fusione, la quale, d'altra parte, anzichè una vera e propria fusione, sembrami che, salvo lievi eccezioni, venga piuttosto a ridursi ad una spostamento di Capitoli, giacchè i concetti, le definizioni, le dimostrazioni, i procedimenti in genere, salvochè in qualche punto di secondaria importanza, restano in sostanza gli stessi di prima „.

Nel Vol. I, Calcolo differenziale, notiamo fra le altre, le modificazioni introdotte in alcuni teoremi sui limiti, nel Teorema di Cantor, e in alcuni teoremi riguardanti le serie convergenti in egual grado e le serie di potenze.

Nel Vol. II, Calcolo integrale, oltre a numerose modificazioni ed aggiunte si trova un § dedicato alla descrizione dell'integrafo inventato dall'Ing. russo Abdank-Abacanowitz e modificato dal Coradi di Zurigo: sono poi rapidamente accennati i principali usi cui l'istrumento può servire. L'opera del prof. Pascal è certamente pregevole per la chiarezza e il rigore scientifico.

acr.

G. Farisano. — *Geometria descrittiva.*

Vi sono molti libri di Geometria descrittiva tutti eccellenti; però essi o eccedono di troppo i limiti assegnati ai relativi programmi degli istituti tecnici, o sono monchi. Il libro di Geometria descrittiva dell'ing. e prof. G. Farisano ai pregi di un'esposizione chiara, ordinata rigorosa e logica, unisce quello di svolgere con criteri pratici, completamente ed esclusivamente i suddetti programmi, per cui lo ritengo il più adatto e il più utile per gli Istituti tecnici, sezione agrimensura.

V. Ambrosino.

Stolz und Gmeiner. — *Theoretische Aritmetik.*

I Abtheilung. — Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen.
II „ Die Lehren von der reellen und von den complexen Zahlen. Leipzig, Teubner, 1902.

Questi due volumi costituiscono una seconda edizione interamente rifatta ed accresciuta di una parte del ben noto e classico libro dello stesso Stolz *Vorlesungen über algemeine Aritmetik.* La parte di questa opera non considerata nella presente pubblicazione costituirà un altro volume, ora in preparazione, che sarà intitolato *Einleitung in die Functiontherie nach Weierstrass.* Ecco l'ordine dei capitoli:

Parte Prima: I. — *Introduzione — Concetto di grandezza e numero.*
II. — *I numeri naturali.*
III. — *Teoria analitica dei numeri razionali — Generazione analitica dei numeri razionali.*
IV. — *Teoria sintetica dei numeri razionali — Le frazioni sistematiche.*

Parte Seconda: V. — *Sistemi continui ad una dimensione di grandezze assolute relative.*
VI. — *Teoria dei rapporti secondo Euclide — Deduzione da questa dei numeri reali.*
VII. — *Teoria aritmetica dei numeri irrazionali secondo G. Cantor e C. Meray.*
VIII. — *Potenze reali, radici, logaritmi.*
IX. — *Le serie infinite a termini reali — Serie a termini positivi — Serie che contengono termini positivi e negativi in numero illimitato.*
X. — *Teoria analitica dei numeri complessi.*
XI. — *Teoria geometrica dei numeri complessi comuni.*
XII. — *Potenze complesse, radici e logaritmi*
XIII. — *Serie infinite a termini complessi.*

K.

ERRATA-CORRIGE.

Correzioni alla Nota: "Un problema sulla partizione dei numeri „. Anno XVIII, fasc. II.

p. 118, lin. 20	invece di	$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=N} A_r N$	leggasi	$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{2} N \sum_{r=0}^{r=N} A_r.$
p. 120, lin. 5	„	$-(\lambda-3)$	„	$-(\lambda-2).$
p. 120, lin. 6	„	$-(\lambda-2)$	„	$-(\lambda-3).$
p. 120 lin. 24	„	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	„	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 2 dicembre 1902.

SUI NUMERI PERFETTI E SUI NUMERI DI MERSENNE

1. Si chiama **numero perfetto** un numero eguale alla somma dei suoi divisori, escluso sè stesso. Euclide aveva osservato che ogni numero della forma $2^{p-1}(2^p-1)$, nel caso in cui il secondo fattore è un numero primo, è perfetto: Eulero ha dimostrato di più che ogni numero perfetto *pari* è di questa forma: molti poi, fra i quali Boezio, Fermat, Eulero, Legendre hanno cercato numeri perfetti dispari, ma tutti senza alcun risultato.

Nella presente monografia mi propongo, anzi tutto, di dimostrare che un numero impari non può esser perfetto; quindi di studiare le principali proprietà di detti numeri, e finalmente ricercare la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione 2^p-1 rappresenti un numero primo, vale a dire perchè p sia un numero di Mersenne.

La dimostrazione del teorema fondamentale: *Ogni numero perfetto è pari,* richiede la dimostrazione di alcuni teoremi ausiliari, che ora esporrò.

2. Lemma. — *Se* a *e* b *sono due numeri primi, maggiori di* 2, *l'espressione*

$$2(a+b-1)-ab \tag{1}$$

è sempre negativa.

Intanto, se $a=2$, si ha

$$2(a+b-1)-ab=2.$$

Supponiamo ora tanto a che b maggiori di 2, e sia per ipotesi $b>a$: avremo $b=a+n$, e, sostituendo nella (1),

$$\{4a+2(n-1)\}-(a^2+an).$$

È facile verificare che, colle ipotesi fatte, il termine a^2+an è maggiore dell'altro $4a+2(n-1)$, e quindi l'intera espressione (1) è negativa.

c. d. d.

3. Teorema. — *Ogni numero perfetto, eguale al prodotto di potenze di due soli fattori primi, è pari.*

Sia il numero $n=a^\alpha b^\beta$: io dico che, se n è perfetto, uno dei due fattori a, b è eguale a 2. Infatti, perchè n sia perfetto, deve essere

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=2a^\alpha b^\beta.$$

Di qui abbiamo

$$(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)=2a^\alpha b^\beta(a-1)(b-1),$$

ossia

$$a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1=2a^{\alpha+1}b^{\beta+1}+2(a^\alpha b^\beta-a^{\alpha+1}b^\beta-a^\alpha b^{\beta+1})$$

donde $$a^{\alpha+1} + b^{\beta+1} - 1 = a^\alpha b^\beta \{2(a+b-1) - ab\}. \qquad (2)$$

Ora il primo membro di questa eguaglianza, per a e b positivi, è sempre positivo, mentre il secondo, per il lemma precedente, è positivo soltanto quando uno dei fattori a, b, sia eguale a 2. Ne viene che, perchè la (2) possa sussistere, deve essere a o b eguale a 2, e quindi $n = a^\alpha b^\beta$ è pari, c. d. d.

4. Corollario. — È interessante vedere come dal teorema dimostrato si può ricavare la nota formula d'Euclide che ci dà numeri perfetti.

Abbiamo infatti
$$n = 2^\alpha b^\beta,$$
quindi, per la (1), essendo nel caso di $a = 2$
$$2(a+b-1) - ab = 2,$$
$$2^{\alpha+1} + b^{\beta+1} - 1 = 2^{\alpha+1} b^\beta. \qquad (3)$$

Affinchè questa eguaglianza possa essere verificata da un numero primo b deve essere $\beta = 1$.

Infatti, supponendo $\beta > 1$, avremo
$$b^{\beta+1} - 2^{\alpha+1} b^\beta + (2^{\alpha+1} - 1) = 0,$$
ossia
$$\frac{b^\beta (2^{\alpha+1} - b)}{2^{\alpha+1} - 1} = 1,$$
il che facilmente si dimostra non poter essere per altro numero primo e positivo che per $b = 1$. L'ammettere dunque $\beta > 1$ ci porta di necessità a concludere $b = 1$, contrariamente all'ipotesi fatta. Sia quindi $\beta = 1$: avremo allora per la (3)
$$b^2 - 2^{\alpha+1} b + (2^{\alpha+1} - 1) = 0,$$
che, risolta rispetto a b, ci dà i due valori
$$b_1 = 2^{\alpha+1} - 1 \quad , \quad b_2 = 1.$$

Escludendo, per le ragioni dette sopra, il caso $b = 1$, ci rimane per b il valore $2^{\alpha+1} - 1$; quindi
$$n = 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1),$$
nel caso in cui il secondo fattore è numero primo, espressione che non è altro che la nota formula di Euclide.

Osservazione. — Essendo condizione necessaria perchè l'espressione $2^{\alpha+1} - 1$ rappresenti un numero primo, che $\alpha + 1$ sia numero primo, possiamo dire che

Ogni numero contenuto nell'espressione
$$E_p = 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1),$$
quando $2^{\alpha+1} - 1$ *è primo, è perfetto.*

5. Lemma. — *Per* a *e* b *primi e maggiori di* 2, *si ha sempre*

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}<2a^\alpha b^\beta.$$

Nel § 3, relazione (2), ho dimostrato che l'espressione:

$$a^{\alpha+1}+b^{\beta+1}-1$$

(quando a e b siano ambedue primi e >2) è sempre positiva, mentre l'altra

$$a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}$$

è sempre negativa. Si ha quindi in ogni caso, nell'ipotesi fatta di a e b primi,

$$a^{\alpha+1}+b^{\beta+1}-1>a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}.$$

Cambiando di segno i due membri della diseguaglianza, le relazioni di grandezza vengono invertite, quindi

$$-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1<-a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}.$$

Aggiungendo ai due membri della diseguaglianza la stessa quantità, le relazioni di grandezza non cambiano, quindi

$$a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1<a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}$$

ossia

$$a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1<2a^{\alpha+1}b^{\beta+1}+2(a^\alpha b^\beta-a^{\alpha+1}b^\beta-a^\alpha b^{\beta+1}),$$

$$(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)<2a^\alpha b^\beta(a-1)(b-1),$$

donde finalmente

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}<2a^\alpha b^\beta.$$

c. d. d.

6. Teorema. — *Un numero eguale al prodotto di potenze di più di due fattori primi, non può essere perfetto.*

Principiamo dal considerare il caso di un numero formato da tre fattori primi

$$n=a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Se n è perfetto, deve essere verificata l'eguaglianza

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

che possiamo mettere sotto la forma

$$\left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=(2a^\alpha b^\beta)\,c^\gamma.$$

Ed ambedue i membri di questa eguaglianza dovrebbero essere eguali al minimo comune multiplo M di $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ e $2a^\alpha b^\beta$, o ad un suo multiplo $\dot{M}$, e per conseguenza dovrebbe essere

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=\frac{\dot{M}}{\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}} \tag{1}$$

e

$$c^\gamma=\frac{\dot{M}}{2a^\alpha b^\beta}.$$

Se α e β sono ambedue pari,

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=a^\alpha+a^{\alpha-1}+\ldots+a+1$$

e

$$\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=b^\beta+b^{\beta-1}+\ldots+b+1$$

sono ambedue dispari; quindi

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

è dispari: di più questo prodotto non è divisibile nè per a^α nè per b^β, (*) quindi il minimo comun multiplo sarà della forma

$$2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu \ldots;$$

si dovrebbe allora avere

$$c^\gamma=\frac{2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu \ldots}{2a^\alpha b^\beta}=m^\mu b^\nu \ldots,$$

il che, essendo c, per ipotesi, primo, è assurdo. (**)

(*) Infatti, non essendo $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ divisibile per a e $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ divisibile per b, l'unico caso possibile sarebbe che fosse o $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=b^\beta$ o $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^\alpha$: ma allora il minimo comune multiplo verrebbe della forma

$$2^\delta a^\alpha b^\beta \ldots,$$

e quindi c, avendosi

$$c^\gamma=\frac{2^\delta a^\alpha b^\beta \ldots}{2a^\alpha b^\beta},$$

non sarebbe più primo, contrariamente all'ipotesi.

(**) Il caso che sia $M=2a^\alpha b^\beta c^\gamma$ rimane immediatamente esaurito, osservando che, in tale ipotesi, dovrebbe essere (dal momento che $2a^\alpha b^\beta$ e $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non hanno fattori primi comuni)

$$c^\gamma=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1},$$

donde per la (1) $\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=1$ da cui $c=1$ ovvero $c=2$, $\gamma=0$, contrariamente all'ipotesi.

Se α e β sono ambedue dispari,

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \quad \text{e} \quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

sono ambedue pari: in tal caso M contiene 2 per lo meno alla seconda potenza, e dovrebbe essere

$$c^{\gamma} = 2^{\delta}\, m^{\mu}\, n^{\nu},$$

assurdo.

Se finalmente fosse α pari e β dispari, sarebbe $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ dispari e $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ pari, quindi:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

pari; in quanto ad M, se

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

è semplicemente pari, sarà della forma

$$\mathrm{M} = 2a^{\alpha}\, b^{\beta}\, m^{\mu}\, n^{\nu} \ldots,$$

altrimenti, dell'altra

$$\mathrm{M} = 2^{\delta}\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, m^{\mu}\, n^{\nu} \ldots;$$

in ogni caso, si avrebbe

$$c^{\gamma} = \begin{cases} m^{\mu}\, n^{\nu} \ldots \\ 2^{\delta-1}\, m^{\mu}\, n^{\nu} \ldots, \end{cases}$$

assurdo.

L'ammettere

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} = 2a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$$

ci porta dunque all'assurdo

$$c^{\gamma} = 2^{\delta}\, m^{\mu}\, n^{\nu} \ldots.$$

Con analogo procedimento si dimostra che, se il numero

$$\mathrm{E}_p = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta} \ldots.$$

fosse perfetto, si arriverebbe all'assurdo

$$c^{\gamma}\, d^{\delta} \ldots = 2^{\varepsilon}\, m^{\mu}\, n^{\nu} \ldots,$$

dove $c, d \ldots.$ sono numeri primi diversi da $2, m, n \ldots.$

Rimane dunque, in ogni caso, dimostrato che non può mai essere

$$\mathrm{E}_p = n = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots.$$

numero perfetto. c. d. d.

Corollario. — Riassumendo, abbiamo dimostrato che ogni numero eguale al prodotto delle potenze di più di due fattori primi non può essere perfetto, e che ogni numero perfetto di due soli fattori primi è pari e contenuto nella formula d'Euclide, quindi:

Ogni numero perfetto è della forma

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1),$$

quando $2^{\alpha+1}-1$ *è primo.*

7. Teorema. — *Se* E_p *è numero perfetto*

$$E_p=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1),$$

dico che

$$E_p=2^{2\alpha}+2^{2\alpha-1}+\dots+2^{\alpha}.$$

Infatti dal secondo membro di questa espressione, mettendo in evidenza 2^{α}, si ha

$$E_p=2^{\alpha}(2^{\alpha}+2^{\alpha-1}+\dots+1)=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1). \qquad \text{c. d. d.}$$

8. Teorema. — *La somma dei reciproci dei divisori (esclusa l'unità) di un numero perfetto è eguale ad* 1, e reciprocamente:

Se la somma dei reciproci dei divisori (esclusa l'unità) di un numero è eguale ad 1, *il numero è perfetto.*

Sieno

$$1, a, b, \dots, l, m, E_p$$

i differenti divisori di E_p disposti in ordine crescente: io dico che

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{E_p}=1.$$

Intanto, pel noto teorema:

Se si dispongono in ordine di grandezza tutti i divisori di un numero, incominciando da 1 e terminando al numero, il prodotto di due divisori equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale al prodotto degli estremi, ossia al numero dato, abbiamo:

$$am=bl=ck=\dots=E_p, \qquad (\alpha)$$

donde

$$\frac{a}{E_p}=\frac{1}{m};\ \frac{b}{E_p}=\frac{1}{l};\ \frac{c}{E_p}=\frac{1}{k};\dots$$

Ora, per definizione, abbiamo

$$E_p=1+a+b+c+\dots+h+k+l+m;$$

dividendo i due membri per E_p, sarà

$$1=\frac{1}{E_p}+\frac{a}{E_p}+\frac{b}{E_p}+\dots+\frac{k}{E_p}+\frac{l}{E_p}+\frac{m}{E_p}=$$
$$=\frac{1}{E_p}+\frac{1}{m}+\frac{1}{l}+\dots+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$$

c. d. d.

Reciprocamente, dato un numero tra i cui divisori sussista la relazione

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\dots+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{N}=1, \qquad (\beta)$$

dico che N è numero perfetto.

Moltiplicando infatti i due membri della (β) per N, abbiamo

$$\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}+\ldots+\frac{N}{l}+\frac{N}{m}+1=N,$$

ossia, per le (α),

$$m+l+k+\ldots+b+a+1=N,$$

quindi

$$N=E_p.$$

c. d. d.

Osservazione. — In conseguenza del teorema ora dimostrato possiamo dare una nuova definizione di numero perfetto:

Si dice **numero perfetto** *un numero tale che la somma dei reciproci dei suoi divisori, esclusa l'unità, è eguale ad* 1.

9. Teorema. — *Ogni numero perfetto termina per* 6 *o per* 8.

Consideriamo infatti le successive potenze di 2: vediamo che, principiando dalla prima, le ultime cifre a destra si seguono sempre nell'ordine 2, 4, 8, 6. Vediamo dunque che quelle ad esponente pari terminano per 4 o per 6, e quelle dispari per 2 o per 8; e, precisamente, le potenze con esponente dispari terminanti per 2 seguono immediatamente quelle con esponente pari terminanti per 6, e dinanzi alle dispari terminanti per 8, si hanno le pari terminanti per 4. Consideriamo ora un numero perfetto

$$E_p=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1):$$

$\alpha+1$, essendo primo, è dispari, e quindi $2^{\alpha+1}$ termina per 2 o per 8: il numero primo

$$2^{\alpha+1}-1$$

deve dunque terminare per 1 o per 7. Ora, se $2^{\alpha+1}$ termina per 2, 2^{α} termina per 6: quindi

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$$

termina per $1\times 6=6$: se invece $2^{\alpha+1}$ termina per 8, 2^{α} termina per 4 e quindi

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$$

termina per $4\times 7=28$.

Rimane così dimostrato il teorema che ogni numero perfetto termina per 6 o per 8.

10. Teorema. — *Tutti i numeri perfetti non terminanti per* 6 *terminano per* 28.

Infatti, considerando il numero formato dalle ultime due cifre delle potenze dispari del 2 terminanti per 8, ed il gruppo analogo per le potenze pari immediatamente precedenti, vedo che si possono presentare questi soli cinque casi distinti:

64, 28   24, 48   84, 68   44, 88   04, 08, e quindi il numero perfetto può terminare soltanto col gruppo formato dalle due ultime cifre dei prodotti

$$64,\ 27 \qquad 24,\ 47 \qquad 84,\ 67 \qquad 44,\ 87 \qquad 04,\ 07,$$

ossia, in ogni caso, per 28. c. d. d.

11. TEOREMA. — *Se si indica col simbolo $\varphi(\mathrm{N})$ il numero dei numeri primi con N e inferiori ad N, ed $\mathrm{E_p} = 2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$ è un numero perfetto, si ha*

$$\varphi(\mathrm{E_p}) = \mathrm{E_p} - 2^{2\alpha}.$$

Si ha intanto

$$\varphi(\mathrm{E_p}) = \varphi\left\{2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)\right\} = 2^\alpha(2^\alpha - 1).$$

Ora è

$$\mathrm{E_p} = 2^{2\alpha+1} - 2^\alpha = 2^{2\alpha} + \varphi(\mathrm{E_p})$$

donde

$$\varphi(\mathrm{E_p}) = \mathrm{E_p} - 2^{2\alpha}. \qquad \text{c. d. d.}$$

COROLLARIO. — *Il numero dei numeri non primi con $\mathrm{E_p}$ ed inferiori ad $\mathrm{E_p}$ è $2^{2\alpha}$.*

12. TEOREMA. — *Il numero dei divisori di un numero perfetto*

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$$

è dato da $2(\alpha+1)$.

Infatti, se un numero N, scomposto nei suoi fattori primi, è

$$\mathrm{N} = a^m b^n \ldots,$$

il numero dei suoi divisori è

$$(m+1)(n+1)\ldots$$

Ora, nel nostro caso, si ha

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha p,$$

quindi il numero dei suoi divisori è dato da

$$2(\alpha+1). \qquad \text{c. d. d.}$$

13. TEOREMA. — *Un numero perfetto $\mathrm{E_p} = 2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$ si può scomporre nella differenza dei quadrati di due numeri interi sempre e soltanto in $\alpha - 1$ modi diversi.* (*)

Dato un numero perfetto $\mathrm{E_p}$, scomponiamolo nei suoi fattori primi, ed avremo

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha p.$$

(*) Per la teoria generale della scomposizione di un numero in differenze di due quadrati, cfr. Prof. A. MARTONE: *In quanti e quali modi un numero intero sia differenza dei quadrati di due interi.* " Il Pitagora ", anno VIII, n. 1, 2.

Scriviamo ora di seguito in ordine crescente i suoi $2(\alpha+1)$ divisori

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^\alpha, p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^\alpha p.$$

Possiamo allora scrivere le eguaglianze

$$\begin{array}{c} 1 \,.\, 2^\alpha p = \mathrm{E_p} \\ 2 \,.\, 2^{\alpha-1} p = \mathrm{E_p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2^\alpha p = \mathrm{E_p} \end{array}$$

ossia

$$\begin{array}{c} \left(\frac{2^\alpha p+1}{2} + \frac{2^\alpha p-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2^\alpha p+1}{2} - \frac{2^\alpha p-1}{2}\right) = \mathrm{E}p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{p+2^\alpha}{2} + \frac{p-2^\alpha}{2}\right) \cdot \left(\frac{p+2^\alpha}{2} - \frac{p-2^\alpha}{2}\right) = \mathrm{E}p \end{array}$$

donde

$$(1) \qquad \begin{array}{c} \left(\frac{2^\alpha p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^\alpha p-1}{2}\right)^2 = \mathrm{E}p \\ \left(\frac{2^{\alpha-1} p+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^{\alpha-1} p-2}{2}\right)^2 = \mathrm{E}p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{p+2^\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-2^\alpha}{2}\right)^2 = \mathrm{E}p. \end{array}$$

Avremmo così trovato $\alpha+1$ scomposizioni diverse; osserviamo però che, volendo noi i quadrati di due interi, bisognerà, tra le (1), tralasciare tutte quelle corrispondenti a divisori dispari.

Ora, dato $\mathrm{E_p} = 2^\alpha p$, è evidente che di divisori dispari ce ne sono sempre e soltanto due, (1 e p); quindi, eliminando le due scomposizioni relative a questi divisori, rimangono $\alpha-1$ scomposizioni. c. d. d.

Osservazione. — Dalle (1), osservando che la prima e l'ultima si devono trascurare come quelle che corrispondono a divisori dispari di $\mathrm{E_p}$, si ha, semplificando

$$\left.\begin{array}{c} (2^{\alpha-2} p+1)^2 - (2^{\alpha-2} p-1)^2 \\ (2^{\alpha-3} p+2)^2 - (2^{\alpha-3} p-2)^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p+2^{\alpha-2})^2 - (p-2^{\alpha-2})^2 \end{array}\right\} = \mathrm{E_p}.$$

14. Teorema. — *Ogni numero perfetto è congruo ad 1 rispetto al modulo 3,*

$$\mathrm{E_p} \equiv 1 \pmod{3}.$$

Infatti, essendo

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1)$$

dove α è pari, si ha

$$2^\alpha \equiv 1 \pmod{3}$$
$$2^{\alpha+1} \equiv 2 \pmod{3}$$
$$2^{\alpha+1} - 1 \equiv 1 \pmod{3}$$
$$E_p \equiv 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1) \equiv 1 \pmod{3}. \qquad \text{c. d. d.}$$

15. Definizione. — Col nome di *Numeri di Mersenne* si intendono i valori che bisogna dare a p perchè l'espressione

$$2^p - 1$$

sia un numero primo. I numeri di Mersenne finora conosciuti sono i nove seguenti

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61:$$

io ho preso a studiare la condizione necessaria e sufficiente perchè un numero p sia numero di Mersenne, ed ecco i risultati ottenuti:

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero della forma*

$$2^\alpha - 1$$

sia primo, è che esso divida il numero

$$3^{2^{\alpha-1}-1} + 1.$$

Sappiamo che condizione necessaria perchè $2^\alpha - 1$ sia primo è che α sia primo: possiamo dunque sempre supporre α dispari (il caso di $\alpha = 2$ ci dà $2^\alpha - 1 = 3$). In tal caso, si ha

$$2^\alpha \equiv 2 \pmod{3}$$

e quindi

$$2^\alpha - 1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Abbiamo dunque che ogni numero primo della forma

$$2^\alpha - 1$$

è pure della forma

$$3h + 1.$$

Ora, dalla teoria delle forme quadratiche, sappiamo che un numero dispari m i cui divisori primi sono della forma $3h + 1$, si può rappresentare mediante una forma di determinante

$$D = -3,$$

o precisamente mediante una forma della classe rappresentabile colla ridotta

$$(1, 0, 3) = x^2 + 3y^2.$$

Sappiamo di più che, quando tutti i μ divisori primi del numero m sono della forma $3h + 1$, la congruenza

$$z^2 \equiv (-3) \pmod{m} \tag{1}$$

ha sempre 2^μ radici incongrue. Essendo, nel nostro caso, $m = 2^a - 1$ numero primo, sarà $\mu = 1$, quindi la nostra congruenza deve ammettere due radici incongrue. Ora sappiamo che, affinchè la congruenza

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

per p primo, sia possibile, è necessario e sufficiente che sia

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{2}$$

ed in questo caso essa ha due radici incongrue.

Ne viene che, quando questa condizione sia soddisfatta, il numero

$$p = 2^a - 1$$

può essere *sempre e in un sol modo* spartito nella somma di un quadrato semplice e di un triplo quadrato, e per conseguenza è un numero primo.

Nel caso nostro, la congruenza (1) è

$$x^2 \equiv -3 \pmod{(2^a - 1)},$$

e quindi la (2) diventa

$$-3^{\frac{2^a-2}{2}} \equiv 1 \pmod{(2^a - 1)}$$

ossia

$$3^{2^{a-1}-1} \equiv -1 \pmod{(2^a - 1)}$$

quindi:

La condizione necessaria e sufficiente perchè $2^a - 1$ *sia primo, è che* $2^a - 1$ *divida il numero*

$$3^{2^{a-1}-1} + 1. \qquad \text{c. d. d.}$$

16. Teorema. — In conclusione, da quanto abbiamo dimostrato fin qui, risulta il teorema:

Perchè un numero E_p *sia perfetto è necessario e sufficiente che sia*

$$E_p = 2^a (2^{a+1} - 1),$$

nel caso in cui $2^{a+1} - 1$ *divida il numero*

$$3^{2^a-1} + 1.$$

Mario Lazzarini.

NOTE.

(A). Non ritengo del tutto fuor di luogo il riportare un brano del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, che, dopo la formula di Euclide, si è occupato per il primo dei numeri perfetti, brano che non ho visto citato da nessun autore:

De inventione perfectorum numerorum: " Perfectus numerus est, ex quo, acceptis suis partibus, quas ipse in integrum habet, ut 6, cuius partes sunt $\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$;

et alias partes preter has non habet in integrum. Et accepto $\frac{1}{2}$ de 6, scilicet 3, et $\frac{1}{3}$, scilicet 2, et $\frac{1}{6}$, scilicet 1, nimirum eadem faciunt 6; que 6 inveniuntur sic: duplica 1, erunt 2; que duplica 2, erunt 4: de quibus tolle 1, remanent 3; qui numerus cum sit primus, hoc est, quod non habeat regulam, multiplica ipsum per dimidium de suprascriptis 4; et sic habebis 6. Unde si aliquem alium perfectum numerum invenire volueris, duplicabis iterum 4, erunt 8; de quibus tolle 1, remanebunt 7; qui numerus, cum non habeat regulam, multiplicabis eum per dimidium de 8, videlicet per 4, erunt 28; qui iterum perfectus est, quia suis collectis partibus equiparatur. Partes enim ipsius sunt $\frac{1}{28}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$. Rursum duplicabis 8, faciunt 16; de quibus, cum extrahitur 1, remanent 15; qui cum habeat regulam, duplicabis iterum 16, erunt 32; de quibus tolle 1, remanent 31; qui numerus, cum sit sine regula, multiplicabis eum per 16, et habebis alium perfectum numerum, scilicet 496; et sic semper faciendo, poteris in infinitum perfectos numeros reperire „.

Il *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano pubblicato da B. Boncompagni. Roma, 1857, pag. 283.

(B). Nella prefazione dell'opera *Cogitata Physico-mathematica* di Mersenne, pubblicata nel 1644, si legge che il numero $2^p - 1$ è primo per i soli valori seguenti di p non superiori a 257:

1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Il numero 67 è stato probabilmente scritto per errore invece di 61. Con questa correzione, la proposizione sembra essere esatta ed è stata verificata per tutti i valori di p ad eccezione dei seguenti: 71, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229, 241, 257.

Ora, come può essere arrivato Mersenne a questo risultato? È inammissibile che egli abbia studiato ciascun caso in particolare; quindi rimangono due soli casi possibili: o Mersenne conosceva dei teoremi che poi sono andati perduti, od ha trovato quei numeri empiricamente. Il chiarissimo prof. W. W. Rouse-Ball, nella sua pregevole opera: *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes*, esclude quest'ultimo caso, dicendolo assolutamente impossibile. Io invece lo ritengo non solo possibile, ma anzi probabile; potendosi, ad esempio, avere *tutti* i numeri lasciati da Mersenne, ed altri ancora, colla seguente regola pratica da me trovata, ma la cui dimostrazione mi sfugge:

" Perchè il numero $2^p - 1$ sia primo è sufficiente che p sia primo di una delle forme:

$$p = 2^\alpha + \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \text{quando } \alpha \text{ è potenza di } 2;$$

$$p = 2^\alpha - 1 \quad \text{quando } \alpha \text{ è primo;}$$

$$p = 2^\alpha - 3 \quad \text{quando } \alpha \text{ è pari, senza essere potenza di } 2 \text{ „.}$$

Si trovano così i numeri 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 127, 257, 1021, 4093, ..., di cui i primi dodici sono i numeri lasciati da Mersenne. I numeri perfetti finora conosciuti sono quelli che corrispondono ai valori di p:

$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61$

e precisamente: 6, 28, 496, 8128, 335.50336,
85898.69056, 13.74386.91328,
2305.84300.81399.52128,
26.58455.99156.98317.44654.69261.59538.42176.

SOPRA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DEI GAS

1. Si definisce generalmente una cosa affermando che essa soddisfa ad una sua proprietà speciale; e di preferenza si sceglie quella proprietà più facile a comprendersi, o dalla quale più facilmente o nel modo più generale possono dedursi le altre proprietà della cosa studiata.

Fino ad ora, che almeno io sappia, sono stati definiti i così detti gas perfetti mediante le ben note leggi di Boyle e di Gay Lussac; e soltanto il Meslin, osservando che nella equazione caratteristica che ne deriva figura una grandezza t, la quale viene poi definita mediante l'equazione stessa, propose di definirli come quei corpi pei quali sono verificate le due relazioni

$$pv = p'v', \qquad \frac{\partial c}{\partial v} = 0,$$

essendo c il calorico specifico a volume costante. (*)

Scopo di questa breve nota è di dimostrare, che si può con vantaggio partire da una definizione diversa.

Ammesso che lo stato di un corpo sia definito in ogni istante dai valori dei parametri p, v, t (misurato quest'ultimo mediante un termometro ed una scala convenzionale qualsiasi), affermato che la nozione di quantità di calore è quella di una grandezza suscettibile di misura, la definizione dei due calorici specifici C e c (a pressione ed a volume costante) corrisponde a fatti sperimentali i di cui elementi sono egualmente e rigorosamente misurabili.

Poichè l'esperienza indica, che nei corpi gassosi, entro certi limiti almeno, la differenza $C-c$ è sensibilmente indipendente da p, v, t cioè è una costante, e che tal fatto è così caratteristico per gli aeriformi, che vediamo il vapor di pirene ($C^{16}H^{10}$) dare per $C-c$ lo stesso valore dell'ossigeno e dell'azoto, (**) ci sembra che potremmo definire i gas *come quei corpi pei quali è costante la differenza dei due calorici specifici*, oltre una ipotesi di cui diremo in seguito.

In quanto ai calorici specifici stessi l'esperienze (su composti esplosivi) di Berthelot per temperature molto alte, e quelle di Witkoski per temperature molto basse, hanno provato che, in un largo intervallo di temperatura, C, almeno, è funzione della temperatura stessa. Il nostro Lussana (***) ha inoltre dimostrato che C è funzione anche

(*) *Journal de Physique*, 1885, pag. 132.
(**) VAN'T HOFF, *Leçons de Chimie Physique*, trad. Corvisy. Paris, Hermann, 1900, p. 3ª, pag. 58.
(***) LUSSANA, *Nuovo Cimento*, 1892-'98.

della pressione; quindi a voler trattare il problema in modo generale, bisognerebbe considerare C e c come funzioni di due qualunque fra le tre variabili p, v, t.

2. Senza introdurre per ora alcuna limitazione, abbiamo dal primo principio della termodinamica che la quantità di calore

$$dQ = dU + A p dv$$

$\left(\text{con } A = \frac{1}{425}\right)$: od anche, per una trasformazione elementare $dp. dv$, ed a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, essendo T la temperatura,

$$dQ = C \frac{\partial T}{\partial v} dv + c \frac{\partial T}{\partial p} dp.$$

Avremo quindi

$$dU = \left(C \frac{\partial T}{\partial v} - Ap\right) dv + c \frac{\partial T}{\partial p} dp:$$

e poichè nell'ipotesi che le forze della natura siano centrali la variazione dU dell'energia interna del corpo è un differenziale esatto, dovrà essere:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(C \frac{\partial T}{\partial v} - Ap\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(c \frac{\partial T}{\partial p}\right),$$

da cui:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p}\right) + (C - c) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} = A. \qquad (1)$$

Per il secondo principio della termodinamica è un differenziale esatto l'espressione

$$\frac{dQ}{T} = \frac{C}{T} \frac{\partial T}{\partial v} dv + \frac{c}{T} \frac{\partial T}{\partial p} dp;$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C}{T} \frac{\partial T}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c}{T} \frac{\partial T}{\partial p}\right);$$

sviluppando questa eguaglianza, si ha

$$\left(\frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p}\right) + (C - c) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} - \frac{C - c}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} = 0. \qquad (2)$$

Ad una qualunque della (1) e (2) si può sostituire l'equazione che si ricava sottraendo la seconda dalla prima; si ha così

$$\frac{C - c}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} = A, \qquad (3)$$

la quale, sotto forma un po' diversa ed a parte la dimostrazione, è la ben nota equazione dovuta al Clausius (*) *vera qualunque sieno le funzioni* C *e* c. Se fosse conosciuta la natura della funzione $C - c$, l'integrazione della (3) ci guiderebbe a determinare l'equazione caratteristica del corpo.

(*) *Théorie méc. de la Chaleur*, trad. Folie. Ediz. 1868, pag. 393. ediz. 1888, pag. 234.

3. Poniamo ora la condizione:

$$\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}-\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial p}=0 \tag{4}$$

e scriviamo l'altra che $C-c$ è una costante sotto la forma data dall'equazione di Mayer

$$C-c=AR; \tag{5}$$

allora le (1), (3), divengono

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p\partial v}=\frac{1}{R}, \tag{6}$$

$$R\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}=T, \tag{7}$$

mentre la (2) evidentemente si riduce anch'essa alla (7). La funzione T dovrà dunque soddisfare alla (6) ed alla (7).

Possiamo allora dimostrare il seguente

Teorema. — *Se in un corpo la differenza dei calorici specifici è costante,*

$$C-c=AR,$$

e i calorici specifici stessi sono funzioni della temperatura, la equazione caratteristica del corpo è

$$RT=(p+a)(v+b)$$

con a *e* b *costanti.*

Infatti, la (4) diviene, essendo C e c funzioni della temperatura,

$$\frac{\partial C}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}-\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial}{\partial T}(C-c)=0;$$

si potranno dunque applicare le (6) e (7).

Integrando la (6) si avrà subito

$$RT=pv+F(p)+f(v)+H, \tag{8}$$

con F e f funzioni soltanto di p e di v, e con H costante. Derivando quest'equazione rispetto a p e v

$$R\frac{\partial T}{\partial p}=v+\frac{\partial F}{\partial p},$$

$$R\frac{\partial T}{\partial v}=p+\frac{\partial f}{\partial v};$$

sostituendo questi valori nella (7), si vede che dovrà essere

$$\left(p+\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(v+\frac{\partial F}{\partial p}\right)=pv+F(p)+f(v)+H:$$

e poichè F e f sono indipendenti l'una dall'altra, si avranno le tre equazioni

$$p \frac{\partial F}{\partial p} = F,$$

$$v \frac{\partial f}{\partial v} = f,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial v} = H;$$

la terza dovendo necessariamente esser soddisfatta dalle altre due. Infatti se ne ricava

$$F = bp, \qquad f = av,$$
$$H = ab:$$

quindi l'equazione cercata resulta essere

$$RT = pv + av + bp + ab.$$

oppure

$$RT = (p + a)(v + b). \tag{9}$$

Mentre T nella (6) è la temperatura misurata in un modo qualunque, nella (7) è invece la temperatura assoluta. Per non fare circoli viziosi la definiremo con W. Thomson mediante la funzione di Carnot; chiameremo perciò zero assoluto la temperatura alla quale il calore si trasforma integralmente in lavoro. Nella (9) la T indica dunque la temperatura assoluta. Reciprocamente dimostreremo che:

Se l'equazione caratteristica di un corpo è

$$RT = (p + a)(v + b) \tag{10}$$

con a *e* b *costanti, è pur costante la differenza dei suoi calorici specifici, e questi sono funzioni della temperatura.*

Se si ricavano infatti dalla (9) i valori di $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, e si sostituiscono nell'equazione generale (3) se ne ottiene

$$C - c = AR.$$

È dunque costante la differenza dei due calorici specifici; possiamo allora porre nella (1) questo valore, insieme al valore di $\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v}$ che per la (8) è uguale a $\frac{1}{R}$, e ne risulta allora la (4).

Questa formola ci servirà a dimostrare che C e c sono funzioni della temperatura. Infatti, dalla (5) abbiamo subito

$$\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial C}{\partial v};$$

e perciò la (4) diviene

$$\frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p} = 0.$$

ossia

$$(p+a)\frac{\partial C}{\partial p}=(v+b)\frac{\partial C}{\partial v}.$$

Ponendo

$$p+a=x, \qquad v+b=y$$

l'equazione precedente si trasforma nell'altra

$$x\frac{\partial C}{\partial x}=y\frac{\partial C}{\partial y},$$

la di cui integrazione darà

$$C=f(xy)=f(T);$$

così anche si avrà

$$c=f(T).$$

L'esperienza dimostra che soltanto i gas soddisfano alla (5): e quindi soltanto per i gas valgono le conseguenze che precedono.

4. Notiamo ora, che volendo considerare C e c come due funzioni qualsivoglia, purchè capaci di soddisfare alla sola (4), si ricaverà dalla (2) qualunque sia la differenza $C-c$, l'equazione

$$T\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial v}-\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}=0:$$

questa, ponendo dapprima $\frac{\partial T}{\partial p}=z$, darà $\frac{\partial \log z}{\partial v}=\frac{\partial \log T}{\partial v}$: integrando dunque una prima volta e poi una seconda, si trova $T=f(v)\,F(p)$. Quindi, anche nella ipotesi di C e c qualunque, purchè la (4) sia soddisfatta resulta per T la forma caratteristica del prodotto di due funzioni, una del volume l'altra della pressione.

Se ne conclude, che pur assoggettando le tre funzioni C, c, T a soddisfare solamente alla (4) senza porre altra condizione intorno alla loro natura, siamo pur sempre lontani dalla forma

$$\{p+\varphi(a,v,T)\}(v-b)=RT,$$

la quale, secondo gli studi sperimentali del prof. Battelli, dovrebbe, forse, essere quella della equazione caratteristica dei gas. (*)

5. Se

$$a=b=0,$$

l'espressione (9) precedente dà l'equazione dei gas detti perfetti. Questi sono dunque definiti dalle tre condizioni: $C-c=\text{cost}$; C e c funzioni soltanto di T, e dalla legge di Boyle che riduce appunto a zero le costanti a e b. La legge di Gay Lussac segue dalla (9).

(*) V. Battelli, *Sulla legge di Boyle* etc. "Nuovo Cimento" 1901; (V), t. I. pag. 111.

E poichè la (1) nella ipotesi che C e c siano funzioni di T può scriversi

$$\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial (C-c)}{\partial T}+(C-c)\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial v}=A,$$

si vede che per essere $C-c=\text{cost}$, e $pv=RT$, per ricavare l'equazione di Mayer, non c'è bisogno di supporre C e c costanti come si fa di solito nei trattati. (*)

Se $a=0$ si ha, a parte il segno di b, la formola di Budde (**)

$$RT=p(v+b).$$

Finalmente, con a e b qualsiasi, la forma della (9) ricorda la celebre formola di Van der Waals, la quale è del tipo della (9) perchè può scriversi

$$RT=pv-pb+\frac{a}{v^2}(v-b),$$

ossia soddisfa alla (6) senza però soddisfare alla (7).

6. Calcoliamo ora il valore dell'energia interna U quale risulterebbe dalla (9). La dU può mettersi sotto la forma:

$$dU=(C-c)\left(\frac{\partial T}{\partial v}-Ap\right)dv+c\,\frac{\partial T}{\partial v}\,dv+c\,\frac{\partial T}{\partial p}\,dp=$$
$$=AR\left(\frac{\partial T}{\partial v}-Ap\right)dv+c\,dT:$$

ma dalla (9)

$$\frac{\partial T}{\partial v}=\frac{p+a}{R};$$

sostituendo e integrando

$$U=Aav+\int c\,dT. \qquad (11)$$

Quindi: *se* $a=0$ (gas perfetti e formola di Budde), *anche quando* c *è funzione di* T, *l'energia interna è funzione della temperatura.* (***)

7. Se T rimane costante, per ciò che riguarda le funzioni C e c, si ha, in un punto della superficie $f(p, v, T)=0$, secondo Clausius:

$$\frac{\partial C}{\partial p}=-AT\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}, \qquad \frac{\partial c}{\partial v}=AT\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$$

e quindi per le (9) e (5) sarà:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial p}=\dfrac{\partial c}{\partial p}=0.\\[2mm] \dfrac{\partial c}{\partial v}=\dfrac{\partial C}{\partial v}=0.\end{cases}$$

(*) Vedi ad es. POINCARÉ, *Thermodynamique*. Paris, Carré 1892, § 65.
(**) Citato dal Van't Hoff, *loc. cit.*, pag. 8.
(***) Cfr. POINCARÉ, *loc., cit.* § 130.

Questo resultato non dimostra già, come per i gas perfetti hanno supposto alcuni, (*) che C e c siano indipendenti da p e da v, e quindi costanti assolutamente: ma soltanto che in questo caso C e c *non dipendono dai valori che* p *e* v *prendono lungo una isoterma della superficie* (9). Perciò Clausius, dopo avere stabilito le formole precedenti per i gas perfetti avverte, che con questo i due calorici specifici possono essere funzioni della temperatura. Il resultato ora ottenuto è del resto implicito nell'ipotesi da cui siamo partiti, e dovevamo naturalmente ritrovarlo.

8. Cerchiamo ora un significato razionale per le costanti a e b. Allo zero assoluto dovrà esser nullo l'uno o l'altro dei due fattori

$$p+a, \qquad v+b.$$

Osserviamo dapprima che l'omogeneità del secondo membro della formola (9), esige che a sia una pressione e b un volume; o in altra parola i suoi termini, come quelli di funzioni analoghe che contengano il termine pv, devono ridursi a prodotti di una pressione per un volume; essere cioè di dimensioni ML^2T^{-2}, che sono quelle di un lavoro od energia.

Senza insistere di più, per il momento almeno, su questo punto, è facile vedere, riguardo ai due fattori precedenti, come supporre nullo il primo, e quindi a negativo, equivale a dire che il gas offre ad ogni pressione una repulsione costante a così da non subirne che la parte $p-a$: e questo parrà assai strano. Rimane da fare b negativo, ed ammettere che allo zero assoluto $v=b$: che cioè il volume del gas si riduca allora ad una quantità costante b, la quale può dirsi il residuo materiale (*covolume*) quando l'energia è cessata; ossia lo spazio effettivamente occupato dalla materia.

Allo zero assoluto la (11) ci dà allora:

$$U_0 = Aab.$$

Dunque il corpo non possiede, come insieme, più alcuna energia e $p=0$; rimane solamente una quantità costante dovuta al suo covolume, ed alla quantità a che è una pressione. Infatti poichè

$$a=\frac{EU_0}{b},$$

questa grandezza avrà per dimensioni, essendo EU_0 misurato in chilogrammetri

$$\frac{ML^2T^{-2}}{L^3}=ML^{-1}T^{-2}.$$

Questa pressione a, che aumenta costantemente la pressione eser-

(*) Per es.: il prof. Donnini in alcune delle sue memorie, e molti trattati.

citata dall'esterno sulla massa gassosa, non può attribuirsi se non alle forze agenti fra le parti del corpo, ossia alle sue forze interne.

Dalla definizione, fondata sull'esperienza, che noi abbiamo data dei gas, segue dunque chiaramente che: " nell'equazione caratteristica " ordinaria è lecito aumentare la pressione esterna di una quantità, che " dobbiamo attribuire alle forze interne del gas, e si deve diminuire il " volume di un'altra quantità, che supponiamo rappresentare lo spazio " occupato dal gas quando ogni sua manifestazione esterna è cessata ". L'introduzione di due grandezze, che è l'importante modificazione portata da Van der Waals nell'equazione caratteristica dei gas perfetti, ci appare dunque come *necessaria* conseguenza dei principii della termodinamica, poichè la (9) è l'espressione più generale di una funzione che soddisfa in pari tempo alla (6) e alla (7); rimane soltanto ipotetico il significato di a e di b cercato naturalmente in accordo alle teorie generali sulla materia. Però il dover supporre che la somma delle forze interne a rimane la stessa comunque varii il volume del gas, ci avverte della insufficienza dell'ipotesi da cui siamo partiti.

Tale è il resultato, a cui giungiamo partendo dalla nostra definizione. Non presenterebbe poi alcuna difficoltà il dedurre dalla (9) una serie di conseguenze parallele a quelle che si traggono dalla $pv = \mathrm{RT}$: le quali non avrebbero però altro vantaggio che d'introdurre dei termini di correzione alle formole già note.

Ma queste correzioni non avrebbero grande importanza: la (9) sebbene dedotta senza l'aiuto d'ipotesi particolari, e più prossima ai gas reali di quella solita dei gas perfetti, è ancora assai lontana dal rappresentarli.

Intanto, bisognerebbe determinare i valori di a e di b per ogni gas, deducendoli dall'esperienze sulla legge di Boyle. Detti (p, v), $(p'v')$, $(p''\,v'')$ i valori della pressione e del volume in questo caso, il secondo membro della (9) darà:

$$pv - p'v' = a\,(v - v') + b\,(p - p')$$
$$p'v' - p''v'' = a\,(v'' - v') + b\,(p' - p'')$$

da cui a e b, quali medie dei valori dati da ogni gruppo di tre esperienze. Avuto a e b, si troverà R, e quindi E, e così via potremmo andare svolgendo considerazioni su $\frac{\mathrm{C}}{c}$, sulla legge di Dulong e Petit, (la quale è pur conservata colla nuova definizione, com'è facile vedere) sulla differenza fra il coefficiente di dilatazione e quello di pressione, sulla perdita di calore $a\,(v' - v)$ quando il gas si dilata dal volume v al volume v', senza fare lavoro esterno, etc. ma di lieve momento e non conformi all'indole del giornale.

Esamineremo invece, in una prossima nota, l'argomento da un punto di vista alquanto diverso da quello da cui siamo partiti.

RINALDO PITONI.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE ARITMETICA

Le considerazioni seguenti riguardano le equazioni di grado n ad una incognita, ed a radici in progressione aritmetica.

I.

La forma generale di una equazione di grado n essendo, come è noto,

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

mi propongo di stabilire una espressione generale che dia i coefficienti $A_1\, A_2 \ldots A_n$ quando detta equazione abbia per radici i valori

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \ldots a+(n-2)\,d, \quad a+(n-1)\,d.$$

Si consideri a tal fine il coefficiente A_k; esso è eguale alla somma delle combinazioni prodotti k a k degli elementi

$$(a+0d) \;\;,\;\; (a+d) \;\;,\;\; (a+2d) \ldots (a+(n-1)\,d).$$

Sia

$$(a+s_1d)\,.\,(a+s_2d) \ldots (a+s_kd)$$

una di tali combinazioni prodotti nelle quali $s_1\, s_2 \ldots s_k$ rappresentano evidentemente k numeri della serie $0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$. Per sviluppare questo prodotto possiamo eseguire i prodotti di k fattori, che si ottengono prendendo un fattore in ciascun binomio, in tutti i modi possibili e sommando tali prodotti parziali. Prendiamo dapprima l'elemento a in ciascun binomio, otterremo allora il prodotto parziale

$$P_0a^k$$

ove $P_0 = 1$.

In seguito si prenda il termine a in tutti i binomi eccetto uno, ed il termine in d nel binomio in cui non si è presa la a, e ciò in tutti i modi possibili, avremo così l'altro prodotto parziale

$$P_1a^{k-1}\,d$$

nel quale $P_1 = (s_1 + s_2 + \ldots + s_k)$.

Operando in modo analogo, si avrà successivamente:

$$P_2\,a^{k-2}\,d^2$$
$$P_3\,a^{k-3}\,d^3$$
$$\ldots\ldots$$
$$P_kd^k$$

ove $P_2, P_3 \ldots P_k$ rappresentano rispettivamente la somma dei prodotti combinazioni 2 a 2, 3 a 3, ... k a k dei k elementi $s_1\, s_2 \ldots s_k$.

Indicando con il simbolo

$$\Sigma\, P \left\{ C_{(s_1 s_2 \ldots s_k)\lambda} \right\}$$

la somma delle combinazioni prodotti λ a λ dei numeri $s_1, s_2, s_3 \ldots s_k$ avremo:

$$\left.\begin{aligned} P_0\, a^k &= \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1 s_2 \ldots s_k)0} \right\} a^k = a^k \\ P_1\, a^{k-1} d &= \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1 s_2 \ldots s_k)1} \right\} a^{k-1} d \\ P_2\, a^{k-2} d^2 &= \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1 s_2 \ldots s_k)2} \right\} a^{k-2} d^2 \\ \cdots\cdots & \\ P_k d^k &= \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1 s_2 \ldots s_k)k} \right\} d^k \end{aligned}\right| \qquad [\alpha]$$

Ma la combinazione prodotto

$$(a + s_1 d)\,.\,(a + s_2 d) \ldots (a + s_k d)$$

è uguale alla somma delle $[\alpha]$ onde potremo porre:

$$(a + s_1 d)\,.\,(a + s_2 d) \ldots (a + s_k d) = \sum_{\lambda=0}^{k} \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1 s_2 \ldots s_k)\lambda} \right\} a^{k-\lambda} d^{\lambda}$$

E se poi nelle formule ora stabilite poniamo al luogo degli elementi $s_1\, s_2 \ldots s_k$ successivamente gli elementi che formano ciascuna delle n_k combinazioni che si ottengono con i numeri $0, 1, 2 \ldots n-1$ e sommiamo i risultati, otterremo evidentemente un polinomio completo in a ed in d il quale sarà l'espressione cercata del coefficiente A_k appartenente ad una equazione a radici in progressione aritmetica, a essendo il primo termine di questa progressione aritmetica, e d la ragione.

È possibile, per altro, ottenere una espressione più completa della precedente, per mezzo del teorema che segue:

Teorema. — La somma delle combinazioni prodotti λ a λ eseguite sopra i k elementi di ciascuna delle combinazioni k a k di n elementi dati, è uguale alla somma delle combinazioni prodotti λ a λ eseguite sopra gli n elementi dati, moltiplicata per il numero $^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}$.

Si abbiano n elementi e se ne facciano le combinazioni k a k, indi su ciascuna di queste combinazioni k a k si eseguiscono le combinazioni λ a λ, avremo in tal modo un numero di combinazioni λ a λ dato da

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)}{k\,!} \times \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-\lambda+1)}{\lambda\,!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,.\,k\,.(k-1)(k-2)\ldots(k-\lambda+1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (k-\lambda+1)\ldots(k-3)(k-2)(k-1)\,k\,.\,\lambda\,!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-\lambda)!\,\lambda\,!}$$

per essere $k \geq \lambda$.

Moltiplicando ambo i termini per

$$(n-k)!\,(n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots(k-\lambda+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda+1)$$

si ottiene facilmente

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda+1)}{\lambda\,!}\times\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots((n-\lambda)-(n-k)+1)}{(n-k)\,!}=$$
$$=n_\lambda\times(n-\lambda)_{(n-k)}.$$

Notando che le combinazioni k a k sono simmetriche rispetto a ciascun elemento, potremo asserire che se una delle combinazioni λ a λ eseguita sopra di esse combinazioni k a k viene ripetuta un certo numero di volte, lo stesso numero di volte dovrà essere ripetuta ciascuna delle altre combinazioni λ a λ, pertanto nel caso presente sarà ciascuna combinazione ripetuta $(n-\lambda)_{(n-k)}$ volte, onde la somma di queste combinazioni prodotti sarà $(n-\lambda)_{(n-k)}$ volte la somma delle combinazioni prodotti λ a λ degli n elementi, prendendo ciascuna combinazione una sol volta come avviene quando si combinano λ a λ gli n elementi dati.

Ripresa la formula

$$\sum_{\lambda=0}^{k}\Sigma\,P\left\{C_{(s_1 s_2\ldots s_k)_\lambda}\right\}a^{k-\lambda}d^\lambda \qquad [\beta]$$

in essa il coefficiente

$$\Sigma\,P\left\{C_{(s_1 s_2\ldots s_k)_\lambda}\right\} \qquad (\lambda=0,1,2\ldots k)$$

sostituendo alla combinazione $s_1 s_2\ldots s_k$ le rimanenti combinazioni k a k degli elementi $0,1,2\ldots(n-1)$ diviene:

$$\Sigma\,P\left\{C_{(s_{\alpha_1}\,s_{\alpha_2}\ldots s_{\alpha_k})_\lambda}\right\}+\Sigma\,P\left\{C_{(s_{\beta_1}\,s_{\beta_2}\ldots s_{\beta_k})_\lambda}\right\}+\ldots\Sigma\,P\left\{C_{(s_{\omega_1}\,s_{\omega_2}\ldots s_{\omega_k})_\lambda}\right\}$$
$$(\lambda=0,1,2\ldots k)$$

e per il teorema ora dimostrato

$$^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}\Sigma\,P\left\{C_{(0,1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\}$$
$$(\lambda=0,1,2\ldots k)$$

ovvero, poichè l'elemento a annulla le combinazioni in cui entra e può omettersi, si avrà più semplicemente:

$$^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}\Sigma\,P\left\{C_{(1,2\ldots n-1)_\lambda}\right\}$$
$$(\lambda=0,1,2\ldots k)$$

Sostituendo questo risultato nella [β] otteniamo:

$$\sum_{\lambda=0}^{k}{}^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}\Sigma\,P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\}a^{k-\lambda}d^\lambda$$

da cui dando a λ successivamente i valori $0,1,2\ldots k$ si sviluppa un polinomio che sarà l'espressione cercata.

Abbiamo dunque:

$$A_k = \sum_{\lambda=0}^{k} (n-\lambda)_{(n-k)} \, \Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} a^{k-\lambda} d^\lambda$$

E per conseguenza l'equazione di grado n, la quale ammette n radici in progressione aritmetica, rappresentata da

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

avrà nei suoi coefficienti i valori

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{0} (n-\lambda)_n \, \Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} a^{0-\lambda} d^\lambda$$

$$A_1 = \sum_{\lambda=0}^{1} (n-\lambda)_{(n-1)} \, \Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} a^{1-\lambda} d^\lambda$$

$$A_2 = \sum_{\lambda=0}^{2} (n-\lambda)_{(n-2)} \, \Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} a^{2-\lambda} d^\lambda$$

. . . .

$$A_{n-1} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (n-\lambda)_1 \, \Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} a^{n-1-\lambda} d^\lambda$$

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{n} (n-\lambda)_0 \, \Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} a^{n-\lambda} d^\lambda$$

ricordando che $m_0 = 1$ ed $m_s = 0$ per $s > m$.(*)

(*) Possono aversi con speditezza i valori di

$$\Sigma P \left\{ C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda} \right\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots k)$$

con una regola dedotta dalla osservazione seguente:

« Le combinazioni di n elementi k a k possono ottenersi facendo dapprima le combinazioni di $n-1$ elementi k a k, poi le combinazioni degli stessi $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$ ed unendo a ciascuna di queste ultime combinazioni l'n^{mo} elemento considerato ».

Infatti operando in tal modo si ottengono combinazioni tutte diverse; giacchè le prime combinazioni degli $n-1$ elementi k a k sono certamente diverse fra loro, e diverse fra loro e dalle precedenti sono quelle che si ottengono dagli $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$.

Se a ciascuna di queste ultime combinazioni uniamo l'elemento n^{mo} non considerato, che diremo α, otterremo altrettante combinazioni k a k tutte parimenti diverse fra loro, e dalle precedenti, le quali non contenevano l'elemento α.

Dico inoltre che avrò in tal maniera tutte le combinazioni degli n elementi k a k. Infatti le combinazioni degli $n-1$ elementi k a k sono in numero di

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}$$

e quelle degli $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$ (che divengono combinazioni k a k quando vi si unisca l'elemento α) sono:

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

sommando si ottiene:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = n_k.$$

Dati dunque gli elementi

$$a_1 \quad a_2 \ldots a_{n-1} \quad a_n$$

II.

Formule risolutive. — Il coefficiente

$$A_1 = \sum_{\lambda=0}^{1} {}_{n-\lambda}C_{n-1} \, \Sigma P \left\{ C_{1,2\ldots(n-1),\lambda} \right\} a^{1-\lambda} d^{\lambda}$$

è un polinomio completo di primo grado in a ed in d.

Per il valore 0 di λ se ne ottiene il termine na. Per $\lambda = 1$ si ha:

$$\Sigma P \left\{ C_{1,2\ldots n-1,1} \right\} d = \frac{n(n-1)}{2} d$$

onde avremo

$$n a + \frac{n(n-1)}{2} d = - A_1. \qquad [1]$$

Il coefficiente

$$A_2 = \sum_{\lambda=0}^{2} {}_{n-\lambda}C_{n-2} \, \Sigma P \left\{ C_{1,2\ldots(n-1),\lambda} \right\} a^{2-\lambda} d^{\lambda}$$

sarà un polinomio di secondo grado rispetto alle stesse lettere, di cui il primo termine sarà, per $\lambda = 0$,

$$ {}_{n}C_{n-2}\, a^2 = \frac{n(n-1)}{2} a^2.$$

---

volendone la somma delle combinazioni prodotti k a k, se indichiamo con s_k tal somma, con S'_{k-1} la somma delle combinazioni prodotti di $n-1$ di quegli elementi a $k-1$ a $k-1$ e con S'_k la somma delle combinazioni prodotti degli stessi $n-1$ elementi k a k avremo:

$$S_k = S'_{k-1} \cdot a_i + C'_k$$

essendo a_i l'elemento non considerato nelle somme S'. Pertanto se cominciamo col prendere uno qualunque degli elementi dati, e poi l'elemento già considerato ed un altro, e così successivamente fino ad esaurire tutti gli elementi dati, e facciamo successivamente $k = 0, 1, 2 \ldots n$ avremo il quadro seguente:

$1 \quad (1 \cdot a_1)$

$1 \quad (a_2 + 1 \cdot a_1) \quad (1 \cdot a_1 \cdot a_2)$

$1 \quad (a_3 + a_2 + a_1) \quad ((a_2 + a_1)\, a_3 + a_1 \cdot a_2)$

. . . .

$1 \quad (a_n + a_{n-1} \cdots + a_1) \quad ((a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots a_1)\, a_n + (a_{n-2} + \ldots a_1)\, a_{n-1} \cdots + (a_2 + a_1) a_1)$.

ove nelle successive linee orizzontali si ha la somma delle combinazioni k a k dell'elemento a_1, dei due elementi a_1, a_2 dei tre elementi $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ e finalmente nell'ultima in basso degli elementi $a_1\ a_2 \ldots a_n$, k a k, essendo $k = 0, 1, 2 \ldots n$ nelle successive linee verticali da sinistra a destra. Abbiamo cioè il triangolo seguente

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & \alpha_1 & & \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{array}$$

in cui ciascuna delle α è uguale al prodotto di uno degli elementi dati a_i che non si sia ancora considerato, per il primo numero che gli è a sinistra superiormente, aumentato del numero che è immediatamente al di sopra. Ad esempio:

$$\alpha_5 = \alpha_2 \cdot a_3 + \alpha_3.$$

Per $\lambda = 1$

$$n-1\,\Sigma \mathrm{P}\left\{c_{(1,2\ldots(n-1))}\right\} a d=\frac{n(n-1)^2}{2} a d$$

Per i numeri $1, 2, 3 \ldots n-1$, avremo pertanto.

Elementi	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5 \ldots$
0	1					
1	1	1				
1, 2	1	3	2			
1, 2, 3	1	6	11	6		
1, 2, 3, 4	1	10	35	50	24	
1, 3, 3, 4, 5	1	15	85	225	274	120
. . . .						

La stessa regola può come è evidente fornire i coefficienti di una equazione di cui siano date le radici. E per ciò che precede si potrà concludere ancora che:

"Data una equazione di grado n, con il primo coefficiente eguale alla unità

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots \pm A_n = 0$$

la quale ammetta le radici $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$, la equazione di grado $n+1$ la quale ammetta le stesse radici $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$ più un'altra radice β_{n+1} sarà della forma

$$x_{n+1} - (A_1 + \beta_{n+1})\, x^n + (A_2 + A_1 \beta_{n+1})\, x^{n-1} \ldots \pm (A_n \beta_{n+1}) = 0$$

in cui ciascuno dei coefficienti è dato dalla somma del coefficiente dello stesso posto nella equazione di grado n, aumentato del prodotto del coefficiente precedente in questa stessa equazione per la nuova radice β_{n+1}".

Questa verità si dimostra, per altro, indipendentemente dalle considerazioni precedenti, assai semplicemente come segue:

Si abbia una equazione di grado n che ammetta le radici $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$, sarà:

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^n \ldots \pm A_n = (x-\beta_1)\,(x-\beta_2) \ldots (x-\beta_n)$$

Moltiplicando l'uno e l'altro membro per $(x - \beta_{n+1})$ si otterrà:

$$x^{n+1} - (A_1 + \beta_{n-1})\, x^n + (A_2 + A_1 \beta_{n+1})\, x^{n-1} \ldots \pm (A_n + A_{n-1} \beta_{n+1})\, x \pm A_n \beta_{n+1} =$$
$$= (x-\beta_1)\,(x-\beta_2) \ldots (x-\beta_n)\,(x-\beta_{n-1})$$

ed apparisce dal secondo membro che l'equazione

$$\mathrm{P}_0 x^{n+1} + \mathrm{P}_1 x^n + \mathrm{P}_2 x^{n-1} \ldots + \mathrm{P}_{n-1}$$

ove

$$\mathrm{P}_0 = 1\,;\ \mathrm{P}_1 = A_1 + 1 \cdot \beta_{n+1}\,,\ \mathrm{P}_2 = A_2 + A_1 \cdot \beta_{n+1} \ldots \mathrm{P}_{n-1} = A_n \beta_{n+1}$$

ammette le radici dell'equazione di grado n che ha per coefficienti $A_1\, A_2 \ldots A_n$ e di più ammette la radice β_{n+1}.

Ad esempio, volendo la equazione che ammette le radici

$$\frac{1}{7} \qquad -2 \qquad -11 \qquad \frac{2}{3}$$

si ottiene facilmente

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & \frac{1}{7} & & & \\
1 & -\frac{13}{7} & -\frac{2}{7} & & \\
1 & -\frac{70}{7} & \frac{141}{7} & \frac{22}{7} & \\
1 & -\frac{256}{21} & \frac{243}{21} & \frac{348}{21} & \frac{44}{21}
\end{array}$$

e la equazione richiesta sarà

$$21x^4 + 256x^3 + 243x^2 - 348x + 44 = 0.$$

finalmente il terzo termine è dato, per $\lambda = 2$, da

$$\Sigma P\{c_{(1,2\ldots n-1)_2}\} d^2 = \left\{ \frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right\} d^2 =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24} d^2.$$

Si ha quindi l'eguaglianza

$$\frac{n(n-1)}{2} a^2 + \frac{n(n-1)^2}{2} a d + \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24} d^2 = A_2$$

la quale insieme alla [1] fornisce un sistema di due equazioni da cui si può dedurre il valore di a e di d in funzione dei cofficienti A_1 ed A_2 e del grado n di una qualsiasi equazione le cui radici siano in progressione aritmetica. Avuto un termine estremo a e la regione d si può costruire la progressione di cui i termini sono le radici della equazione proposta.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} na + \dfrac{n(n-1)}{2} d = -A_1 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 + \dfrac{n(n-1)^2}{2} a d + \dfrac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24} d^2 = A_2 \end{cases}$$

si ottiene:

$$d = \pm \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3(n-1)A_1^2 - 6nA_2}{n^2-1}}$$
$$a = -\frac{n(n-1)d + 2A_1}{2n}.$$

È indifferente prendere per d il segno superiore o l'inferiore, in ogni caso si ottiene per a il valore di un termine estremo della progressione aritmetica. Considerando soltanto il primo segno, potremo stabilire le seguenti formule risolutive per una equazione di grado n che ammetta radici in progressione aritmetica: (*)

$$d = + \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3(n-1)A_1^2 - 6nA_2}{n^2-1}}.$$
$$a = -\frac{A_1}{n} - \sqrt{\frac{3(n-1)^2 A_1^2 - 6n(n-1)A_2}{n^2(n+1)}}.$$

(*) Poichè due numeri possono sempre riguardarsi come costituenti una progressione aritmetica, se nella formula

$$a = -\frac{n(n-1)d + 2A_1}{2n}$$

sostituiamo il valore di d con i due segni e poniamo $n = 2$ ritroveremo la nota formula risolutiva delle equazioni di 2° grado.

(continua)

Camillo Cortesi.

SULLA RISOLUZIONE SIMMETRICA DEL SISTEMA

$$\sum_1^3{}_{rs}\, a_{rs} x_r x_s = 0 \quad , \quad \sum_1^3{}_r\, b_r x_r = 0$$

Per risolvere simmetricamente il sistema delle due equazioni

$$\sum_1^3{}_{rs}\, a_{rs} x_r x_s = 0 \quad (a_{rs} = a_{sr}) \qquad (1) \qquad \text{e} \qquad \sum_1^3{}_r\, b_r x_r = 0, \qquad (2)$$

omogenee nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 si ricorre di solito a due soluzioni generiche y_1, y_2, y_3 e z_1, z_2, z_3 della (2) e si esprime poi simmetricamente la soluzione generale del sistema proposto per mezzo delle a, delle b, delle y e delle z.

In questa breve nota mi propongo di esprimere simmetricamente la soluzione del sistema proposto per mezzo soltanto dei coefficienti a e b. (*)

Moltiplicando la (1) per $b^2{}_1$, e tenendo conto della (2), si ha:

$$x^2{}_2 (b^2{}_1 a_{22} - 2b_1 b_2 a_{12} + b^2{}_2 a_{11}) - 2x_2 x_3 (b_1 b_2 a_{13} + \\ b_1 b_3 a_{12} - b^2{}_1 a_{23} - b_2 b_3 a_{11}) + x^2{}_3 (b^2{}_1 a_{33} - 2b_1 b_3 a_{13} + b^2{}_3 a_{11}) = 0.$$

Di qui segue che, supposti identici due indici congrui secondo il numero 3, se si pone:

$$P = \sqrt{-\sum_1^3{}_{rs} (a_{r+1\,,\,s+1}\, a_{r+2\,,\,s+2} - a_{r+1\,,\,s+2}\, a_{r+2\,,\,s+1})\, b_r b_s}, \qquad (3)$$

due soluzioni del sistema proposto ci sono date dai valori:

$$(\alpha) \begin{cases} x'_2 = b_1 b_2 a_{13} + b_1 b_3 a_{12} - b^2{}_1 a_{23} - b_2 b_3 a_{11} \pm b_1 P \\ x'_3 = b^2{}_1 a_{22} - 2b_1 b_2 a_{12} + b^2{}_2 a_{11} \end{cases}$$

e, per la (2):

$$(\alpha) \; \{ \; x'_1 = b_1 b_2 a_{23} + b_2 b_3 a_{12} - b^2{}_2 a_{13} - b_1 b_3 a_{22} \mp b_2 P;$$

ed ogni altra soluzione deve essere proporzionale ad una di queste.

Analogamente, se si avesse invece moltiplicata la (1) per $b^2{}_2$ o $b^2{}_3$, si avrebbero avute le due coppie di soluzioni

$$(\beta) \begin{cases} x''_2 = b_2 b_3 a_{12} + b_1 b_2 a_{22} - b^2{}_2 a_{13} - b_1 b_3 a_{22} \pm b_2 P \\ x''_1 = b^2{}_2 a_{33} - 2b_2 b_3 a_{23} + b^2{}_3 a_{22} \\ x''_2 = b_2 b_3 a_{13} + b_1 b_3 a_{33} - b^2{}_3 a_{12} - b_1 b_2 a_{33} \mp b_3 P \end{cases}$$

o

$$(\gamma) \begin{cases} x'''_1 = b_1 b_3 a_{33} + b_2 b_3 a_{13} - b^2{}_3 a_{12} - b_1 b_2 a_{33} \pm b_3 P \\ x'''_2 = b^2{}_3 a_{11} - 2b_1 b_3 a_{13} + b^2{}_1 a_{33} \\ x'''_3 = b_1 b_3 a_{12} + b_1 b_2 a_{13} - b^2{}_1 a_{23} - b_2 b_3 a_{11} \mp b_1 P \end{cases};$$

(*) A questo risultato non si può giungere dalle formole succennate ponendo ad es.:

$$y_1 = b_2 - b_3,\; y_2 = b_3 - b_1,\; y_3 = b_1 - b_2 \qquad \text{e} \qquad z_1 = \frac{b_2 - b_3}{b_1},\; z_2 = \frac{b_3 - b_1}{b_2},\; z_3 = \frac{b_1 - b_2}{b_3},$$

perchè verrebbe escluso il caso $b_1 = b_2 = b_3$.

e facilmente si vede che la proporzionalità colle soluzioni (α) avviene se si prendono sempre i segni superiori o sempre gli inferiori.

Sommando le tre soluzioni che si hanno prendendo i segni superiori e quelle che si hanno prendendo gli inferiori, si vede dunque che il sistema proposto ammette le due soluzioni:

$$(\mathrm{A})\begin{cases} x_1 = x'_1 + x''_1 + x'''_1 = b_2 \sum_{1}^{3}{}_r b_r(a_{3r+1} - a_{3r+2}) - b_3 \sum_{1}^{3}{}_r b_r(a_{2r+1} - a_{2r+2}) \mp (b_2 - b_3)\mathrm{P} \\ x_2 = x'_2 + x''_2 + x'''_2 = b_3 \sum_{1}^{3}{}_r b_r(a_{1r+1} - a_{1r+2}) - b_1 \sum_{1}^{3}{}_r b_r(a_{3r+1} - a_{3r-2}) \mp (b_3 - b_1)\mathrm{P} \\ x_3 = x'_3 + x''_3 + x'''_3 = b_1 \sum_{1}^{3}{}_r b_r(a_{2r+1} - a_{2r+2}) - b_2 \sum_{1}^{3}{}_r b_r(a_{1r+1} - a_{1r+2}) \mp (b_1 - b_2)\mathrm{P} \end{cases}$$

e che ogni altra soluzione è proporzionale ad una di queste.

Possiamo insomma concludere che, posto

$$\mathrm{D}_h = \Sigma_r\, b_r(a^{hr+1} - a^{hr+2}) \qquad [h = 1, 2, 3] \tag{4}$$

e indicando con ρ una costante arbitraria, la soluzione generale del sistema proposto è data dei valori:

$$x_h = \rho \left\{ b^{h+2}\mathrm{D}^{h+1} - b^{h+2}\mathrm{D}^{h+1} \pm (b^{h+1} - b^{h-2})\mathrm{P} \right\} \qquad [h = 1, 2, 3] \tag{5}$$

Padova, ottobre 1902.

PAOLO CATTANEO.

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI INTERI

1. Consideriamo la successione di numeri interi

$$\mathrm{V}_1,\ \mathrm{V}_2, \ldots\ \mathrm{V}_{n-1},\ \mathrm{V}_n, \tag{1}$$

ove è

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{A}n^2 + \mathrm{B}n + \mathrm{C}$$

essendo A, B, C tre numeri dati, che diremo rispettivamente la *prima*, la *seconda*, la *terza caratteristica* della successione (1); l'espressione

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$$

la diremo il *discriminante* della successione.

Volendo considerare solo successioni di numeri interi, la terza caratteristica deve essere un numero intero, mentre A e B sono o ambedue interi, o della forma

$$\mathrm{A} = \frac{2h+1}{2}; \qquad \mathrm{B} = \frac{2l+1}{2}, \qquad (h \text{ ed } l \text{ interi})$$

Diremo che $2K+1$ termini della successione (1)

$$V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots V_{\alpha_{k+1}}, \ldots V_{\alpha_{2k+1}}$$

formano un *gruppo simmetrico dell'ordine* $2k+1$, se è

$$\alpha_{k+1} - \alpha_i = \alpha_{2k+2-i} - \alpha_{k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

Due gruppi simmetrici dell'ordine $2k+1$

$$V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_{k+1}} \ldots V_{\alpha_{2k+1}}\,;\; V_{\beta_1} \ldots V_{\beta_{k+1}} \ldots V_{\beta_{2k+1}}$$

si diranno *gruppi equisimmetrici*, se è

$$\alpha_{k+1} - \alpha_i = \beta_{k+1} - \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

2. Abbiamo in generale

$$V_r - V_s = A(r^2 - s^2) + B(r - s).$$

Teorema I. — *Il quoziente*

$$\frac{V_{p+m\rho} - V_{p-m\rho}}{V_{p+n\rho} - V_{p-n\rho}}$$

è indipendente da p, *da* ρ *e dalle caratteristiche della successione* V; *ed è un numero intero se* m *è multiplo di* n.

Abbiamo infatti

$$V_{p+m\rho} - V_{p-m\rho} = 2m\rho(2Ap + B)$$
$$V_{p+n\rho} - V_{p-n\rho} = 2n\rho(2Ap + B),$$

e quindi

$$\frac{V_{p+m\rho} - V_{p-m\rho}}{V_{p+n\rho} - V_{p-n\rho}} = \frac{m}{n}.$$

Il primo membro è quindi un numero intero, se è m divisibile per n; gode poi delle proprietà contenute nell'enunciato del teorema.

Teorema II. — *Il quoziente*

$$\frac{V_{n+r} + V_{n-r} - 2V_n}{V_{m+s} + V_{m-s} - 2V_m}$$

è indipendente da n, *da* m, *e dalle caratteristiche della successione* V; *ed è il quadrato di un numero intero, se* r *è multiplo di* s.

Abbiamo infatti

$$V_{n+r} = A(n+r)^2 + B(n+r) + C = An^2 + Bn + C + Ar^2 + Br + 2Anr;$$

e quindi

$$V_{n+r} = V_n + V_r + 2Anr - C.$$

Similmente si ottiene:

$$V_{n-r} = V_n - V_r - 2A(n-r)r + C,$$

e quindi

$$V_{n+r} + V_{n-r} - 2V_n = 2Ar^2 \qquad (2)$$

Ponendo m in luogo di n, ed s in luogo di r si ha

$$V_{m+s}+V_{m-s}-2V_m=2As^2; \tag{3}$$

e quindi dividendo membro a membro le (2) e (3), si ottiene

$$\frac{V_{n+r}+V_{n-r}-2V_n}{V_{m+s}+V_{m-s}-2V_m}=\left(\frac{r}{s}\right)^2. \tag{4}$$

Il primo membro è dunque il quadrato di un numero intero, se r è multiplo di s; inoltre è indipendente da n, da m e dalle caratteristiche della successione.

Corollario. — *Nei gruppi equisimmetrici del terzo ordine, la differenza tra la somma dei termini estremi ed il doppio del termine medio è costante ed indipendente dalla seconda e terza caratteristica della successione* V.

Ed infatti posto nella (4), $r=s$, risulta

$$V_{n+r}+V_{n-r}-2V_n=V_{m+r}+V_{m-r}-2V_m=2Ar^2$$

Teorema III. — *Il quoziente*

$$\frac{(V_n-Ar^2)^2-V_{n-r}V_{n+r}}{r^2}$$

è eguale al discriminante della successione (1)

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}V_{n+r}V_{n-r}&=(V_n+Ar^2+Br+2Anr)(V_n+Ar^2-Br-2Anr)=\\&=(V_n+Ar^2)^2-r^2(2An+B)^2=\\&=(V_n-Ar^2)^2-r^2(B^2-4AC),\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{(V_n-Ar^2)^2-V_{n-r}V_{n+r}}{r^2}=B^2-4AC.$$

Corollario I. — *Il rapporto*

$$\frac{(V_n-Ar^2)^2-V_{n-r}V_{n+r}}{(V_m-As^2)^2-V_{m-s}V_{m+s}}$$

è il quadrato di un numero intero, se r è multiplo di s.

Corollario II. — *Nei gruppi equisimmetrici del terzo ordine la differenza tra la somma dei prodotti due a due, dei termini del gruppo e il triplo del quadrato del termine medio è costante.*

Infatti considerando il gruppo simmetrico V_{n-r}, V_n, V_{n+r} si ha, applicando risultati precedentemente ottenuti

$$\begin{gathered}V_{n-r}V_{n+r}=(V_n-Ar^2)^2-r^2(B^2-4AC)\\V_nV_{n+r}+V_nV_{n-r}=V_n(V_{n+r}+V_{n-r})=V_n(2V_n+2Ar^2);\end{gathered}$$

e quindi

$$V_{n-r}V_{n+r}+V_nV_{n+r}+V_nV_{n-r}-3V_n^2=r^2(A^2r^2-B^2+4AC).$$

E perchè ponendo nella relazione ottenuta m in luogo di n, il valore del primo membro non cambia, risulta:

$$V_{n-r}V_{n+r}+V_nV_{n+r}+V_nV_{n-r}-3V^2_n=V_{m-r}V_{m+r}+V_mV_{m+r}+V_mV_{m-r}-3V^2_m$$

come si doveva dimostrare.

3. Consideriamo il gruppo simmetrico del quinto ordine

$$V_{n-r},\ V_{n-s},\ V_n,\ V_{n+s},\ V_{n+r} \qquad (r>s).$$

Abbiamo

$$V^2_{n-r}+V^2_{n+r}=(V_{n-r}+V_{n+r})^2-2V_{n-r}V_{n+r}:$$

ed essendo, come si è veduto:

$$V_{n-r}+V_{n+r}=2V_n+2Ar^2,\quad V_{n-r}V_{n+r}=(V_n-Ar^2)^2-r^2(B^2-4AC),$$

risulta

$$V^2_{n-r}+V^2_{n+r}=2V^2_n+12Ar^2V_n+2A^2r^4+2r^2(B^2-4AC).$$

Ponendo s in luogo di r, si ha

$$V^2_{n-s}+V^2_{n+s}=2V^2_n+12As^2V_n+2A^2s^4+2s^2(B^2-4AC)$$

e quindi

$$(V^2_{n-r}+V^2_{n+r})-(V^2_{n-s}+V^2_{n+s})-12A(r^2-s^2)V_n=$$
$$=2A^2(r^4-s^4)+2(r^2-s^2)(B^2-4AC).$$

Considerando allora i *due gruppi equisimmetrici del quinto ordine*

$$V_{n-r},\ V_{n-s},\ V_n,\ V_{n+s},\ V_{n+r};\quad V_{m-r},\ V_{m-s},\ V_m,\ V_{m+s},\ V_{m+r}$$

abbiamo la formola

$$(V^2_{n+r}+V^2_{n-r})-(V^2_{n+s}+V^2_{n-s})-12A(r^2-s^2)V_n=$$
$$=(V^2_{m+r}+V^2_{m-r})-(V^2_{m+s}+V^2_{m-s})-12A(r^2-s^2)V_m. \qquad (5)$$

In particolare, per $r=2$ e $s=1$, cioè se si considerano due gruppi di cinque termini consecutivi, risulta

$$(V^2_{n+2}+V^2_{n-2})-(V^2_{n+1}+V^2_{n-1})-36AV_n=$$
$$=(V^2_{m+2}+V^2_{m-2})-(V^2_{m+1}+V^2_{m-1})-36V_m$$

od anche

$$V^2_{n+2}+V^2_{m+1}+36AV_m+V^2_{m-1}+V^2_{n-2}=$$
$$=V^2_{m+2}+V^2_{n+1}+36AV_n+V^2_{n-1}+V^2_{m-2}. \qquad (6)$$

Se nella (6) poniamo $n+2$ in luogo di n e $n+7$ in luogo di m, abbiamo fra dieci termini consecutivi della successione V la formola:

$$V^2_{n+4}+V^2_{n+8}+36AV_{n+7}+V^2_{n+6}+V^2_n=$$
$$=V^2_{n+9}+V^2_{n+3}+36AV_{n+2}+V^2_{n+1}+V^2_{n+5}. \qquad (7)$$

Così se la successione V ha per caratteristiche

$$A=0,\qquad B=1,\qquad C=0$$

se è cioè la successione dei numeri interi, abbiamo per la formola (6) l'identità

$$(n+2)^2+(m+1)^2+(m-1)^2+(n-2)^2=(m+2)^2+(n+1)^2+(n-1)^2+(m-2)^2;$$

e per la formola (7) resulta l'identità

$$n^2+(n+4)+(n+6)^2+(n+8)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+9)^2.$$

In particolare, ponendo nell'ultima identità $n=0$, risulta

$$4^2+6^2+8^2=1^2+3^2+5^2+9^2,$$

e ponendo invece $n=1$, si ottiene

$$1^2+5^2+7^2+9^2=2^2+4^2+6^2+10^2.$$

Similmente considerando la successione dei numeri numeri dispari, cioè la successione di caratteristiche

$$A=0, \qquad B=2, \qquad C=1$$

per la formola (7), si ha l'identità

$$(2n+1)^2+(2n+9)^2+(2n+13)^2+(2n+17)^2=$$
$$=(2n+3)^2+(2n+7)^2+(2n+11)^2+(2n+19)^2,$$

ecc. ecc.

4. Consideriamo i tre gruppi del terzo ordine

$$\begin{array}{lll} V_n, & V_{n+1}, & V_{n+2} \\ V_{n-r}, & V_{n+r}, & V_{n+r+1} \\ V_{n-r+1}, & V_{n-r+2}, & V_{n+r+2}. \end{array}$$

Abbiamo, per quanto si è veduto

$$V^2_{n-r}+V^2_{n+r}=2V^2_n+12Ar^2V_n+2A^2r^4+2r^2(B^2-4AC) \qquad (8)$$

e ponendo $n+1$ in luogo di n, risulta similmente

$$V^2_{n-r+1}+V^2_{n+r+1}=2V^2_{n+1}+12Ar^2V_{n+1}+2A^2r^4+2r^2(B^2-4AC) \quad (9)$$

e sottraendo membro a membro la (8) dalla (9), si ha

$$V^2_{n-r+1}+V^2_{n+r+1}-V^2_{n-r}-V^2_{n+r}=2(V^2_{n+1}-V^2_n)+12Ar^2(V_{n+1}-V_n). \quad (10)$$

Ponendo nella (10), $n+1$ in luogo di n, risulta

$$V^2_{n-r+2}+V^2_{n+r+2}-V^2_{n-r+1}-V^2_{n+r+1}=$$
$$=2(V^2_{n+2}-V^2_{n+1})+12Ar^2(V_{n+2}-V_{n+1}). \qquad (11)$$

Infine se sottraggbiamo membro a membro la (10) dalla (11), ricordando che è

$$V_{n+2}-2V_{n+1}+V_n=2A,$$

otteniamo, la formola

$$(V^2_{n+r+2}+V^2_{n-r+2}-2V^2_{n-r+1})+(V^2_{n+r}+V^2_{n-r}-2V^2_{n+r+1})-$$
$$-2(V^2_{n+2}+V^2_n-2V^2_{n+1})=24A^2r^2. \qquad (12)$$

Poichè il secondo membro è indipendente da n, ponendo m in luogo di n il secondo membro non cambia e quindi risulta l'identità

$$\begin{aligned}(V^2_{n+r+2} + V^2_{n-r+2} + 2V^2_{m-r+1}) + (V^2_{n+r} + V^2_{n-r} + 2V^2_{m-r-1}) +\\ + 2(V^2_{m+2} + V^2_{m} + 2V^2_{n+1}) = (V^2_{m+r+2} + V^2_{m-r-2} + 2V^2_{n-r-1}) +\\ + (V^2_{m+r} + V^2_{m-r} + 2V^2_{n+r+1}) + 2(V^2_{n+2} + V^2_{n} + 2V^2_{m-1}). \qquad (13)\end{aligned}$$

Consideriamo alcuni notevoli casi particolari.

α) Per $r=1$, la (12) diviene

$$V^2_{n+3} - 4V^2_{n+2} + 6V^2_{n+1} - 4V^2_{n} + V^2_{n-1} = 24A^2.$$

Risulta quindi

Per le successioni V *a caratteristiche intere, l'espressione*

$$V^2_{n+3} - 4V^2_{n+2} + 6V^2_{n+1} - 4V^2_{n} + V^2_{n-1} \qquad (14)$$

è divisibile per 24. Per le successioni V *la cui prima caratteristica è della forma*

$$A = \frac{2h+1}{2}$$

$\left(\text{e quindi similmente } B = \frac{2l+1}{2}\right)$, *l'espressione* (14) *è divisibile per 6; infine per le successioni aventi nulla la prima caratteristica, cioè, in altre parole, per le progressioni aritmetiche, il cui primo termine è* $B + C$ *e la ragione è* B *l'espressione* (14) *è nulla.*

Ponendo nella (13), $r=1$, si ha

$$\begin{aligned}V^2_{n+3} + 4V^2_{m+2} + 6V^2_{n+1} + 4V^2_{m} + V^2_{n-1} =\\ = V^2_{m+3} + 4V^2_{n+2} + 6V^2_{m+1} + 4V^2_{n} + V^2_{m-1}.\end{aligned}$$

Sostituendo $n+2$ ad n e $n+7$ ad m, risulta la seguente relazione fra i quadrati di dieci termini consecutivi della successione V

$$\begin{aligned}V^2_{n+1} + 4V^2_{n+7} + 6V^2_{n+3} + 4V^2_{n+9} + V^2_{n+5} =\\ = V^2_{n+6} + 4V^2_{n+2} + 6V^2_{n+8} + 4V^2_{n+4} + V^2_{n+10}.\end{aligned}$$

Così per la successione dei numeri interi, si ha

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + 4(n+7)^2 + 6(n+3)^2 + 4(n+9)^2 + (n+5)^2 =\\ = (n+6)^2 + 4(n+2)^2 + 6(n+8)^2 + 4(n+4)^2 + (n+10)^2;\end{aligned}$$

e per la successione dei quadrati dei numeri interi, abbiamo

$$\begin{aligned}(n+1)^4 + 4(n+7)^4 + 6(n+3)^4 + 4(n+9)^4 + (n+5)^4 =\\ = (n+6)^4 + 4(n+2)^4 + 6(n+8)^4 + 4(n+4)^4 + (n+10)^4.\end{aligned}$$

β) Per $r=2$, la (12) dà una una relazione fra i quadrati di 7 termini consecutivi

$$V^2_{n+4} - 2V^2_{n+3} - V^2_{n+2} + 4V^2_{n+1} - V^2_{n} - 2V^2_{n-1} + V^2_{n-2} = 96A^2.$$

Ponendo nella (13) $r=2$ e $n+3$ in luogo di n, $n+10$ in luogo di m, risulta la seguente relazione fra i quadrati di 14 termini consecutivi:

$$\begin{aligned}&V^2_{n+1}+2V^2_{n+9}+V^2_{n+10}+4V^2_{n+4}+V^2_{n+12}+2V^2_{n+13}+V^2_{n+7}=\\&=V^2_{n+8}+2V^2_{n+2}+V^2_{n+3}+4V^2_{n+11}+V^2_{n+5}+2V^2_{n+6}+V^2_{n+14}.\end{aligned}$$

γ) Per $r=3$, la (12) dà una relazione fra i quadrati di 9 termini consecutivi:

$$\begin{aligned}&V^2_{n+5}-2V^2_{n+4}+V^2_{n+3}-2V^2_{n+2}+4V^2_{n+1}-\\&\qquad-2V^2_{n}+V^2_{n-1}-2V^2_{n-2}+V^2_{n-3}=216A^2.\end{aligned}$$

Ponendo nella (13), $r=3$, $n+5$ in luogo di n, $n+14$ in luogo di m, risulta la seguente relazione fra i quadrati di 18 termini consecutivi:

$$\begin{aligned}&V^2_{n+1}+2V^2_{n+11}+V^2_{n+3}+2V^2_{n+13}+4V^2_{n+5}+2V^2_{n+15}+V^2_{n+7}+2V^2_{n+17}+V^2_{n+9}=\\&=V^2_{n+10}+2V^2_{n+2}+V^2_{n+12}+2V^2_{n+4}+4V^2_{n+14}+2V^2_{n+6}+V^2_{n+16}+2V^2_{n+8}+V^2_{n+18}\end{aligned}$$

ecc. ecc.

5. Diremo che un gruppo (*) di quattro termini

$$V_\alpha,\ V_\beta,\ V_\gamma,\ V_\delta$$

è un gruppo simmetrico, se è $\beta-\alpha=\delta-\gamma$.

Due gruppi simmetrici V_α, V_β, V_γ, V_δ e $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$, $V_{\gamma'}$, $V_{\delta'}$, si diranno *equisimmetrici*, quando è $\beta-\alpha=\beta'-\alpha'$ e $\gamma-\beta=\gamma'-\beta'$.

Consideriamo il gruppo simmetrico

$$V_{n-r},\ V_n,\ V_m,\ V_{m+r},$$

Abbiamo

$$V_{m+r}-V_m=V_r+2Amr-C$$
$$V_n-V_{n-r}=V_r+2A(n-r)r-C;$$

e quindi

$$(V_{m+r}+V_{n-r})-(V_m+V_n)=2Ar(m-n+r).$$

Per il gruppo simmetrico

$$V_{n'-r},\ V_{n'},\ V_{m'},\ V_{m'+r}$$

abbiamo similmente

$$(V_{m'+r}+V_{n'-r})-(V_{n'}+V_{m'})=2Ar(m'-n'+r).$$

Se è

$$m-n=m'-n',$$

cioè se i due gruppi considerati sono equisimmetrici, si ha

$$(V_{m+r}+V_{n-r})-(V_m+V_n)=(V_{m'+r}+V_{n'-r})-(V_{n'}+V_{m'}),$$

ossia

(*) V. TAGIURI: "Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi". *Per. di Mat.* Serie II, Vol. III, fasc. I.

Nei gruppi equisimmetrici di quattro termini, la differenza tra la somma degli estremi e quella dei medî è costante e divisibile per il doppio della prima caratteristica.

6. Si consideri il gruppo simmetrico

$$V_{n-r},\ V_n,\ V_m,\ V_{m+r},$$

Abbiamo facilmente

$$V_{m+r}-V_{n-r}=(m-n+2r)\left(A(n+m)+B\right) \tag{15}$$

$$V_m-V_n=(m-n)\left(A(n+m)+B\right), \tag{16}$$

e quindi

$$\frac{(V_{m+r}-V_{n-r})(V_m-V_n)}{(m-n)(m-n+2r)}=\left(A(n+m)+B\right)^2. \tag{17}$$

Quindi *il quoziente*

$$\frac{(V_{m+r}-V_{n-r})(V_m-V_n)}{(m-n)(m-n+2r)}$$

è il quadrato di un numero intero, se la successione V *ha caratteristiche intere; e lo è pure quando, essendo* $A=\frac{2h+1}{2}$, $B=\frac{2l+1}{2}$, *sia* $n+m$ *un numero dispari.*

Dalle (15) e (16) risulta inoltre *che il quoziente*

$$\frac{V_{m+r}-V_{n-r}}{V_m-V_n}$$

è un numero intero, solo quando sia $2r$ *multiplo di* $m-n$.

In particolare ponendo nella (17) $r=1$ e $m=n+1$, risulta

$$(V_{n+2}-V_{n-1})(V_{n+1}-V_n)=3\left(A(2n+1)+B\right)^2$$

cioè, se si considerano quattro termini consecutivi della successione V *il prodotto della differenza degli estremi per la differenza dei medî è il triplo di un quadrato*

7. Consideriamo i due gruppi

$$V_{n+\alpha},\ V_{rn+\beta},\ V_{rn+\gamma},\ V_{n+\delta}$$
$$V_{m+\alpha},\ V_{rm+\beta},\ V_{rm+\gamma},\ V_{m+\delta}.$$

Vogliamo dimostrare *che se è*

$$r=\frac{\delta-\alpha}{\beta-\gamma}$$

(*essendo* $\delta-\alpha$ *divisibile per* $\beta-\gamma$), risulta

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}+V_{rm+\gamma}+V_{m+\delta}=V_{m+\alpha}+V_{rm+\beta}+V_{rn+\gamma}+V_{n+\delta}.$$

Si ha infatti facilmente

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}-V_{rn+\gamma}-V_{n+\delta}=$$
$$=A(\alpha-\delta)(2n+\alpha+\delta)+B(\alpha-\delta)+A(\beta-\gamma)(2rn+\beta+\gamma)+B(\beta-\gamma).$$

Essendo ora per l'ipotesi fatta

$$r=\frac{\delta-\alpha}{\beta-\gamma},$$

si ha

$$\delta-\alpha=r(\beta-\gamma)$$

e quindi

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}-V_{rn+\gamma}-V_{n+\delta}=A(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-r(\alpha+\delta))-B(\beta-\gamma)(r-1). \quad (18)$$

Essendo il secondo membro indipendente da n, possiamo scrivere

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}-{}_{rn+\gamma}-V_{n+\delta}=V_{m+\alpha}+V_{rm+\beta}-V_{rm+\gamma}-V_{m-\delta},$$

da cui

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}+V_{rm+\gamma}+V_{m+\delta}=V_{m+\alpha}+V_{rm+\beta}+V_{rn+\gamma}+V_{n+\delta}. \quad (19)$$

In particolare ponendo nella (18)

$$\alpha=s,\ \beta=-1,\ \gamma=1,\ \delta=-s$$

si ha

$$r=s:$$

e quindi

$$V_{n+s}+V_{sn-1}-V_{sn+1}-V_{n-s}=2B(s-1);$$

ed inoltre

$$V_{n+s}+V_{sn-1}+V_{sm+1}+V_{m-s}=V_{m+s}+V_{sm-1}+V_{sn+1}+V_{n-s}.$$

ATTILIO CREPAS.

(Continua)

PICCOLE NOTE

I. **Sopra un luogo geometrico.** — È noto che il luogo dei fuochi delle coniche di una schiera è una cubica circolare della sesta classe, (*) per la quale si determinano facilmente, oltre i due ciclici, altri undici punti. Questi punti sono: i sei vertici del quadrilatero-base, i piedi delle altezze del triangolo diagonale, il fuoco proprio della parabola appartenente alla schiera e il punto all'infinito della retta che passa pei punti medi delle diagonali. Nel caso del fascio-schiera, considerato nella quistione 608 di questo Periodico (Tomo XVII, pag. 333), si prevede che il luogo dei fuochi dev'essere una cubica circolare particolare e non già una quartica come è detto nella risoluzione a pag. 145 (Settembre-Ottobre, 1902).

Se denotiamo con O il punto comune alle due tangenti, con A e B i punti di contatto, con C il centro del segmento AB, si trova infatti, per il luogo dei fuochi delle coniche del fascio-schiera, *una strofoide obliqua col nodo in* O, *passante*

(*) In generale, per un sistema di coniche tale che ve ne siano μ tangenti a una retta data, il luogo dei fuochi è una curva dell'ordine 3μ con un punto μ-plo in ognuno dei punti ciclici.

per A, *per* B, *e pel punto all'infinito di* |OC|; *tangenti nel punto doppio sono le bisettrici degli angoli* AOB.

Questo risultato può verificarsi anche osservando che la equazione (5), data nella risoluzione citata,

$$(x^2 + 2xy \cos\omega + y^2)(b^2x^2 - a^2y^2) - 2ab\,[bx^2(x + y\cos\omega) - \\ - ay^2(x\cos\omega + y)] + a^2b^2(x^2 - y^2) = 0.$$

si spezza nelle due seguenti:

$$bx + ay - ab = 0$$

e

$$(bx - ay)(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) - ab\,(x^2 - y^2) = 0,$$

la prima delle quali dà la congiungente i punti di contatto, che non fa parte del luogo, e l'altra rappresenta la strofoide indicata sopra.

V. Retali.

II. **Sopra alcune funzioni singolari.** — Le cosiddette funzioni trigonometriche inverse (arc sen x, arc cos x, ecc.) non si possono considerare rigorosamente come funzioni che quando con opportune limitazioni, si faccia corrispondere ad ogni valore per la variabile un solo valore per la funzione. Sia p. es. la funzione

$$y = \text{arc ctn}\, x;$$

siccome la funzione ctn x prende tutti i valori possibili e una sola volta in un intervallo della forma $(\alpha, \pi + \alpha)$, o più particolarmente, della forma, $[m\pi, (m+1)\pi]$, basterà ammettere di scegliere fra gli infiniti valori della funzione quello compreso nell'intervallo considerato. Nelle seguenti considerazioni prenderò l'intervallo $(0, \pi)$. In quanto poi ai punti $\pm\infty$, si può osservare che in questi punti non si può assegnare un determinato valore alla funzione arc ctn x, giacchè nei punti in cui la cotangente diventa infinita, essa non ha segno determinato. Dovremo quindi togliere questi punti speciali.

Consideriamo ora

$$f(x) = \text{arc ctn}\,(\text{ctn}\, x),$$

che è reale finita e determinata in ogni punto x salvo che nei punti della forma $x = k\pi$ (k intero), giacchè in essi avendosi

$$f(x) = \text{arc ctn}\,(\pm\infty)$$

come abbiamo visto non ha allora valore determinato.

Aggiungiamo allora la posizione

$$f(k\pi) = 0 \quad (k \text{ intero})$$

con che la funzione viene determinata per ogni valore finito della variabile.

Si faccia ora variare x da $m\pi$ a $(m+1)\pi$; allora $f(x)$ è 0 al principio dell'intervallo, e nel punto $x = k\pi + \varepsilon$ è

$$f(m\pi + \varepsilon) = \text{arc ctn}\,(\text{ctn}\,\varepsilon) = \varepsilon.$$

Cioè in ogni caso, per $m\pi$ e $(m+1)\pi$, si ha

$$f(x) = x - m\pi.$$

Quando x s'avvicina a $(m+1)\pi$, $f(x)$ tende a π; ma essendo invece allora $f(x) = 0$, in questo punto $f(x)$ è discontinua a sinistra e fa un salto eguale a π.

Applicando la stessa considerazione ad ogni altro punto di questa forma abbiamo il seguente resultato: La funzione

$$f(x) = \text{arc ctn}\,(\text{ctn}\, x),$$

definita come sopra si è detto, è lineare in ciascuno degli intervalli della forma $[m\pi, (m+1)\pi]$ ed eguale ad $x - m\pi$; negli estremi poi di questi intervalli è continua a destra ed a sinistra ha una discontinuità di prima specie. Avendosi poi

$$f(\pi + \varepsilon) = f(\varepsilon)$$

la funzione $f(x)$ è periodica ed ha per periodo π.

Si consideri ancora

$$\text{E}(x) = x - \frac{\text{arc ctn}\,(\text{ctn}\,\pi . x)}{\pi}$$

funzione composta mediante la $f(x)$.

Per x intero ed eguale a x si ha

$$\text{E}(x) = k - \frac{\text{arc ctn}\,(\text{ctn}\, k\pi)}{\pi}.$$

Invece per $x = k + \varepsilon$, (k intero, $\varepsilon < 1$) si avrà

$$\text{E}(x) = k + \varepsilon - \frac{\text{arc ctn}\,[\text{ctn}\,(k\pi + \varepsilon\pi)]}{\pi} = k + \varepsilon - \frac{\text{arc ctn}\,(\text{ctn}\,\varepsilon\pi)}{\pi} = k + \varepsilon - \varepsilon = k.$$

Concludendo: La funzione $\text{E}(x)$ rappresenta il massimo intero contenuto nel numero x.

Si può facilmente applicare questa forma analitica per determinare quella del quoziente intero e del resto di una divisione, della forma generale di un numero intero o di un numero razionale ecc.

Si può notare anche che queste funzioni, benchè infinite volte discontinue hanno la derivata continua, ed eguale a 1 nel primo caso, a 0 nel secondo.

Guido Ascoli.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 621, 622, 623, 624, 625, 626 E 627

621. *Pel punto* P *del piano di una conica data si conduca un retta variabile che incontri la conica in* A *e* B. *Si trovi l'inviluppo del circolo di diametro* AB.

E. N. Barisien.

Risoluzione del maggiore del Genio sig. D'Emilio.

Assumiamo gli assi coordinati ortogonali coll'origine in P in modo che la conica abbia per equazione

$$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 1 = 0, \qquad (1)$$

ponendo $b = 0$ per considerare il caso della parabola e delle sue degenerazioni.

L'equazione della secante assumerà la forma

$$y = mx. \tag{2}$$

Indicando con (x_1, y_1); $x_2, y_2)$ le coordinate dei punti A, B, le espressioni.

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{g + fm}{a + bm^2} \tag{3}$$

$$\beta = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{m(g + fm)}{a + bm^2} \tag{3'}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right] = \left[\frac{(g + fm)^2 - (a + bm^2)}{(a + bm^2)^2}\right](1 + m^2) \tag{3''}$$

ci daranno in funzione del parametro m le coordinate del centro ed il quadrato del raggio della circonferenza, che genera l'inviluppo. Esso avrà quindi per equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

da cui deduciamo l'equazione

$$\varphi(x. y, m) = m^4[b^2(x^2 + y^2) + 2fby + b] + m^3[2b(fx + gy)] + m^2[2ab(x^2 + y^2) + \\ + 2bgx + 2afy + a + b] + m[2a(fx + gy)] - a^2(x^2 + y^2) + 2gax + a = 0.$$

Ponendo $m = \frac{p}{q}$ si ricava l'equazione omogenea in p e q

$$F(p, q) = \psi_0 p^4 + 4\psi_1 p^3 q + 6\psi_2 p^2 q^2 + 4\psi_3 pq^3 + \psi_4 q^4 = 0 \tag{4}$$

in cui $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_4$ sono funzioni note di x, y e delle costanti della equazione della conica data

L'equazione dell'inviluppo, come è noto, ricavasi eliminando la m fra l'equazione

$$\varphi(x, y, m) = 0$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial m} = 0.$$

È facile mostrare che essa può ottenersi, per conseguenza, eguagliando a zero il descriminante del primo membro della (4).

Ricordando l'elegante forma data dal Cayley al descriminante di una forma biquadratica binaria, si perviene immediatamente all'equazione

$$[3\psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3 + \psi_0\psi_4]^3 - 27[\psi_0\psi_2\psi_4 - \psi_0\psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4 - \psi_2^3 + 2\psi_1\psi_2\psi_3] = 0$$

dell'inviluppo.

Meritano di essere essaminati a parte come casi singolari quelli in cui la conica degenera in due rette concorrenti o parallele.

622. *Siano* MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 *le normali condotte da un punto* M *ad una ellisse di centro* O. *Il luogo dei punti* M *tali che*

$$k(\overline{MN}_1^2 + \overline{MN}_2^2 + \overline{MN}_3^2 + \overline{MN}_4^2) + k'(\overline{ON}_1^2 + \overline{ON}_2^2 + \overline{ON}_3^2 + \overline{ON}_4^2) = l^2 \tag{A}$$

è una conica che diventa un circolo, quando $k = k'$, *e una coppia di rette quando* $k = -k'$.

Quistione analoga per la parabola, essendo O *il vertice.*

E. N. Barisien.

Risoluzione del sig. Maggiore D'Emilio.

Sia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi, ed x_1, y_1 le coordinate del punto M. La lunghezza delle normali condotte da M all'ellisse corrispondono ai massimi e minimi di

$$n^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$$

condizionatamente all'equazione (1).

Possiamo perciò fissare la nostra attenzione sui massimi e minimi di

$$\varphi=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right], \tag{2}$$

in cui λ è un parametro ausiliario, che può considerarsi come una terza variabile indipendente.

Si hanno perciò le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x\left[1+\frac{\lambda}{a^2}\right]-x_1=0\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=y\left[1+\frac{\lambda}{b^2}\right]-y_1=0\\ &\quad\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Sostituendo i valori di x ed y ricavati dalle prime due nella terza, si ha l'equazione biquadratica

$$(\lambda+a^2)^2(\lambda+b^2)^2-a^2x_1^2(\lambda+b^2)^2-b^2y_1^2(\lambda+a^2)^2=0 \tag{B}$$

alle cui radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ corrispondono le quattro normali condotte dal punto $M(x_1 y_1)$ all'ellisse (1).

Possiamo scrivere, osservando che $(i=1,2,3,4)$

$$\overline{MN}_i^2=n_i^2=\frac{\lambda_i^2 x_1^2}{(a^2+\lambda_i)^2}+\frac{\lambda_i^2 y_1^2}{(b^2+\lambda_i)^2}, \tag{4}$$

$$\overline{NO}_i^2=\frac{a^4 x_1^2}{(a^2+\lambda_i)^2}+\frac{b^4 y_1^2}{(b^2+\lambda_i)^2}, \tag{5}$$

l'equazione

$$x_1^2\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k\lambda_i^2+k'a^4}{(a^2+\lambda_i)^2}+y_1^2\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k\lambda_i^2+k'b^4}{(b^2+\lambda_i)^2}=l^2, \tag{6}$$

da cui ricaveremo l'equazione del luogo definita dalla (A), osservando che le sommatorie che moltiplicano x_1^2 ed y_1^2 sono funzioni simmetriche delle radici della (B).

Per iniziare il calcolo di dette sommatorie, trasformiamo la (B) nella

$$\lambda'^4+2[b^2-a^2]\lambda'^3+[[b^2-a^2]^2-a^2x_1^2-b^2y_1^2]-2a^2x_1^2[b^2-a^2]\lambda'-a^2x_1^2(b^2-a^2)^2=0 \tag{B'}$$

in base alla relazione $\lambda+a^2=\lambda'$. Così i coefficienti della (B'), che sono funzioni simmetriche di $\lambda_1+a^2, \lambda_2+a^2, \lambda_3+a^2, \lambda_4+a^2$, si calcoleranno più rapidamente. Indichiamo con λ'_i le λ_i+a^2.

Notando che

$$\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k\lambda_i^2+k'a^4}{(\lambda+a^2)^2}-\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k(\lambda'-a^2)^2+k'a^4}{\lambda_i'^2}=k\left[4-2a^2\sum_{i=1}^{i=4}\frac{1}{\lambda'_i}\right]+(k+k')a^4\sum_{i=1}^{i=4}\frac{1}{\lambda_i'^2}$$

in virtù delle relazioni note fra i coefficienti e le radici della (B'), si ha [determinando per analogia la espressione di

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{k\lambda_i^2 + k'b^4}{(\lambda + b^2)^2} = k\left[4 - 2b^2 \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{\lambda_i''}\right] + (k + k')\, b^4 \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{\lambda''_i{}^2} \qquad (7)$$

quando poniamo $\lambda'' = \lambda + b^2$] l'equazione

$$4k[b^2 - a^2]\,[b^2x_1^2 - a^2y_1^2] + (k + k')\,[2a^4x_1^2 + 2b^4y_1^2 - 2a^2b^2(x_1^2 + y_1^2)] = \qquad (8)$$
$$= [l^2 - 2\,(a^2 + b^2)\,(k + k')]\,[b^2 - a^2]^2$$

che rappresenta una conica ridotta al centro ed agli assi: cioè concentrica e consica, come d'altra parte si intuisce a priori, dell'ellisse data.

Nel caso di $k = k'$ si trova

$$4(x_1^2 + y_1^2)\left[1 + \frac{a^2b^2}{[b^2 - a^2]^2}\right] = \frac{l^2}{k} - 2\,(a^2 + b^2).$$

che rappresenta una circonferenza concentrica all'ellisse data.

Infine per $k + k' = 0$, cioè $k = -k'$ la (8) diventa

$$4k\,[b^2x_1^2 - a^2y^2_1] = l^2\,[b^2 - a^2],$$

che nel caso di $l = 0$ si riduce al sistema delle rette $bx + ay = 0$; $bx - ay = 0$ cioè:

$$bx \pm ay = 0.$$

Per estendere la questione proposta al caso di una parabola di vertice O, cominciamo ad osservare che alla (A) corrisponde la

$$k \sum_{i=1}^{i=4} \overline{\mathrm{MN}_i}^2 + k' \sum_{i=1}^{i=4} \overline{\mathrm{ON}_i}^2 = l^2. \qquad (\mathrm{A}')$$

Essendo $y^2 = 2p\,(x - c)$ l'equazione della parabola, evidentemente si tratterà in primo luogo di fissare l'attenzione sui massimi e minimi della funzione

$$\varphi = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \lambda\,[y^2 - 2p\,(x - c)],$$

da cui deduconsi le equazioni

$$(3^a)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = x - x_1 - \lambda p = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = y - y_1 + \lambda y = 0. \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = y^2 - 2p(x - c) = 0 \end{cases}$$

Eliminando x ed y fra le tre equazioni ultime, si perviene all'equazione cubica in λ

$$\lambda^3 + \lambda^2\left[2 + \frac{x_1}{p} - \frac{c}{p}\right] + \lambda\left[1 + \frac{2x_1}{p} - \frac{2c}{p}\right] + \frac{x_1}{p} - \frac{c}{p} - \frac{y^2_1}{2p} = 0. \qquad (\mathrm{B}^a)$$

La $\sum_1^3 \overline{\mathrm{MN}_i}^2$ eguaglia

$$p^2 \sum_1^3 \lambda_i^2 + y^2_1 \sum_1^3 \frac{\lambda_i^2}{(1 + \lambda_i)^2} \qquad (4^a)$$

o così

$$\sum_1^3 \overline{O N_i}^2 = y^2_1 \sum_1^3 \frac{1}{(1+\lambda_i)^2} + \sum_1^3 (x_1 - c + \lambda_i p)^2. \qquad (5^a)$$

Pel calcolo di $\sum_1^3 \frac{1}{(1+\lambda_i^2)}$, $\sum_1^3 \frac{1}{1+\lambda_i}$ etc. conviene considerare la trasformata della (B^a) in base alla condizione $\lambda + 1 = \lambda'$: si ha così l'equazione

$$\lambda'^3 + \left[\frac{x'}{p} - \frac{c}{p} - 1\right] \lambda'^2 - \frac{2p^2}{y_1^2} = 0, \qquad (B'^a)$$

da cui deduconsi

$$\sum_1^3 \frac{1}{1+\lambda_i} = \sum_1^1 \frac{1}{\lambda'_i} = 0$$

$$\sum_1^3 \frac{1}{(1+\lambda_i)^2} = \sum_1^3 \frac{1}{\lambda'^2_i} = \frac{4p^2}{y^2_1}\left[\frac{x_1}{p} - \frac{c}{p}\right].$$

Tenuto conto di queste relazioni delle (4^a), (5^a), la (A') dà luogo, fatte le volute riduzioni, all'equazione

$$(k+k')\left[x^2_1 + c^2 - 4px_1 - 4pc + 6p^2\right] + 3ky^2_1 + 4k'p[x_1 - c] + 5k'(x_1 - c)^2 = l^2$$

di una conica simmetrica rispetto all'asse delle x.

Nel caso di $k = k'$ si ha

$$2k(x^2_1 + c^2 - 4px_1 - 4pc + 6p^2) + 3ky^2_1 + 4kp(x_1 - c) + 5k(x + c)^2 = l^2$$

e nel caso di $k = -k'$

$$3ky^2_1 - 4kp(x_1 - c) - 5k(x_1 - c)^2 = l^2.$$

623. *Un punto M si sposta sopra una semicirconferenza di diametro AB. Siano P, P' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base AM, e Q, Q' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base BM. Si trovino i luoghi di P, P', Q, Q' e dei punti medi di PQ, P'Q', PQ' e P'Q.*

E. N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. Padoa e del Maggiore D'Emilio.

Per distinguere fra loro i punti P e P' (quando M è distinto da A) si supponga che AM separi P dal centro O dalla semicirconferenza data; analogamente per i punti Q e Q'.

Sia ABC il triangolo equilatero i cui lati AC e BC tagliano la semicirconf. data (in D ed E) e sia ABC' il suo simmetrico (e siano D' ed E' i simmetrici di D ed E).

Mentre M va da A a B sulla semicirconf. data,

1° P va da A a C sulla semicirconf. AC che non passa per O; invero, facendo ruotare la semicirconf. data intorno ad A sino a che B vada in C, dall'ampiezza e dal verso della rotazione risulta che M va in P, da cui l'asserto; analogamente si dimostra che,

2° Q va da C a B sulla semicirconf. CB che non passa per O,

3° P' va da A a C' „ AC' che passa per O,

4° Q' va da C' a B „ C'B „ „

5° il punto medio F di PQ va da D ad E sulla semirconf. DE esterna a quella data; invero, poichè mediante rotazioni concordi di 60° intorno ad A o ad M si ottiene che MB vada in PC o in MQ, risulta equipollente ad MQ, e perciò F è il punto medio di CM; ma allora, se G è il punto medio di DE e quindi anche di CO, risulta GF parallelo ad OM e metà di OM, da cui l'asserto: analogamente si dimostra che

6° il punto medio F' di P'Q' va da D' ad E' sulla semicirconf. D'E' esterna al triangolo CD'E';

7° il punto medio H di PQ' va da D' ad E sulla semirconf. D'E che passa per A; invero, per quanto precede [1°, 4°], mediante la traslazione DE' il triangolo APC va in C'Q'B, sicchè il segmento OH, che congiunge i punti medi dei lati DE' e PQ' del parallelogrammo DE'Q'P è equipollente a DP; conseguentemente [1°]. $OH = OA$ ed $\widehat{MOH} = 60°$, da cui l'asserto: analogamente si dimostra che

8° il punto medio H' di P'Q va da D ad E' sulla semicirconf. DE' che passa per B.

624. *Essendo* r, θ *le coordinate polari di un punto* M *d'una curva d'area* s. *e* V *l'angolo della tangente col raggio vettore, dimostrare che il raggio di curvatura* ρ *in* M *è*

$$\rho = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio, tenente Golisciani, prof. Laisant e Retali.

Se φ è l'angolo che la tangente *f* con l'asse polare, dalla figura risulta $\varphi = \theta + V$, e quindi

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

625. *Dimostrare che*

$$\lim_{(x=1)} \left[\frac{(x+1)\left[\frac{(x^2+1)}{x} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}\right]}{x-1} \right] = 2.$$

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio, Golisciani e Nannei.

Applicando il teorema di De l'Hopital, il primo membro così si trasforma:

$$2\lim_{x=1} \left(\frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{x^2} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = 2.$$

Osservazione. — Nell'enunciato era stato posto $\frac{x+1}{x}$, invece di $\frac{x^2+1}{x}$, nel numeratore, per errore tipografico. Lasciando l'espressione così, si ha

$$2\lim_{x=1} \left(\frac{x-(x+1)}{x^2} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = 2\left(-\frac{\pi}{4} + 1\right) = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

626. *Trovare l'area compresa fra la curva*

$$y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c$$

e l'asse delle x, *quando* x *varia da* 0 *a* 2π.

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio e Golisciani.

Osservando che $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}^2(\pi + x) = \operatorname{sen}^2 x$, si ha

$$U = 2a\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx + c\int_0^{2\pi} dx + a\Big[(x - \operatorname{sen} x \cos x)\Big]_0^\pi + 2c\pi = (a + 2c)\pi.$$

627. *Dimostrare che l'area della curva*

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2x^2) = (a + b)^4(x^2 - y^2)$$

è

$$U = \frac{2(a + b)^3}{a - b}\left[\frac{a^2 + b^2}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}\right];$$

che, quando $a = b$, *quest'area diventa*

$$U = 16a^2.$$

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio e Golisciani.

Trasformando in coordinate polari, pigliando per asse polare l'asse x, si ha:

$$r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta) = (a + b)^4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta). \qquad (1)$$

Osservando che la curva è simmetrica rispetto agli assi x ed y e che nel primo quadrante si hanno punti reali per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, si ha:

$$U = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2(a + b)^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta. \qquad (2)$$

Pongo

$$\frac{a}{b}\operatorname{tg}\theta = t$$

per cui

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2}, \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\frac{b^2}{a^2}t^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2}, \qquad d\theta = \frac{b}{a}\cos^2\theta\, dt = \frac{b}{a}\frac{dt}{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2}$$

$$U = 2(a + b)^4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}t^2}{b^2 + b^2 t^2}\cdot\frac{dt}{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2},$$

e posto

$$\frac{b}{a} = k$$

si ha

$$U = 2\frac{(a + b)^4}{ab}\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1 - k^2t^2}{1 + k^2t^2}\cdot\frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= 2\frac{(a + b)^4}{ab}\left\{-\frac{2k}{1 - k^2}\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{k\,dt}{1 + k^2t^2} + \frac{1 + k^2}{1 - k^2}\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{1 + t^2}\right\} =$$

$$= 2\frac{(a + b)^4}{ab}\left\{-\frac{2ab}{a^2 - b^2}\Big[\operatorname{arc\,tg} kt\Big]_0^{\frac{1}{k}} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\Big[\operatorname{arc\,tg} t\Big]_0^{\frac{1}{k}}\right\} =$$

$$= \frac{2}{ab}\frac{(a + b)^3}{a - b}\left(-2ab\frac{\pi}{4} + (a^2 + b^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right) = 2\frac{(a + b^3)}{a - b}\left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Se $a = b$, applicando il teorema di De l'Hospital, si ha

$$U = 16\, a^3 \lim_{a=b} \left(\frac{2a^2 b - b(a^2+b^2)}{a^2 b^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot \frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} \right) = 16\, a^3 \cdot \frac{1}{a} = 16\, a^2 .$$

Od anche facendo nelle (2) $a = b$ si trova

$$U = 32\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta = 32\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta\, d\theta =$$

$$= 16\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d(2\theta) = 16\, a^2 \left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 16\, a^2 .$$

QUISTIONI PROPOSTE

628. Trovare l'inviluppo delle rette che tagliano due circoli dati secondo corde eguali.

629. Si consideri un circolo c ed una sua corda FF'. Una conica variabile, ma avente per fuochi F,F', incontra il circolo c in quattro punti A, B, A', B'. Dimostrare che ciascuno dei quadrilateri FAA'F', FAF'B, FAF'B', FBB'F', FA'F'B', FA'F'B ha i suoi lati tangenti ad un circolo. Il luogo dei centri di questi circoli si compone dell'asse focale e d'un circolo.

E. N. Barisien.

630. Se una conica $C^{(2)}$ tocca una quartica $C^{(4)}$ nei punti A, A' e la seca nei punti B, B' C, C', esiste un'altra conica che è tangente alla $C^{(4)}$ nei punti d'incontro colla retta AA' e che passa per i punti d'incontro di essa colle rette BB', CC'.

631. Se una conica $C^{(2)}$ tocca una quartica $C^{(4)}$ in quattro punti, le tangenti a $C^{(4)}$ nei punti di contatto incontrano di nuovo la curva stessa in 8 punti di una conica.

632. Se r, r' sono due tangenti di flesso di una quartica $C^{(4)}$ nei punti A, A' e incontrano la curva ancora in B, B' esiste una conica che ha con la $C^{(4)}$ due contatti di second'ordine nei punti ove essa è tagliata dalla AA' e passa per i punti d'incontro di $C^{(4)}$ con la BB'.

Lazzeri.

633. Dimostrare che gli archi di circolo massimo condotti da un punto P di una sfera ad un circolo minore della sfera stessa soddisfano alle relazioni

$$\frac{\cos\frac{PM}{2}\cos\frac{PM_1}{2}}{\cos\frac{MM_1}{2}} = \text{costante}.$$

$$\frac{\operatorname{sen} PM \operatorname{sen} PM_1}{\cos^2\frac{MM_1}{2}} = \text{costante};$$

e trovare le relazioni corrispondenti nel piano.

P.

BIBLIOGRAFIA

Alasia. — *I complementi di geometria elementare.* Manuale Hoepli.

Provo sempre un gran piacere nell'aprire un nuovo volumetto della preziosa raccolta dell'egregio editore Hoepli. La cura con cui in generale sono fatti questi volumi, la nitidezza ed eleganza dell'edizione predispongono il lettore favorevolmente. Ma questa volta la mia aspettativa è stata delusa.

Apro a caso, e prima di tutto mi capita sott'occhio l'ultimo Capitolo, (XIV) " *Le sezioni coniche* „. Seguendo il metodo di Dandelin, si considerano anzitutto i fuochi come punti di contatto del piano della sezione con la sfera ad esso tangente ed inscritta nel cono; ma non è accennato affatto che questi fuochi sono uno o due secondo che il piano secante è parallelo o no ad una generatrice; e si dimostra un solo teorema che cioè *una sezione conica è il luogo di un punto che si muove nel piano in modo che la sua distanza da un punto fisso del piano sia in rapporto costante con la distanza di esso da una retta posta nel piano.* Noto, fra parentesi, che nella dimostrazione si fa uso della trigonometria, mentre si potrebbe con eguale semplicità farne a meno.

Dopo di che, fatta la classificazione delle coniche secondo che il rapporto suddetto *(eccentricità)* è $\gtreqless 1$, l'autore scrive: " Dato così uno sguardo generale alle altre sezioni coniche, studieremo ora ciascuna di esse, ed il più elementarmente che ci sarà possibile. Cercheremo dunque di definire ciascuna di esse in modo particolare basandoci su *qualcuna delle sue proprietà caratteristiche* ecc. „

E subito dopo viene il § 95 " Ellisse „ che comincia con queste parole: " Dicesi ellisse *quella fra le sezioni coniche* che è tale che la somma delle distanze da un punto qualunque di essa a due punti fissi dello stesso suo piano è una quantità costante „.

Per chi conosce l'argomento apparisce chiaro che la definizione è sbagliata, perchè bisognerebbe dimostrare prima che le sezioni coniche (per $e < 1$) godono di quella proprietà: chi studia l'argomento per la prima volta bisogna che necessariamente si domandi: come si fa ad assoggettare tutti i punti di una sezione conica a verificare quest'altra proprietà? È vero che l'*ultimo* teorema sulla ellisse dice: " Il rapporto delle distanze di un punto dell'ellisse da uno dei fuochi e dalla *vicina* (!) direttrice è costante ed eguale all'eccentricità e „; e questo per il 1° teorema autorizza a dire che il luogo dei punti... è una sezione conica. Ma ciò non toglie che almeno la disposizione della materia è errata, e la disposizione e l'ordine in un libro didattico in cui non si espongono cose nuove e peregrine è tutto.

Riesce poi assai difficile a comprendere quali criteri hanno guidato l'autore nella scelta delle poche proprietà delle tre sezioni coniche fra le innumerevoli che sono note. Per es. perchè parla dei diametri per l'iperbole e non per l'ellisse o la parabola?

Ricomincio a sfogliare il libro dalle prime pagine augurandomi che sia soltanto *in cauda venenum*; ma trovo del veleno dappertutto. Mi limito a pochi esempi.

A pag. 9, 10 si trova il teorema d'Eulero sui poliedri ($v + f - y = 2$); ma forse per amore di novità l'A. ha invertito la consueta e ben nota dimostrazione e dice: " Se uniamo i vertici $A_1, A_2 \ldots A_n$ di una faccia ad un punto qualunque P, preso fuori del piano di tale faccia, avremo ottenuto un nuovo poliedro con f' faccie, v' vertici, s' spigoli, e sarà

$$f + v - s = f' + v' - s' \text{ „}$$

E sta bene. Ma dimostrato questo aggiunge:

" Supponiamo ancora di fare l'operazione inversa, e cioè di distaccare dal poliedro una piramide lasciando ad esso la base di tale piramide. L'espressione al secondo membro dell'ultima eguaglianza non cambierà: ripetendo questa operazione un certo numero di volte *finiremo col ridurre ad un tetraedro il poliedro dato*, ecc. „

E questo è tutt'altro che evidente come mostra credere l'A.

Le inesattezze e improprietà di linguaggio sono continue, per es. a pag. 23.

" *Ogni poligono è proporzionale alla sua potenza* e il rapporto di due poligoni è eguale al rapporto delle loro potenze „.

La seconda proposizione è la correzione dell'enunciato della prima; e a pag. 25 è ripetuto lo stesso sui poliedri, e ciò salva le spalle al proto spesso vittima innocente.

A pag. 26: La figura simmetrica di una retta AB... è una retta A'B'... *eguale* ecc...

Dove è confusa *retta* con *segmento*.

In conclusione questi *Complementi* sono un lavoro abborracciato, pieno di inesattezze, e non fanno davvero buona figura nell'ottima raccolta di Manuali dell'Hoepli. Dico tutto questo con dolore, ma la verità deve andare innanzi a tutto. Auguro al laborioso Autore che metta meno fretta e più diligenza nei suoi futuri lavori.

K.

ERRATA-CORRIGE.

Pag. 197, lin. 7, invece di *area* leggasi *arco*.

624. *Risoluzione* del sig. **Laisant**.

Chiamando α l'angolo della tangente con l'asse delle x si ha

$$\alpha = \theta + V, \qquad \rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

e quindi la formula $\rho = \dfrac{ds}{d\theta + dV}$ è evidente.

Altra risoluzione del prof. Rotali.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 17 gennaio 1903.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE ARITMETICA

(Continuaz. e fine v. n. precedente)

III.

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA A RADICI AUMENTATE.

Passiamo ad esporre alcune proprietà della trasformata a radici aumentate per le equazioni che ci occupano.

A tal fine premettiamo i lemmi seguenti:

Lemma I. — *a)* Data una serie di $n=2p$ termini, tali che la somma di due equidistanti dagli estremi sia costante ed eguale alla somma degli estremi stessi, se diciamo σ la somma di questa serie, diminuendo ciascun termine del valore $\frac{\sigma}{n}$ si ottiene una nuova serie, in cui i termini egualmente distanti dagli estremi sono eguali, e di segno contrario.

Se a_1 ed a_{2p} sono i due termini estremi, potremo indicare l'intera serie con

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_p,\ (a_{2p}+a_1-a_p),\ \ldots\ (a_{2p}+a_1-a_2),\ a_{2p},$$

onde

$$\frac{\sigma}{n}=\frac{p\,(a_{2p}+a_1)}{n}=\frac{a_{2p}+a_1}{2},$$

e diminuendo due termini qualunque, egualmente distanti dagli estremi, del valore $\frac{\sigma}{n}$, se indichiamo questi termini con

$$a_s, \qquad (a_{2p}+a_1-a_s),$$

otterremo

$$+\frac{2a_s-a_{2p}-a_1}{2} \qquad -\frac{2a_s-a_{2p}-a_1}{2}.$$

b) Data una serie di $n=2p+1$ termini tali che quelli egualmente distanti dagli estremi abbiano una somma costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi, ed il termine medio eguale alla semisomma degli estremi; dicendo σ la somma di questa serie, se si diminuisce ciascun termine del valore $\frac{\sigma}{n}$, si ottiene un'altra serie in cui i termini egualmente distanti dagli estremi sono eguali, e di segno contrario, ed il termine medio è lo zero.

Infatti detti a_1, a_{2p+1} i termini estremi, si potrà rappresentare la serie con

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \left(\frac{a_{2p+1}+a_1}{2}\right), (a_{2p+1}+a_1-a_p) \ldots (a_{2p+1}+a_1-a_2), a_{2p+1},$$

onde

$$\frac{\sigma}{n}=\frac{(2p+1)(a_{2p+1}+a_1)}{2n}=\frac{a_{2p+1}+a_1}{2};$$

e la nuova serie sarà evidentemente

$$\frac{a_1-a_{2p+1}}{2}, \frac{2a_2-a_{2p+1}-a_1}{2} \ldots \frac{2a_p-a_{2p+1}-a_1}{2}, 0, -\frac{2a_p-a_{2p+1}-a_1}{2} \ldots$$
$$\ldots-\frac{2a_2-a_{2p+1}-a_1}{2}, -\frac{a_1-a_{2p+1}}{2}$$

Lemma II. — *a)* Se $n=2p$ elementi formano una serie tale che i termini egualmente distanti dagli estremi siano eguali, e di segno contrario, qualora si aumenti ciascun termine di questa serie di un numero qualunque X, si otterrà un'altra serie in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi.

Indicando la serie primitiva con

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p, -a_p, -a_{p-1}, \ldots, a_2\ a_1,$$

sarà la nuova serie

$$X+a_1, X+a_2, \ldots, X+a_{p-1}, X+a_p, X-a_p, X-a_{p-1}, \ldots, X-a_2, X-a_1,$$

in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante, ed eguale a 2X, somma degli estremi stessi.

b) Se fosse $n=2p+1$ evidentemente la serie dovrebbe avere per termine medio lo 0, che è il solo numero che possa avere i due segni nello stesso tempo. Si avrebbe pertanto la serie

$$a_1, a_2, \ldots, a_p\ \ 0, \ -a_p, \ldots, -a_2, -a_1,$$

per la quale facilmente si vedrebbe che sussiste quanto si è detto precedentemente; ed inoltre si proverebbe che il termine medio della nuova serie è la semisomma dei termini estremi.

Lemma III. — La somma delle combinazioni prodotti di $n=2p$ elementi due a due eguali e di segno contrario, presi k a k, è nulla se k è un numero impari.

Si abbiano gli elementi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, -a_p, \ldots, -a_3, -a_2, -a_1,$$

e sia $k=2q+1$. Chiamiamo per maggior semplicità elementi di destra, gli elementi col segno negativo, ed elementi di sinistra quelli col segno positivo.

Se $k \leq p$ è chiaro che tutte le combizioni k a k che possono ottenersi con i dati elementi conterranno elementi tutti di destra, o tutti di sinistra, ovvero elementi presi in parte a destra, ed in parte a sinistra: mentre se fosse $k > p$ si avrebbero soltanto combinazioni le quali contengono elementi presi a destra ed a sinistra. Facilmente si scorge che a ciascuna combinazione di elementi presi tutti a sinistra se ne può far corrispondere un'altra di elementi presi tutti a destra, ed eguale ai primi. Di più data una combinazione che contenga s elementi a sinistra od a destra, e $k-s$ a destra od a sinistra, ad essa corrisponderà un'altra combinazione con i $k-s$ elementi stessi di sinistra o destra, ed i rimanenti s di destra o sinistra.

Ma se osserviamo che, per essere $k=2q+1$, le combinazioni che contengono tutti elementi di sinistra (se ve ne sono) hanno segno contrario a quelle che contengono elementi tutti di destra, potremo concludere che tali combinazioni prodotti scambievolmente si elidono.

Inoltre poichè a ciascuna combinazione che abbia $s=2q'$ elementi da un lato, e $k-s=2(q-q')+1$ dall'altro ne corrisponde un'altra la quale ha gli stessi s elementi dal lato in cui la precedente aveva i $k-s$, concluderemo che queste due combinazioni debbono avere segno opposto, e che quindi anche esse scambievolmente si elidono. Alla stessa conclusione si perverrebbe considerando s impari, giacchè in tal caso sarebbe $k-s$ pari; onde il lemma rimane dimostrato.

Osservazione. — Se oltre gli $n=2p$ elementi si consideri l'elemento 0, esso annullando le combinazioni prodotti in cui entra, non si altera il risultato precedente. Pertanto si può concludere che il lemma dimostrato sussiste anche per gli $n=2p+1$ elementi

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_{p-1},\ a_p,\quad 0,\quad -a_p,\ -a_{p-1},\ldots,-a_2\ -a_1.$$

Lemma IV. — La somma delle combinazioni prodotti k a k di $n=2p$ elementi due a due eguali e di segno contrario, qualora k sia pari ed uguale a $2q$, è uguale alla somma delle combinazioni prodotti q a q dei quadrati di tutti e soli i p elementi aventi lo stesso segno, presa col segno $(-1)^q$. Siano

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{p-1},\ a_p,\quad -a_p,\ -a_{p-1},\ldots,-a_2,\ -a_1,$$

gli $n=2p$ elementi, e sia $k=2q$. Se

$$a_{\alpha_1}.a_{\alpha_2}.a_{\alpha_3}\ldots a_{\alpha_{2q}}$$

è una delle combinazioni a $2q$ a $2q$ eseguita sopra gli n elementi dati, ed in cui una almeno delle $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_{2q}$, ad esempio α_n, è diversa da tutte le altre, si potrà sempre trovare un'altra combinazione in cui all'elemento a_{α_n} sia sostituito l'elemento stesso cambiato di segno, onde le due combinazioni prodotti avranno segno contrario, ma lo stesso valore, e la loro somma sarà nulla. Però essendo k pari si debbono avere anche delle combinazioni in cui le $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_{2q}$ sono due a due eguali; e con queste combinazioni si saranno evidentemente esaurite tutte le combinazioni possibili a farsi con gli n elementi dati k a k.

In tali ipotesi si ha

$$a_{\alpha_1} \cdot a_{\alpha_2} \cdot a_{\alpha_3} \ldots a_{\alpha_{2q}} = (-a^2{}_{\alpha_{\gamma_1}})\,(-a^2{}_{\alpha_{\gamma_2}}) \ldots (-a^2{}_{\alpha_{\gamma_q}}) =$$
$$= (-1)^q \; a^2{}_{\alpha_{\gamma_1}} \cdot a^2{}_{\alpha_{\gamma_2}} \ldots a^2{}_{\alpha_{\gamma_q}} .$$

Ora in queste combinazioni non si può scambiare un elemento qualsiasi a_{α_s} nell'elemento stesso cambiato di segno, giacchè si otterrebbe una combinazione, in cui un elemento è ripetuto due volte. Sicchè queste combinazioni sono tutte dello stesso segno $(-1)^q$, e non possono ridursi. Inoltre, come è chiaro, esse non sono altro che le combinazioni q a q eseguite sopra gli elementi

$$a^2{}_1,\; a^2{}_2,\; a^2{}_3, \ldots\; a^2{}_p.$$

Dicendo $A_{k=2q}$ la somma delle combinazioni prodotti k a k fatte sopra $n=2p$ elementi, potremo simbolicamente scrivere:

$$A_{k=2q} = (-1)^q \, \Sigma P \left\{ C_{(a^2_1,\, a^2_2 \ldots a^2_p)_q} \right\} \quad \left(q = 1, 2, 3 \ldots \frac{k}{2}\right).$$

Osservazione. — Se agli n elementi considerati aggiungiamo l'elemento 0, non si alterano i risultati precedenti; quindi la formula stabilita vale anche per $n = 2p+1$ elementi, se tra essi vi è lo 0.

Teorema I. — La trasformata a radici aumentate di h, con h che annulli il coefficiente del secondo termine, costruita sopra una equazione di grado n, la quale ammetta radici che formino una serie in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi sia costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi, e nel caso di n impari, il termine medio sia eguale alla semisomma degli estremi:

1) ammette radici due a due eguali e di segno contrario;

2) ha nulli tutti i coefficienti di posto pari;

3) un coefficiente qualsiasi $a_{k=2q}$ di posto impari è uguale alla somma preceduta dal segno $(-1)^q$ delle combinazioni prodotti q a q eseguite sopra i quadrati di tutte e sole le radici che hanno un medesimo segno.

Sia l'equazione primitiva

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_{n-1} x + A_n = 0,$$

la quale ammetta le radici

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \quad \alpha_n,$$

che formino una progressione nel modo supposto dal teorema. Il coefficiente del secondo termine della sua trasformata a radici aumentate di h è, come si conosce

$$n_{(n-1)} h + A_1,$$

il quale si annulla per

$$h = -\frac{A_1}{n};$$

onde per il lemma I le radici della trasformata, che sono le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ diminuite di h, formeranno una serie, in cui i termini egualmente distanti dagli estremi sono eguali e di segno contrario, come gli estremi stessi. Allora per il lemma III la somma delle combinazioni prodotti k a k, per k impari, di questi elementi, ossia i coefficienti di posto pari della trasformata, saranno nulli. Infine per il lemma IV un coefficiente qualunque $k = 2q$ di posto impari sarà eguale alla somma (presa col segno $(-1)^q$) delle combinazioni prodotti q a q di tutte e sole le radici, le quali siano affette da un medesimo segno, elevate a quadrato.

Corollario. — La trasformata a radici aumentate di h di una equazione di grado n, che ammette radici in progressione aritmetica, con h che annulli il coefficiente del secondo termine:

1) ammette radici due a due eguali e di segno contrario,

2) ha nulli tutti i coefficienti di posto pari,

3) un coefficiente qualsiasi $a_{k=2q}$ di posto impari è uguale alla somma, preceduta dal segno $(-1)^q$, delle combinazioni prodotti q a q eseguite sopra i quadrati di tutte e sole le radici della trasformata, che hanno un medesimo segno.

Teorema II. — Inversamente, se le trasformate a radici aumentate di h, con h che annulli il coefficiente del secondo termine, costruita sopra di una equazione di grado n; ha nulli tutti i coefficienti di posto pari:

1) La trasformata ammetterà radici due a due eguali e di segno contrario;

2) un coefficiente qualsiasi di essa $a_{k=2q}$ di posto impari, sarà dato dalla somma delle combinazioni q a q eseguite sopra i quadrati di tutte e sole le radici della trasformata che hanno il medesimo segno;

3) la equazione primitiva ammetterà radici tali che formino una serie, in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi; e nel caso di n impari il termine medio di questa serie è uguale alla semisomma degli estremi.

Infatti se rappresentiamo l'equazione con

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

la sua trasformata a radici aumentate di h con $h = -\dfrac{A_1}{n}$ sarà, secondo la ipotesi

$$x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \ldots = 0$$

in cui la x è elevato a gradi tutti pari o tutti impari. Perciò, se α, β, γ, ... sono radici di queste equazioni, lo saranno parimenti $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ ... cioè essa ammetterà radici due a due eguali e di segno contrario.

Per conseguenza, in virtù del lemma IV, i coefficienti di posto impari

$$a_2,\ a_4,\ a_6,\ \ldots,\ a_{k=2q},$$

saranno dati dalla somma delle combinazioni prodotti q a q degli elementi α^2, β^2, γ^2.... prese col segno $(-1)^q$.

Infine le radici dell'equazione primitiva, che sono le

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots -\gamma, -\beta, -\alpha,$$

diminuite di h, per il lemma II, formeranno una serie nel modo supposto dal teorema.

IV.

Abbiamo dimostrato che, dato un segnito di n numeri tale che la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi sia costante ed eguale alla somma degli estremi stessi, e nel caso di n impari, il termine medio sia eguale alla semisomma degli estremi; se chiamo σ la somma di questo seguito, e diminuiamo ciascun termine del valore $\frac{\sigma}{n}$, otteniamo un altro seguito di numeri due a due eguali e di segno contrario.

Un caso particolare di un seguito siffatto è, come facilmente si vede, una serie di numeri in progressione aritmetica.

Consideriamo ora particolarmente questa progressione

Siano gli n elementi:

$$a+0d,\ a+d,\ a+2d, \ldots, a+(n-2)\,d,\ a+(n-1)\,d$$

e si supponga $n=2p$.

Due termini che siano egualmente distanti dagli estremi ed occupino un posto qualsiasi $p-s$ a partire dagli estremi stessi, saranno

$$a+(p-s-1)\,d \qquad a+(p+s)\,d,$$

ed essi, diminuiti di

$$\frac{\sigma}{n}=a+\frac{2p-1}{2}\,d,$$

divengono nella nuova serie

$$-\frac{2s+1}{2}\,d, \qquad +\frac{2s+1}{2}\,d.$$

Pertanto i termini di questa serie si otterranno ponendo in queste due formule successivamente

$$s=0,\ 1,\ 2 \ldots \frac{n-2}{2}.$$

Se n è impari, sarà, come è noto, $\frac{\sigma}{n}$ il termine medio della progressione. Poniamo

$$\frac{\sigma}{n}=a+kd,$$

e consideriamo il termine che occupa il posto $k-s$ a partire da un estremo; esso sarà $a+(k-s)\,d$, ed il termine che occupa lo stesso posto a partire dall'altro estremo è quindi $a+(k+s)\,d$. Diminuendo ambedue questi termini di $\frac{\sigma}{n}$ si ottiene.

$$-sd, \qquad +sd,$$

onde tutta la nuova serie si ottiene ponendo in queste espressioni

$$s=0,\ 1,\ 2\ldots\frac{n-1}{2}.$$

Ciò premesso, sarà facile stabilire un criterio per riconoscere se una equazione data ammetta o pur no radici in progressione aritmetica.

Infatti si abbia l'equazione

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots A_{n-1}x+A_n=0;$$

costruiamone anzi tutto la trasformata a radici aumentate di h, ponendo

$$h=-\frac{A_1}{n_{(n-1)}}=-\frac{A_1}{n}$$

e sia questa trasformata

$$y^n+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots a_{n-1}y+a_n=0$$

se nessuno o non tutti i coefficienti della forma $a_{k=2q+1}$ sono nulli, concluderemo che la equazione data " non ammette " radici in progressione aritmetica (Teor. I, II).

Se tutti i detti coefficienti sono nulli, in virtù dei teoremi precedenti si può asserire che le radici della equazione proposta formano una successione di n termini tali che la somma di due equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi; e nel caso di n impari, il termine medio è uguale alla semisomma degli estremi. Però questo non ci autorizza ad asserire che la serie predetta sia una progressione aritmetica.

Consideriamo allora nella trasformata i coefficienti di posto impari dati dalla formula

$$a_{k=2q}=(-1)^q\,\Sigma\mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{(\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots)_q}\right\},$$

$$\left(q=1,2,3\ldots\frac{k}{2}\right)$$

ove $\alpha_1^2, \alpha_2^2\ldots$ sono i quadrati di tutte e sole le radici dello stesso segno.

Se le radici della equazione proposta sono in progressione aritmetica, sappiamo che quelle della trasformata

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

sono date per n pari da

$$\frac{2s+1}{2}\,d \qquad s=0,1,2\ldots\frac{n-2}{2}$$

e per n impari da

$$sd \qquad s = 0, 1, 2 \dots \frac{n-1}{2}.$$

Sostituendo nella formula precedente, si avrà:

$$a_{k=2q} = (-1)^q \, \Sigma \mathrm{P} \left\{ \mathrm{C}_{(\mathrm{H}^2)_q} \right\} d^{2q},$$

ove con H^2 s'indica la serie dei numeri elevati a quadrato che si ottengono, per n pari, ponendo in $\frac{2s+1}{2}$, $s = 0, 1, 2 \dots \frac{n-2}{2}$; e per n impari dando ad s i valori $s = 0, 1, 2 \dots \frac{n-1}{2}$, ovvero facendo successivamente $s = 1, 2, 3 \dots \frac{n-1}{2}$.

E poichè è noto essere

$$d^2 = \frac{12(n-1)\mathrm{A}_1^2 - 24\, n \mathrm{A}_2}{n^2(n^2-1)},$$

concluderemo che i coefficienti di posto impari della trasformata a radici aumentate di h, con h che annulli il coefficiente del secondo termine, di una equazione che ammetta radici in progressione aritmetica, sono dati dalla formula

$$a_{k=2q} = (-1)^q \, \Sigma \mathrm{P} \left\{ \mathrm{C}_{(\mathrm{H}^2)_q} \right\} \left(\frac{12(n-1)\mathrm{A}_1^2 - 24\, n \mathrm{A}_2}{n^2(n^2-1)} \right)^q,$$

ove per n pari sia

$$\mathrm{H}^2 = \left(\frac{2s+1}{2} \right)^2, \qquad s = 0, 1, \dots \frac{n-2}{2},$$

e per n impari

$$\mathrm{H}^2 = s^2 \qquad\qquad s = 1, 2 \dots \frac{n-1}{2}.$$

Ad esempio sia data l'equazione

$$x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 13x + \frac{69}{4} = 0,$$

e si costruisca l'equazione a radici aumentate di $\frac{1}{2}$; ciò che può farsi assai facilmente con la regola di Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\frac{1}{2} & 1 & -2 & 14 & -13 & \frac{69}{4} \\
\hline
 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{53}{4} & -\frac{51}{8} & \frac{225}{16} \\
 & 1 & -1 & \frac{51}{4} & 0 & \\
 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{2} & & \\
 & 1 & 0 & & & \\
 & 1 & & & &
\end{array}$$

Poichè i coefficienti di posto pari si annullano, proveremo se i coefficienti di posto impari sono dati dalla formula precedentemente stabilita.

Operando si ottiene:

$$a_1 = -\Sigma\mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{\left(\frac{1}{4},\,\frac{9}{4}\right)_2}\right\}(-5) = \frac{25}{2}$$

$$a_4 = +\Sigma\mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{\left(\frac{1}{4},\,\frac{9}{4}\right)_2}\right\}\ 25 = \frac{225}{16}$$

onde concluderemo che la equazione data ammette radici in progressione aritmetica.

Si abbia inoltre l'equazione

$$x^5 + 5x^4 - 31x^3 - 113x^2 + 282x + 360 = 0;$$

la sua trasformata è

$$y^5 + 41y^3 + 400y = 0;$$

ma essendo

$$a_2 = -\Sigma\mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{(1,\,41)_1}\right\} = -41$$

$$a_4 = +\Sigma\mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{(1,\,41)_2}\right\} = \frac{6724}{25}$$

potremo asserire che le radici della equazione proposta formano una successione in cui la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi, ed in cui il termine medio e uguale alla semisomma degli estremi, ma questa successione non è una progressione aritmetica.

V.

Rimane dunque per mezzo delle considerazioni esposte stabilito un metodo generale di risoluzione, per una equazione di grado n a radici in progressione aritmetica.

Data infatti una equazione $f(x) = 0$ si può, con i criteri stabiliti nel paragrafo IV, riconoscere se essa ammette radici in progressione aritmetica. Se la prova riesce favorevolmente si applicano le formule risolutive del paragr. II, e con esse si ottiene il primo termine della progressione, e la ragione di essa; e quindi riesce facile costruire la progressione aritmetica i cui termini sono le radici della equazione data.

Osservo per altro che alcune volte come facilmente si comprende, se $f(x) = 0$ ha radici in progressione aritmetica, ed il suo grado non sia troppo elevato (non superi il nono grado) la trasformata riuscirà facilmente risolubile, e così nel ricercare se essa equazione abbia o pur no le radici in progressione aritmetica si giunge subito alla soluzione di essa senza necessità di applicare le formule risolutive.

E ciò si verificherà anche ogni volta che si sia in presenza di una equazione, la quale abbia radici che formino una successione nella quale la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi sia costante, ed uguale alla somma degli estremi, e nel caso in cui il numero dei termini della successione sia impari, il termine medio della stessa sia eguale alla semisomma degli estremi.

Dopo ciò ecco alcuni esempi di risoluzione delle equazioni considerate.

I. — Sia data l'equazione

$$x^{10} - 20x^9 + 15x^8 + 1680x^7 - 6342x^6 - 39480x^5 + 182510x^4 - \\ + 258320x^3 - 1267659x^2 - 220500x + 1091475 = 0;$$

la sua trasformata a radici aumentate di $-\left(-\frac{20}{2}\right)$ è

$$x^{10} - 165x^8 + 8778x^6 - 172810x^4 + 1057221x^2 - 893025 = 0;$$

e poichè si ha

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\Sigma P \left\{C_{\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \frac{81}{4}\right)_1}\right\} 4 = -165 \\
a_4 &= \Sigma P \left\{C_{\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \frac{81}{4}\right)_2}\right\} 16 = 8778 \\
a_6 &= -\Sigma P \left\{C_{\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \frac{81}{4}\right)_3}\right\} 64 = -172810 \\
a_8 &= \Sigma P \left\{C_{\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \frac{81}{4}\right)_4}\right\} 256 = 1057221 \\
a_{10} &= -\Sigma P \left\{C_{\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \frac{81}{4}\right)_5}\right\} 1024 = -893025,
\end{aligned}$$

possiamo asserire che l'equazione data ha radici in progressione aritmetica. Applicando le formule del § II si ha: $d = 2$, $a = -7$, onde le radici dell'equazione saranno

$$-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

II. — Sia data l'equazione

$$x^5 - 5x^4 + 23x^3 - 49x^2 + 80x - 50 = 0,$$

la sua trasformata è

$$x^5 + 13x^3 + 36x = 0,$$

e poichè

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\Sigma P \left\{C_{(1,4)_1}\right\} \left(-\frac{13}{5}\right) = 13, \\
a_4 &= +\Sigma P \left\{C_{(1,4)_2}\right\} \left(\frac{169}{35}\right) = \frac{675}{25},
\end{aligned}$$

l'equazione proposta non ammetterà radici in progressione aritmetica. Possiamo per altro risolvere la trasformata, ed ottenere per l'equazione data le radici

$$1 + 3\sqrt{-1} \quad 1 + 2\sqrt{-1} \quad 1 \quad 1 - 2\sqrt{-1} \quad 1 - 3\sqrt{-1}.$$

CESARE CAMILLO CORTESI.

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI INTERI

(Continuazione e fine v. fasc. prec.)

---

8. Alcune delle formole che si sono trovate possono servire per la risoluzione in numeri interi di particolari equazioni quadratiche indeterminate. Proponiamoci di trovare ad es., una soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica a dieci incognite

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 6mx_5 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 6my_5 \qquad (20)$$

essendo m un numero intero.

Poniamo:

$$m = 2\mathrm{A}\,(r^2 - s^2), \qquad (21)$$

ove A può essere o intero o della forma $\frac{2h+1}{2}$ ed è $r > s$ essendo r e s interi; se m è un numero dispari ($m = 2k+1$), basta porre

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}, \qquad r = k+1, \qquad s = k;$$

se è $m = p\,.\,(2k+1)$, essendo p un numero pari, basta porre

$$\mathrm{A} = \frac{p}{2}, \qquad r = k+1, \qquad s = k, \text{ ecc.}$$

Costruendo allora la successione, il cui termine generale è

$$\mathrm{A}n^2 + \mathrm{B}n + \mathrm{C},$$

ove A è dato dalla (21), mentre B e C sono qualunque (con la solita condizione che sia $\mathrm{B} = \frac{2l+1}{2}$, quando è $\mathrm{A} = \frac{2h+1}{2}$) si ha una soluzione in numeri interi dell'equazione (1) ponendo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \mathrm{V}_{n+r},\ x_2 = \mathrm{V}_{n-r},\ x_3 = \mathrm{V}_{m+s},\ x_4 = \mathrm{V}_{m-s},\ x_5 = \mathrm{V}_n \\ y_1 = \mathrm{V}_{m+r},\ y_2 = \mathrm{V}_{m-r},\ y_3 = \mathrm{V}_{n+s},\ y_4 = \mathrm{V}_{n-s},\ y_5 = \mathrm{V}_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} n, m \text{ qualunque e} \\ \text{maggiori di } r \text{ ed } s \end{array}$$

e ciò per un teorema sui gruppi equisimmetrici del quinto ordine (v. formola (2), § 2).

Per risolvere in numeri interi l'equazione quadratica ad otto incognite

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \qquad (22)$$

possiamo applicare due formole che abbiamo trovato.

Dalla formola (5) del § 3, quando la successione V ha la prima caratteristica nulla, risulta

$$V^2_{n+r} + V^2_{n-r} + V^2_{m+s} + V_{m-s} = V^2_{m+r} + V^2_{m-r} + V^2_{n+s} + V^2_{n-s}.$$

Perciò per risolvere in numeri interi la (22), si costruisca la progressione aritmetica di cui primo termine $B + C$ e la ragione è B, essendo B o C interi qualunque e si ponga

$$\begin{gathered} x_1 = V_{n+r},\ x_2 = V_{n-r},\ x_3 = V_{m+s},\ x_4 = V_{m-s} \\ y_1 = V_{m+r},\ y_2 = V_{m-r},\ x_3 = V_{n+s},\ y_4 = V_{n-s} \end{gathered}$$

essendo n, m, r, s numeri interi e n ed m sono maggiori di r ed s.

Possiamo trovare una soluzione in numeri interi della (22), applicando la formola (19) del § prec. Abbiamo trovato che se è $r = \dfrac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma}$, è

$$V_{n+\alpha} + V_{rn+\beta} + V_{rm+\gamma} + V_{m+\delta} = V_{m+\alpha} + V_{rm+\beta} + V_{rn+\gamma} - V_{n+\delta}.$$

Se la successione V ha per caratteristiche

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0$$

cioè se è la successione dei quadrati dei numeri interi, abbiamo

$$\begin{aligned} (n+\alpha)^2 + (rn+\beta)^2 + (rm+\gamma)^2 + (m+\delta)^2 = \\ = (m+\alpha)^2 + (rm+\beta)^2 + (rn+\gamma)^2 + (n+\delta)^2. \end{aligned}$$

Onde una soluzione in numeri interi della (22) è data da:

$$\begin{gathered} x_1 = n + \alpha,\ x_2 = rn + \beta,\ x_3 = rm + \gamma,\ x_4 = m + \delta \\ y_1 = m + \alpha,\ y_2 = rm + \beta,\ y^2 = rn + \gamma,\ y_4 = n + \delta \end{gathered}$$

essendo $n, m, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi qualunque e $r = \dfrac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma}$ intero.

9. È noto il teorema di *Fermat:* " ogni numero è la somma dei quadrati di quattro numeri interi (o di un minor numero di quadrati) ". Noi mostreremo che:

Ogni numero intero si può sempre decomporre in infiniti modi nella somma dei quadrati di quattro numeri (interi o frazionari).

Si è visto che se è $r = \dfrac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma}$, si ha l'eguaglianza

$$\begin{aligned} (n+\alpha)^2 + (rn+\beta)^2 + (rm+\gamma)^2 + (m+\delta)^2 = \\ = (m+\alpha)^2 + (rm+\beta)^2 + (rn+\gamma)^2 + (n+\delta)^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Ora tale eguaglianza che noi abbiamo nell'ipotesi che i numeri n, m, r, α, β, γ, δ fossero numeri interi, sussiste evidentemente anche nel caso in cui essi o parte di essi sieno numeri frazionari. Essendo ora X un numero intero, avremo per il teorema di Fermat

$$X = L^2 + M^2 + N^2 + P^2$$

ove L, M, N, P sono numeri interi. Fissiamo ad arbitro il valore delle quantità β ed n che compaiono nella formola (23) e poniamo

$$n + \alpha = L \tag{24}$$
$$rn + \beta = M \tag{25}$$
$$rm + \gamma = N \tag{26}$$
$$m + \delta = P \tag{27}$$

essendo inoltre

$$r = \frac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma}. \tag{28}$$

Risolvendo il sistema di equazioni (24), (25), (26), (27), (28), risulta:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha &= L - n \\
\gamma &= \frac{(M-\beta)^2\beta + n^2(N - M + \beta) - n(P - L)(M - \beta)}{(M-\beta)^2 + n^2} \\
m &= \frac{(P - L + n)n^2 + (M - \beta)(N - \beta)n}{(M-\beta)^2 + n^2} \\
\delta &= \frac{(L - n)n^2 - (M - \beta)(N - \beta)n + (M - \beta)^2 P}{(M-\beta)^2 + n^2} \\
r &= \frac{M - \beta}{n}
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Scegliendo per n un valore diverso da zero, $(M-\beta)^2 + n^2$ è sempre diverso da zero, e perciò α, γ, m, δ, r saranno numeri o interi o frazionari. Ponendo allora

$$L_1 = m + \alpha,\ M_1 = rm + \beta,\ N_1 = rn + \gamma,\ P_1 = n + \delta,$$

avremo

$$X = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 + P_1^2;$$

ed essendo β ed n arbitrarii potremo ottenere in infiniti modi i numeri L_1, M_1, N_1, P_1.

Così è

$$383 = 3^2 + 7^2 + 10^2 + 15^2.$$

Essendo

$$L = 3,\ M = 7,\ N = 10,\ P = 15$$

e ponendo

$$\beta = 1,\ n = 2$$

Dalla (29) risulta

$$\alpha = 1,\ \ \gamma = -\frac{23}{10},\ \ m = \frac{41}{10},\ \ \delta = \frac{109}{10},\ \ r = 3.$$

Quindi si ha

$$383 = \left(\frac{51}{10}\right)^2 + \left(\frac{133}{10}\right)^2 + \left(\frac{47}{10}\right)^2 + \left(\frac{129}{10}\right).$$

Similmente si ottiene

$$3S3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(\frac{29}{2}\right)^2 \quad \text{ecc.}$$

10. Nei §§ precedenti abbiamo studiato molte proprietà delle successioni V; ora ci proponiamo di risolvere in alcuni casi il seguente problema:

Determinare l'espressione generale delle caratteristiche di una successione V, *i cui termini devono soddisfare ad una data relazione.*

a) Risolveremo il seguente problema:

Determinare l'espressione generale delle caratteristiche di una successione V che gode della proprietà che *la somma di $2k+1$ suoi termini consecutivi è il quadrato di un numero intero.*

Essendo

$$V_{n-k}, \quad V_{n-k+1}, \ldots \quad V_n, \ldots, \quad V_{n+k}$$

$2k+1$ termini consecutivi, si ha facilmente

$$\begin{aligned} &V_{n-k} + V_{n-k+1} + \ldots + V_{n+k-1} + V_{n+k} = \\ &= (2k+1)\,An^2 + (2k+1)\,Bn + ((2k+1)\,C + 2AS_{2,k}), \end{aligned} \tag{30}$$

essendo A, B, C le caratteristiche che si devono trovare e $S_{2,k}$ la somma dei quadrati dei primi k numeri interi.

Il discriminante del trinomio (assumendo la n come variabile)

$$(2k+1)An^2 + (2k+1)Bn + ((2k+1)C + 2AS_{2,k})$$

è

$$(2k+1)^2 B^2 - 4A\,(2k+1)\,((2k+1)\,C + 2AS_{2,k}).$$

Se esso è nullo, cioè se è, fatte le riduzioni e soppresso il fattore comune $2k+1$,

$$3\,(B^2 - 4AC) = 4A^2 k(k+1) \tag{31}$$

il secondo membro della (30) è eguale a

$$(2k+1)A\left(n + \frac{B}{2A}\right)^2.$$

Ora se si pone

$$A = (2k+1)\,h^2 \qquad (h \text{ numero intero})$$
$$B = 2(2k+1)\,h^2 r \qquad (r \text{ numero intero})$$

e quindi, come si ottiene dalla (31)

$$C = (2k+1)\,h^2 r^2 - 2S_{2,k}\,h^2,$$

si ha

$$V_{n-k} + \ldots + V_n + \ldots + V_{n+k} = [h(2k+1)(n+r)]^2.$$

Dunque il termine generale di una successione V *tale che la somma di $2k+1$ suoi termini consecutivi sia il quadrato di un numero intero è*

$$(2k+1)\,h^2 n^2 + 2(2k+1)\,h^2 rn + ((2k+1)h^2 r^2 - 2S_{2,k}\,h^2.$$

Gode evidentemente della proprietà indicata anche la successione il cui termine generale sia

$$(2k+1)n^2+2(2k+1)rn+(2k+1)r^2-2S_{2,k}.$$

In particolare per $k=1$ si ha la successione il cui termine generale è

$$3n^2+6rn+3r^2-2$$

(ove r è un intero qualunque) e che gode della proprietà che la somma di tre suoi termini consecutivi è un quadrato.

b) Determinare le caratteristiche della *successione* V *sapendo che fra tre suoi termini consecutivi*

$$V_{n-1},\ V_n,\ V_{n+1}$$

ha luogo la relazione

$$V_{n-1}V_n+V_nV_{n+1}+V_nV_{n-1}=3V_n^2. \tag{32}$$

Abbiamo trovato (v. coroll. II del § 2)

$$V_{n-1}V_n+V_nV_{n+1}+V_nV_{n-1}=3V_n^2+A^2-B^2+4AC.$$

Affinchè abbia luogo la (32), deve quindi essere

$$A^2=B^2-4AC \tag{33}$$

cioè il *discriminante della successione deve essere il quadrato della prima caratteristica.*

Ricordando che, per le ipotesi che abbiamo fatto sin da principio, si ha

$$A=\frac{h}{2} \quad \text{e} \quad B=\frac{k}{2},$$

ove h, k sono o ambedue pari o ambedue dispari, risulta che la terza caratteristica C e il doppio di ciascuna delle prime due caratteristiche di una successione V che gode della proprietà (32), sono le soluzioni in numeri interi dell'equazione quadratica indeterminata

$$h^2=k^2-8hC. \tag{34}$$

Una soluzione dell'equazione (34) essendo data da

$$h=a,\ k=(2r+1)a,\ C=\frac{r(r+1)}{2}a \quad (a \text{ numero intero}),$$

risulta che la successione il cui termine generale è

$$\frac{a}{1}n^2+\frac{(2k+1)a}{2}n+\frac{k(k+1)}{2}a,$$

e quindi anche la successione il cui termine generale è

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(2k+1)n+\frac{1}{2}k(k+1),$$

gode della proprietà (1). Osserviamo che tale successione è quella dei numeri triangolari a partire dal termine di posto $(k+1)^{\text{mo}}$.

c) Con analogo metodo si trova che fra tutte le successioni V solo *la successione dei numeri triangolari* gode della proprietà che *la somma di due termini consecutivi è il quadrato di un numero intero.*

II. Consideriamo ora in particolare la successione il cui termine generale è

$$Z_n = An^2 + C, \tag{35}$$

la successione cioè avente nulla la seconda caratteristica.

Tale successione gode di tutte le proprietà che abbiamo trovato in generale per le successioni V; in particolare ponendo $B = 0$ nella formola penultima del § 7, si ha per la successione (35) la formola:

$$Z_{n+s} + Z_{sn-1} = Z_{sn+1} + Z_{n-s}. \tag{36}$$

Se è

$$A = 1 \qquad C = 0$$

la (36) diviene

$$(n+s)^2 + (sn-1)^2 = (sn+1)^2 + (n-s)^2.$$

Abbiamo quindi il modo di determinare una soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica a quattro incognite

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2,$$

ponendo

$$x_1 = n + s, \quad x_2 = sn - 1, \qquad x_1 = sn + 1, \quad y_2 = n - s.$$

Osserviamo inoltre che se un numero X è la somma di due quadrati se è cioè

$$X = P^2 + Q^2,$$

essendo P e Q numeri interi, ponendo

$$n + s = P, \qquad sn - 1 = Q,$$

n ed s sono le radici dell'equazione

$$t^2 - Pt + Q + 1 = 0,$$

e quindi, se il discriminante

$$P^2 - 4(Q+1),$$

è il quadrato di un intero, n ed s sono numeri razionali, e perciò sono pure numeri razionali

$$n - s \quad \text{e} \quad sn + 1.$$

Possiamo dunque dire:

Se un numero X è la somma dei quadrati dei due numeri interi P e Q, ed è

$$P^2 - 4(Q+1)$$

il quadrato di un numero intero, si possono sempre trovare due numeri R *ed* S *razionali tali che sia*

$$X = R^2 + S^2.$$

Per es. è

$$170 = 7^2 + 11^2$$

ed è

$$7^2 - 4(11 + 1) = 1$$

un quadrato intero. Posto

$$n + s = 7, \quad sn - 1 = 11,$$

risulta

$$n = 3, \qquad s = 4,$$

e quindi

$$170 = (n - s)^2 + (sn + 1)^2 = 1^2 + 13^2.$$

Essendo Z_α, Z_β due termini qualunque della successione il cui termine generale è

$$An^2 + C,$$

abbiamo facilmente

$$Z_\alpha Z_\beta = A^2 \alpha^2\beta^2 + C(Z_\alpha + Z_\beta) - C^2,$$

ed essendo

$$A^2\alpha^2\beta^2 + C = Z_{\alpha\beta},$$

risulta

$$Z_\alpha Z_\beta = AZ_{\alpha\beta} + C(Z_\alpha + Z_\beta) - C(A + C). \tag{37}$$

Per $\alpha = \beta$, si ha

$$Z^2_\alpha = AZ_{\alpha 2} + 2CZ_\alpha - C(A + C).$$

Moltiplicando i due membri della (37) per Z_γ si ha

$$Z_\alpha Z_\beta Z_\gamma = AZ_{\alpha\beta} Z_\gamma + C(Z_\alpha Z_\gamma + Z_\beta Z_\gamma) - C(A + C) Z_\gamma$$

e quindi sviluppando mediante la (37) i prodotti

$$Z_{\alpha\beta} Z_\gamma, \; Z_\alpha Z_\gamma, \; Z_\beta Z_\gamma,$$

risulta

$$\begin{aligned} Z_\alpha Z_\beta Z_\gamma = A^2 Z_{\alpha\beta\gamma} &+ AC(Z_{\alpha\beta} + Z_{\alpha\gamma} + Z_{\beta\gamma}) + \\ &+ C^2(Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma) - C(A + C)(A + 2C). \end{aligned}$$

In generale considerando il prodotto di h termini qualunque, si ha la formola (della quale tralasciamo la dimostrazione perchè facilissima:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} \ldots Z_{\alpha_h} = A^{h-1} Z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h} &+ A^{h-2} C \, \Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-1}} + \\ + A^{h-3} C^2 \Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-2}} + \ldots &+ A^{h-i} C^{i-1} \Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-i+1}} + \ldots \\ \ldots + C^{h-1} \Sigma X_{\alpha_1} &- C(A + C)\left(\frac{(A + C)^{h-1} - C^{h-1}}{A}\right), \end{aligned}$$

ove si indica con

$$\Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{h-i+1}}$$

la somma dei numeri Z i cui indici sono i prodotti ad $h-i+1$ ad $h-i+1$, delle h quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$.

Facilmente si dimostrano le seguenti proprietà dei numeri Z:

1. Se

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

si ha

$$\frac{Z_\alpha Z_\delta - Z_\beta Z_\gamma}{(Z_\alpha + Z_\delta) - (Z_\beta + Z_\gamma)} = C.$$

2. Se S è la somma di n numeri Z, lo è pure

$$h^2 S - nC(h^2 - 1),$$

essendo h un numero intero.

3. Se S è un numero Z, lo è pure

$$h^2 S - C(h^2 - 1),$$

4. Se la prima caratteristica della successione Z è un quadrato, se si considera cioè la successione il cui termine generale è

$$D_n = h^2 n^2 + C,$$

ove h è un numero intero dato, si ha

$$D_\alpha D_\beta = D_{h\alpha\beta} + C(D_\alpha + D_\beta) - C(C+1)$$
$$D_\alpha D_\beta = h^2 D_{\alpha\beta} + C(D_\alpha + D_\beta) - C(h^2 + C),$$

e quindi dalle due eguaglianze scritte, risulta

$$h^2 D_{\alpha\beta} - D_{h\alpha\beta} = C(h^2 - 1);$$

e posto

$$\alpha\beta = n$$

si ha la formola

$$D_{hn} = h^2 D_n - C(h^2 - 1).$$

In generale si ottiene

$$D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} \ldots D_{\alpha_k} = D_{h^{k-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} + C\,\Sigma\, D_{h^{k-2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} + \ldots$$
$$\ldots + C^i\,\Sigma D_{h^{k-i-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-i}} + \ldots + C^{h-1}\,\Sigma\, D_{\alpha_1} -$$
$$- C(C+1)\left((C+1)^{h-1} - C^{h-1}\right),$$

ove si indica con

$$\Sigma D_{h^{k-i-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-i}}$$

la somma dei numeri D, i cui indici sono rispettivamente i prodotti a $k-i$ a $k-i$ dei numeri $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, essendo ciascun prodotto moltiplicato per h^{k-i-1}.

Si ha pure la formola:

$$D_{n \cdot h^{k-1}} = h^{2(k-1)} D_n - C(h^{2(k-1)} - 1).$$

Risulta inoltre:

Se S è la somma di m numeri D, lo è pure

$$h^{2,k-1)}S - mC(h^{2k-1)} - 1).$$

Se S è un numero D, lo è pure

$$h^{2,k-1)}D - C(h^{2,k-1)} - 1).$$

5. Considerando la successione E il cui termine generale è

$$E_n = k^2 n^2 - 1$$

essendo k un numero intero abbiamo facilmente

$$E_\alpha E_\beta + E_\alpha + E_\beta = E_{k\alpha\beta}$$

cioè:

Il prodotto di due numeri della successione E aumentato della loro somma è un numero della successione.

12. Sui numeri della forma $Bn + C$, ove B e C sono interi dati, e $B > C$ dimostreremo il seguente teorema:

La condizione perchè il prodotto di due numeri della forma $Bn + C$ *sia un numero della stessa forma è che sia*

$$B = kC, \text{ essendo } k \text{ un divisore di } C - 1$$

oppure

$$B = h(C - 1), \text{ essendo } h \text{ un divisore di } C$$

oppure

$$C = 1.$$

Infatti consideriamo i due numeri

$$Bn + C \quad e \quad Bm + C.$$

Si ha

$$(Bn + C)(Bm + C) = B(Bnm + Cm + Cn) + C^2,$$

e posto

$$Bnm + Cm + Cn = \alpha,$$

risulta

$$(Bn + C)(Bm + C) = B\alpha + C^2.$$

Se $B\alpha + C^2$ deve essere un numero della forma $B\rho + C$, sarà

$$B\alpha + C^2 = B\rho + C,$$

da cui

$$\frac{C(C-1)}{B} = \rho - \alpha.$$

Essendo $\rho - \alpha$ intero, affinchè $C(C-1)$ sia multiplo di B, essendo per ipotesi $B > C$, dovrà essere $B = kC$, essendo k un divisore di $C-1$ o $B = k(C-1)$ essendo h un divisore di C. Se è $B = kC$, essendo inoltre $C - 1 = kr$,

$$(Ckn + C)(Ckm + C) = Ck(Cknm + Cm + Cn) + C^2 - C + C =$$
$$= Ck(Cknm + Cm + Cn + r) + C = C\rho + C.$$

Nel secondo caso si ottiene pure, posto $\mathrm{C}=hs$.

$$(h(\mathrm{C}-1)n+\mathrm{C})(h(\mathrm{C}-1)n+\mathrm{C})=h(\mathrm{C}-1)(h(\mathrm{C}-1nm+\mathrm{C}n+$$
$$+\mathrm{C}m+s)+\mathrm{C}=\mathrm{B}\rho+\mathrm{C}.$$

Infine se $\mathrm{C}=1$, il prodotto $(\mathrm{B}n+1)(\mathrm{B}m+1)$ è evidentemente della forma $\mathrm{B}\rho+1$.

Notiamo per ultimo che il prodotto di $2h$ numeri della forma

$$(\mathrm{N}+r)\mathrm{X}+\mathrm{N}$$

si può porre sotto la forma $(\mathrm{N}+r)\mathrm{Z}+r^{2h}$, mentre il prodotto di $2h+1$ numeri della medesima forma (1) si può porre sotto la forma

$$(\mathrm{N}+r)\mathrm{Z}+\mathrm{N}r^{2h},$$

In particolare si ha

$$((\mathrm{N}+r)\mathrm{X}+\mathrm{N})^2=(\mathrm{N}+r)((\mathrm{N}+r)\mathrm{X}^2+2\mathrm{NX}+\mathrm{N}-r)+r^2.$$

Quindi per trovare una soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica indeterminata

$$x^2=ay+z^2,$$

ove a è intero, basterà porre

$$a=\mathrm{N}+r,$$

essendo N ed r ambedue interi e quindi si otterrà la soluzione voluta, ponendo

$$x=az+\mathrm{N}$$
$$y=az^2+\mathrm{N}(2z+1)-r$$
$$z=r.$$

ATTILIO CREPAS.

LA RADICE QUADRATA D'UN INTERO
E UN CERTO GRUPPO DI TRASFORMAZIONI

In alcune lettere a me indirizzate il dottor Guido Fubini, un valoroso allievo della Scuola normale superiore di Pisa, neo-professore all'Università di Catania, solleva dubbi circa la possibilità di gruppi continui di trasformazioni *tutte* decomponibili finitamente, malgrado l'esistenza di siffatti gruppi sia dimostrata in un recente mio lavoro pubblicato dalla R. Accademia dei Lincei. (*) Mette perciò

(*) *Rendiconti*, vol. XII fasc. 3°, febbraio 1903. — *Io credo fermamente* (così il dottor Fubini) *che gruppi dotati della proprietà da Lei voluta non possono esistere (quando un numero finito di disuguaglianze dànno il criterio per la decomponibilità in* n *fattori) che se i parametri sono variabili in* conto che io tenti l'argomento anche per una via diversa da quella che tenni già. L'esistenza di gruppi continui composti di trasformazioni tutte decomponibili finitamente, cioè tali che la decomposizione di ciascuna in fattori (trasformazioni del gruppo) ha sempre un termine, ne sarà confermata. Tanto più opportuno mi sembra il presente scritto, perchè ha relazione con altri miei, pubblicati in questo riputato periodico, e segnatamente con quello dal titolo: *Di un certo algoritmo per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero in frazione continua.*(*) Ivi fo uso di una certa trasformazione fissa come mezzo per aggiungere via via de' nuovi anelli alla catena dell'ordinario sviluppo della radice di un numero intero e positivo in frazione continua. Mostrerò ora come si possa invece far uso d'una trasformazione variabile di anello in anello, purchè la trasformazione appartenga a un certo gruppo, che passo a definire. Ne trarrò, come corollario, la decomponibilità finita delle trasformazioni del gruppo.

1. S'indichi con D un numero intero e positivo, con ω la sua radice a meno di un'unità e con r il resto dell'estrazione della radice medesima. Il gruppo che voglio considerare è formato dal sistema delle trasformazioni

$$\frac{\mu z + D}{z + \mu}, \tag{1}$$

dove il *parametro* μ è un numero non minore di ω nè maggiore del più piccolo de' due limiti

$$\omega + 1 \quad \text{e} \quad \omega + \frac{r}{\omega}. \tag{2}$$

Siffatte trasformazioni formano un gruppo. Indicando infatti con (μ_1) e con (μ_2) quelle trasformazioni che corrispondono ai valori μ_1 e μ_2 del parametro, e facendone il prodotto operativo, si avrà

$$(\mu_1)(\mu_2) = \frac{\dfrac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} z + D}{z + \dfrac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2}}.$$

Questo prodotto conserva la forma dei fattori; epperò le (1) formano un gruppo. Osservando poi che per lo scambio degl'indici 1 e 2 il

intervalli di cui non si considerano gli estremi. Così avviene per es. per il gruppo $z' = \varepsilon z$ dove $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, ove si escluda il valore $\varepsilon = 0$. Insomma il dottor Fubini è d'opinione (come da altre sue parole meglio si parrà in appresso) che, o si devono escludere valori del parametro corrispondenti a estremi d'intervallo o punti singolari, oppure si deve specializzare la natura del parametro stesso, così da renderla inesprimibile con disuguaglianze in numero finito, come accadrebbe, al dir del Fubini, se il parametro fosse razionale. Nel primo caso il mio gruppo diverrebbe quel che si dice un *sol d'agosto*, epperò un fuor d'opera, appetto ad altri congeneri, assai più semplici; nel secondo caso .... Ma non conviene anticipare la discussione, anche perchè l'opinione del dottor Fubini sopra riportata potrebbe non essere giusta quando è ferma (v. in proposito la nota in fondo al presente scritto).

(*) Vol. XVIII, luglio-agosto 1902.

detto prodotto non muta, se ne inferisce che le (1) sono altresì permutabili fra loro a due a due.

Resta a dimostrare che, se μ_1 e μ_2 non sono minori di ω nè superano il minore dei limiti (2), anche del numero

$$\frac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2}$$

accade lo stesso. Si ponga perciò: $\mu_1 = \omega + \lambda_1$; $\mu_2 = \omega - \lambda_2$, intendendo per λ_1 e λ_2 due numeri compresi nell'intervallo da 0 a 1. E poichè

$$\frac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} = \omega + \frac{r + \lambda_1\lambda_2}{2\omega + \lambda_1 + \lambda_2},$$

si vede intanto che quel prodotto è maggiore di ω. Poichè inoltre

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \geq 2$$

o anche

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\lambda_1\lambda_2,$$

e d'altra parte

$$2\omega \geq r,$$

sommando verrà:

$$2\omega + \lambda_1 + \lambda_2 \geq r + 2\lambda_1\lambda_2 \geq r + \lambda_1\lambda_2.$$

Il detto prodotto non può dunque superare $\omega + 1$. Finalmente esso è minore di $\omega + \frac{r}{\omega}$, perchè la disuguaglianza

$$\frac{r + \lambda_1\lambda_2}{2\omega + \lambda_1 + \lambda_2} < \frac{r}{\omega}$$

si riduce all'altra

$$\omega\lambda_1\lambda_2 < \omega r + r(\lambda_1 + \lambda_2),$$

la quale è vera, perchè, non potendo $\lambda_1\lambda_2$ superare l'unità,

$$\omega\lambda_1\lambda_2 \leq \omega r.$$

Le trasformazioni (1), anche quando il loro parametro sia contenuto tra i limiti sopra fissati, formano dunque un gruppo che chiamerò Γ', come nella mia Nota pubblicata dai Lincei. (*)

2. Se $D = 19$, i limiti del parametro μ saranno 4 e $4\frac{3}{4}$. Vediamo su questo esempio come si possa sviluppare $\sqrt{19}$ in frazione continua ordinaria. Si consideri una trasformazione di Γ', per esempio la trasformazione

$$T_1 = \left(\frac{9z + 38}{2z + 9}\right).$$

(*) Il gruppo principale considerato in quella Nota ha il parametro variabile da ω ad $\omega + 1$, non esclusi gli estremi. Esso coincide con Γ' quando $r \geq \omega$; comprende Γ' e ne è più ampio quando $r < \omega$.

In essa la parte intera del rapporto $9z:2z$ (quoziente dei due termini in z) è 4; si scriva dunque:

$$T_1 = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{2z+9}{z+2}} \cdot (*)$$

Si prenda ora un'altra trasformazione qualunque del gruppo Γ', per esempio la trasformazione

$$T_2 = \frac{13z+57}{3z+13}.$$

Operando sulla z che è nel 2° membro dell'ultimo valore di T_1 la sostituzione T_2, si formerà il prodotto operativo T_1T_2, che sarà

$$4 + \cfrac{1}{\cfrac{53z+231}{19z+83}}.$$

La parte intera del quoziente $53z:19z$ è 2. Si scriva dunque:

$$T_1T_2 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{19z+83}{15z+65}}}.$$

Si prenda dal gruppo Γ' un'altra trasformazione T_3, per esempio

$$\frac{19z+76}{4z+19}.$$

Seguitando con questa come sopra fu indicato, si avrà

$$T_1T_2T_3 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{545z+2375}{148z+646}}}}.$$

ecc., ecc.

I numeri interi e positivi: 4, 2, 1..., che compariscono nei secondi membri dei valori di T_1, di $T_1 . T_2$, di $T_1 . T_2 . T_3$, ecc., sono gli ordinari quozienti incompleti dello sviluppo di $\sqrt{D}$, nel caso presente di $\sqrt{19}$, in frazione continua; e quel che più importa, i coefficienti della funzione lineare di z che chiude i detti valori, non possono mai essere negativi. La dimostrazione che di ciò ho trovato è simile a quella contenuta nella mia Nota: *Di un certo algoritmo ecc.*, ma per alcune modificazioni imposte dalla maggior generalità della questione,

*) Qualora si avesse

$$T_1 = \frac{(\omega+1)z+D}{z+(\omega+1)},$$

la parte intera del quoziente dei due termini in z toccherebbe il suo massimo $\omega+1$, e bisognerebbe aver cura di diminuirla di un'unità.

è un po' lunga e complicata. Nella speranza di poterla semplificare, ne rimetto la pubblicazione ad altro tempo. Proverò allora ciò che ho già verificato sull'esempio $D=19$, che cioè: *se* Π_n *è il prodotto di* n *trasformazioni qualunque del gruppo* Γ', *e se* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *sono i quozienti incompleti dell'ordinario sviluppo di* $\sqrt{D}$ *in frazione continua, si ha sempre*

$$\Pi_n = \left(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *positivi o nulli;* $\alpha > \gamma$ *e il determinante* $\alpha\delta - \beta\gamma$ *differente da zero.*

3. Vengo ora al corollario della decomponibilità finita. Se si pone

$$(\mu_1 + \sqrt{D})(\mu_2 + \sqrt{D}) \ldots . (\mu_n + \sqrt{D}) = A_n + B_n \sqrt{D},$$

è facile verificare che

$$\Pi_n = \frac{A_n z + DB_n}{B_n z + A_n}.$$

Conseguentemente

$$\frac{A_n z + DB_n}{B_n z + A_n} = \left(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Facendo in quest'ultima eguaglianza $z = \infty$ e poi $z = 0$, si otterranno le altre due

$$\frac{A_n}{B_n} = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

$$\frac{DB_n}{A_n} = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\beta}{\delta}\right).$$

E poichè i secondi membri, per la nota legge di formazione delle ridotte, sono compresi fra le ridotte $(n-1)^{ma}$ ed n^{ma} di $\sqrt{D}$, lo stesso avverrà dei primi. Essendo pertanto $\frac{A_n}{B_n}$ uguale al parametro della trasformazione Π_n, si conclude che: *se una trasformazione del gruppo* Γ' *è il prodotto di* n *fattori, il suo parametro* μ, *nonchè il quoziente* $\frac{D}{\mu}$, *sono compresi fra la ridotta* $(n-1)^{ma}$ *e la ridotta* n^{ma} *di* $\sqrt{D}$. Una trasformazione decomponibile in *infiniti* fattori avrebbe dunque il suo parametro μ eguale al *limite* comune a tutte le coppie di ridotte consecutive di $\sqrt{D}$, cioè a $\sqrt{D}$. Ma questo caso si può subito escludere, supponendo che μ sia razionale; (*) dunque il gruppo Γ', qua-

(*) Questa supposizione si fa pure nella mia Nota ai Lincei, dove i binomi della forma $\mu + \sqrt{D}$, chiamati ivi e non per nulla *binomi irrazionali*, sono sottoposti a *calcoli* che fuor della detta ipotesi non avrebbero significato. Così nel *corollario* riportato testualmente al n. 4 del presente scritto, che però vale anche quando le μ sono irrazionali. Il Fubini mi appone qualche mancata dichiarazione esplicita sul proposito. Era inutile: ma comunque sia, spero avrà supplito il buon criterio, e soprattutto il buon volere, degli altri lettori.

lora μ sia razionale, non contiene trasformazioni decomponibili all'infinito, e ciò prova il mio asserto. (*)

4. A pag. 82 della mia Nota pubblicata dalla R. Accademia dei Lincei si legge un *corollario* che mi sembra molto interessante, ma la cui dimostrazione non potei ivi sufficientemente sviluppare, per mancanza di spazio. Lo farò qui appresso dopo averne premessa l'enunciazione, quale si legge nella suddetta Nota: *Se i numeri* μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_n$ *non sono minori di* ω *nè maggiori di* $\frac{D}{\omega}$, *e se si pone*

$$(\mu_1+\sqrt{D})(\mu_2+\sqrt{D})\ldots(\mu_n+\sqrt{D})=A_n+B_n\sqrt{D},$$

il rapporto $\frac{A_n}{B_n}$ *è compreso fra le ridotte* n^{ma} *ed* $(n-1)^{ma}$ *di* $\sqrt{D}$.

Infatti, se i numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, oltre ad essere non maggiori di $\frac{D}{\omega}$, cioè di $\omega+\frac{r}{\omega}$, sono anche non maggiori di $\omega+1$, il teorema fu già dimostrato, perchè $\frac{A_n}{B_n}$ è il parametro del prodotto delle trasformazioni (μ_1), (μ_2), $\ldots(\mu_n)$, che nell'ammessa ipotesi appartengono tutte al gruppo Γ'. Si supponga dunque che una delle μ, per es. μ_1, entri nell'intervallo da $\omega+1$ a $\frac{D}{\omega}$, che cioè si abbia $\mu_1>\omega+1$; $\mu_1\leq\frac{D}{\omega}$. Da queste due ipotesi, aggiunte alla relazione $r<2\omega+1$, si deriva facilmente che $\frac{D}{\mu_1}$ non è minore di ω, nè maggiore dei due limiti $\omega+1$ e $\frac{D}{\omega}$; talchè il rapporto $\frac{D}{\mu_1}$ rientra nei limiti fissati per il parametro delle trasformazioni di Γ'. Se pertanto si pone

$$\left(\frac{D}{\mu_1}+\sqrt{D}\right)(\mu_2+\sqrt{D})\ldots(\mu_n+\sqrt{D})=P_n+Q_n\sqrt{D},$$

(*) E di questo parere è anche il dottor Fubini il quale, abbandonati gli *estremi d'intervalli e i casi più semplici*, che non sarebbero più a proposito, soggiunge: " Se nel suo esempio si suppone μ razionale, si cade nella classe di gruppi in cui la decomponibilità di una trasformazione in n fattori (anzi anche p. es. in un solo fattore, ossia l'appartenenza al gruppo) *non si può far dipendere da un numero finito di disuguaglianze*. E per questa classe di gruppi io ho ammesso *possibilissimo* che accada quanto Ella afferma, come risulta dalle mie lettere ". — Quel " possibilissimo " del dottor Fubini mi basta, e n'ho d'avanzo per la mia tesi; non avendo io mai fatto questione di *classe*, ma di *gruppo continuo*, qualunque ne sia la classe. Aggiungo poi: 1°. Che dato il mio gruppo qual è, non pare che nella classe cui esso appartiene o si voglia ascrivere ne esistano di più semplici, se non più interessanti (si noti che quel mio gruppo ha speciale importanza nella teoria delle forme quadratiche, come mostrerò in un prossimo lavoro). 2°. Che la nota in fondo al presente scritto prova come, anche in certi casi nei quali le riserve del dottor Fubini non avrebbero ragion d'essere, anzi si possiede la forma esplicita del gruppo, senza esclusione o limitazione di sorta, esistono gruppi continui di trasformazioni *tutte* decomponibili finitamente. 3°. Che il dottor Fubini, a giudicarne dalle sue parole, pare confonda l'appartenenza al gruppo col numero dei fattori; il che se facesse, avrebbe torto. Se infatti per definire la natura razionale di un parametro letterale un numero finito di disuguaglianze può essere insufficiente, lo stesso non può dirsi quanto al numero dei fattori di una *data* trasformazione. La determinazione di tal numero dipende invece, almeno pel mio gruppo, da un algoritmo *finito* (v. il n. 5 di questo lavoro).

$\frac{P_n}{Q_n}$, non che $\frac{DQ_n}{P_n}$, saranno compresi tra le ridotte n^{ma} ed $(n-1)^{ma}$ di $\sqrt{D}$. Scritta la precedente eguaglianza sotto la forma

$$(\mu_1+\sqrt{D})(\mu_2+\sqrt{D})\ldots(\mu_n+\sqrt{D})=\mu_1\left(Q_n+\frac{P_n}{D}\sqrt{D}\right)=F-G\sqrt{D},$$

il rapporto $\frac{F}{G}=\frac{DQ_n}{P_n}$ sarà dunque compreso tra la n^{ma} e la $(n-1)^{ma}$ ridotta di $\sqrt{D}$, come dovevasi dimostrare. Ora poi che una μ è entrata nell'intervallo da ω ad $\omega+1$, si supponga che ve n'entri un'altra e si ripeta la dimostrazione precedente; quindi una terza e si ripeta la dimostrazione, e così via.

5. Dissi già che il parametro d'una trasformazione decomponibile in n fattori dev'essere compreso fra le ridotte n^{ma} ed $(n-1)^{ma}$ di $\sqrt{D}$. Errerebbe tuttavia chi, invertendo il teorema, ne traesse un criterio per riconoscere il *massimo* numero di fattori ne' quali una data trasformazione del gruppo Γ' è decomponibile. Un criterio stabilito esiste invece, ed è semplicissimo, per quel gruppo Γ il cui parametro varia da ω ad $\omega+1$, gruppo che coincide con Γ' quando $r \geq \omega$, e ne è invece un sottogruppo quando $r<\omega$. Nella mia Nota più volte citata dimostro infatti il seguente algoritmo che vale a determinare il massimo numero di fattori in cui si può decomporre una data trasformazione del gruppo Γ. Premetto che l'algoritmo è diverso, secondochè $r \lesseqgtr \omega$.

Se $r>\omega$, *si forma l'espressione*

$$(\mu+\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^k$$

e poi si cerca qual è il minimo valore che bisogna dare all'esponente k *affinchè, ridotta l'espressione a forma di binomio irrazionale* $p+q\sqrt{D}$, (*) *il rapporto* $\frac{p}{q}$ *cessi di essere compreso nell'intervallo da* ω *a* $\omega+1$, *in cui per* $k=0$ *necessariamente si trova.* (**) *Detto minimo valore dell'esponente indica il numero massimo domandato.*

(*) Se μ non fosse razionale, qual significato avrebbe quest'inciso, che tolgo dalla mia Nota?

(**) Che questa circostanza debba cessare di verificarsi *per un valore finito di* k, si può dimostrare direttamente così: Pongasi

$$(\mu+\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^k=p+q\sqrt{D}.$$

Si avrà pure

$$(\mu-\sqrt{D})(-\sqrt{D}-\omega)^k=p-q\sqrt{D}.$$

D'onde facilmente

$$\frac{p}{q}=\sqrt{D}\,\frac{(\mu+\sqrt{D})\left(\frac{\sqrt{D}-\omega}{-\sqrt{D}-\omega}\right)^k+(\mu-\sqrt{D})}{(\mu+\sqrt{D})\left(\frac{\sqrt{D}-\omega}{-\sqrt{D}-\omega}\right)^k-(\mu-\sqrt{D})}.$$

Se al crescere indefinitamente di k il rapporto $\frac{p}{q}$ non cessasse mai di essere compreso nell'inter-

Se r $<\omega$, *si opera nello stesso modo, ma facendo uso dell'espressione*

$$(\mu+\sqrt{D})(\omega+1-\sqrt{D})^k.$$

Se finalmente r $=\omega$, *si può far uso dell'una o dell'altra delle due precedenti espressioni.*

Di alcune notevoli applicazioni delle cose esposte all'aritmetica tratterò in una prossima Nota.

G. Frattini.

NOTA.

Invece di supporre D *numero* (intero, positivo e beninteso non quadrato) si supponga *polinomio intero e di grado pari* per rispetto ad una lettera a. Si supponga inoltre: 1° che μ sia una funzione *razionale* di a; 2° che tale funzione abbia comune con $\sqrt{D}$ la parte intera. Anche in questo caso algebrico le trasformazioni

$$\frac{\mu z+D}{z+\mu}$$

formeranno un gruppo. Di più, indicando con π_n il prodotto di n trasformazioni del gruppo, e con $a_1, a_2, a_3 \ldots$ i quozienti incompleti consecutivi che si ottengono applicando a $\sqrt{D}$ quell'algoritmo che varrebbe a svilupparla in frazione continua qualora D rappresentasse un numero, si avrà anche per questo caso:

$$\pi_n=\frac{A_n z+DB_n}{B_n z+A_n}=\left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono polinomi interi in a, e il *grado* di α supera quello di γ. Ponendo $z=\infty$, si ottiene

$$\frac{A_n}{B_n}=\left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Di qui si vede (per essere il grado di α maggiore di quello di γ) che: *se una trasformazione del gruppo è decomponibile in* n *fattori, il parametro della trasformazione, sviluppato in frazione continua, deve avere comuni con* $\sqrt{D}$ *i primi* n *quozienti incompleti.* Perciò se $\sqrt{D}$ e il parametro d'una data trasformazione avranno comuni k quozienti incompleti solamente, la trasformazione non sarà decomponibile in più di k fattori. Ne segue che le trasformazioni del gruppo sono *tutte* decomponibili finitamente. Perchè, se taluna ve ne fosse decomponibile all'infinito, il suo parametro e $\sqrt{D}$ dovrebbero avere comuni tutti i quozienti incompleti. Ma ciò è impossibile, perchè la serie dei quozienti incompleti di μ è limitata, mentre quella dei quozienti incompleti di $\sqrt{D}$ è infinita.

---

vallo da ω ad $\omega+1$, esso dovrebbe tendere a un limite compreso nell'intervallo stesso, epperò positivo. Invece esso tende al limite negativo $(-\sqrt{D})$, come si vede osservando che

$$\lim_{k=\infty}\left(\frac{\sqrt{D}-\omega}{-\sqrt{D}-\omega}\right)^k=0.$$

Fa eccezione il caso $\mu=\sqrt{D}$, che però va escluso, come già fu detto.

Si noti che il parametro del gruppo algebrico qui considerato non è a, ma la sua funzione razionale. Di questa si conosce peraltro la forma algebrica, che è

$$\omega(a) + \frac{\sum_{u=0}^{u=h-1} C'_u \, a^{h-u-1}}{a^h + \sum_{u=1}^{u=h} C_u \, a^{h-u}},$$

dove $\omega(a)$ denota la parte intera di $\sqrt{D}$, h un numero intero e positivo qualsivoglia e C_u, C'_u indicano coefficienti numerici arbitrari. — Dove sono qui le *esclusioni?* Dove le *infinite disuguaglianze* del dottor Fubini? Questo esempio, che non è se non il riflesso algebrico del caso aritmetico considerato nella discussa mia Nota, sfugge dunque al dilemma dell'egregio dottore. Esso prova quel che dissi fin da principio; che cioè il dilemma: o esclusione di estremi, o disuguaglianze in numero infinito, come fallisce nel caso algebrico, può anche nel caso aritmetico dar nascita a giustificati dubbi.

Avvertenza. — Il dottor Fubini, cogliendo a volo una frase contenuta nella mia Nota (che cioè le trasformazioni di un gruppo di *Lie* propriamente detto sono decomponibili all'infinito), solleva dubbi anche su ciò. Per tagliar corto, osservo che si tratta di una frase *isolata*, che non ha *nulla da fare* con la tesi del mio lavoro.

SUL POSTULATO DELL'EQUIVALENZA

1. Dirò *estensive* quelle figure che, come le lunghezze, gli angoli, le aree e i volumi, si possono scomporre in parti omogenee al tutto; allora la definizione di Duhamel sull'equivalenza si può esprimere: *Due figure estensive sono equivalenti, se si possono scomporre in uno stesso numero (finito) di parti rispettivamente eguali.*

Questa definizione ci porge il mezzo di stabilire in molti casi l'equivalenza di due figure; ma non ci può dare, nel caso di aree o volumi, una norma sicura per verificare se due figure non sieno equivalenti e precisamente se l'una sia *prevalente* o *suvvalente* all'altra, senza almeno la considerazione di infinite suddivisioni. Ne derivò il bisogno di un postulato che dietro gli studii dei proff. Faifofer e De Zolt, fu proposto la prima volta dall'illustre e compianto De Paolis, e venne poi da altri posto sotto la forma: *Una figura estensiva non è equivalente a una sua parte.*

Un simile postulato, troppo evidente, ove si presupponga, come in Euclide, il concetto di estensioni eguali, non si lascia facilmente giustificare, quando il confronto delle figure estensive abbia per base la definizione del Duhamel. (*)

(*) Veggasi il mio articolo: "Sulla equivalenza dei poligoni", *Periodico di Matematica*, anno IX, 1894, pag. 19.

2. Ma ove si voglia ammettere la distinzione fra figure finite e infinite proposta dal prof. Bettazzi, (*) la proposizione assunta come postulato può essere formalmente dimostrata; e anche ove non si accetti, per una trattazione elementare, tale distinzione, si può riferire la proprietà contenuta nella proposizione accennata a figure particolari, cioè al *rettangolo piano* e al parallelepipedo rettangolare, che per semplicità chiamerò *rettangolo solido*, rendendo così possibile una giustificazione che difficilmente si potrebbe trovare per figure indeterminate.

3. Il prof. Bettazzi dice:

" Una figura tale che, preso un punto qualunque dello spazio, le distanze di esso da tutti i punti della figura sieno tutte minori di un conveniente segmento, si dirà *finita*.

E si diranno *infinite* le altre, cioè quelle per le quali esiste almeno un punto tale che, fra le distanze di esso a tutti i punti della figura, se ne trovino anche di quelle maggiori di un qualunque segmento, comunque prestabilito ".

L'autore ne deduce che un angolo (come superficie) è infinito, perchè contiene raggi infiniti. Collo stesso criterio possiamo ritenere infinite, nel piano le parti di una striscia determinate da una retta perpendicolare ai suoi lati, e nello spazio le parti di un parallelepipedo indefinito, a sezione normale rettangolare, determinate da un piano perpendicolare ai suoi spigoli.

4. Dopo aver detto adiacenti due figure estensive che, senza sovrapporsi, hanno una parte di contorno comune, si suole definire la somma di due figure solo nel caso in cui si possono rendere adiacenti. Con simili definizioni sarebbe per es. impossibile sommare un poligono a contorno stellato i cui angoli rientranti fossero molto acuti con un poligono convesso i cui angoli fossero troppo ottusi. Ed anche ove ci si volesse limitare ai poligoni e poliedri convessi, poichè la somma di due poligoni o poliedri convessi non è necessariamente convessa, potrebbe risultare impossibile la somma di un numero qualunque di tali figure.

Si può certamente concepire la somma di più figure estensive anche totalmente separate, come quel complesso di figure che contiene tutte le loro parti; ma sembra opportuno il poter rappresentare la somma come una figura unica. Ora il carattere di figura unica, che si vuol distinguere da un complesso di figure separate, potrebbe trovarsi nella possibilità di congiungere due punti, presi ad arbitrio nella figura, con una linea che non abbia alcun punto esterno alla figura medesima; allora si può concepire anche una figura unica composta di due parti che abbiano in comune un solo punto dei loro contorni; e perciò dette *adiacenti* due figure estensive che, senza sovrapporsi,

(*) *Bollettino di Matematica*, anno I, pag. 85.

hanno almeno un punto dei loro contorni in comune. la *somma di due figure estensive adiacenti* si può definire la figura che contiene tutte le loro parti.

In questo modo e non altrimenti si possono comprendere fra le figure estensive quelle a contorno intrecciato, colla introduzione delle figure negative.

Che poi si possa ottenere la somma di due figure estensive *finite* sembra evidente: poichè, se le figure sono sovrapposte, si possono allontanare (con un movimento finito) in modo che ciascuna divenga totalmente esterna all'altra, e date in tale posizione, si possono avvicinare in modo che, per la prima volta, i loro contorni abbiano almeno un punto comune, e ciò si può fare in modi innumerevoli. Per le figure infinite non si può in generale arrivare alla stessa conclusione.

5. Ogni somma di due figure estensive finite è anch'essa finita; infatti poichè le figure finite rimangono tali dopo un movimento (*) e perciò nelle posizioni che acquistano per divenire adiacenti, preso un punto qualunque dello spazio, le distanze di questo dai punti della figura somma non sono altro che le distanze dello stesso punto dai punti delle figure addende e per conseguenza tutte minori di un conveniente segmento.

E poichè la somma di due figure finite è finita, si potrà ad essa sommare una terza figura finita, alla nuova somma una quarta e così di seguito. Se riflettiamo che tali risultati si possono ottenere in modi innumerevoli, rimanendo sempre equivalenti per la definizione di Duhamel, possiamo concludere:

I. *Esistono innumerevoli figure estensive tutte finite, fra loro equivalenti, somme di più figure estensive finite, date, omogenee.*

Questa proposizione costituisce per le figure estensive di una medesima specie, ove le figure equivalenti si considerino come forme diverse di una stessa grandezza, la proprietà fondamentale che io chiamai *aggregativa uniforme;* (**) è poi evidente che per le stesse figure valgono anche la proprietà *commutativa* e l'*associativa;* per ridurre dunque le figure estensive di una medesima specie a una classe di grandezze *ordinarie,* basta poter provare che *se due figure estensive omogenee non sono equivalenti, una di esse equivale alla somma dell'altra e di una terza figura omogenea.*

6. Poichè ogni somma di figure estensive finite è anch'essa finita, possiamo stabilire la seguente proposizione:

II. *Una figura estensiva infinita non è equivalente a una figura estensiva finita.*

Poichè, scomposta la figura finita in un numero (finito) qualunque

---

(*) Bettazzi, *op. cit.*, pag. 86.

(**) G. Biasi, *Elementi di aritmetica e algebra esposti con metodo sintetico*, pag 30 e segg. Sassari, G. Gallizzi, 1892.

di parti, necessariamente finite, (*) ogni somma di queste è finita, e perciò non può essere eguale a una figura infinita.

7. Ricorderò le tre proposizioni note:

III. *Due figure estensive eguali sono equivalenti.*

IV. *Due figure estensive equivalenti a una terza sono equivalenti fra loro.*

V. *Se più figure estensive sono equivalenti ad altrettante figure, una somma qualunque delle prime è equivalente ad una somma qualunque delle seconde.*

8. VI. *Due rettangoli piani o solidi di egual base e di diversa altezza non sono equivalenti.*

Sieno M, A i due rettangoli di egual base e sia l'altezza di M maggiore di quella di A. Allora i due rettangoli si possono disporre in modo che M sia la somma di A e di un altro rettangolo, che denoteremo con B. Nella striscia (o parallelepipedo indefinito) che comprende i tre rettangoli si costruiscano al di là di B, e consecutivamente, i rettangoli C, D, ... eguali a B.

Se A è equivalente ad M, ossia ad $A+B$, poichè $B=C$, sarà (III, V) $A+B$ equivalente ad $A+B+C$ e perciò (IV) A equivalente ad $A+B+C$. Similmente, poichè A è equivalente ad $A+B+C$, ed è $B=D$, sarà $A+B$ equivalente ad $A+B+C+D$, e perciò anche A equivalente a questa somma. Così continuando si arriva a dimostrare A equivalente alla somma di A e di un multiplo qualunque di B, ossia a un rettangolo di egual base, la cui altezza è la somma dell'altezza di A e di un multiplo qualunque dell'altezza di B; un'altezza dunque che, secondo il postulato d'Archimede, può superare un segmento qualunque prestabilito. Il rettangolo A sarebbe per conseguenza equivalente a una figura estensiva infinita, in contraddizione colla proposizione II.

9. Fondandoci sulla proposizione nota: *Si può costruire un rettangolo piano (o solido), di data base arbitraria, equivalente a un poligono (o prisma, o somma di prismi) dato;* e considerando parti di poligono (o di prisma) solo poligoni (o prismi, o somme di prismi), possiamo ora dimostrare la proposizione:

VII. *Un poligono (o prisma) non è equivalente a una sua parte.*

Sia P un poligono (o prisma), P_1 una sua parte, P_2 la parte rimanente, e si costruiscano i rettangoli piani (o solidi) R_1, R_2 di egual base arbitraria equivalenti a P_1, P_2. Possiamo allora formare un rettangolo colla stessa base dei precedenti che abbia per altezza la somma delle loro altezze, il quale sarà perciò una loro somma, e potremo indicare con R_1+R_2. Questo rettangolo sarà equivalente (V) a una somma qualunque di P_1, P_2 e perciò a P. Se dunque P fosse equivalente a P_1 e perciò (IV) ad R_1, sarebbe anche R_1+R_2 equiva-

(*) BETTAZZI, *op. cit.*, pag. 86.

lente (IV) ad R_1, cioè sarebbero equivalenti due rettangoli di egual base e di diversa altezza, in contraddizione colla proposizione VI.

10. Colla proposizione nota che fu citata nell'articolo precedente si può stabilire, indipendentemente dalla proposizione VII, che due poligoni (o prismi), o sono equivalenti, oppure l'uno equivale alla somma dell'altro e di un terzo poligono (o prisma), poichè così avviene, in forza della proposizione VI, per i rettangoli di egual base, che si possono costruire, ad essi equivalenti. I poligoni e i prismi costituiscono così due *classi complete di grandezze ordinarie*. E poichè gli uni e gli altri sono indefinitamente scomponibili in parti omogenee al tutto, tali grandezze sono *potenzialmente continue*, (*) e si possono rendere *effettivamente continue* colla introduzione delle *grandezze limiti* determinate da due classi contigue. Così saranno grandezze limiti l'area del circolo determinata dai poligoni inscritti e circoscritti, il volume della piramide determinato dalle consuete somme di prismi inscritti e circoscritti, nonchè le superficie e i volumi dei corpi rotondi. Il poliedro dovrà considerarsi come somma di prismi e piramidi. Sarà inoltre giustificata l'esistenza di un summultiplo qualunque di tali grandezze. (**)

11. Ove in un insegnamento elementare non si creda opportuno di trattare diffusamente delle figure finite e infinite, si potranno sempre assumere con vantaggio, come postulati le proposizioni contenute nella VI per il rettangolo piano e per il rettangolo solido; la dimostrazione datane può, a mio parere, giustificarle, apparendo assurde le contradditorie; esse poi mettono in maggior luce l'importanza della definizione di figure equivalenti, dimostrando la differenza, talvolta inavvertita, fra il confronto di due rettangoli considerati come grandezze lineari eguali o disuguali e come poligoni (o poliedri) equivalenti o non equivalenti.

G. BIASI.

UNA PROPRIETÀ DEGLI ARCHI
le cui funzioni goniometriche sono razionali

1. Sopra una circonferenza di raggio arbitrario, si consideri un arco $AB = \alpha$. Se α è commensurabile con 2π, detta λ la loro massima comune misura, si ponga

$$2\pi = m \,.\, \lambda \qquad \alpha = n \,.\, \lambda,$$

dove m ed n sono due interi primi tra loro, anche qualora α sia un

(*) BIASI, *op. cit.*, pag. 49 e segg.
(**) Ibid., pag. 52.

summultiplo di 2π, nel qual caso $\alpha = \lambda$, $n = 1$. Ciò premesso, partendo da un punto qualunque A della circonferenza, si contino gli archi λ di n in n; è chiaro che il primo punto pel quale si ripasserà con questo procedimento, sarà il punto A, e ciò avverrà dopo d'aver contato un numero d'archi λ eguale al minimo comune multiplo di m ed n, che è dato in questo caso dal prodotto $m \,.\, n$, e dopo d'aver girata la intera circonferenza tante volte quante lo indica il quoziente della divisione $(m \,.\, n) : m = n$. Si avrà quindi: $m \,.\, n\lambda = n \,.\, 2\pi$, cioè $m\alpha = n \,.\, 2\pi$. Viene di conseguenza, che se partendo da A adattiamo successivamente sulla circonferenza una corda eguale a quella che sottende l'arco $\alpha = n \,.\, \lambda$, dopo d'aver girata la circonferenza n volte, ritorneremo ad A chiudendo così un poligono regolare in generale stellato (convesso se $n = 1$) di m lati e di altrettanti vertici che divideranno la circonferenza in m parti eguali. (*)

Se dunque α è commensurabile con 2π, seguendo il procedimento sovra indicato, si potrà dividere la circonferenza in m parti eguali col solo sussidio del compasso, e si conclude che il numero m deve essere necessariamente della forma

$$p_1^{i_1} \,.\, p_2^{i_2} \ldots p_k^{i_k} \,.\, 2^\mu ,$$

dove gli esponenti i possono avere il valore 0, oppure 1, e μ è un intero qualunque, ed i fattori $p_1, p_2 \ldots p_k$ rappresentano numeri primi di Gauss cioè della forma $(2^r + 1)$.

Se all'incontro α non è commensurabile con 2π, partendo da un punto qualsiasi e adattando successsivamente sulla circonferenza una corda che sottenda un arco α, nè si ritornera più al punto di partenza, nè sarà possibile che si ripassi per uno dei punti incontrati precedentemente.

Per la prima osservazione notiamo subito che ove si ritornasse al punto di partenza, fra 2π ed α dovrebbe sussistere una relazione del tipo $m\alpha = n \,.\, 2\pi$, essendo m, n interi, dalla quale risulterebbe

$$\alpha = \frac{n}{m} \,.\, 2\pi.$$

contro l'ipotesi della incommensurabilità.

Per giustificare la seconda, basta por mente che qualora, seguendo il predetto procedimento, si venisse, dopo uno o più giri ad incontrare una seconda volta per primo un punto B diverso da quello dal quale si è partiti, ciò vorrebbe dire che, prendendo invece le mosse da B, si ritornerebbe per primo in B, cosa non ammissibile data l'ipotesi dell'incommensurabilità ed, indipendentemente anche da essa, poichè così si verrebbe ad ammettere in B, e senza ragione alcuna,

(*) Per più complete considerazioni intorno a questo argomento si veda P. BACHMANN, *Die Elemente der Zahlentheorie*, § 1°, pag. 19. Teubner, Lipsia, 1892; U. SCARPIS, *Primi elementi della teoria dei numeri*, § 1°. Hoepli, Milano, 1896.

una proprietà che si è negata ad A. Se dunque 2π ed α sono incommensurabili, gl'infiniti archi della successione

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha \ldots k\,.\,\alpha,$$

aventi l'origine in A, avranno tutti distinti i loro estremi.

2. Sia ora α un arco non multiplo di $\frac{\pi}{2}$ che abbia razionali il seno ed il coseno che indicheremo con $\frac{r}{q}$ ed $\frac{s}{q}$. Gl'interi r, s, q verificano la relazione:

$$r^2 + s^2 = q^2,$$

e poichè in virtù di essa, se due dei tre numeri r, s, q hanno un fattore comune, esso deve pure appartenere al terzo, possiamo anche supporre di averneli liberati precedentemente rendendoli primi tra loro due a due, di modo che r ed s non sieno entrambi pari.

Dopo ciò, supponiamo α commensurabile con 2π cosicchè, detta λ la loro massima comune misura, si abbia

$$m\,.\,n\,.\,\lambda = n\,.\,2\pi,$$

ovvero, per essere $n\,.\,\lambda = \alpha$,

$$m\,.\,\alpha = n\,.\,2\pi$$

dove m, n sono primi tra loro.

Sarà quindi:

$$\operatorname{sen} m\,.\,\alpha = \operatorname{sen}\,.\,n\,.\,2\pi = 0,$$
$$\cos m\,.\,\alpha = \cos\,.\,n\,.\,2\pi = 1;$$

e poichè

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^m = \cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha$$

si deduce che $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ è radice di $z^m = 1$.

Ma $\cos\alpha = \frac{s}{q}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{q}$, per cui, se α è commensurabile con 2π, si dovrebbe avere

$$\left(\frac{s}{q} + i\frac{r}{q}\right)^m = 1$$

cioè

$$(s + ir)^m = q^m,$$

dove m è della forma

$$p_1^{l_1}\,.\,p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k}\,.\,2^\mu.$$

Proviamo ora che quest'ultima eguaglianza non può essere in alcun caso soddisfatta.

Pongasi dapprima m dispari, cioè $\mu = 0$, $(m \geq 3)$. Sviluppando si ricava

$$s^m + \binom{m}{1} s^{m-1}\,.\,ir + \ldots + (ir)^m = q^m$$

ed eguagliando a zero la parte immaginaria

$$\binom{m}{1} s^{m-1}. ir + \binom{m}{3} s^{m-3} (ir)^3 + \dots + (ir)^m = 0.$$

e quindi

$$\binom{m}{1} . s^{m-1} \equiv 0 \mod r^2.$$

Ma r è primo con s, e quindi r^2 dovrebbe dividere $\binom{m}{1}$, la qual cosa non può accadere poichè $\binom{m}{1} = m$ non contiene fattori quadratici.

Se m è pari ($m \geqq 4$), ed r dispari, ripetendo lo stesso ragionamento si arriva alla stessa conclusione.

Rimane ancora a considerarsi il caso di m ed r entrambi pari.

Osservando che in questo caso s è dispari, dalla condizione

$$\binom{m}{1} s^{m-1} ir + \binom{m}{3} s^{m-3} (ir)^3 + \dots + \binom{m}{m-1} s (ir)^{m-1} = 0.$$

si ricava che dovrebbe aversi

$$\binom{m}{m-1} r^{m-1} \equiv 0 \mod s^2;$$

e poichè $\binom{m}{m-1} = \binom{m}{1} = m$ non contiene fattori dispari alla 2ª potenza, come prima, resta provata l'impossibilità della predetta eguaglianza.

Si conclude quindi, da quanto precede che: " se le funzioni goniometriche d'un arco sono razionali, esso non può essere commensurabile con la circonferenza.

UMBERTO SCARPIS.

OSSERVAZIONI SULLA NOTA

del dott. LAZZARINI

SUI NUMERI PERFETTI E SUI NUMERI DI MERSENNE (*)

I.

Carissimo Lazzeri,

Ti prego di voler dar posto nel *Periodico* ad alcune osservazioni suggeritemi dalla lettura della nota: " Sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne ", comparsa nell'ultimo fascicolo.

L'A., dopo aver dimostrato che *ogni numero perfetto, eguale al prodotto di potenze di due soli fattori primi, è pari*, e stabilita la nota formula *d'Euclide* che dà i numeri perfetti pari, enuncia nel n. 6 che: *Un numero eguale al prodotto di potenze di più di due fattori primi non può essere perfetto.*

(*) V. *Periodico di Matematica*, a. XVIII, fasc. IV, pag. 201-212.

Sulla dimostrazione che l'A. dà per questa ultima proposizione possono farsi varie obbiezioni.

Riassumo perciò brevemente quanto è contenuto nel n. 6. Vi si considera dapprima il caso di un numero eguale al prodotto di potenze di tre soli fattori primi a, b, c, e per provare che la condizione affinchè esso sia perfetto

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \tag{1}$$

non può essere soddisfatta, si premette che ambo i membri di questa eguaglianza dovrebbero essere eguali al minimo multiplo M di $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ e $2a^{\alpha}b^{\beta}$, o ad un suo multiplo $\mathring{M}$. Quindi si dice che se α e β sono pari, il prodotto

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

è dispari: di più questo prodotto non è divisibile nè per a^{α}, nè per b^{β}, quindi sarebbe $M=2a^{\alpha}b^{\beta}m^{\mu}n^{\nu}\ldots$, e perciò

$$c^{\gamma}=\frac{\mathring{M}}{2a^{\alpha}b^{\beta}}=m^{\mu}n^{\nu}\ldots,$$

il che è assurdo, essendo c primo. Dimostrazioni analoghe l'A. fa pel caso di α e β dispari, o di α pari e β dispari, e pel caso in cui il numero dato sia il prodotto di potenze di più di tre fattori primi.

Ora, il difetto di questa dimostrazione sta nell'affermare l'assurdità dell'eguaglianza

$$c^{\gamma}=m^{\mu}n^{\nu}\ldots,$$

che (finchè non si prova il contrario) può essere soddisfatta da $m=c$, $\mu=\gamma$, $n=\ldots=1$. L'A. cerca di escludere questo *caso* nella seconda nota del n. 6, ma le osservazioni ch'Egli fa per ciò non sono giuste.

Osservo intanto che il *caso* suddetto è l'unico che naturalmente si presenta. I numeri primi a, b, c essendo primi rispettivamente con

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1},\ \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1},\ \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1},$$

dall'eguaglianza (1), per noti teoremi d'aritmetica, si ricava:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=2b^{\beta'}c^{\gamma'}\ ;\ \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^{\alpha'}c^{\gamma''}\ ;\ \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=a^{\alpha''}b^{\beta''},$$

dove il fattore 2 può, invece che nella prima eguaglianza, comparire in una qualunque delle altre due, e $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ son numeri interi (non escluso lo 0) tali che

$$\alpha'+\alpha''=\alpha;\ \beta'+\beta''=\beta;\ \gamma'+\gamma''=\gamma.$$

Quindi, supposto per es. $\gamma'\geqq\gamma''$, si ha

$$M=2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma'}.$$

Nella prima nota che serve di preparazione alla seconda, l'A. cerca di dimostrare che il prodotto $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non è divisibile nè per a^α, nè per b^β. Se ciò accadesse, egli dice, si avrebbe $M = 2^\delta a^\alpha b^\beta \ldots$, e quindi

$$c^\gamma = \frac{2^\delta a^\alpha b^\beta \ldots}{2 \cdot a^\alpha b^\beta}$$

il che è assurdo. Ma anche qui, affinchè l'assurdità fosse provata, bisognerebbe escludere il solito *caso*.

Nella seconda nota l'A. cerca di provare che non può essere $M = 2a^\alpha b^\beta c^\gamma$ (per quanto ho detto sopra bisognerebbe invece provare che non può essere $M = 2a^\alpha b^\beta c^\gamma$), e dice che questo *caso* resta immediatamente esaurito osservando che, poichè $2a^\alpha b^\beta$ e $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non hanno fattori primi comuni (e ciò, come ho detto, non è affatto dimostrato nella prima nota), sarebbe:

$$c^\gamma = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \tag{2}$$

quindi

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} = 1, \tag{3}$$

da cui $c = 1$, ovvero $c = 2$, $\gamma = 0$, contrariamente all'ipotesi. Io non comprendo in qual modo l'A. deduca dalle precedenti l'eguaglianza (3). Dalla (2) e dalla (1) mi pare si ricavi soltanto (nell'ipotesi che Egli fa):

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} = 2a^\alpha b^\beta,$$

ma questa eguaglianza non si presenta assurda.

Credo che queste osservazioni siano sufficienti per infirmare la validità della dimostrazione contenuta nel n. 6, e che perciò non sia ancor lecito di affermare in modo assoluto che non esistono numeri perfetti dispari. (*) Il prof. *Lazzarini* non ha però nessuna ragione di dolersi di non essere riuscito, giacchè, a quanto pare, la risoluzione del problema di cui Egli si è occupato sfuggì a molti illustri matematici, tra i quali, oltre *Fermat, Eulero, Legendre,* vanno ricordati *Descartes, Frenicle, Sylvester* (v. per es. *Formulaire Mathématique*, a. 1902, pag. 144).

Saluti cordialissimi

aff.mo C. Ciamberlini.

II.

Il sig. Mario Lazzarini, nella nota " Sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne ", ha creduto di dimostrare che non esistono numeri perfetti dispari. Dopo i tentativi infruttuosi di Matematici illustri, avrei avuto piacere che la questione fosse dall'autore completamente risoluta, però sono dolente di constatare che alcune pecche di ragionamento fanno cadere del tutto la sua dimostrazione.

(*) In quasi tutte le proposizioni enunciate dall'A. alla fine del n. 6 e nei numeri successivi, dove si seguita a parlare di numeri perfetti, bisognerà dunque aggiungere l'ipotesi che i numeri di cui si tratta sono pari. Colgo poi l'occasione per far osservare che negli enunciati di alcune proposizioni mancano altre limitazioni. Per es. il teorema del n. 14 va enunciato così: *ogni numero perfetto pari, non eguale a 6, è congruo ad 1 rispetto al modulo 3*; nell'enunciato del teorema del n. 15 bisogna eccettuare il caso di $a = 2$; nel teorema del n. 2 sarebbe bene si dicesse *esplicitamente* che si tratta di numeri primi a e b *disuguali*, ecc.

Infatti, dopo aver dimostrato che non esistono numeri perfetti dispari costituiti da due fattori primi diseguali, egli tenta di dimostrare che non esistono numeri perfetti dispari con tre fattori primi, e così ragiona:

" Se $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ è un numero perfetto dispari, dev'essere verificata l'eguaglianza

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^\alpha b^\beta c^\gamma \tag{A}$$

" ed ambedue i membri di questa eguaglianza dovrebbero essere eguali al minimo " comune multiplo M di $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ e $2a^\alpha b^\beta$, o a un suo multiplo $\dot{\mathrm{M}}$, " e per conseguenza dovrebbe essere

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=\frac{\dot{\mathrm{M}}}{\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}} \quad \text{e} \quad c^\gamma=\frac{\dot{\mathrm{M}}}{2a^\alpha b^\beta}. \tag{1}$$

" Se α e β sono ambedue pari,

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=a^\alpha+a^{\alpha-1}+\ldots+a+1, \quad \text{e} \quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=b^\beta+b^{\beta-1}+\ldots+b-1$$

" sono ambedue dispari e quindi

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

" è dispari: *di più questo prodotto non è divisibile nè per* a^α *nè per* b^β, *quindi* " *il minimo comune multiplo sarà della forma*

$$2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu\ldots,$$

" *si dovrebbe allora avere*

$$c^\gamma=\frac{2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu\ldots}{2a^\alpha b^\beta}=m^\eta n^\nu\ldots$$

" *il che, essendo per ipotesi*, C *primo, è assurdo* ".

L'introduzione dei numeri $m, n, \ldots$ come fattori del minimo comune multiplo è meramente capricciosa, perchè deve essere, come è facile dimostrare:

$$\mathrm{M}=2a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Infatti a, poichè non può dividere $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$, deve almeno dividere uno degli altri fattori del 1° membro della (A), e così ragionando per b e c si perviene alle eguaglianze

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=b^{n_1}c^{p_1}, \quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^{m_1}c^{p_2}, \quad \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^{m_2}b^{n_2},$$

dove

$$m_1+m_2=\alpha, \quad n_1+n_2=\beta, \quad p_1+p_2=\gamma.$$

Ne segue

$$\frac{a^{\alpha+1}-2}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^{m_1}b^{m}c^{\gamma},$$

e però

$$M=2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma},$$

e non ha più luogo l'assurdo cui ha creduto di pervenire l'Autore. Ma egli chiosa che non può aversi $M=2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ " dal momento *che* $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ *e* $2a^{\alpha}b^{\beta}$, *non hanno fattori primi comuni* „.

Ora in base a qual fatto l'Autore perviene a questa conclusione? Se, come lascia intravedere, in base al fatto che $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non è divisibile per $a^{\alpha}b^{\beta}$, (ciò che ha voluto dimostrare in nota col solito procedimento erroneo) è visibile chiaramente l'equivoco in cui è caduto.

E poichè l'Autore asserisce, non so poi con qual fondamento, che dal caso di 3 fattori primi si può passare facilmente al caso generale di un numero qualunque di fattori primi, debbo concludere che la dimostrazione cade senza alcuna speranza.

Io devo aggiungere che non è questo il primo caso di insuccesso in una questione così difficile.

Il Carvallo annunciò all'Accademia di Parigi (" Comptes Rendus „, LXXXI, pag. 73-75) di aver dimostrato l'inesistenza di numeri perfetti dispari, e pubblicò la sua dimostrazione in un opuscolo intitolato *Théorie de nombres parfaits* (Barcelone, A. Piagen), ma la sua dimostrazione non è esente da errori.

I numeri perfetti hanno già una letteratura; io rimando i lettori a quella che dà il Brocard nell'" Intermédiaire des Mathématiciens, t. II, 1895, pag. 52-54, limitandomi qui a riportare i risultati principali, ottenuti finora rigorosamente sui numeri perfetti dispari, lieto di far cosa grata ai lettori del Periodico.

Un numero perfetto dispari, se esiste, deve essere della forma

$$M^2(4q+1)^{4k+1}$$

essendo $4q+1$ *un numero primo che non divide* M. Ne segue che: *Non esistono numeri perfetti della forma* $4n+3$.

Questo teorema, dovuto ad *Eulero*, è stato poi ritrovato da *Stern* (" Mathesis „, t. VI, pag. 248-250), da *Sylvester* e da altri.

Il Sylvester nei " Comptes Rendus „ de l'A. d. S. de Paris, t. CVI, pag. 403-405, perviene ai seguenti risultati interessanti.

Non esistono numeri perfetti dispari contenenti 2, 3, 4 fattori primi diseguali.

Non esistono numeri perfetti dispari divisibili per $105=3.5.7$.

Non esistono numeri perfetti dispari, primi con 3, aventi meno di 9 fattori primi diseguali.

Egli annuncia anche l'inesistenza di numeri perfetti dispari con 5 fattori primi diversi.

Il Catalan poi (" Mathesis „ VIII, 1888, p. 112-3), fa osservare come si possa semplificare, il procedimento di Sylvester, e perviene anche al seguente curioso risultato.

Se un numero N *è perfetto e dispari, esso è almeno composto di 26 fattori primi, diseguali, e quindi è almeno di 45 cifre.*

Ritornando ora alla nota del sig. Lazzarini, devo rilevare ancora un errore in cui egli è caduto nella ricerca della condizione necessaria e sufficiente perchè il numero 2^p-1 sia primo. L'Autore ammette implicitamente che sussista l'inversa del teorema di Fermat, almeno pei numeri della forma da lui considerata. Ora non ci son dati per asserir questo, e però non può stabilirsi quel teorema, cui crede arrivare l'Autore. Può dirsi soltanto questo:

Se il numero

$$2^p-1$$

divide il numero

$$3^{2^{p-1}-1}+1,$$

senza che divida i numeri della forma

$$3^\delta+1,$$

essendo δ *un divisore qualunque di* $2^{p-1}-1$, *il numero* 2^p-1 *è primo, e* 3 *una sua radice primitiva.*

Questo teorema deducesi immediatamente da un teorema notevole, segnalato da E. Lucas al congresso di Le Havre, nel 1876. L'Autore l'applicò per dimostrare che il numero $2^{31}-1$ è primo.

Anche il teorema empirico, che il Lazzarini cita in nota, è stato in parte enunciato già dal Catalan (v. Laisant, "Recueil de Problèmes de Mathématique", p. 196, nota 2).

Ma l'Autore non s'illuda nella verità di questo teorema. Si sa ormai qual fede meritano i teoremi dedotti da semplice induzione; dice il Lucas ("Théorie des Nombres", p. 423): *Il ne faut pas toujours se hâter de conclure par induction dans l'étude des propriétés des nombres.*

MICHELE CIPOLLA.

PICCOLE NOTE

Osservazione sulla potenza di un polinomio. — È noto che lo sviluppo della potenza m^a del polinomio $a_1+a_2+\ldots+a_n$, si ottiene eseguendo la moltiplicazione di m polinomi eguali ad $a_1+a_2+\ldots+a_n$, mediante la successiva applicazione della legge distributiva. Si può osservare che tale sviluppo, prima della riduzione dei termini simili, si ottiene anche formando le disposizioni con ripetizione di n elementi della classe m^a, purchè si considerino tali aggruppamenti come termini di una somma e gli elementi che entrano nei medesimi come fattori: per tal modo il numero dei termini dello sviluppo è n^m ed uno qualunque di essi avrà la forma $a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\,a_n^{\alpha_n}$, con $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m$. Questo termine sarà ripetuto $\frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$ volte. Quindi, dopo la riduzione dei termini simili, si ottiene la nota formula

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^m=\Sigma\,\frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n},$$

dove la somma si estende a tutte le soluzioni intere, positive o nulle, dell'equazione $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m$, ed il numero dei suoi termini è eguale al numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi della classe m^a cioè

$$\frac{n\,(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}.$$

NEPPI MODONA.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 619, 628, 630, 631, 632 E 633

619. *Il luogo dei punti d'incontro di due parabole che, essendo tangenti ad una retta fissa ed avendo un fuoco comune in un punto dato, hanno inoltre costante l'angolo dei loro assi, si compone di due circoli.* E. N. BARISIEN.

Risoluzione del dott. Niccolai.

Essendo P il punto simmetrico di F rapporto alla data tangente t, per P passano le direttrici di tutte le parabole in quistione. Se M è un punto del luogo, le due parabole passanti per questo punto si determinano descrivendo il circolo di centro M e di raggio MF, e conducendo per P le tangenti a questo circolo; queste due tangenti (direttrici delle due parabole) dovranno formare fra loro un angolo uguale al dato oppure supplementare. Detto 2φ questo angolo riferendosi ad un sistema di assi ortogonali coll'origine in F, essendo $x=\frac{a}{2}$ l'equazione della t, l'equazione del luogo richiesto è:

$$x^2+y^2+a\,(2x-a)\,\text{tang}^2\,\varphi=0.$$

Il luogo richiesto è dunque il circolo di raggio $\frac{a\tan\varphi}{\cos\varphi}$, il cui centro ha per coordinate $-a\tan^2\varphi,\, 0$.

628. *Trovare l'inviluppo delle rette che tagliano due circoli dati secondo corde eguali.* E. N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. Castellano.

L'inviluppo cercato è una parabola che ha per fuoco il punto medio della retta dei centri, e per podaria focale l'asse radicale dei due circoli.

DIMOSTRAZIONE. — La retta mobile a incontri in una delle sue posizioni i circoli di centri O, O' nei punti A, B, A', B', (in questo ordine) ed incontri il loro asse radicale r in M. Siano C, C' i punti medi di AB, A'B' e sia F il punto medio di OO'. Dall'ipotesi: AB = A'B', si deduce che M è punto medio comune ai segmenti AB', BA', CC', e che la MF, mediana nel trapezio birettangolo OCC'O', è normale ad a. Ne consegue che la retta a, normale nei punti di una retta fissa r alle rette che proiettano questi punti da un punto fisso F, inviluppa una parabola di fuoco F e di podaria focale r.

Se i due circoli sono l'uno interno all'altro (non eccentrici) la parabola esiste ancora ma le corde uguali determinate dalle tangenti alla parabola colla circonferenza sono immaginarie.

Se i circoli sono uguali, le rette a sono tutte parallele alla centrale OO'.

Risoluzioni del prof. Retali.

1. *Risoluzione geometrica.* — Se i cerchi sono eguali lo inviluppo si spezza evidentemente in due fasci di raggi uno dei quali ha per centro il punto all'infinito della retta dei centri e l'altro il punto equidistante dai centri. Supponiamo dunque che i raggi dei due cerchi sieno disuguali: per ognuno dei centri di similitudine passano due soli raggi dell'inviluppo, dunque questo è di seconda classe; la retta all'infinito stacca dai due cerchi corde eguali, dunque lo inviluppo cercato è la parabola che tocca le 4 tangenti comuni e l'asse radicale dei due cerchi dati. Questa parabola ha per fuoco il punto equidistante dai centri.

2. *Risoluzione analitica.* — Siano r, r' i raggi, C, C' i centri dei due cerchi, poniamo $\overline{CC'} = 2a$, e assumiamo per assi coordinati la retta dei centri e l'asse di $\overline{CC'}$. Se la retta $ux + vx + 1 = 0$ stacca nei due cerchi corde eguali, le sue distanze d, d' da C, C' verificano la relazione

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2 = \frac{(ua+1)^2}{u^2+v^2} - \frac{(ua-1)^2}{u^2+v^2},$$

e l'equazione tangenziale dell'inviluppo =

$$(r^2 - r'^2)(u^2 + v^2) = 4au,$$

che rappresenta una parabola di parametro $\frac{r^2 - r'^2}{a}$ col fuoco nell'origine.

Altra risoluzione analitica del maggiore D'Emilio.

630. *Se una conica* $C^{(2)}$ *tocca una quartica* $C^{(4)}$ *nei punti* A, A' *e la seca nei* punti B, B', C, C', *esiste un'altra conica che è tangente alla* $C^{(4)}$ *nei punti d'incontro colla retta* AA' *e che passa per i punti d'incontro di essa colle rette* BB', CC'.

631. *Se una conica* $C^{(2)}$ *tocca una quartica* $C^{(4)}$ *in quattro punti, le tangenti a* $C^{(4)}$ *nei punti di contatto incontrano di nuovo la curva stessa in 8 punti di una conica.*

632. *Se* r, r' *sono due tangenti di flesso di una quartica* $C^{(4)}$ *nei punti* A, A' *e incontrano la curva ancora in* B, B' *esiste una conica che ha con la* $C^{(4)}$ *due contatti di second'ordine nei punti ove essa è tagliata dalla* AA' *e passa per i punti d'incontro di* $C^{(4)}$ *con la* BB'.

Lazzeri.

Risoluzione del prof. Retali e del maggiore D'Emilio.

È noto che se delle n^2 intersezioni di due curve d'ordine n, $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ giacciono in una curva d'ordine $p < n$, questa ne contiene altre $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ e le rimanenti $n(n-p)$ sono in una curva d'ordine $n-p$. (V. p. es. Cremona, *Curve piane*, § 43). Per $n = 4$ e $p = 2$ si ha che: se 8 delle 16 intersezioni di due quartiche $C^{(4)}$, $\Gamma^{(4)}$ giacciono in una conica $C^{(2)}$, le rimanenti 8 sono in un'altra conica. Ciò posto:

a) Se prendiamo per $\Gamma^{(4)}$ la quartica formata dalle quattro tangenti a $C^{(2)}$ nei suoi punti di contatto con $C^{(4)}$ abbiamo il teorema enunciato nel quistione 631.

b) Se per $\Gamma^{(4)}$ prendiamo la quartica che si spezza nella retta |AA'| contata due volte e nelle rette |BB'|, |CC'|, si ha il teorema della questione 630.

c) Se prendiamo per conica $C^{(2)}$ quella formata dalle rette r, r' e per $\Gamma^{(4)}$ la quartica che si spezza nella retta |AA'| contata tre volte e nella retta |BB'| abbiamo il teorema della quistione 632.

633. *Dimostrare che gli archi di circolo massimo condotti da un punto* P *di una sfera ad un circolo minore della sfera stessa soddisfano alle relazioni*

$$\frac{\cos\frac{PM}{2}\cos\frac{PM_1}{2}}{\cos\frac{MM_1}{2}} = \textit{costante},$$

$$\frac{\operatorname{sen} PM \operatorname{sen} PM_1}{\cos^2\frac{MM_1}{2}} = \textit{costante};$$

e trovare le relazioni corrispondenti nel piano. P.

Risoluzione del prof. Padoa.

1. Indicando con 2α e 2β gli archi PM e PM_1, le espressioni

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} \quad e \quad \frac{\operatorname{sen}2\alpha \cdot \operatorname{sen}2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)},$$

cioè

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad e \quad \frac{4\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)^2}{(1-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)^2}$$

sono costanti, perchè $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ è costante (*).

Sapendo che

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{OP \mp OR}{OP \pm OR}$$

(dove O è il centro della sfera, R è l'intersezione della retta OP col piano della circonferenza minore e dove si devon considerare i segni superiori ed inferiori secondochè R è interno od esterno al segmento OP) (**) risulta che i valori delle espressioni considerate sono

$$\frac{OR \pm OP}{2OR} \quad e \quad \frac{OP^2 - OR^2}{OR^2}.$$

2. In planimetria: sia R un punto interno ad una circonferenza c di centro C e raggio a; con raggio dato r $(r > a)$ e centro variabile O si segni una circonferenza γ che tagli la c in due punti M ed M_1, la cui congiungente passi per R (poichè in tal caso $OM^2 - CM^2 = OR^2 - CR^2$, posto $m = CR$, risulta che il luogo di O è la circonferenza di centro R e raggio (sempre reale) $\sqrt{r^2 - a^2 + m^2}$): allora, indicando con P l'intersezione del prolungamento di OR con γ, gli archi PM e PM_1 di γ hanno le proprietà enunciate.

Invero: se H è il punto medio di MM_1, poichè per ipotesi $OM > CM$, è pure $OH > CH$; si può dunque far ruotare la γ intorno ad MM_1 in modo che O venga a trovarsi su una delle semirette perpendicolari in C al piano dato; la posizione O' assunta da O è costante qualunque sia γ, perchè $O'C^2 = O'M^2 - CM^2 = r^2 - a^2$; anche la posizione P' assunta da P è costante qualunque sia γ, perchè P' sta sulla semiretta fissa O'R a distanza data r da O'; sicchè, nella sfera di centro O' e raggio r, P' è un punto dato della sup., c è una circonferenza minore data e γ è una circonferenza massima arbitraria passante per P'; quindi, ecc.

Una dimostrazione diretta della prima parte e indipendente anche questa dalla Trig. sfer. *fu mandata dal sig.* A. Gandini, *studente del R. I. T. di Como ed una dal magg.* d'Emilio.

Osservazione I. — La formola, sulla quale è basata la precedente dimostrazione della prima parte,

$$\tan\frac{PM}{2} \quad \tan\frac{PM_1}{2} = \text{costante} \tag{1}$$

si può dimostrare molto semplicemente, ricorrendo alla considerazione di due triangoli sferici rettangoli. (***)

Osservazione II. — Indicando con r la misura del raggio sferico del circolo minore e con d la distanza sferica fra il centro del circolo stesso e il punto P, e applicando alle due formole proposte il procedimento che serve per ricavare dalle

---

(*) *Periodico di Matematica*, anno XVIII, fasc. III, pag. 191.
(**) *Loc. cit.*
(***) V. Baltzer, *Trigonometria*, 16.

formole di *Trig. sferica* le corrispondenti formole di *Trig. piana* (facendo cioè tendere il raggio della sfera all'infinito e tenendo d ed r costanti), si ha

$$\overline{PM}^2 + \overline{PM_1}^2 - \overline{MM_1}^2 = +2(d^2 - r^2),$$
$$\overline{PM} \times \overline{PM_1} = \pm (d^2 - r^2),$$

delle quali la prima non è che un corollario della seconda e questa (che è anche la corrispondente della (1)) non è che l'espressione di un noto teorema di *Geom. Elem.*

QUISTIONI PROPOSTE

634. Pel punto comune a due rette le quali s'incontrano fuori del foglio su cui si disegna, condurre la parallela ad una retta data.

LORIA.

635. Il luogo geometrico dei punti d'incontro delle coppie di trasversali di un triangolo isoscele, che partendo dagli estremi della base, staccano due segmenti eguali, l'uno a partire dalla base, l'altro a partire dal vertice, è il sistema di una ellisse ed una iperbole; calcolarne gli assi e dire in qual caso l'ellisse si riduce a cerchio e l'iperbole diventa equilatera.

GALLUCCI.

636. L'inviluppo dei cerchi descritti sulle corde di una conica $C^{(2)}$ che passano (prolungate, se il punto è esterno) per uno stesso punto P come diametri, è una quartica bicircolare se $C^{(2)}$ ha centro; è una cubica circolare se $C^{(2)}$ è parabola. Se P è sopra $C^{(2)}$ lo inviluppo è razionale (teorema noto). Se $C^{(2)}$ è cerchio, l'inviluppo è in generale un ovale di Cartesio. Esaminare i casi particolari nei quali O è all'infinito oppure è P centro di $C^{(2)}$.

F. RETALI.

637. Da un punto qualunque M di un circolo minore di una sfera si conduce l'arco di circolo massimo MP perpendicolare a un diametro sferico qualunque AB di quel circolo: dimostrare che si ha

$$\tan^2 \frac{PM}{2} = \tan \frac{AP}{2} \tan \frac{PB}{2}, \tag{I}$$

$$\tan \frac{AM}{2} \tan AM = \tan \frac{AB}{2} \tan AP; \tag{II}$$

e trovare le relazioni corrispondenti nel piano.

G. PESCI.

BIBLIOGRAFIA

G. Peano. — *Aritmetica generale ed Algebra elementare.* Torino, G. B. Paravia ed.; pagg. VIII-144 in 8°, coi tipi della Riv. di Mat. (L. 2,40).

Non è senza compiacenza e conforto di noi tutti, insegnanti e studiosi, il vedere alcuni fra i più segnalati cultori delle discipline matematiche volgere in prò della scuola media i tesori della propria dottrina ed esperienza, procacciando e studiando con somma cura ed industria ogni mezzo, che sembri atto a semplificar la materia e perfezionar la struttura ed i metodi dell'insegnamento elementare in armonia coi progressi del pensiero scientifico. Semplificare e chiarire al possibile tutti i concetti matematici, spogliandoli d'ogni superfluo; organizzare i principî della scienza; colmar lacune di metodo e sanar magagne deduttive inveterate nelle scuole e nei libri; educare negli studiosi l'abito di bene argomentare, promovendo l'uso sistematico di una scrittura ideografica regolata da norme precise e invariabili: questo è, si può dire, lo scopo a cui mira quasi tutta l'opera scientifica di Giuseppe Peano.

Il libro di cui parliamo è un saggio eloquente e una sanzione autorevole dei non lievi nè scarsi risultati acquisiti alla scienza nel dominio della Logica, Aritmetica ed Algebra elementare mercè la pasigrafia logico-matematica, che il chiarissimo prof. di Torino va patrocinando da varî anni nella sua Rivista di Matematica e nel Formulaire de Mathematique. Esso ha intenti apertamente didattici: la Logica deduttiva, l'Aritmetica generale e l'Algebra elementare vi son fuse in un sol corpo di scienzà, mirabilmente organizzato nei rispetti deduttivi, e da potersi con sicurezza additare agli insegnanti ed ai giovani come modello di edifizio speculativo.

Il maggior contrassegno di originalità vuol essere al certo l'uso costante dell'algoritmo logico-matematico invece del discorso ordinario. Non c'è troppo da illudersi sull'accoglienza, che una riforma di questo genere è per trovare in buona parte del pubblico: chè son troppo noti i motivi, tutti umanissimi e spiegabilissimi, i quali hanno fatto in ogni tempo e faranno sempre ostacolo a certe novità, che toccano la più gelosa delle nostre proprietà intellettuali. Ma nondimeno è lecito sperare che la bontà del presente trattato vincerà molte ritrosie, spegnerà molti pregiudizi, e farà nascere in qualche volenteroso docente il proposito di sperimentarlo per sè e per la Scuola. "A chi impara per la prima volta l'Aritmetica (così " l'A. in prefazione) la via che qui si segue è senza dubbio vantaggiosa. Una cin- " quantina di simboli, aventi significato chiaro e preciso, sostituisce alcune migliaia " di parole, che si presentano, definite o no, nei trattati precedenti la scrittura " ideografica. Coloro che hanno studiato per altra via l'Aritmetica e l'Algebra do- " vranno fare uno sforzo per imparare il nuovo metodo, e per vedere che i nuovi " aggruppamenti d'idee sono più semplici di quelli, a cui sono da tempo abituati: " ma, se saranno capaci di questa fatica, ne verranno poi compensati dalla bellezza " dei risultati, ch'essi soli saranno in grado d'apprezzare ".

Non dirò che sia questa un'opera da porre alle mani dei giovanetti, così come sta, senza un commento adeguato (a motivo di certa durezza nascente più che altro dalla straordinaria condensazione del testo, che per sè solo non occupa forse cento pagine in tutto): nè senza una guida intelligente ed esperta, che ne appiani le difficoltà, facendone emergere i pregi. Ma ciò non dovrebb'essere grave difetto in libri scolastici; almeno finchè il Libro e la Scuola non saranno precisamente la stessa cosa. Anche Euclide, anche Dante, vogliono essere esposti e dichiarati con diligenza; nè le soddisfazioni del vero e del bello ci sono concesse gratis; chè anzi, a voler che dian frutto di vital nutrimento allo spirito, è piuttosto necessario che siano il premio di qualche fatica proporzionata a quelle. Del resto l'A. ha provveduto alle maggiori difficoltà nascenti dall'uso della scrittura ideografica riproducendo nel comune linguaggio a piè d'ogni pagina, di pari passo con l'esposizione simbolica, una gran parte delle proposizioni del testo, e spesso anche illustrandole con opportune ed utili chiose.

La materia è distribuita in quaranta paragrafi, ciascuno intitolato ad uno o più segni speciali (ma raramente a più d'uno) scelti a rappresentare le idee, che s'introducon man mano; in maniera che ciascun § contempli tutte le proposizioni dove comparisce quel segno con alcuni dei precedenti; il che porge anche un comodo mezzo per trovare nel testo una proposizione, che sia già stata sommariamente analizzata.

Spettano alla Logica i §§ 1-5 *(eguaglianza, classe, pertinenza, coppia, negazione)*; come pure i §§ 9-11, 17, 30 e parte dei §§ 12, 14, 24 *(disgiunzione, affermazione di esistenza, classi unitarie, classi parziali, numerosità* d'una classe, *operazioni o trasformazioni).* I §§ 6-8 e 12 trattano dei *numeri* (interi, contati a partir dallo *zero*) e delle operazioni di *somma, moltiplicazione, elevazione a potenza* eseguite su quelli o sopra classi loro. Il § 13 contempla i *numeri naturali* (contati dall'*unità*), le relazioni di *maggiore* e *minore*, i *multipli* d'un numero, e parecchie proprietà numeriche, specialmente in ordine a diseguaglianze. I §§ 15 e 16 versano intorno le operazioni di *sottrazione* e *divisione* fra numeri interi. I §§ 18 e 19 intorno ai concetti di *massimo* e *minimo* d'una classe di numeri. I §§ 20 e 21 sul *quoziente* e *resto* d'una coppia di numeri e sulla pratica della divisione. I §§ 22 e 23 sulle *cifre dei vari ordini* e sull'*ordine* d'un numero. Vengono poscia i *numeri relativi* (interi positivi, negativi o nulli), la nozione di *valore assoluto* o *modulo,* le somme e i prodotti di più numeri relativi (§ 24); e le potenze di numeri relativi, con una ricca collezione di identità numeriche (§ 25). Le *frazioni* o *numeri razionali* sono introdotte al § 26, come *operazioni* composte di moltiplicare e dividere successivamente per due numeri naturali (a somiglianza dei numeri *positivi* e dei *negativi,* definiti come operazioni dell'aggiungere o togliere un numero; cioè come numeri additivi o sottrattivi; coppie, ciascuna costituita in un numero, preso insieme con uno dei segni $+$ o $-$); e si studian quivi le somme, i prodotti, le differenze, i quozienti, le potenze intere positive e negative di razionali, le relazioni di maggiore e minore fra questi, ecc. Il § 27 contiene le proprietà del simbolo E di Legendre e delle *frazioni decimali.* Il § 28 è sui *razionali relativi* ed abbraccia la risoluzione dell'*equazione di primo grado* e del sistema di *due* equazioni lineari. Il § 29 considera le *frazioni proprie.* Nel § 31 si introducono i *limiti superiore* e *inferiore* di una classe di razionali; la *quantità* o *numero reale positivo* (limite superiore d'una classe non illusoria di numeri razionali, che escluda qualche razionale maggiore di tutti i numeri della classe); l'*infinito* (limite superiore della classe dei razionali); la somma, il prodotto, la differenza e il quoziente di due quantità; la potenza d'una quantità, l'esponente essendo un numero, un numero razionale, una quantità. In questo § è il calcolo delle potenze e dei radicali, e la dimostrazione di moltissime diseguaglianze interessanti e poco note. Seguono i *numeri reali relativi* e le operazioni sopra di essi (§ 32), con la risoluzione delle *equazioni di secondo e terzo grado,* e di certe coppie di equazioni, una delle quali di grado superiore al primo; e diverse proposizioni circa i valori approssimati delle radici. Viene dipoi un'appendice sul *calcolo per approssimazione* (argomento che l'A. predilige) degna di esser segnalata all'attenzione degli studiosi e dei pratici per novità e semplicità di regole. Il § 33 volge intorno ai *logaritmi* ed al calcolo per logaritmi. Il § 34 tratta delle *successioni numeriche* e delle loro somme; con molte proposizioni intorno alle *progressioni*, alle somme di *potenze simili* dei numeri naturali, alle *medie* aritmetiche, alla *divisibilità* dei numeri, alle *frazioni decimali periodiche* ecc. I §§ 35 e 36 contemplano i *prodotti di* m *fattori ordinati* e i *fattoriali*. Il § 37 è sui *multipli* e sui *divisori comuni* a più numeri naturali, e sui *numeri primi fra loro*. I §§ 38 e 39 sui *numeri primi* assolutamente. Termina il libro col § 40 sui *numeri concreti* o *grandezze*, dove, accanto ai principî fondamentali sulle grandezze in generale, trovan posto le più importanti nozioni circa le classi di grandezze a cui guardan per solito l'Aritmetica e l'Algebra nelle loro applicazioni, non escluse le grandezze meccaniche e fisiche

Nuovo e singolar pregio dell'opera le abbondanti notizie storiche circa le più ragguardevoli proposizioni; notizie qui riprodotte dal Formulario di Matematica, e vagliate alla stregua di una critica dotta e rigorosa.

A pagg. VI e VII sono enumerate e distinte le varie parti del testo, onde risulta il programma ufficiale del Ginnasio superiore e del Liceo (a. 1902).

Per il bene dell'insegnamento e della cultura è da augurare che questo libro, così diverso dagli altri nella forma ed anche un po' nella sostanza, trovi presso gli insegnanti e gli studiosi italiani un'accoglienza degna del lungo studio e grande amore, che l'hanno generato e partorito.

M. Pieri.

A. Righi e B. Dessau. — *La telegrafia senza fili.* Bologna, Zanichelli, 1903.

L'argomento è di pura fisica sperimentale; ma se riflettiamo che molti dei problemi complessi sollevati dall'applicazione delle ondulazioni elettriche alla telegrafia senza fili non sono stati ancora studiati matematicamente, non sarà trovato fuor di luogo l'accenno in questo giornale di un libro, che pone il lettore, anche profano, in grado d'impadronirsi delle cognizioni e dei metodi sperimentali che vi si riferiscono.

In modo elementare, ma geniale, l'illustre Righi riassume nella prima parte i fatti fondamentali dell'elettricità illustrando le varie ipotesi da quella di Maxwell all'altra recentissima, sugli elettroni, che la completa.

Un materiale ricchissimo di ricerche e di esperienze è riassunto nella seconda parte, dove in maniera semplice e piana lo stesso Righi espone quanto è necessario conoscere sulle oscillazioni e sulle onde elettriche. Sono enumerati i varii indicatori delle onde elettromagnetiche, ciascuno dei quali potrebbe servire nella segnalazione a distanza, mentre i radio-conduttori o *coherers* sono studiati in modo esauriente, anche in riguardo alle varie teorie proposte, in uno speciale capitolo. Tanto nella prima che nella seconda parte, sono preziosi gli accenni a ricerche originali dell'Autore intorno ai varii fenomeni studiati; mentre la seconda parte potrebbe servire, allo studioso che non fosse a giorno del soggetto, quale ottima introduzione all'altro libro del prof. Righi, l'*Ottica delle oscillazioni elettriche*, dove l'illustre Autore ha riassunto i suoi numerosi ed importanti lavori, ed ha trattato analiticamente varii casi interessanti.

Al dott. Dessau è dovuta la terza parte sulla telegrafia elettrica senza fili; vi si fa rapidamente la storia di tutti i metodi escogitati per servirsi della conducibilità della terra o dell'acqua nel trasmettere un segnale da una stazione ad un'altra mediante correnti continue od alternate; i sistemi fondati sulla induzione, e che sono ancora utilizzati fra due stazioni poste sul canale di Bristol, e quello degli apparecchi sintonici del Lodge.

La telegrafia colle onde elettriche mandò i primi vagiti con Lodge e con Muyrhead; ma soltanto nell'audace iniziativa di Marconi ebbe uno sviluppo rapido, e, per ciò che riguarda la distanza superata, completo. È debito di pura giustizia ricordare che, nell'inizio delle prime esperienze, furono l'oscillatore del Righi, il coherer del Calzecchi, l'antenna del Popoff per la registrazione delle scariche temporalesche, il martellino del medesimo per decoerizzare il *coherer*, che servirono come materiali primi all'edificio del Marconi. Il quale modificò senza tregua i suoi apparecchi, fino a raggiungere gli ultimi noti trionfi, riassunti in un'appendice al volume, con una grandiosa installazione di cui, ci permettiamo di notare passando, sarebbe pur desiderabile una interpretazione scientifica.

Tutti i tentativi fatti, le diverse soluzioni del problema studiato dai numerosi inventori, i servizi già resi vengono imparzialmente registrati in questa dotta monografia che, con acume critico, pone in evidenza i pregi e i difetti di ciascun sistema. E sulle difficoltà che rimangono da vincere, sulle probabilità di una vittoria finale, sugl'inconvenienti che *sembrano* invincibili del sistema, il giudizio è ponderato. Dopo che il Flammarion, in un suo libro recente, enumerò e dileggiò gli scienziati, è ormai di buona maniera, deridere gli studiosi e i giudizi loro. Sarebbe invece più utile meditarli perchè disinteressati, e pensare che in essi è sempre sottinteso un valore di relatività.

Il volume si chiude con due interessanti capitoli del prof. Righi sulla telegrafia coi raggi ultravioletti, e sulle trasmissioni telefoniche mediante la luce, che ci espongono quanto di più recente è stato fatto in questo curioso campo d'investigazione.

Noi raccomandiamo il volume ad ogni persona colta che vuol vivere della vita del suo tempo (tanto più che del libro se ne annunzia, fatto straordinario in Italia, una prossima ristampa) e ad ogni studioso che desiderasse tentare la sempre utile applicazione della matematica ai fenomeni studiati fin d'ora soltanto dal punto di vista pratico.

R. Pitoni.

CORRISPONDENZA

Carissimo Professore,

Il prof. Gambioli nella sua Memoria sull'ultimo teorema di Fermat lancia un dubbio, d'altra parte condiviso da Legendre, come lo stesso prof. Gambioli nota, cioè che *forse i matematici non hanno fin qui battuto buona strada* ecc. Forse un giorno, e speriamo non molto lontano, al prof. Gambioli si darà ragione. Intanto una domanda a' lettori del " Periodico ": Si è tentata mai qualche via geometrica per la dimostrazione del celebre teorema? Per es., stabilendo delle condizioni, che non sarebbero poi estremamente restrittive, per x, y, z, in modo che sussista la doppia disegnaglianza

$$x + y > z > x - y,$$

non si potrebbe studiare l'equazione

$$x^m + y^m = z^m \qquad (1)$$

in numeri interi o fratti mediante la possibilità o meno della costruzione di un triangolo le misure dei cui lati soddisfacessero la (1)?

A questo proposito avrei qualche comunicazione da fare, ma desidero sentire il parere dei lettori del " Periodico " che si degneranno di prendere in considerazione queste poche parole. . . . .

Candido.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 21 marzo 1903.

NOTE GEOMETRICHE

sopra alcune proprietà dell'iperbole equilatera

Nel fascicolo di decembre 1902 dell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, il sig. Comandante Ripert, propone sotto il numero 2479 [L[1] 11 c] una interessante quistione, relativa a una proprietà dell'iperbole equilatera. Le note seguenti dànno una dimostrazione geometrica della quistione proposta e di alcune proprietà che ne derivano.

I. Se PA, $P\alpha$; PB, $P\beta$; PC, $P\gamma$ sono tre coppie di raggi omologhi d'un fascio di rette in involuzione, A, B, C essendo i vertici di un triangolo qualunque, α, β, γ i punti d'intersezione dei raggi $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, rispettivamente coi lati BC, CA, AB del triangolo, e P un punto qualunque del piano del triangolo, si sa (Chasles, Cremona) che i punti α, β, γ sono in linea retta.

In certi casi particolari questa retta gode di curiose proprietà. Supponiamo, per es. una involuzione circolare, cioè sia

$$\widehat{AP\alpha} = \widehat{BP\beta} = \widehat{CP\gamma} = 90^{\circ}.$$

Si avrà il teorema seguente:

Teorema. — *Le perpendicolari* $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, *condotte in un punto* P *qualunque del piano d'un triangolo* ABC *alle tre rette che congiungono questo punto ai vertici del triangolo, incontrano i lati opposti* BC, CA, AB *rispettivamente in tre punti* α, β, γ *in linea retta.*

Questa proposizione è ben nota. Nella sua *Géométrie superieure* (2^{me} edit. pag. 418) Chasles la dimostra applicando il metodo di trasformazione per polari reciproche alla proprietà che hanno le tre altezze di un triangolo d'incontrarsi in uno stesso punto. È anche facile dare di questo teorema una dimostrazione basata sulla proprietà dell'esagono di Pascal e che darà dei nuovi punti della retta $\alpha\beta\gamma$.

Consideriamo una conica Σ circoscritta al quadrilatero ABCP. Le rette $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ incontrano Σ rispettivamente nei punti A', B', C'. Si sa (Chasles, *Géom. Sup.* p. 413) che, se per un punto P d'una conica si conducano coppie di rette formanti una involuzione, le corde che i loro angoli intercettano nella curva, passano per uno stesso punto F.

Nel caso di una involuzione circolare, le corde AA', BB', CC' s'intersecano in un punto, detto *punto di Frégier*, corrispondente a P, e appartenente alla normale in questo punto alla conica.

Nell'esagono inscritto PA'ACBB' si ha la retta di Pascal

$$(PA', BC) \equiv \alpha, \qquad (AA', BB') \equiv F, \qquad (AC, PB') \equiv \beta.$$

Nell'esagono inscritto PC'CBAA' si ha la retta di Pascal

$$(PC', BA) \equiv \gamma, \qquad (CC', AA') \equiv F, \qquad (BC, PA') \equiv \alpha,$$

e per conseguenza, si ha il seguente

Teorema. — *La retta* $\alpha\beta\gamma$ *contiene il punto di Frégier del punto* P *della conica* Σ *circoscritta al quadrilatero* ABCP.

Facendo variare la conica Σ, varia anche la normale in P, dunque il punto F si sposta sulla $\alpha\beta\gamma$; si ha così il seguente curioso corollario:

Corollario 1°. — *In ogni fascio di coniche, il luogo geometrico dei punti di Frégier relativi ad uno dei centri del fascio è una retta.*

È noto che ogni punto d'una circonferenza ha per punto di Frégier il centro della circonferenza: dunque,

Corollario 2°. — *Se il quadrilatero* ABCP *è inscritto in una circonferenza, la retta* $\alpha\beta\gamma$ *passa per il centro di essa.*

Consideriamo ora un quadrilatero ABCP inscritto in una iperbole equilatera. Le corde AA', BB', CC' si tagliano nel punto di Frégier F di P. Ma fra le coppie di raggi omologhi ortogonali della involuzione circolare formata dalle coppie PA, PA'; PB, PB'; ecc., ne esiste una le di cui rette PS e PS' sono rispettivamente parallele agli assintoti dell'iperbole. La corda SS' è dunque la retta all'infinito del piano, e siccome essa contiene anche il punto F, ne segue che tutte le rette AA' BB' CC' sono in questa conica parallele alla normale nel punto P. Si può dunque enunciare la seguente proprietà:

Corollario 3°. — *Siano* A, B, C, P *quattro punti di una iperbole equilatera* Σ. *Le perpendicolari condotte da* P *alle corde* PA, PB, PC *incontrano rispettivamente* BC, CA, AB *in tre punti* α, β, γ *in linea retta* Δ. *Questa retta è parallela alla normale in* P *alla conica* Σ.

Quest'ultimo corollario permette di costruire semplicemente la tangente in un punto P di una iperbole equilatera determinata da 4 punti A, B, C, P. Si detemina la retta Δ. La perpendicolare condotta da P a Δ è la tangente cercata.

Per alcuni sviluppi delle materie svolte in questa prima parte si vedano le mie " Note geometriche " nel *Progreso Mátematico*, 1900, pag. 313.

2. Si sa che un'iperbole equilatera, circoscritta ad un triangolo, passa pure per il suo ortocentro. Siano dunque A, B, C, D, M cinque punti qualunque di un'iperbole equilatera. Conduciamo da M la perpendicolare alla corda DA, e sia A' il suo secondo punto d'incontro colla curva. Per il teorema citato, A' sarà l'ortocentro del triangolo MAD, e per conseguenza AA' sarà perpendicolare ad MD. Parimenti se B', C' sono i secondi punti d'incontro colla curva, delle perpendicolari condotte da M rispettivamente a DB e DC, le rette BB' e CC' sono altresì perpendicolari a MD. Si ha dunque il seguente

TEOREMA. — *Se* A, B, C, D, M *sono 5 punti di una iperbole equilatera, e* A′, B′, C′ *i secondi punti d'incontro di essa colle perpendicolari condotte da* M *alle corde* DA, DB, DC, *le tre rette* AA′, BB′, CC′ *sono parallele fra loro e perpendicolari a* DM.

Siccome le corde AA′ BB′ CC′ sono parallele, segue, da un noto teorema della teoria delle coniche, che il fascio, le di cui coppie di rette omologhe sono MA e MA′, MB e MB′, MC e MC′ è involutorio, solo nel caso di una iperbole equilatera, come dimostra per altra via il sig. prof. C. Servais nel N°. di novembre 1902, pag. 250 di " Mathesis ". Sarebbe pure facile dimostrare il teorema reciproco, cioè: *Essendo* A, B, C, D, M *cinque punti di una conica, se* AA′, BB′, CC′ *sono perpendicolari a* DM, *la conica è un'iperbole equilatera.*

Se, come nella prima parte, rappresentiamo con α, β, γ i punti d'incontro di MA′, MB′, MC′ coi lati BC, CA, AB del triangolo ABC rispettivamente, risulta dalla involuzione dimostrata che $\alpha\beta\gamma$ è una retta, il che constateremo anche in un altro modo.

Le lettere essendo le stesse che nei teoremi precedenti, consideriamo l'esagono ACBB′MA′ inscritto in una conica Σ; si avrà la retta di Pascal

$$(MB', AC) \equiv \beta, \qquad (MA', BC) \equiv \alpha, \qquad (AA', BB') \equiv x.$$

La retta $\alpha\beta$, passa dunque pel punto x, intersezione di AA′, BB′.

Nell'esagono inscritto ABCC′MA′ si ha la retta di Pascal

$$(MC', AB) \equiv \gamma, \qquad (MA', BC) \equiv \alpha, \qquad (CC', AA') \equiv y.$$

La retta $\alpha\gamma$, passa dunque pel punto y, intersezione di AA′, CC′.

Nel caso particolare dell'iperbole equilatera i punti x, y si confondono all'infinito di AA′, le due rette $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$ sono dunque parallele ad AA′; dunque anch'esse coincidono e si ottiene così il bel teorema proposto sotto il N°. 2479 dal sig. Comandante Ripert nell'*Intermédiaire des Mathématiciens* del dicembre 1902.

TEOREMA. — *Se da un punto* M *d'una iperbole equilatera* (ABCD), *si conducono delle perpendicolari alle rette* DA, DB, DC, *esse incontrano le rette* BC, CA, AB *in punti situati sopra una retta* Δ *perpendicolare a* DM.

Le perpendicolari, condotte da M *a* DA, DB, DC, *incontrano l'iperbole in punti* A′, B′, C′ *tali che le rette* AA′, BB′, CC′ *sono parallele a* Δ.

Come fa osservare il sig. Ripert, questo teorema è, sotto certi aspetti, per l'iperbole equilatera ciò che è per il circolo il teorema di Simson.

COROLLARIO 1°. — *Se da* M *si conducono le perpendicolari alle corde* DA, DB, DC *si ottiene una retta* Δ.

Se da D *si conducono le perpendicolari alle corde* MA, MB, MC *si ottiene una retta* Δ'; *le rette* Δ *e* Δ' *sono parallele e perpendicolari a* MD.

COROLLARIO 2°. — *Se* M *si avvicina indefinitamente a* D *si ritrova l'ultimo teorema della* 1ª *parte.*

Corollario 3°. — *Siano* P *un punto qualunque del piano di un triangolo* ABC *ed* H *l'ortocentro di questo. Le perpendicolari condotte da* H *alle rette* PA, PB, PC *incontrano i lati* BC, CA, AB *del triangolo in tre punti di una linea retta perpendicolare a* PH.

Si potrebbero fare numerose applicazioni del teorema fondamentale alla geometria del triangolo. Sono pure facili a dimostrarsi le proposizioni reciproche di quelle sopra dimostrate.

A. Droz-Farny.

UN TEOREMA SULLE FUNZIONI RAZIONALI .

1. Sia:

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \Sigma a_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$$

una funzione razionale intera a coefficienti razionali *interi* delle n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$; a ciascun sistema di valori razionali interi delle variabili corrisponde allora un valore razionale *intero* della funzione. Inversamente, se una funzione *razionale* di n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$ assume un valore razionale intero per *ogni* sistema di valori razionali interi di esse variabili, si può affermare che essa è razionale intera a coefficienti interi in queste variabili? È subito visto che no. Infatti, già per le funzioni di una sola variabile, il coefficiente binomiale:

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

pur avendo coefficienti razionali, ma non interi, assume un valore razionale intero per qualsiasi valore intero della variabile indipendente. È allora naturale proporsi il problema di determinare la forma più generale di una tale funzione *razionale*.

2. Chiameremo brevemente F una tale funzione. Dimostriamo innanzi tutto che:

a) *I coefficienti della* F *devono esser numeri razionali.*

Consideriamo dapprima il caso che la F sia funzione di una sola variabile x; e, suppostala ridotta alla sua più semplice espressione, sia m il grado del suo numeratore, n quello del suo denominatore; per una nota formula d'interpolazione di Cauchy-Iacobi (*) potremo esprimere la funzione stessa *in modo razionale* per gli $m+n+1$ valori che essa assume per $m+n+1$ valori della variabile indipendente; prendendo allora per gli $m+n+1$ valori della variabile $m+n+1$ valori intieri, e ricordando che i corrispondenti valori della funzione sono anche essi numeri interi *(basterebbe che fossero razionali soltanto)* ne segue immediatamente che i coefficienti della F, debbono in questo caso esser numeri razionali. (**)

(*) Cfr. Netto, *Vorlesungen über Algebra*. Bd I, S. 43; ed anche: Capelli e Garbieri, *Corso di Analisi Algebrica-Teorie introduttorie*, pag. 473. Padova, 1886.

(**) Si osservi, per esser del tutto rigorosi che. *ammessa l'esistenza della funzione* F (ridotta già alla più semplice espressione) e trattandosi solo di veder la natura dei suoi coefficienti, *non* può aversi per la formula di Chauchy-Iacobi quel caso di eccezione, che fu rilevato dal Kronecker; del resto, si vedrebbe facilmente che anche in questo caso valgono ancora immutate le considerazioni superiori (cfr. Netto, *Algebra* I, p. 47 e anche: Netto, *Zur Cauchy'-schen Interpolationsaufgabe* (Math. Annalen. Bd 42-S. 453; Capelli e Garbieri, l. c. pag. 471-472).

Dimostrato così il teorema per le funzioni di una sola variabile, si estende subito, per induzione, alle funzioni di n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$. Ordiniamo infatti il numeratore e il denominatore di essa funzione rispetto ad una di esse variabili, la x_i, ed *assegniamo alle altre* $n-1$ *valori razionali interi, affatto arbitrarî* (che non annullino identicamente il denominatore). La funzione data si riduce allora ad una funzione della sola x_i, che ha ancora la proprietà di prender valori interi per i valori interi della x_i; i suoi coefficienti sono dunque, per quello che si è dimostrato, numeri razionali. I coefficienti della x_i sono quindi tali funzioni delle altre $n-1$ variabili, che per *ogni* sistema di valori interi di queste variabili (che non soddisfino ad una certa equazione assumono valori *razionali*; ma questo basta per concludere, per la nostra ipotesi, che i loro coefficienti devono esser numeri razionali. Tali sono adunque anche quelli della F.

3. È facile ora dimostrare che:

b) *La nostra funzione* F *deve esser razionale* **intera** *nelle variabili* $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Sia infatti, se è possibile, la F razionale fratta e poniamo:

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)}{\psi(x_1 x_2 \ldots x_n)}, \tag{1}$$

essendo φ e ψ due polinomi, a coefficienti intieri, delle $x_1 x_2 \ldots x_n$ privi di fattori comuni. Indichiamo con l_i, m_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ il grado dei polinomi φ e ψ nella variabile x_i; *deve essere* $l_i \geq m_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$.

Ordiniamo infatti il numeratore φ e il denominatore ψ per le potenze discendenti della x_i; avremo:

$$\begin{cases} \varphi = a_0 x_i^{l_i} + a_1 x_i^{l_i-1} + \ldots + a_{l_i-1} x_i + a_{l_i} \\ \psi = b_0 x_i^{m_i} + b_1 x_i^{m_i-1} + \ldots + b_{m_i-1} x_i + b_{m_i}; \end{cases} \tag{2}$$

essendo le $a_0 \ldots a_{l_i}$, $b_0 \ldots b_{m_i}$, funzioni razionali intere a coefficienti interi nelle altre variabili. Assegniamo ora alle $x_1 \ldots x_{i-1}$, $x_{i+1} \ldots x_n$ valori interi arbitrarî colla sola condizione che non annullino b_0, nè *tutte* le $a_0, a_1 \ldots a_{l_i}$, il che evidentemente è sempre possibile; facciamo poi tendere x_i all'infinito per valori interi. Ove fosse $l_i < m_i$, da un certo momento in poi la $F = \frac{\varphi}{\psi}$, pur rimanendo sempre diversa da zero, finirebbe per diventare e restare, in valore assoluto, piccola a piacere e quindi anche minore di uno, il che contraddice all'ipotesi che assuma valori interi per tutti i valori intieri delle $x_1 x_2 \ldots x_n$. È adunque veramente $l_i \geq m_i$.

Sia ora una determinata $m_i > 0$; e colle notazioni precedenti poniamo:

$$F_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = b_0 F - a_0 x_i^{l_i - m_i} = \frac{b_0 \varphi - a_0 x_i^{l_i-m_i} \psi}{\psi} = \frac{\varphi_1(x_1 x_2 \ldots x_n)}{\psi(x_1 \ldots x_n)}, \tag{3}$$

dove dunque abbiam posto:

$$\varphi_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = b_0 \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) - a_0 x_i^{l_i-m_i} \psi(x_1 x_2 \ldots x_n). \tag{4}$$

I due polinomi φ_1 e ψ possono aver fattori comuni, cioè la F_1 può non avere la più semplice espressione; ma notiamo subito, *un fattore comune ai due polinomi* φ_1 e ψ *non può contenere la* x_i; un tal fattore è infatti comune anche ai polinomi ψ e $b_0 \varphi = \varphi_1 + a_0 x_i^{l_i-m_i} \psi$; e quindi, poichè φ e ψ sono primi tra loro, deve dividere b_0, donde, poichè b_0 non contiene la x_i, segue la nostra asserzione. Dividiamo allora φ_1 e ψ per il loro massimo comun divisore e poniamo:

$$F_1 = \frac{\varphi'_1(x_1 x_2 \ldots x_n)}{\psi'(x_1 x_2 \ldots x_n)};$$

saranno ora φ'_1 e ψ' due funzioni prime tra loro; inoltre, per ciò che precede, il polinomio ψ' ha *ancora nella* x_i *il grado* m_i, il polinomio φ'_1 invece, a causa delle (2) e (4), ha nella x_i *un grado* l'_i *minore od uguale ad* $l_i - 1$.

Dalla (3) è chiaro che la F_1 è una funzione razionale delle $x_1, x_2, \ldots x_n$ colle stesse proprietà della F; se per essa è $l'_i \geq m_i$, si può su essa ripetere il medesimo ragionamento, e così via. Dopo k volte (con $k \leq l_i - m_i + 1$) arriveremo allora ad una funzione razionale F_k, ancora dotata della solita proprietà, nella quale il numeratore avrebbe nella variabile x_i un grado *minore* che non il denominatore; ma questo è assurdo, per quel che abbiamo già detto. È adunque per *qualunque* valore di i da 1 ad n, $m_i = 0$, e quindi $\psi =$ costante, il che dimostra il teorema enunciato.

4. Poichè la F è razionale intera, a cofficienti razionali, nelle $x_1 x_2 \ldots x_n$, dettone m il grado, potremo porre identicamente:

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \ldots q_n} \binom{x_1}{q_1} \binom{x_2}{q_2} \cdots \binom{x_n}{q_n} \qquad (q_1 + q_2 + \ldots + q_n \leq m) \qquad (5)$$

dove le $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ sono numeri razionali,

$$\binom{x_i}{q_i} = \frac{x_i (x_i - 1) \ldots (x_i - q_i + 1)}{1, 2 \ldots q_i},$$

e la somma è estesa a *tutti* i sistemi di valori interi, positivi o nulli, delle $q_1 \ldots q_n$ la cui somma non supera m.

c) I coefficienti $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ *devono esser numeri razionali interi*

Sia infatti $r_1, r_2 \ldots r_n$ un determinato sistema di numeri interi, positivi o nulli, per i quali si abbia:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq m; \qquad (6)$$

la (5) dà allora:

$$F(r_1 r_2 \ldots r_n) = A_{r_1 r_2 \ldots r_n} + \Sigma' A_{q_1 q_2 \ldots q_n} \binom{r_1}{q_1} \binom{r_2}{q_2} \cdots \binom{r_n}{q_n}, \qquad (7)$$

dove l'indice apposto al simbolo sommatorio sta ad indicare che nella somma va omesso il termine corrispondente al sistema (6) di valori delle $q_1, q_2, \ldots q_n$, che abbiamo già posto in evidenza. Si ricordi ora che se $q_i > r_i$, è identicamente $\binom{r_i}{q_i} = 0$; la (7) si riduce perciò alla forma più semplice:

$$F(r_1 r_2 \ldots r_n) = A_{r_1 r_2 \ldots r_n} + \overline{\Sigma} A_{q_1 q_2 \ldots q_n} \binom{r_1}{q_1} \binom{r_2}{q_2} \cdots \binom{r_n}{q_n}, \qquad (8)$$

essendo ora la somma Σ estesa a quei sistemi di valori interi $q_1 q_2 \ldots q_n$, che soddisfano alle condizioni

$$q_i \leq r_i, \qquad \Sigma q_i < \Sigma r_i, \ (i = 1, 2 \ldots n). \qquad (9)$$

Ora dunque siasi già verificato, che *tutte* le $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$, per cui valgono le (9) sono numeri razionali interi, tale è anche, per la (8), e perchè $F(r_1 r_2 \ldots r_n)$ è per ipotesi un numero intero, la $A_{r_1 r_2 \ldots r_n}$. Ma per $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$, si ha;

$$F(0, 0 \ldots 0) = A_{0 0 \ldots 0},$$

e quindi $A_{0 0 \ldots 0}$ è certamente un numero intero: lo sono anche dunque *tutte* le $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ della formula (5).

5. Possiamo quindi enunciare il teorema:

Se una funzione razionale in n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *prende valori razionali interi per tutti i possibili sistemi di valori interi delle variabili, essa ha necessariamente la forma*

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} \binom{x_1}{q_1} \binom{x_2}{q_2} \dots \binom{x_n}{q_n} \qquad (10)$$

dove $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ *sono numeri razionali interi e:*

$$\binom{x_i}{q_i} = \frac{x_i(x_i-1)\dots(x_i-q_i+1)}{1,2\dots q_i}.$$

Inversamente è chiaro che, qualunque siano gli interi $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$, la F ha la proprietà in discorso. (*)

6. Alcune osservazioni sul risultato che precede.

a) Abbiamo supposto che la F assuma valori razionali interi per *tutti* i sistemi di valori interi delle variabili; ma bastava supporre che ciò accadesse per *tutti* i sistemi di valori interi delle variabili, *maggiori in valore assoluto di un certo numero*. In questo caso infatti, come facilmente si vede, la F assume valori razionali interi, per *tutti* i possibili sistemi di valori delle variabili indipendenti. (**)

b) Alla stessa formula (10) saremmo pervenuti, quando si fosse ammesso che la F fosse, non razionale ma solo *algebrica* nelle $x_1 x_2 \dots x_n$. L'Hilbert ha infatti dimostrato che una funzione algebrica di n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, che assume valori razionali per *tutti* i possibili valori razionali delle variabili, compresi in un determinato campo, è necessariamente razionale in queste variabili. (***) Ma una tale conclusione vale ancora, come subito si riconosce, quando si ammetta soltanto che una tale funzione y debba assumere valori razionali *per tutti i possibili valori interi delle variabili* $x_1, x_2, \dots x_n$ (maggiori, se si vuole, in valore assoluto di un numero fisso C). Non è forse inutile darne qui la dimostrazione, tanto più che il teorema ora ricordato di Hilbert è semplicemente enunciato in fine della memoria citata.

Sia dunque:

$$g(x_1 x_2 \dots x_n y) = g_0 y^k + g_1 y^{k-1} + \dots + g_{k-1} y + g_k = 0 \quad (g_i = g_i(x_1 x_2 \dots x)) \qquad (11)$$

l'equazione, irriducibile nel campo assoluto di razionalità, che definisce la y come funzione algebrica delle $x_1, x_2, \dots x_n$. È allora possibile, per il teorema fondamentale di Hilbert sulla irriducibilità delle funzioni intere, (****) ed in infiniti modi, assegnare alle $x_1 x_2 \dots x_n$ dei valori interi $r_1 r_2 \dots r_n$ (maggiori di C in valore assoluto) tali che la $g(r_1 r_2 \dots r_n y)$ sia ancora irriducibile in y ed *abbia ancora il grado k*; basta infatti prender questi valori $r_1 r_2 \dots r_n$ in guisa che, oltre la (20), anche la

$$y^k g\left(x_1 x_2 \dots x_n \frac{1}{y}\right) = g_k y^k + \dots + g_0$$

si cambi in una funzione irriducibile in y. (*****) Si osservi ora che, per l'ipotesi fatta, l'equazione irriducibile in y:

$$g(r_1 r_2 \dots r_n y) = 0$$

(*) Cfr. HILBERT, *Ueber die Theorie der Algebraischen Formen*. (Math. Annalen Bd 36-S 512).
(**) Cfr. HILBERT, l. c. S 511.
(***) Cfr. HILBERT, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen* (Journal von Crelle Bd 110-S 129).
(****) Cfr. HILBERT, l. c. S 192.
(*****) Cfr. HILBERT, l. c. S 117.

deve avere una radice razionale (nel nostro caso intera); essa è dunque *lineare in* y, cioè $h=1$; y è quindi una funzione razionale delle $x_1, x_2, \dots x_n$.

c) Dalla formula (10) segue anche una curiosa proprietà *aritmetica* della funzione F. Se $q_1, q_2, \dots q_n$ sono numeri interi, positivi o nulli, la cui somma *non* superi m, il quoziente:

$$\frac{m!}{q_1!\,q_2!\dots q_n!}$$

è notoriamente un numero intero. Ne segue evidentemente:

Se m *è il grado della funzione* F, *il prodotto* m! F *è una funzione razionale intera a coefficienti interi delle variabili* $x_1\,x_2\dots x_n$.

d) Le conclusioni che precedono valgono ancora evidentemente, oltrechè nel campo assoluto di razionalità, in qualsiasi corpo algebrico che *non* contenga *numeri interi inferiori in modulo a qualsiasi quantità assegnabile*, in particolare dunque in qualunque corpo quadratico immaginario. (*) In questo caso i coefficienti $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ della (10) sono numeri interi (algebrici), affatto arbitrarî, del corpo assegnato.

7. È interessante ancora l'osservazione seguente:

Supponiamo che la funzione razionale $F(x_1\,x_2\dots x_n)$ debba assumere valori interi per *tutti i valori* delle $x_1\,x_2\dots x_n$ che appartengono a delle progressioni *geometriche* (non più aritmetiche) che potremo sempre scrivere sotto la forma:

$$x_i = q_i^{\alpha_i} \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{12}$$

dove q_i è un numero intero, *maggiore di uno* in valore assoluto ed α_i varia (per valori interi) da un certo valore $k_i > 0$ all'infinito *positivo*.

È subito visto che valgono ancora per F i teoremi *a)* *b)* dei n. 2 e 3; poniamo inoltre, indicando con x una variabile arbitraria, ρ un intiero positivo;

$$\begin{bmatrix} x, q \\ \rho \end{bmatrix} = \frac{(x-1)(x-q)\dots(x-q^{\rho-1})}{q^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}}(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^\rho)}; \tag{13}$$

si ha allora identicamente:

$$\begin{bmatrix} q^s, q \\ \rho \end{bmatrix} = 0, \quad \text{per } 0 \leq s < \rho;$$

$$\begin{bmatrix} q^\rho, q \\ q \end{bmatrix} = (-1)^\rho;$$

$$\begin{bmatrix} q^{k+\rho}, q \\ \rho \end{bmatrix} = (-1)^\rho \frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\dots(1-q^{k+\rho})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^\rho)};$$
$$k > 0$$

ne segue, per una nota osservazione di Gauss, (**) che quando in $\begin{bmatrix} x, q \\ \rho \end{bmatrix}$ si ponga per x una potenza di q con esponente intero positivo, $\begin{bmatrix} x, q \\ \rho \end{bmatrix}$ diventa una funzione razionale *intera* di q a coefficienti interi.

(*) Cf. ad es: DIRICHLET, *Zahlentheorie* IV^a Auflage. Suppl. XI.
(**) GAUSS, *Summatio quarundam serierum singularium*. (Werke, Bd II, S. 16, 17.)

Scriviamo allora la funzione F sotto la forma:

$$F_{(x_1 x_2 \ldots x_n)} = \sum_{(\varrho_1+\varrho_2+\ldots+\varrho_n \leq m)} A_{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n} \begin{bmatrix} x_1 q_1 \\ \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 q_2 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} x_n q_n \\ \rho_n \end{bmatrix};$$

lo stesso procedimento, tenuto al n.° 4, dimostra *che le* $A_{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n}$ *sono numeri interi*, che possono evidentemente prendersi affatto arbitrariamente.

ONORATO NICCOLETTI.

SULL'ESTRAZIONE ABBREVIATA
DELLA RADICE QUADRATA INTERA DAI NUMERI INTERI

Nella presente Nota dimostro con la sola considerazione di numeri commensurabili un teorema noto ed utile in pratica sull'estrazione abbreviata della radice quadrata intera dai numeri interi, (*) del quale si conoscono parecchie dimostrazioni contenenti però anche la considerazione di numeri incommensurabili, e porgo inoltre alcuni esempi di applicazione dello stesso teorema.

TEOREMA. — *Se la radice quadrata intera di un numero* a *intero ha* $2n+1$ *cifre almeno, e se s'indica con* c *il numero rappresentato dalle cifre di essa, escluse le* n *prime a destra* (**), *ed inoltre con* q *il quoziente e con* r *il resto della divisione* $\frac{a - c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n}$, *cioè se si pone:*

$$\frac{a - c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n} = q + \frac{r}{2c . 10^n}, \tag{1}$$

si ha $\sqrt{a} = c . 10^n + q$ *esattamente, od a meno di una unità per difetto, ovvero a meno di una unità per eccesso, secondo che riesce* $r = q^2$, *od* $r > q^2$, *ovvero* $r < q^2$.

DIMOSTRAZIONE. — Se s'indica con x il numero rappresentato dalle n prime cifre a destra della radice quadrata intera del numero intero considerato a, sarà $\sqrt{a} = c . 10^n + x$ esattamente, quando a sarà un quadrato perfetto, ed invece $\sqrt{a} = c . 10^n + x$ a meno di una unità per difetto, allorchè a non sarà un quadrato perfetto, e converrà nella dimostrazione considerare separatamente tali due casi.

CASO 1°. — Poichè si ha per ipotesi:

$$\sqrt{a} = c . 10^n + x \text{ esattamente,} \tag{2}$$

(*) In questa Nota si chiama brevemente *radice quadrata intera di un numero intero* la sua radice quadrata, quando esso è un quadrato perfetto, ed invece la sua radice quadrata a meno di una unità per difetto, quando esso non è un quadrato perfetto.

(**) Conviene osservare che il numero c è necessariamente uguale alla radice quadrata intera del numero intero che si ottiene da quello considerato a, sopprimendovi le $2n$ prime cifre a destra.

si verifica manifestamente l'eguaglianza $a=(c.10^n+x)^2$, cioè, sciogliendo la parentesi, quest'altra:

$$a=c^2.10^{2n}+2c.10^n.x+x^2,$$

da cui facilmente si trae:

$$\frac{a-c^2.10^{2n}}{2c.10^n}=x+\frac{x^2}{2c.10^n}. \tag{3}$$

Ora, poichè per ipotesi x è un numero intero avente n cifre al più, ed invece c è un numero intero avente $n+1$ cifre almeno, si verificano necessariamente le due relazioni:

$$x<10^n \quad , \quad c \geqq 10^n,$$

dalle quali, innalzando al quadrato i due membri della 1ª e moltiplicando per 2.10^n il primo membro della 2ª ed invece per 10^n il secondo membro della medesima, si ottengono le due seguenti:

$$x^2<10^{2n} \quad , \quad 2c.10^n>10^{2n}. \tag{4}$$

Dividendo quindi membro a membro la 1ª di queste due ultime relazioni per la 2ª delle medesime, si ha l'altra:

$$\frac{x^2}{2c.10^n}<1, \tag{5}$$

in virtù della quale l'eguaglianza (3) mostra chiaramente che il quoziente q della divisione $\frac{a-c^2.10^{2n}}{2c.10^n}$ è uguale ad x, ed il resto r di essa è uguale ad x^2 e perciò eguale anche a q^2; e sostituendo quindi q ad x nella relazione (2), risulta $\sqrt{a}=c.10^n+q$ esattamente.

Caso 2°. — Poichè si ha per ipotesi:

$$\sqrt{a}=c.10^n+x \text{ a meno di 1 per difetto,} \tag{6}$$

e perciò anche:

$$\sqrt{a}=c.10^n+(x+1) \text{ a meno di 1 per eccesso,} \tag{7}$$

si verifica necessariamente la relazione:

$$(c.10^n+x)^2<a<[c.10^n+(x+1)]^2,$$

in virtù della quale il numero intero a riuscendo compreso fra i due numeri interi $(c.10^n+x)^2$ e $[c.10^n+(x+1)]^2$ dev'essere almeno eguale al minore di questi aumentato di 1 unità ed al più eguale al maggiore dei medesimi diminuito di 1 unità, cioè si debbono verificare le due relazioni:

$$a\geqq(c.10^n+x)^2+1 \quad , \quad a\leqq[c.10^n+(x+1)]^2-1,$$

ossia, eseguendo i quadrati indicati, le due seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} a\geqq c^2.10^{2n}+2c.10^n.x+x^2+1 \\ a\leqq c^2.10^{2n}+2c.10^n.(x+1)+(x+1)^2-1 \end{array}\right\},$$

dalle quali si deducono poi facilmente le due altre:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a-c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n} &\overline{\gtreqless} x+\frac{x^2+1}{2c . 10^n} \\ \frac{a-c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n} &\leqq (x+1)+\frac{(x+1)^2-1}{2c . 10^n} \end{aligned}\right\} . \tag{8}$$

Ora, poichè, avendo l'intero x per ipotesi n cifre al più, necessariamente è $x \leqq 10^n - 1$ e perciò anche $x+1 \leqq 10^n$ e quindi pure, innalzando al quadrato ambidue i membri di quest'ultima relazione:

$$(x+1)^2 \leqq 10^{2n}, \tag{9}$$

cioè, sciogliendo la parentesi:

$$x^2+2x+1 \leqq 10^{2n},$$

risulta manifestamente:

$$x^2+1 < 10^{2n}, \tag{10}$$

e dividendo quindi membro a membro quest'ultima disuguaglianza per la 2ª delle due disuguaglianze (4), si ha l'altra:

$$\frac{x^2+1}{2c . 10^n} < 1, \tag{11}$$

in virtù della quale la 1ª delle due relazioni (8) mostra che il quoziente q della divisione $\frac{a-c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n}$ è almeno eguale ad x.

D'altra parte, poichè dalla relazione (9) si deduce manifestamente:

$$(x+1)^2-1 < 10^{2n}, \tag{12}$$

dividendo poi membro a membro quest'ultima disuguaglianza per la 2ª delle due disuguaglianze (4), risulta la seguente:

$$\frac{(x+1)^2-1}{2c . 10^n} < 1, \tag{13}$$

in virtù della quale la 2ª delle due relazioni (8) mostra che il quoziente q anzidetto è al più uguale ad $x+1$.

Infine conviene osservare che, quando è $q=x$, sostituendo q ad x nella relazione (6) e nella 1ª delle due relazioni (8), si ottengono immediatamente le due altre:

$$\sqrt{a} = c . 10^n + q, \text{ a meno di 1 per difetto,}$$

$$\frac{a-c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n} \overline{\gtreqless} q+\frac{q^2+1}{2c . 10^n},$$

confrontando la 2ª delle quali con l'eguaglianza (1), si ottiene subito:

$$q+\frac{r}{2c . 10^n} \overline{\gtreqless} q+\frac{q^2+1}{2c . 10^n},$$

da cui si deduce tosto $r \overline{\gtreqless} q^2+1$ e perciò anche $r > q^2$.

Invece quando è $q=x+1$, sostituendo q ad $x+1$ nella relazione (7) e nella 2ª delle due relazioni (8), si hanno immediatamente le due seguenti:

$$\sqrt{a}=c\,.\,10^n+q, \text{ a meno di 1 per eccesso,}$$

$$\frac{a-c^2\,.\,10^{2n}}{2c\,.\,10^n} \leqq q+\frac{q^2-1}{2c\,.\,10^n},$$

confrontando la 2ª delle quali ancora con l'eguaglianza (1), si ottiene subito:

$$q+\frac{r}{2c\,.\,10^n} \leqq q+\frac{q^2-1}{2c\,.\,10^n},$$

da cui si deduce tosto $r \leqq q^2-1$ e quindi anche $r<q^2$.

Osservazione 1ª. — Il teorema testè dimostrato si verifica pure quando la radice quadrata intera del numero intero a considerato ha solamente $2n$ cifre, ma però la prima di esse a sinistra non è minore di 5, cioè quando, distinguendo le cifre del numero a in gruppi di due cifre ciascuno incominciando da destra, il numero rappresentato dall'ultimo gruppo non è minore di 25.

Infatti allora il numero intero indicato con c nel teorema avendo n cifre solamente, ma essendo però la sua prima cifra a sinistra non minore di 5, riesce manifestamente $c \overline{\gtreqless} 5\,.\,10^{n-1}$, e moltiplicando poi ambidue i membri di quest'ultima relazione per $2\,.\,10^n$, si ottiene l'altra $2c\,.\,10^n \overline{\gtreqless} 10^{2n}$, per la quale dividendo quindi membro a membro la 1ª delle due diseguaglianze (4), la (10) e la (12), risultano ancora le tre suddette (5), (11) e (13) che hanno già servito per mettere in evidenza la verità del teorema suddetto.

Osservazione 2ª. — È assai facile comprendere che, quando già si sia trovato il numero c estraendo con il metodo ordinario la radice quadrata intera dal numero intero che si ottiene da quello considerato a, sopprimendovi le $2n$ prime cifre a destra, se si abbasseranno a destra del resto ottenuto in tale estrazione di radice le n prime a sinistra delle $2n$ cifre anzidette, e se poi si dividerà il numero così risultante per il doppio della stessa radice trovata c, si otterrà un quoziente uguale a quello q considerato nel suddetto teorema, e se quindi si abbasseranno a destra del resto di tale divisione tutte le n rimanenti delle $2n$ suddette cifre, si otterrà un numero eguale al resto r pure considerato nello stesso teorema.

Osservazione 3ª. — Per abbreviare l'estrazione della radice quadrata intera da un numero intero dato, approfittando del teorema dianzi dimostrato e delle due osservazioni 1ª e 2ª relative al medesimo, conviene procedere nel seguente modo.

Nel caso che la prima cifra a sinistra di tale radice sia minore di 5, si trovano primieramente col metodo ordinario tante cifre a sinistra dell'anzidetta radice che il numero di esse superi il numero delle rimanenti di 2 od 1 unità, secondo che il numero totale delle cifre della stessa radice è pari od impari; ed invece nel caso che la prima cifra suddetta non sia minore di 5, si trovano primieramente con il metodo ordinario tante cifre a sinistra di tale radice che il numero di esse sia eguale al numero delle rimanenti, oppure lo superi di 1 unità, secondo che il numero totale delle cifre della medesima radice è pari oppure impari: poi in qualunque caso con il metodo indicato nell'osservazione 2ª si trovano il quoziente q ed il resto r della divisione considerata nel teorema suddetto, ed infine si aggiunge tale quoziente q al numero rappresentato dalle cifre della radice richiesta già trovate col metodo ordinario, seguite però da tanti zeri quante sono le cifre rimanenti della medesima. La somma così ottenuta sarà eguale alla radice quadrata del numero intero dato, esattamente, od a meno di una unità per difetto, oppure a meno di una unità per eccesso, secondo che il suddetto resto r riuscirà eguale, o superiore, oppure inferiore al quadrato del quoziente q suddetto, e nell'ultimo di questi tre casi poi si otterrà la radice quadrata del numero dato, a meno di 1 unità per difetto, sottraendo 1 unità dall'anzidetta somma.

Esempio 1°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 15246816484 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 1 e quindi minore di 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 6 e quindi pari; perciò si troveranno con il metodo ordinario le 4 prime a sinistra delle 6 anzidette cifre, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{15246816484}$

```
1'5 2'4 6'8 1      | 1234               1234 × 2 = 2468
  5'2              | 22 | 243 | 2464
    8 4'6          |  2 |   3 |    4
    1 1 7 8'1      | 44 | 729 | 9856
        1 9 2 5

    1 9 2 5 6 4    | 2468
      1 9 8 0 4      78                    78
            6 0                            78
                                          624
                                         546
                                         6084
         6084 = 78²
```

$\sqrt{15246816484} = 123400 + 78 = 123478$ esattamente.

Esempio 2°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 941978623 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 3 e quindi minore di 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 5 e quindi impari; perciò si troveranno col metodo ordinario le 3 prime a sinistra delle 5 anzidette cifre, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{941978623}$

9'4 1'9 7	306	$306 \times 2 = 612$
4'1 9'7	606	
5 6 1	6	
	3636	
5 6 1 8 6	612	
1 1 0 6	91	91
4 9 4		91
		91
		819
$49423 > 8281$		8281
$49423 > 91^2$		

$\sqrt{941978623} = 30600 + 91 = 30691$ a meno di 1 per difetto.

Esempio 3°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 267383097852 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 6 e quindi pari; perciò si troveranno con il metodo ordinario le 3 prime a sinistra delle 6 cifre anzidette, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{267383097852}$

2 6'7 3'8 3	517		$517 \times 2 = 1034$
1 7'3	101	1027	
7 2 8'3	1	7	
9 4	101	7189	
9 4 0 9 7	1034		
1 0 3 7	91		91
3			91
			91
			819
$3852 < 8281$			8281
$3852 < 91^2$			

$\sqrt{267383097852} = 517000 + 91 = 517091$ a meno di 1 per eccesso,

$\sqrt{267383097852} = 517091 - 1 = 517090$ a meno di 1 per difetto.

Esempio 4°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 39112528349785 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 6 e quindi non minore di 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 7 e quindi impari; perciò si troveranno con il metodo ordinario le 4 prime a sinistra delle 7 cifre anzidette, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{39112528349785}$

39·11·25·28	6254			$6254 \times 2 = 12508$
31·1	122	1245	12504	
672·5	2	5	4	
5002·8	244	6225	50016	
12				

12349	12508
12349	0

$12349785 > 0$

$12349785 > 0^2$

$\sqrt{39112528349785} = 6254000 + 0 = 6254000$ a meno di 1 per difetto.

G. Bernardi.

SOPRA ALCUNE FORMOLE RELATIVE ALLE PROGRESSIONI PER DIFFERENZA

1. Si abbia la progressione per differenza:

$$\div\, a \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\,.\,.\, a_{n-1},$$

la cui ragione sia d ed n il numero de' suoi termini, per modo che sia:

$$a_{r-1} = a + (r-1)\,d. \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

Vogliamo esprimere la somma S_m delle potenze m^{esime} dei termini:

$$S_m = a^m + a_1{}^m + a_2{}^m + \ldots + a_{n-1}^m.$$

in funzione delle somme analoghe $S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots S_2, S_1$ delle potenze $(m-1)^{esime}\ldots$ seconde, prime de' termini, del numero n di essi termini, del 1° termine a e della ragione d.

Per questo abbiamo le seguenti identità:

$$\begin{cases} (a+d)^{m+1}-a^{m+1}=(m+1)a^m d+\binom{m+1}{2}a^{m-1}d^2+\binom{m+1}{3}a^{m-2}d^3+\ldots+d^{m+1} \\ (a+2d)^{m+1}-(a+d)^{m+1}=(m+1)(a+d)^m d+\binom{m+1}{2}(a+d)^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1} \\ (a+3d)^{m+1}-(a+2d)^{m+1}=(m+1)(a+2d)^m d+\binom{m+1}{2}(a+2d)^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+nd)^{m+1}-\{a+(n-1)d\}^{m+1}= \\ \qquad =(m+1)\{a+(n-1)d\}^m d+\binom{m+1}{2}\{a+(n-1)d\}^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1}. \end{cases}$$

Sommando membro a membro e semplificando:

$$(a+nd)^{m+1}-a^{m+1}=$$
$$=(m+1)dS_m+\binom{m+1}{2}d^2S_{m-1}+\binom{m+1}{3}d^3S_{m-2}+\ldots+(m+1)d^mS_1+nd^{m+1}.$$

Ovvero, sviluppando nel 2° membro e semplificando:

$$S_m=na^m+\frac{m}{\pi(2)}d\{n^2a^{m-1}-S_{m-1}\}+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}d^2\{n^3a^{m-2}-S_{m-2}\}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{\pi(r+1)}d^r\{n^{r+1}a^{m-r}-S_{m-r}\}+\ldots \tag{1}$$
$$\ldots+d^{m-1}(n^m a-S_1)+\frac{d^m}{m+1}(n^{m+1}-n).$$

che è la formola cercata.

Ponendo nella (1) $a=1$ e poi $d=1$, si ottengono rispettivamente:

$$S_m=n+\frac{m}{\pi(2)}d(n^2-S_{m-1})+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{\pi(r+1)}d^r(n^{r+1}-S_{m-r})+\ldots$$
$$\ldots+d^{m-1}(n^m-S_1)+\frac{d^m}{m+1}(n^{m+1}-n). \tag{2}$$

$$S_m=na^m+\frac{m}{\pi(2)}(n^2a^{m-1}-S_{m-1})+$$
$$+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}(n^3a^{m-2}-S_{m-2})+\ldots+\frac{1}{m+1}(n^{m+1}-n). \tag{3}$$

La (2) ci dà la somma delle potenze m^{esime} degli n termini di una progressione, il cui 1° termine è l'unità e la ragione d; e la (3) dà la somma delle potenze m^{esime} di n numeri consecutivi, a partire da a.

E ponendo infine nella (1) $a=1$, $d=1$, abbiamo:

$$S_m=n+\frac{m}{\pi(2)}(n^2-S_{m-1})+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}(n^3-S_{m-2})+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r)}{\pi(r+1)}(n^{r+1}-S_{m-r})+\ldots,$$

la quale può anche scriversi, sviluppando le parentesi:

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{\pi(3)} S_{m-2} - \ldots \tag{4}$$
$$\ldots - \frac{m(m-1)\ldots(m-r)}{\pi(r+1)} S_{m-r} - \ldots - S_1 - \frac{n}{m+1} - \frac{1}{m+1},$$

che ci dà la somma delle potenze simili (m^{esime}) dei primi n numeri naturali.

2. Possiamo ottenere la somma delle potenze simili dei primi n numeri naturali in altro modo e ci risulterà funzione di n.

Osserviamo perciò che se una funzione è di m^o grado in x, conterrà un termine Ax^m: aumentando la variabile x di un'unità, l'aumento di x^m è espresso da:

$$(x+1)^m - x^m = mx^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} + \ldots + mx + 1,$$

che è funzione razionale intera di grado $m-1$ in x. Onde il grado dell'accrescimento di un termine è inferiore di un'unità al grado di esso termine e quindi l'accrescimento della funzione è esso stesso una funzione di grado inferiore di un'unità a quello della funzione data.

Posto ciò, la funzione di n che dà la somma delle potenze m^{esime} dei primi n numeri naturali è di $(m+1)^{esimo}$ grado, poichè l'accrescimento, quando n aumenta di un'unità, è $(n+1)^m$, che è di grado m.

Sarà perciò una funzione della forma:

$$An^{m+1} + Bn^m + C_1n^{m-1} + C_2n^{m-1} + C_3n^{m-3} + \ldots + C_{m-1}n,$$

dove le $A, B, C_1, C_2 \ldots C_{m-1}$ sono costanti da determinarsi. Inoltre essa funzione non conterrà termine costante, poichè per $n=0$ deve annullarsi.

Dobbiamo determinare i coefficienti $A, B, C_1, C_2 \ldots C_{m-1}$: basterà perciò esprimere che aggiungendo ad essa funzione $(n-1)^m$, si avrà la somma delle potenze m^{esime}, allorchè la serie dei numeri non è terminata da n, ma da $n+1$. Si avrà quindi identicamente:

$$An^{m+1} + Bn^m + C_1n^{m-1} + C_2n^{m-2} + \ldots + C_{m-1}n + (n+1)^m =$$
$$= A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + C(n+1)^{m-1} + C_2(n+1)^{m-2} + \ldots C_{m-1}(n+1).$$

Effettuando i calcoli e le riduzioni, si ottiene:

$$n^m + mn^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \ldots + mn - 1 =$$
$$= A\left\{\binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \binom{m+1}{3} n^{m-2} + \ldots + (m+1)n + 1\right\} +$$
$$+ B\left\{\binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \ldots + mn + 1\right\} +$$
$$+ C_1\left\{\binom{m-1}{1} n^{m-2} + \binom{m-1}{2} n^{m-3} + \binom{m-1}{3} n^{m-4} + \ldots + (m-1)n + 1\right\} +$$
$$+ C_2\left\{\binom{m-2}{1} n^{m-3} + \binom{m-2}{2} n^{m-4} + \binom{m-2}{3} n^{m-5} + \ldots + (m-2)n + 1\right\} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ C_{m-2}(2n+1) + C_{m-1}.$$

Eguagliando ora i coefficienti delle medesime potenze di n ne' due membri dell'eguaglianza, otteniamo un sistema di equazioni ricorrenti, che ci permettono di ricavare i valori delle costanti. Otteniamo per esse:

$$A=\frac{1}{m+1},\ B=\frac{1}{2},\ C_1=\frac{12}{m},\ C_2=0,\ C_3=-\frac{m(m-1)(m-2)}{720},\ C_4=0\ldots$$

e in generale pel coefficiente del termine in n^{m-r} si ha l'equazione:

$$\binom{m}{r}=A\binom{m+1}{r+1}+B\binom{m}{r}+C_1\binom{m-1}{r-1}+C_2\binom{m-2}{r-2}+\ldots+C_{r-1}\binom{m-r+1}{1}$$

Possiamo mostrare che i coefficienti $C_2, C_4, \ldots$ con indice pari, sono tutti nulli. Ponendo nella:

$$S_m=An^{m+1}+Bn^m+C_1n^{m-1}+C_2n^{m-2}+\ldots+C_rn^{m-r}+\ldots \quad (\alpha)$$

$n-1$ invece di n, si ha:

$$S'_m=A(n-1)^{m+1}+B(n-1)^m+C_1(n-1)^{m-1}+C_2(n-1)^{m-2}+\ldots+C_r(n-1)^{m-r}+\ldots \quad (\beta)$$

e sottraendo dalla (α) la (β) membro a membro:

$$\begin{aligned}n_m=&A\{n^{m+1}-(n-1)^{m+1}\}+B\{n^m-(n-1)^m\}+C_1\{n^{m-1}-(n-1)^{m-1}\}+\ldots\\ &\ldots+C_r\{n^{m-r}-(n-1)^{m-r}\}+\ldots=\\ =&A\left\{\binom{m+1}{1}n^m-\binom{m+1}{2}n^{m-1}+\ldots+\binom{m+1}{r+1}n^{m-r}\ldots\right\}+\\ &+B\left\{\binom{m}{1}n^{m-1}-\binom{m}{2}n^{m-2}+\ldots-\binom{m}{r}n^{m-r}+\ldots\right\}+\\ &+C_1\left\{\binom{m-1}{1}n^{m-2}-\ldots+\binom{m-1}{r-1}n^{m-r}-\ldots\right\}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+C_{r-1}\left\{\binom{m-r+1}{1}n^{m-r}-\ldots\right\}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ed eguagliando i coefficienti di n^{m-r} si ha, ponendo per A e B i loro valori:

$$0=\binom{m+1}{r+1}\frac{1}{m+1}-\binom{m}{r}\frac{1}{2}+\binom{m-1}{r-1}C_1-\binom{m-2}{r-2}C_2+\ldots+(m-r+1)C_{r-1}.$$

Ma abbiamo trovato pel coefficiente di n^{m-r}:

$$0=\binom{m+1}{r+1}\frac{1}{m+1}-\binom{m}{r}\frac{1}{2}+\binom{m-1}{r-1}C_1+\binom{m-2}{r-2}C_2+\ldots+(m-r+1)C_{r-1},$$

E sottraendo fra loro le due ultime relazioni:

$$\binom{m-2}{r-2}C_2+\binom{m-4}{r-4}C_4+\binom{m-6}{r-6}C_6+\ldots=0,$$

che deve sussistere qualunque sia r. E allora ponendo successivamente $r=3,5,7\ldots$, si vede che $C_2, C_4\ldots$ sono nulli, come volevamo dimostrare.

Quindi per l'espressione di S_m abbiamo:

$$S_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{1}{6}n^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3}\cdot\frac{1}{30}n^{m-3} + \frac{1}{6}\binom{m}{5}\cdot\frac{1}{42}n^{m-5} - \frac{1}{8}\binom{m}{7}\cdot\frac{1}{30}n^{m-7} + \\ + \frac{1}{10}\binom{m}{9}\cdot\frac{5}{66}n^{m-9} - \frac{1}{12}\binom{m}{11}\cdot\frac{691}{2730}n^{m-11} + \dots \quad (5)$$

I numeri che fanno parte dei coefficienti nella precedente formola e cioè:

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ -\frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ -\frac{691}{2730}\dots$$

sono, com'è noto, i numeri di Bernuilli.

3. Le formole (4) e (5) possono servirci a calcolare le somme delle potenze simili dei primi n numeri naturali in alcuni casi particolari, utili nella pratica:

$m=1 \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

$m=2 \quad S_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\,.\,3}$

$m=3 \quad S_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = s_1^2$

$m=4 \quad S_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\,.\,3\,.\,5}\{3n(n+1)-1\}$

$m=5 \quad S_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5}{12}n^4 - \frac{n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{12}\{2n(n+1)-1\}$

$m=6 \quad S_6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$

$m=7 \quad S_7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7}{24}n^4 + \frac{n^2}{12}$

$m=8 \quad S_8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{n}{30}$

. . . .

Le precedenti formole sono state ottenute assai speditamente dalla (5), mentre sarebbero stati necessari dei calcoli laboriosissimi a volerle ottenere dalla (4). Notiamo però che se la (5) offre, rispetto al calcolo, dei vantaggi che non offre la (4), tuttavia ha l'inconveniente di non presentare quella omogeneità nella forma dei termini, necessaria in una formola generale.

4. Diamo ora un teorema, che ci darà modo di verificare per sintesi le formole precedenti.

Sia $\varphi(a+nd)$ una funzione, tale che sia:

$$\varphi(a+nd) - \varphi(a+(n-1)d) = f(a+nd)$$

e che: $\varphi(a) = f(a)$; faremo vedere che:

$$\varphi(a+(n-1)d) = f(a) + f(a+d) + f(a+2d) + \dots + f(a+(n-1)d),$$

ossia che la funzione $\varphi(a+(n-1)d)$ è uguale alla somma di n funzioni che si ottengono dalla $f(a+nd)$ dando ad n successivamente i valori: $0, 1, 2, \ldots (n-1)$.

Infatti, per ipotesi si, ha:

$$\begin{cases} \varphi(a+d)-\varphi(a)=f(a+d), \\ \varphi(a+2d)-\varphi(a+d)=f(a+2d), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(a+(n-1)d)-\varphi(a+(n-2)d)=f(a+(n-1)d). \end{cases}$$

Sommando membro a membro, si ottiene:

$$\varphi(a+(n-1)d)-\varphi(a)=f(a+d)+f(a+2d)+\ldots+f(a+(n-1)d),$$

ed essendo per ipotesi $\varphi(a)=f(a)$:

$$\varphi(a+(n-1)d)=\sum_{r=1}^{r=n} f(a+(r-1)d) \qquad \text{c. d. d.} \tag{6}$$

In particolare, nel caso la cui $a=d=1$, si ha:

$$\varphi(n)=\sum_{1}^{n}{}_r f(r). \tag{7}$$

5. Si abbia ora l'espressione indicata nel 2° membro della (1), in cui S_{m-1}, $S_{m-2}, \ldots$ rappresentano le somme delle potenze $(m-1)^{esime}$, $(m-2)^{esime}, \ldots$ degli n termini di una progressione por differenza, il cui 1° termine è a e la ragione è d; verifichiamo come essa rappresenti effettivamente la somma delle potenze m^{esime} degli n termini della progressione stessa. Ponendo perciò:

$$\varphi(a+(n-1)d)=na^m+\frac{m}{2}d\left\{n^2a^{m-1}-S_{m-1}\right\}+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}\left\{n^3a^{m-2}-S_{m-2}\right\}+\ldots,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} f(a+(n-1)d)&=\varphi(a+(n-1)d)-\varphi(a+(n-2)d)= \\ =\Big[na^m+\frac{m}{2}\,d\left\{n^2a^{m-1}-S_{m-1}\right\}&+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}\left\{n^3a^{m-2}-S_{m-2}\right\}+\ldots\Big]- \\ -\Big[(n-1)a^m+\frac{m}{2}d\left\{(n-1)^2a^{m-1}-S'_{m-1}\right\}&+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}\left\{(n-1)^3a^{m-2}-S'_{m-2}\right\}+\ldots\Big], \end{aligned}$$

in cui le S' rappresentano le somme delle potenze simili degli $n-1$ primi termini della progressione stessa.

Ossia:

$$\begin{aligned} f(a+(n-1)d)&=a^m\{n-(n-1)\}+\frac{m}{2}da^{m-1}\{n^2-(n-1)^2\}-\frac{m}{2}d\{S_{m-1}-S'_{m-1}\}+ \\ &+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}d^2a^{m-2}\{n^3-(n-1)^3\}-\frac{m(m-1)}{\pi(3)}d^2(S_{m-2}-S'_{m-2})+\ldots= \\ &=a^m+ma^{m-1}(n-1)d+\binom{m}{2}a^{m-2}(n-1)^2d^2+\ldots \\ &=\{a+(n-1)d\}^m. \end{aligned}$$

E quindi per la (6):

$$\varphi(a+(n-1)d)=a^m+(a+d)^m+\ldots+(a+(n-1)d)^m,$$

come volevamo verificare.

In modo identico potremmo, per mezzo della (6), verificare le formole (2) e (3) e per mezzo della (7) la formola (4), che dà la somma delle m^{esime} potenze dei primi n numeri naturali.

6. Ponendo nella (1) $a=0$, si ha:

$$S_m=-\frac{m}{2}dS_{m-1}-\frac{1}{3}\binom{m}{2}d^2S_{m-2}-\ldots-\frac{1}{r+1}\binom{m}{r}d^rS_{m-r}-\ldots$$
$$\ldots-d^{m-1}S_1+\frac{d^m}{m+1}n(n^m-1), \tag{8}$$

in cui $S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots$ hanno sempre lo stesso significato. Questa formola ci dà la somma delle potenze m^{esime} degli $n-1$ primi multipli del numero d. In particolare, per $m=1$, abbiamo:

$$S_1=\frac{d}{2}n(n-1),$$

ovvero, ponendo $n+1$ in luogo di n:

$$S_1=\frac{d}{2}n(n+1), \tag{9}$$

che dà la somma dei primi n multipli di d.— E se nella (9) poniamo $d=2$, abbiamo:

$$s=n(n+1),$$

la quale, com'è noto, dà la somma dei primi n numeri pari.

Se nella (9) poniamo successivamente $d=1,2,\ldots n$ e sommiamo poi le espressioni che si ottengono, abbiamo, chiamando A detta somma:

$$A=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{2}+3\binom{n+1}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n+1}{2}+n\binom{n+1}{2}=$$
$$=\binom{n+1}{2}\{1+2+\ldots+n\}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

ossia: " la somma degli n primi multipli di ciascuno dei numeri $1,2\ldots n$, è uguale al quadrato della somma degli n numeri dati ".

Possiamo generalizzare la proprietà precedente nel modo seguente:

Rappresentando con $S_{m,d}$ la somma delle potenze m^{esime} degli n primi multipli di d e con $\sigma_{m,n}$ la somma analoga delle potenze m^{esime} dei primi n numeri naturali, abbiamo evidentemente la relazione:

$$S_{m,d}=d^m\,.\,\sigma_{m,n}\,.$$

Calcolando ora $\sum_1^n{}_d S_{m,d}$, si ha:

$$\sum_1^n{}_d\, S_{m,d}=\sum_1^n{}_d\, d^m\sigma_{m,n}=\sigma_{m,n}\sum_1^n{}_d\, d^m=\sigma^2_{m,n}, \tag{10}$$

ossia:

" la somma delle m^{esime} potenze dei primi n multipli dei numeri $1,2\ldots n$,

" è uguale al quadrato della somma delle potenze m^{esime} dei numeri " stessi ".

Ed ancora più generalmente, poichè si ha:

$$\sum_1^n{}_a \, S_{m,a} = \sum_1^p{}_a \, d^m \sigma_{m,n} = \sigma_{m,n} \sum_1^p{}_d \, d^m = \sigma_{m,n} \, . \, \sigma_{m,p} \, , \qquad (11)$$

possiamo dire: " la somma delle m^{esime} potenze dei primi p multipli " dei numeri $1, 2, \ldots n \, (n \gtrless p)$, è uguale al prodotto della somma delle " potenze m^{esime} dei numeri $1, 2, \ldots n$, per la somma delle potenze m^{esime} " dei numeri $1, 2, \ldots p$ ". E da ciò, per $p = n$, discende la proprietà sopra enunciata.

7. Ponendo nella (2) $d = p - 2$, $m = 1$, si ha:

$$S = n + \frac{1}{2} n (n-1)(p-2),$$

la quale ci dà la somma degli n termini di una progressione per differenza, il cui 1° termine è l'unità e $p-2$ la ragione.

Vogliamo ora determinare la somma degli n termini di una serie, in cui il termine generale sia rappresentato dal 2° membro dell'eguaglianza precedente.

Chiamando $u_1, u_2, \ldots u_n$ i termini di questa serie, abbiamo:

$$u_{r-1} + u_r = 2r - 1 + (r-1)^2 (p-2).$$

Dando ad r successivamente i valori $n, (n-1), \ldots 3, 2, 1$, si ha:

$$\begin{cases} u_n \;\;\; = 2 \, . \, n - 1 + (n-1)^2 (p-2) - u_{n-1} \\ u_{n-1} = 2 \, . \, (n-1) - 1 + (n-2)^2 (p-2) - u_{n-2} \\ u_{n-2} = 2 \, . \, (n-2) - 1 + (n-3)^2 (p-2) - u_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2 \;\;\; = 2 \, . \, 2 - 1 + 1^2 \, . \, (p-2) - u_1 \\ u_1 \;\;\; = 2 \, . \, 1 - 1. \end{cases}$$

Sommando membro a membro e facendo le debite sostituzioni:

$$2S = n(n+1) - n + (p-2) \frac{(n-1) \, n \, (2n-1)}{6} + u_n =$$

$$= n(n+1) - n + (p-2) \frac{(n-1) \, n (2n-1)}{6} + n + \frac{1}{2} n (n-1)(p-2),$$

ossia, semplificando:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{(n-1)(p-2)}{3} - 1 \right\},$$

che è l'espressione che volevamo ottenere.

Essa, per $p = 2$, ci dà la somma dei primi n numeri naturali *(numeri lineari)*; per $p = 3$ dà:

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

che esprime la somma degli n così detti *numeri triangolari:* 1, 3, 6, 10...; per $p=4$ dà la somma nota degli n *numeri quadrati*: 1, 4, 9, 16 . . .; per $p=5$ dà:

$$S=\frac{n^2(n+1)}{2},$$

che esprime la somma di n *numeri pentagonali,* cioè 1, 5, 12, 22, 25...; ecc.

P. PATRASSI.

UN NUOVO TEOREMA SULLA FUNZIONE E DI LEGENDRE

1. In una mia Nota precedente " Sulla fattoriale di un numero e sopra una nuova espressione di π " (*) ho dato alcune formule riguardanti le fattoriali. Considerando ora nuovamente la formula

$$n!=\prod_{p=2}^{p=p} p^{E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}}$$

dove p rappresenta il massimo numero primo $\leqq n$ e P_p la massima potenza del valore che si dà a p, contenuta in n, ho veduto che essa è suscettibile di una maggiore semplificazione, in conseguenza del teorema sulla funzione E di Legendre che forma l'oggetto della presente nota.

2. TEOREMA. — *Se* n *e* p *sono due numeri interi e positivi qualunque, tali però che si abbia* $n>p$, *si ha*

$$E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}=\frac{n-S_p}{p-1}$$

dove $E\frac{n}{p}$ rappresenta la parte intera del quoziente della divisione di n per p, P_p la massima potenza di p contenuta in n, ed S_p la somma delle cifre del numero n scritto nel sistema a base p.

DIMOSTRAZIONE. — Principiamo collo scrivere n nel sistema a base p: avremo

$$n=hp^A+kp^B+lp^C+\ldots+a,$$

e sostituendo questo suo valore nell'espressione

$$S=E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p},$$

(*) Cfr. *Periodico di Matematica*, Anno XVI, settembre-ottobre 1900.

sarà

$$S = E\,\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p} + E\,\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^2} + \ldots$$
$$\ldots + E\,\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^n}.$$

Consideriamo ora il primo di questi addendi: esso è eguale a

$$E\left(\frac{hp^A}{p} + \frac{kp^B}{p} + \frac{lp^C}{p} + \ldots - \frac{a}{p}\right),$$

dove l'ultimo termine $\frac{a}{p}$ è < 1, e quindi è, nel caso nostro, trascurabile. Abbiamo dunque

$$E\,\frac{n}{p} = hp^{A-1} + kp^{B-1} + lp^{C-1} + \ldots$$

Passiamo al secondo: esso è eguale a

$$E\,\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^2} \text{ ossia(*) } E\,\frac{E\,\dfrac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p}}{p};$$

dunque

$$E\,\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^2} = \frac{hp^{A-1} + kp^{B-1} + lp^{C-1} + \ldots}{p} =$$
$$= hp^{A-2} + kp^{B-2} + lp^{C-2} + \ldots$$

e così per tutti gli altri termini.

Riassumendo, avremo

$$E\,\frac{n}{p} + E\,\frac{n}{p^2} + \ldots + E\,\frac{n}{p^n} = hp^{A-1} + kp^{B-1} + lp^{C-1} + \ldots$$
$$\ldots + hp^{A-2} + kp^{B-2} + lp^{C-2} + \ldots,$$

e, raggruppando tutti i termini affetti dal medesimo coefficiente,

$$S = h\,(p^{A-1} + p^{A-2} + \ldots + 1) + k\,(p^{B-1} + p^{B-2} + \ldots + 1) +$$
$$+ l\,(p^{C-1} + p^{C-2} + \ldots + 1) + \ldots$$

Ora, ciascuna delle espressioni contenute fra parentesi è una progressione geometrica di ragione p, di primo termine 1, e di A, B, C... termini rispettivamente: dunque

$$p^{A-1} + p^{A-2} + \ldots + 1 = \frac{p^A - 1}{p - 1}$$
$$p^{B-1} + p^{B-2} + \ldots + 1 = \frac{p^B - 1}{p - 1} \qquad \text{ecc.}$$

(*) Si dimostra facilmente che $E\,\frac{n}{p^2} = E\,\frac{E\,\frac{n}{p}}{p}$. Infatti poniamo $n = kp + a$, dove $a < p$: avremo

$$E\,\frac{n}{p^2} = E\,\frac{kp + a}{p^2} = E\left(\frac{kp}{p^2} + \frac{a}{p^2}\right) = \frac{k}{p};$$
$$E\,\frac{E\,\frac{n}{p}}{p} = E\,\frac{E\,\frac{kp+a}{p}}{p} = E\,\frac{E\left(k + \frac{a}{p}\right)}{p} = \frac{k}{p} \qquad \text{c. d. d.}$$

Quindi sostituendo

$$S = h\frac{p^A-1}{p-1} + k\frac{p^B-1}{p-1} + l\frac{p^C-1}{p-1} + \ldots =$$

$$= \frac{hp^A - h + kp^B - k + lp^C - l + \ldots}{p-1} = \frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots - (h+k+l+\ldots)}{p-1} =$$

$$= \frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a - (h+k+l+\ldots+a)}{p-1} =$$

ossia, per quanto sopra abbiamo detto

$$S = \frac{n - S_p}{p-1}$$

c. d. d.

3. Esempi. — Sia da calcolare

$$S = E\frac{55}{2} + E\frac{55}{4} + E\frac{55}{8} + E\frac{55}{16} + E\frac{55}{32}.$$

Si ha $S_2 = 5$, quindi

$$S = \frac{55-5}{1} = 50,$$

mentre direttamente $S = 27 + 13 + 6 + 3 + 1 = 50$. Analogamente

$$S = E\frac{857}{7} + E\frac{857}{49} + E\frac{857}{343} = \frac{857-11}{6} = 141$$

e direttamente

$$S = 122 + 17 + 2 = 141.$$

$$S = E\frac{932}{5} + E\frac{932}{25} + E\frac{932}{125} + E\frac{932}{625} = \frac{932-8}{4} = 231$$

$$S = 186 + 37 + 7 + 1 = 231.$$

4. Corollario. — Posto questo, l'espressione della fattoriale

$$n! = 2^{E\frac{n}{2}+\ldots+E\frac{n}{P_2}} \cdot 3^{E\frac{n}{3}+\ldots+E\frac{n}{P_3}} \ldots p^{E\frac{n}{p}+\ldots+E\frac{n}{P_p}}$$

diventa

$$n! = 2^{\frac{n-S_2}{1}} \cdot 3^{\frac{n-S_3}{2}} \ldots p^{\frac{n-S_p}{p-1}} = \prod_{\mu=2}^{\mu=p} \mu^{\frac{n-S_\mu}{\mu-1}}.$$

5. Come applicazione della formula trovata più sopra, proponiamoci di dover calcolare la somma delle potenze successive di un numero

$$S = p + p^2 + \ldots + p^{n-1} + p^n.$$

Potrò evidentemente scrivere

$$S = \frac{p^{n+1}}{p} + \frac{p^{n+1}}{p^2} + \ldots + \frac{p^{n+1}}{p^n},$$

ed allora, applicando la formula data, ed osservando che la somma delle cifre della potenza di un numero scritta nel sistema avente a base il numero stesso, è la base medesima, sarà

$$S = \frac{p^{n+1} - p}{p-1},$$

formula nota.

6. Consideriamo finalmente la progressione geometrica

$$\div a_1 \; a_2 \ldots a_n,$$

e supponiamo di volerne trovare la somma. È evidente che potremo porre (indicando con r la ragione)

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}),$$

ossia, per la formula precedente,

$$S = a_1\left(\frac{r^n - r}{r-1} - 1\right) = a_1\frac{r^n - 1}{r-1},$$

formula nota.

Possiamo dunque considerare la progressione geometrica ordinaria come un caso particolare di un'altra progressione più generale, in cui, invece di essere costante il rapporto di due termini consecutivi, è costante la funzione E di detto rapporto.

MARIO LAZZARINI.

MATEMATICA ED ESPERANTO

L'Esperanto, la nuova lingua internazionale, continua la sua marcia trionfale, ed anche fra noi, benchè tardi, si è costituita la *Società italiana per la propaganda dell'Esperanto*. Lentamente in Italia, ma a grandi passi all'estero, la nuova lingua si propaga per mezzo di associazioni e di pubblicazioni. Nel Belgio si pubblica la *Belga sonorilo*, nella quale scrivono il capitano di artiglieria Carlo Lemaire, infaticabile propagandista, membro onorario del Circolo poliglotta di Bruxelles, il condirettore prof. Luciano Blanjean e molte delle personalità più note nella letteratura, nell'arte, nelle scienze, nell'industria e nel commercio. Nel Canadà esce *La Lumo*, illustrata, in francese, inglese ed esperanto; da poco vi si è creata una società per l'insegnamento e la propaganda dell'Esperanto fra i popoli di lingua inglese; sua sede è Keighley, presidente Joseph Rode, segretario John Ellis; altre società sono sorte da poco a Losanna ed a Ginevra nella Svizzera, a Murcia nella Spagna. In Francia è ormai vecchio *L'Esperantiste* diretto dal De Beaufront, presidente della Società esperantista francese, il quale fa ottima ed indefessa propaganda, così che sorgono sempre nuovi gruppi esperantisti (Paris, Amiens, Annecy, Besançon, Bordeaux, Boulogne-sur-Mer, Dijon, Grenoble, Lille, Hautmont, Le Havre, Lyon, Marseille, Montpellier, Nancy, Nice, Reims, Saint-Omer, Tournon) con aumento rapido di soci, con corsi settimanali d'insegnamento pubblico e gratuito, con sussidi e facilitazioni da Società e da Consigli comunali. La *Holanda pioniro* esce in Olanda; la *Lingvo internacia*, ad Upsala prima ed ora a Szegrård, in continuazione dell'*Esperantisto* fondato nel 1888; il *Rondiranto* in Bulgaria a Plovdiv; il *Bohema Esperantisto* in Boemia; il *Germana Esperantisto* e la *Revuo Internacia* a Bystrice in Moravia. La Spagna si aggiunge ora alle altre nazioni mediante la *Sociedad esperantista* fondata dal sig. Codornin ed il giornale *Esperanto* a Santander. Da noi, oltre la Società italiana p. p. E. si sono costituiti nuovi circoli, fra cui tre importanti, anche per il numero dei soci, a Palermo, a Torino ed a Napoli, dovuti all'iniziativa dei signori Nalli, Germano e Cacciapuoti, presidente ora della Società italiana; organo della Società è l'*Esperantista*, che esce mensilmente a Torino; presto, a comodo degli studiosi, saranno pubblicati in lingua italiana, grammatica e dizionario esperantista per cura dei prof. Pichi e Puccinelli di Firenze; il conte Alberto Gallois, segretario della società, presenterà a giorni la traduzione delle " Prime lezioni di Esperanto „ del prof. Cart. Ma bisogna riconoscere che, nonostante questo movimento, dovuto a pochi volonterosi, la nostra Italia è ben lenta nell'imitare le nazioni sorelle.

Vana è oramai ogni discussione sulla necessità e sull'utilità di una lingua internazionale e sui pregi dell'Esperanto, che sono già quasi universalmente conosciuti; (*) non per semplice curiosità o per desiderio di erudizione si impara questa lingua, ma per la convinzione ferma che una lingua ausiliaria si presti in modo mirabile a facilitare quei rapporti sociali ed internazionali che suscitano tanti nuovi legami di affetto e di simpatia, che tanto vantaggio portano alle relazioni commerciali e scientifiche. *A rapporti nazionali lingua nazionale, a rapporti internazionali lingua internazionale;* con questa formola pratica ben chiara l'egregio avv. Adolfo Momigliano di Torino chiude un suo articolo: " La questione della lingua nel diritto internazionale „; essa riassume lo scopo dell'Esperanto, perchè questa lingua non può mirare per ora, e qui sta la sua vera forza, che a facilitare quelle relazioni che sono il semplice portato del ragionamento e dell'attività umana, le relazioni cioè internazionali dovute al continuo progresso scientifico, allo sviluppo del commercio, all'amore del tourismo.

Ma, come giustamente osserva il sig. marchese Giuseppe Boschi in una lettera del 24 novembre 1902 al direttore dell'*Esperantista*, è indispensabile che l'impulso e l'esempio vengano dall'alto, come l'incoraggiamento. *Perciò*, egli scrive, *i diversi Ministeri degli Esteri e della Pubblica Istruzione, sopratutto nei varii Stati, dovrebbero almeno approvare pubblicamente gli sforzi di quanti concorrono alla espansione della nuova lingua internazionale, facilitare la istituzione di cattedre gratuite nelle città principali, istituire un premio, e così gli Istituti scientifici, le Camere di commercio, i Circoli filologici aprire le loro sale a conferenze su questo tema, stimolare i soci e gli alunni ad iscriversi.*

Si può forse obiettare che troppi e troppo recenti sono gl'insuccessi dei tentativi di lingue internazionali; fra tante ricorderò la *Lingua bleu* del Bolak, lo *Spokil* del De Nicolas, la *Blaia Zimondal* del Meriggi ed il *Volapük* dello Schleyer. Ma l'obiezione cade da sè per due ragioni fondamentali: 1ª perchè il *Volapük*, per parlare di quella sola che ebbe veramente un momento di grande successo, cadde, dopo un improvviso e generale entusiasmo, per la sua soverchia artificiosità, che ne rende difficile lo studio e l'applicazione; ricorderò solo a questo proposito che l'antico e profondo volapükista L. Einstein afferma, dopo aver fatto serie e ripetute prove, che è arrivato a migliori risultati col piccolo dizionario esperanto-tedesco (*Vortareto* L. 0,10) che col dizionario volapük-tedesco Schleyer (L. 6,25) coi suoi 20000 vocaboli e 200 prefissi e suffissi; 2ª perchè invece l'Esperanto colpisce gli studiosi per la sua semplicità e più ancora per la sua naturalezza, ed è riconosciuto tale, che può trarre profitto di ogni manifestazione generale della vita sociale, del progresso scientifico e commerciale.

(*) Cerretti U. " L'Esperanto. (*Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali.* Pavia, num. 26 febbraio 1902, pag. 176-190.)

È riconosciuto ormai da tutti e confermato anche da coloro che contro l'Esperanto erano mal prevenuti, che questa lingua è costruita molto razionalmente; essa sarà la disperazione degli amatori di giuochi di parole, ma non presenterà mai al lettore quelle difficoltà che s'incontrano così spesso nelle lingue delle altre nazioni; essa è cadenzata come l'italiano, ma di studio più facile per gli stranieri; ha la facilità del greco e del tedesco per la formazione di voci composte; con poche radici fondamentali dà modo di formare un ricco vocabolario, e presenta una libertà di costruzione che permette di seguire la costruzione delle varie lingue nazionali senza correre il rischio di non essere intesi.

Perciò credo che sia doveroso l'intervento favorevole dei governi e dei corpi scientifici, letterari e scolastici.

Ciò si verifica appunto in Francia, ove si contano innumerevoli attivi propagandisti, mentre è noto quanto sia caro ai francesi che la loro lingua sia la lingua d'uso per le comunicazioni diplomatiche e internazionali. Già fino dal febbraio 1899 il Navillé, socio corrispondente dell'Istituto di Francia, ha fatto proposta concreta che l'Esperanto entri nell'insegnamento secondario, come fa parte dei programmi d'insegnamento di alcune scuole commerciali; durante l'esposizione universale di Parigi del 1900 i delegati di varii congressi (7), di Camere di commercio (7), di associazioni, circoli, ed accademie scientifiche, letterarie e commerciali (48), di società di Sport, fra cui i Touring-clubs del Belgio, della Francia e della Spagna, riunitisi per la scelta di una lingua ausiliaria internazionale, ne riconobbero opportuna la scelta e la diffusione, perchè destinata, non già a sostituire nella vita individuale di ciascun popolo gli idiomi nazionali, ma a servire alle relazioni scritte ed orali fra persone di lingue materne differenti. La scelta spetterà all'Associazione internazionale delle Accademie o ad un Comitato nominato dalla Commissione generale dei delegati.

Inoltre nel settembre u. s. in una seduta della *British Association*, adunata a Belfast, l'illustre scienziato Federico Branwoll, dopo avere esposto la necessità di adottare una lingua universale, specialmente per gli usi commerciali, propose che venisse scelta la lingua italiana, rendendone obbligatorio l'insegnamento in tutte le scuole. Il Branwoll patrocina la lingua italiana non soltanto per le sue qualità grammaticali, fonetiche e grafiche, ma anche perchè la sua scelta non ecciterebbe gelosie, come se venissero scelti il francese e l'inglese. A parte la questione glottologica, conviene rilevare che appunto l'argomento più forte contro l'adozione di una lingua vivente come lingua universale ausiliaria è dato dalle rivalità e dalle gelosie internazionali (*) e certo non è la lingua italiana quella che tali gelosie potrebbe evitare. Ad ogni modo mentre è importante constatare che anche illustri personalità inglesi, non individualmente, ma come associazione, trovano necessaria l'adozione di una lingua ausiliaria universale. Vale la pena di ricordare, senza prenderla sul serio, la proposta fatta al Congresso latino, inauguratosi a Roma il 16 aprile, di adottare il latino come lingua internazionale, fabbricando a bella posta *per tutti gli indotti*, un prontuario di conversazione con 400 o anche 500 frasi.

Non è improbabile che la scelta cada sull'Esperanto, e così questa grande riforma sarà presto, spero, effettuata, come è avvenuto di tante altre, trattate in principio come chimere ed utopie.

Confido quindi che anche fra noi si seguirà con piacere l'avviamento alla soluzione di così importante questione, e che fra non molto l'insegnamento dell'Espe-

---

(*) Cfr. Ceretti U. " L'Esperanto ", pag. 181-182.

ranto sarà obbligatorio per le scuole di commercio e per le scuole tecniche con indirizzo commerciale, facoltativo almeno per tutto l'insegnamento secondario.

Esposto così sommariamente lo stato attuale dell'Esperanto, passiamo ad esaminare le relazioni della nuova lingua colla nomenclatura matematica ed in modo particolare col dizionario di matematica *(Vortaro esperanta matematica)*.

Già fino dal 30 maggio 1900 il Dr. Zamenhof scriveva al chr. prof. Méray dell'università di Digione: *la pubblicazione di un dizionario matematico* **completo** *in Esperanto sarà una cosa utilissima;* il Méray ha patrocinato invece caldamente l'utilità di un vocabolario esperanto per ciascun ramo della scienza umana, ed il Funtier attende già a compilare, in collaborazione con due suoi colleghi, un dizionario tecnico per medicina e chirurgia. Opportuno è quindi studiare quale sia la via più conveniente per raggiungere lo scopo in modo soddisfacente per gli scienziati delle varie nazionalità.

Nello studio della nuova lingua, la parte difficile, se pur difficile può chiamarsi, giacchè la difficoltà cesserà per solo effetto di memoria, è l'uso sicuro e pronto dei prefissi e dei suffissi; perciò anche ai meno istruiti riuscirà tanto più facile e chiaro l'uso dell'Esperanto, quanto maggiore numero di vocaboli già formati conterrà il dizionario comune, il quale, completo quanto più si potrà, dovrà necessariamente essere a disposizione degli studiosi prima di stabilire un dizionario tecnico-scientifico qualunque.

Dato pure che ciò sia fatto o si faccia, un grave inconveniente si presenta subito per la compilazione del *Vortaro matematica:* le lingue delle varie nazioni non sono perfettamente d'accordo nella nomenclatura scientifica dei varii rami delle matematiche; alcune non hanno le voci corrispondenti a quelle usate da altre; vocaboli, che sembrano corrispondenti, hanno invece significati diversi. Così, ad esempio, i francesi non hanno le voci corrispondenti ad *addendo, sottraendo, minuendo, facoltà*; da poco è introdotto il vocabolo *mantisse*; (*) in tedesco *gleichung* serve per indicare *uguaglianza* ed *equazione,* quantunque nel primo significato sia preceduto dall'aggettivo *identische*; si dice pure *potenzieren, radizieren,* in luogo delle frasi *innalzare a potenza, estrarre la radice*; in geometria le voci *égalité* ed *équivalence* hanno per corrispondenti in tedesco *congruenz* e *gleicheit*; (**) in inglese *cypher* significa anche lo zero, che presso tutte le altre nazioni ha un nome speciale diverso da cifra (*zéro o rien, zero o null, cero o nada,* ecc.)

Perciò conviene anzitutto stabilire prima l'accordo sulla nomenclatura, il che si tenta appunto di fare, con speranza di riuscita, colla pubblicazione del dizionario di matematica secondo la proposta fatta dall'illustre prof. Peano al 2° congresso nazionale dei professori di matematica. (***) Alle importanti discussioni, cui tale pubblicazione darà luogo, prenderanno parte, è a sperarsi, matematici di nazionalità diverse; così alla compilazione del *Vortaro matematica* basterà una sola persona, il Peano stesso, abile esperantista, poichè basterà dare, per ogni vocabolo definitivamente scelto, la traduzione in Esperanto. Ciò non presenterà molte difficoltà, giacchè il Dr. Zamenhof ha già dato la traduzione di molti vocaboli accettando e lievemente modificando i nomi scientifici già usati internazionalmente sotto forma greca o latina; altri potrà compiere il non lieve lavoro della tradu-

---

(*) M. Dauzat, *Éléments de méthodologie mathématique.* Paris, 1901, pag. 470.

(**) Cfr. A. Tafelmacher, " Questions et remarques diverses „ 8°. (*L'inseignement mathématique.* Paris, 1901, pag. 365.) Cfr. Bardellé " Sur une question de terminologie „. (*L'inseignement mathématique.* Paris, 1901, pag. 452-54.)

(***) Cfr. U. Ceretti, " Relazione del 2° congresso nazionale di matematica „. pag. 267-268. (*Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali.* Pavia, 1901, N. 21, pag. 258-287.)

zione generale, seguendo anche in questa la disposizione proposta dal Peano, e cioè i varii termini matematici siano aggruppati sistematicamente in corrispondenza delle varie parti, in cui si dividono la matematica elementare e la superiore, in modo cioè che ciascuna parte contenga i termini che vi si riferiscono, disposti in ordine alfabetico, con la loro significazione esatta, l'etimologia e un accenno alle variazioni subite, senza entrare affatto nello svolgimento delle singole teorie.

Tutto peraltro non è a farsi, perchè il dizionario comune della lingua Esperanto, benchè lontano dall'essere completo, contiene già parecchi dei vocaboli speciali, che si usano nelle matematiche.

I numeri cardinali dall'1 al 10 sono dati da *unu, du, tri, kvar, kvin, ses, sep, ok, naŭ, dek; nul* è zero; *cent, mil, milion, miliard*, hanno significati facili a comprendersi; i nomi corrispondenti a decina, centinaio, migliaio, ecc. si ottengono dando ai nomi dei numeri *dek, cent, mil*, ecc. la desinenza *o* del sostantivo, così: *deko, cento, milo*, ecc. I numeri superiori a dieci si formano in modo semplice riunendo fra loro convenientemente i primi dieci numeri e le voci *cent, mil*, ecc. così: *dudek* = 20, *dekdu* = 12, *tridek* = 30, *kvincent* = 500, *dudek-unu* = 21, *mil okcent tridek-tri* = 1833, *mil naŭcent-tri* = 1903. Dando ai numeri cardinali la caratteristica *a* si ricavano i numerali ordinali: *unua* = primo, *dua* = secondo, *oka* = ottavo, *sesdeka* = sessantesimo, *sepcentkvindeka* = settecentocinquantesimo. Per mezzo del suffisso *obl* e delle caratteristiche *o* ed *a* si formano i sostantivi e gli aggettivi moltiplicativi: *la duoblo* = il doppio, *duobla* = duplice, *la kvaroblo* = il quadruplo, *kvarobla* = quadruplice, ecc. Le unità frazionarie si ottengono dai numeri cardinali per mezzo del suffisso *on*, al quale si fa seguire, secondo i casi, la caratteristica *o*, o l'altra *a*; così si ha: *la kvarono* = il quarto, la quarta parte, *la kvinono* = il quinto, la quinta parte, *tricent-sesdek-kvinono* = trecentosessantacinquesima parte, *la duona franko* = la mezza lira, *la duona litro* = il mezzo litro.

La lingua italiana non ha voci proprie, come la lingua latina, per i distributivi e si usano le perifrasi: ad uno ad uno, a due a due, ad uno per volta, ecc.; a queste corrispondono in Esperanto voci proprie che si ottengono dai cardinali, per mezzo del suffisso *op* e delle caratteristiche *a* ed *e* secondo che si vuole l'aggettivo o l'avverbio: *duope* = a due, *kvinope* = a cinque, *multope* = a molti. Così pure gli avverbi numerali che nella lingua latina hanno una forma propria, e che si formano in italiano col sostantantivo *volta*, in francese con *fois*, in tedesco con *mal*, in lingua spagnola con *vuelta*, si ottengono in Esperanto per mezzo della radicale *foj* = volta: *unufoje* = una volta, *kvarfoje* = quattro volte.

Partumo significa frazione, che si indica facendo precedere il numero delle unità frazionarie (numeratore) al nome della unità stessa (denominatore): *tri kvaronoj* = tre quarti, *kvin trionoj* = cinque terzi.

Di molti altri vocaboli la traduzione riesce facile seguendo le norme semplici della grammatica esperantista; di altri si potranno creare le voci corrispondenti, per mezzo del principio seguito dal Dr Zamenhof nella scelta delle radici. Così, se si hanno in un piano due assi perpendicolari X'X e Y'Y che si incontrino in O, si sa che i punti di OX rappresentano i numeri reali positivi, quelli di OX' i numeri reali negativi; quelli di OY e di OY' rispettivamente gli imaginari puri positivi e negativi, ed i numeri complessi tutti i rimanenti punti del piano. Ora, seguendo il concetto esposto dal sig. Bardellé (*), di adottare nella nuova lingua denominazioni che rispondano maggiormente alla realtà delle cose, si possono

(*) Cfr. Bardellé, "L'Esperanto et les mathématiciens". (*L'enseignement mathématique*. Paris, 1901, pag. 444-5.)

creare queste denominazioni: numeri reali positivi = numeri orizzontali crescenti = *nombroj horizontalaj altigantaj*; numeri reali negativi = numeri orizzontali decrescenti = *nombroj horizontalaj falantaj*; numeri imaginari positivi = numeri verticali crescenti = *nombroj vertikalaj altigantaj*; numeri imaginari negativi = numeri verticali decrescenti = *nombroj vertikalaj falantaj*; numeri complessi = numeri obliqui = *nombroj oblikvaj*; maggiore = $>$ = è più grande che = *superas*; minore = $<$ = è più piccolo che = *inferas*.

Ai matematici esperantisti specialmente spetta di completare la traduzione dei vocaboli oggi in uso nei varii rami delle matematiche; io mi limito a presentare il breve saggio che segue, nella speranza che tanti altri, di me più valenti, vogliano portarvi il contributo autorevole del loro sapere, della loro energia.

Parte generale.

assioma, aksiomo
assurdo, absurdo (u)
" absurda (ag)
caratteristica, karakteriza
caratterizzare, karakterizi
condizione, kondico
costante, konstanta
dedurre, deduki
deduzione, deduko
definire, defini
definizione, defino
dimostrare, demontri
dimostrazione, demontreco
elemento, elemento
evidente, evidenta
evidenza, evidenteco
essere sufficiente, sufiĉi
fondamento, fundamento
generale, ĝenerala (ag.)
indipendente, maldependanta (ag.)
ipotesi, hipotezo
legge, leĝo
lemma, lemmo
necessario, necesa
negare, nejesi
negazione, nejeseco
osservare, rimarki
osservazione, rimarko
postulato, postulato
ricerca, serĉo, serĉado
scienza, scienco
simbolo, simbolo
sufficiente, sufiĉa
supporre, suspekti
tesi, konkludo
teorema, teoremo
teoria, teorio
teorico, teoria
variabile, malkonstanta

Aritmetica.

abbreviazione, mallargigo
addendo, sumato
addizionare, sumi
addizione, sumado
altezza, alto alteco
alternare, alterni
anno, jaro
apparente, ŝajna
applicazione, almeto
approssimato, proksimata
ara, aro
aritmetica, aritmetiko
calcolabile, kalkulebla
calcolare, kalkuli
calcolo, kalkulado
capacità, kapableko
centi, centi
chilo, kilo
cifra, ciforo
collezione, kolekto
comune, komuna
conseguenza, sekvo
contare, kunkalkuli
cubo, kubo
deca, deka
deci, deci
differenza, diferencio
diretta, direkta
disuguaglianza, malegaleco
dividendo, dividato
dividere, dividi
divisibile, dividebla
divisione, dividado
divisore, dividanto
esattezza, ĝusteco
esatto, ĝusta
esempio, ekzemplo
espressione, esprimo
estrarre la radice, radikigi (?)
ettara, hektaro
etto, hekto
fondamentale, fundamenta

frazione, partumo
grammo, gramo
grandezza, grandeco
gruppo, grupo
illimitato, senlima
innalzare a potenza, potencigi
infinità, multego
insolubile, nesolvebla
interesse, procento
inversa, reciproka
larghezza, largo largeco
limitato, lima
limite, limo
lira, franco
litro, litro
logaritmo, (?)
lunghezza, longo, longeco
maggiore, plimulta
massimo, maksimum
medio, meza
mese, monato
metrico, metra
metro, metro
metro cubo, metro kuba
metro quadrato, metro kvadrata
milli, mili
minimo, minimum
minore, malplimulta
minuendo, (?)
minuto, minuto
miria, miria
miscuglio, miksajo
misura, mezuro
misurare, mezuri
moltiplicando, multigato
moltiplicare, multigi
moltiplicatore, multiganto
moltiplicazione, multigado
multiplo, dividebla
non divisibile, nedividebla
non multiplo, nedividebla
numerazione, nombrado
numerale, nombra
numero, nombro
numero impari, neparnombro
numero pari, parnombro
operazione, operacio
ora, horo
ordine, ordo
periodico, perrioda
periodo, periodo
periodicità, periodeco
peso, pezo
potenza, potenco
primo, unuobla
problema, problemo
prodotto, produktaĵo
profondità, profundo, profundeco
proporzione, proporcio
proporzionale, proporcia
proporzionalità, proporcieco
proprietà, propreco
prova, pruvo
quadrato, kvadrato
quantità, kvanto
quintale, centkilo
quoto, ?
reciproco, reciproka
radicale, radikparto
radice, radiko
radice cubica, radiko cuba
radice quadrata, radico kvadrata
rapporto, rilato
regola, regulo
resto, resto
risolvere, solvi
risoluzione, solvo
risultato, rezultato
sconto, (?)
secondo, sekundo
semplice, simpla
semplificare, plisimpligi
sistema, sistemo
sociale, societa
società, societo
solubile, solvebla
soluzione, solvo
somma, sumo
sottomultiplo, subdividebla
sottraendo, deprenato
sottrarre, depreni
sottrazione, deprenado
sta a, rilatas
stare in rapporto, rilati
superficie, suprajo
tempo, tempo
tonnellata, milkilo
totalità, tuteco
trasformare, aliformigi
trasformazione, aliformigo
uguaglianza, egaleco
uguagliare, egaligi
uguale, egala
unità, unuo
valore, valoro
volume, amplekso
vuoto, senenhava
zero, nulo

Geometria elementare.

altezza, alteco
angolo, angulo
angolo acuto, angulo akra
angolo adiacente, angulo apuda
angolo alterno, angulo alterna
angolo complementare, angulo komplementa
angolo consecutivo, angulo intersekva

angolo corrispondente, angulo korespondanta
angolo interno, angulo interna
angolo ottuso, angulo oktusa (?)
angolo piatto, platangulo
angolo retto, angulo rekta
angolo supplementare, angulo subplementa
arco, arko
asimmetrico, nesimetria
baricentrico, barocentra
baricentro, barocentro
bisecare, mezesekci
bisettrice, mezesekcanta
centro, centro
cerchio, rondo
cilindro, cilindro
circocentro, ĉirkaŭcentro
circocerchio, ĉirkaŭrondo
circoscritto, ĉirkaŭskribata
circoscrivere, ĉirkaŭskribi
concentrico, koncentra
coincidente, koincidanta
coincidere, koincidi
congiungere, kunigi
congiunzione, kunego
conica, konusa
cono, konuso
contatto, kontacto
corda, ŝnuro
corona, krono
costruire, konstrui
costruzione, konstruo
curvatura, kurbeco
diagonale, diagonalo
diametro, diametro
distanza, interspaco
dualità, dueco
ellisse, elipso
equatore, ekvatoro
equivalente, ekvivalenta
equivalenza, ekvivalenteco
esagono, sesangulo
estremo, ekstremo
excentro, ekscentro
excerchio, eksrondo
fascio, fasko
fuoco, fokuso
figura, figuraĵo
geometria, geometrio
geometrico, geometria
incentro, encentro
incerchio, enrondo
inclinazione, klino, klineco
inscritto, enskribata
inscrivere, enskribi
iperbole, hiperbolo
ipotenusa, hipotenuzo
lato, latuso (?)
linea, linio
linea curva, linio kurba
linea parallela, linio paralela
linea perpendicolare, linio perpendikulara
linea obliqua, linio oblikva
linea orizzontale, linio horizontala
linea retta, linio rekta
linea verticale, linio vertikala
mediana, mezalinio
mediocerchio, mezarondo
medioscritto, mezeskribata
medioscrivere, mezeskribi
meridiano, meridiano
origine, deveno,
parabola, parabolo
parallelepipedo, paralelopiedo
parallelismo, paralelismo
parallelogrammo, paralelogramo
pentagono, kvinangulo
perimetro, perimetro
piano, plato
piede, piedo
piramide, piramido
planimetria, platometrio
polare, polusa
poligono, multangulo
polo, poluso
prisma, prismo
punto, punkto
punto di mezzo, mezapunkto
quadrangolo, kvarangulo
quadrato, kvadrato
raggio, radio
rettangolo, rektangulo
rettificazione, rektigo
rettificare, rektigi
rotazione, rulado
secante, sekcanta
simmetria, simetrio
simmetrico, simetria
sfera, sfero
simile, simila
similitudine, simileco
spazio, spaco
stereometria, stereometrio
superficie, supraĵo
superficie piana, plata supraĵo
superficie curva, kurba supraĵo
tangente, kontaktarekto
trasformare, aliformiĝi
trasformazione, aliformiĝo
trapezio, trapezo
trasversale, laŭlarĝa
triangolo, triangulo
unione, huniĝo
unire, huniĝi
vertice, verto

Matematiche superiori.

algebra, algebro
algebrico, algebra
armonico, harmonia
anarmonico, neharmonia
classe, klaso
equazione, egalajo
escludere, eksteni
escluso, kuza
facoltà, fakultato
formula, formulo
formulario, formularo
funzione, funkcio
grado, grado
identico, identa
identità, identeco
imaginaria, malreala
includere, inteni
incluso, malkuza
integrale, integralo
irrazionale, malracia
lettera (alfab.), litero
negativo, malpozitiva
positivo, pozitiva
razionale, racia
reale, reala
serie, serio
successione, sekvantaro
trigonometria, trigonometrio
trigonometrico, trigonometria.

C. Ceretti.

DELLE CONGRUENZE BINOMIE RISPETTO AI NUMERI PRIMI DELLA FORMA $2^m q + 1$ ESSENDO q UN NUMERO PRIMO

Sulla risoluzione della congruenza binomia rispetto a un numero primo della forma $2q+1$, $4q+1$, q essendo un numero primo, trattò già il prof. R. Alagna nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* (*) Nel caso generale di un modulo della forma $2^m q + 1$ ($m > 0$, q primo e dispari, l'unità non esclusa) le radici di una congruenza binomia possono ottenersi in una maniera notevole, onde non crediamo inutile trattarne qui brevemente.

Incominceremo con alcune osservazioni sui numeri della forma $2^m q + 1$, e col dare le condizioni necessarie e sufficienti perchè un numero di tal forma sia primo.

1. *I numeri primi della forma* $2q+1$, *ammettono come radice primitiva il numero* 2, *o* -2, *secondo che* q *è* $\equiv 1$ *o* $\equiv -1$ (mod. 4).

I numeri primi della forma $4q+1$ *hanno la radice primitiva* 2.

I numeri primi della forma $2^m + 1$ *ammettono come radici primitive i numeri* 3, 5, 6, 10.

I numeri della forma $2^m q + 1$, *con* $m > 1$ *e*

$$q > \frac{9^{2^{m-2}} - 1}{2^{m+1}}$$

hanno la radice primitiva 3.

(*) T. XIII (1899) pp. 99-129.

Questi teoremi son noti, si veda p. es. la *Teoria delle congruenze* del Tchebycheff (trad. Massarini) e la *Théorie des Nombres* del Cahen.

Il Wertheim ha pubblicato a varie riprese delle tavole delle più piccole radici primitive dei numeri primi della forma $2^m q + 1$, che non superano 10000:

WERTHEIM. — *Primitive Wurzeln der Primzahlen* $2^m q + 1$, *bei welchen* $q = 1$, *oder gleich einer ungeraden Primzahl ist.* (*Zeitschrift f. math. u. natur. Unterricht*, 25, 1894; pp. 81-97).

Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g *aller ungeraden Primzahlen* p *unter 3000* (*Acta Math.* t. 17, pp. 315-320).

Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^n q^\lambda + 1$, *in welcher* $q = 1$, *oder eine ungerade Primzahl ist. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln* g *aller Primzahlen* p *zwischen 3000 und 10000.* (*Acta Math.* t. 20, 1896, pp. 143-157).

Berichtigungen zur Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln unter 10000 (*Acta Math.* t. 22, 1898).

Come conseguenza di un teorema, segnalato dal Lucas al congresso di Clérmont-Ferrand (1876) dell'*Association française*, si possono dimostrare i seguenti teoremi, quasi tutti enunciati dal Lucas stesso.

Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero della forma $2q+1$ *sia primo, è che divida il numero* $2^q + 1$, *se* $q \equiv 1 \pmod{4}$ *e il numero* $2^q - 1$ *se* $q \equiv -1 \pmod{4}$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $4q+1$ *sia primo, è che divida uno dei due numeri*

$$2^q + 2^{\frac{q+1}{2}} + 1, \qquad 2^q - 2^{\frac{q+1}{2}} + 1.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $2^{2^n}+1$ *sia primo è che divida il numero* $3^{2^{2^n-1}} + 1$.

Questo teorema è stato enunciato dal Lucas nella prefazione alla sua "Théorie des Nombres", ma ivi è incorso un errore di stampa.

Il teorema fu dimostrato dal Proth nella *Nouvelle Corréspondence de Mathématique*, e ultimamente dall'Hurvitz nell'*Intermédiaire des Mathématiciens.*

Se alla base 3 si sostituisce il 5 e il 10, i teoremi che si ottengono si devono al PÉPIN (*Comptes Rendus*, 1877, 2° sem. pag. 329).

Noi aggiungiamo il seguente altro teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero della forma $2^m q + 1$ *sia primo, essendo* $m > 1$ *e* q *primo e* $> \frac{9^{2^{m-2}} - 1}{2^{m+1}}$, *è che divida il numero* $3^{2^{m+1}q} + 1$.

C'intratterremo a lungo su questo argomento e su altri analoghi in una prossima memoria sull'applicazione del teorema di Fermat alla ricerca dei grandi numeri primi.

2. Sia a una radice primitiva del numero primo $p = 2^m q + 1$.

All'esponente 2^r $(r = 0, 1, 2, \ldots, 2^m)$ appartengono i numeri

$$a^{2^{m-r}p} \equiv \alpha_r, \qquad \alpha_r^3, \qquad \alpha_r^5, \ldots, \alpha_r^{2^r-1}. \tag{1}$$

All'esponente $2^r q$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, 2^m)$ appartengono i numeri

$$a^{2^{m-r}} \equiv \beta_r, \qquad \beta_r^{t_2}, \qquad \beta_r^{t_3}, \ldots, \beta_r^{t_{2^{r-1}(q-1)}}, \tag{2}$$

ove t_i è un numero inferiore a $2^r q$ e primo con $2^r q$, cioè un numero dispari non divisibile per q.

3. Ciò posto è chiaro che le radici della congruenza

$$x^{2^r} \equiv 1 \pmod{p} \tag{3}$$

sono i minimi resti dei numeri

$$\alpha_r, \qquad \alpha_r^2, \qquad \alpha_r^3, \ldots, \alpha_r^{2^r}.$$

Di questi, quelli cogli esponenti dispari dànno le radici della congruenza $x^{2^{r-1}} \equiv -1$ (mod. p), e quelli con esponenti pari dànno le radici della congruenza $x^{2^r} \equiv 1$ (mod. p). Quali radici appartengono all'esponente 2^s $(s \leq r)$? Si risponderà subito a questa domanda se si esprimono le potenze di α_r per le potenze della radice primitiva a di p, mostrando come le radici della (3) possano ottenersi combinando, in tutti i modi possibili, r radici opportunamente scelte della data.

Poichè il numero a appartiene all'esponente $2^m q$, la potenza $a^{2^{m-s}q}$ appartiene all'esponente 2^s. Poniamo

$$\mu_s \equiv a^{2^{m-s}} \pmod{p}.$$

Le radici della congruenza data sono, oltre l'unità, i

$$\binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \ldots + \binom{r}{r} = 2^r - 1,$$

minimi resti dei numeri

$$(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^q,$$

essendo $i_1, i_2 \ldots i_k$ una combinazione qualunque a k a k dei numeri $1, 2, \ldots r$, e k prendendo tutti i valori da 1 a r.

Infatti si ha

$$(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^{2^r q} \equiv (a^{(2^{m-i_1}+2^{m-i_2}+\ldots+2^{m-i_k})q})^{2^r} \equiv (a^{2^m q})^{2^{r-i_1}+2^{r-i_2}+\ldots+2^{r-i_k}} \equiv 1. \pmod{p}$$

Inoltre perchè due numeri $(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^q$ e $(\mu_{j_1} \mu_{j_2} \ldots \mu_{j_k})^q$ siano congrui rispetto a p occorre che gli esponenti

$$2^{m-i_1} + 2^{m-i_2} + \ldots + 2^{m-i_n}, \quad 2^{m-j_1} + 2^{m-j_2} + \ldots + 2^{m-j_n}$$

siano congrui rispetto a 2^m, e quindi i numeri

$$2^{r-i_1} + 2^{r-i_2} + \ldots + 2^{r-i_n}, \quad 2^{r-j_1} + 2^{r-j_2} + \ldots + 2^{r-j_n}$$

congrui rispetto a 2^r. Essendo però

$$2^{r-i_1} + 2^{r-i_2} + \ldots + 2^{r-i_k} \leq 2^{r-1} + 2^{r-2} + \ldots + 2^{r-k} =$$
$$= 2^{r-k}(2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1) = 2^{r-k}(2^k - 1) \leq 2^r - 1$$

i detti due numeri, se fossero congrui (mod. 2^r), dovrebbero anche essere eguali. Questa eguaglianza però non può aver luogo, poichè ognuna delle $2^r - 1$ combinazioni a k a k ($k = 1, 2 \ldots r$) dei numeri $1, 2 \ldots r$ fornisce la rappresentazione nel sistema binario di un numero inferiore a 2^r, e viceversa un numero inferiore a 2^r può sempre e in un sol modo rappresentarsi nel sistema binario. Dunque i numeri

$$(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^q$$

e l'unità sono tutte le soluzioni della congruenza (3).

Ora è chiaro che una soluzione $(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})$ appartiene all'esponente 2^s, se s è il più alto indice che in essa figura, e perciò tutte le soluzioni della congruenza data appartenenti all'esponente 2^s sono fornite dai 2^{s-1} numeri

$$(\mu_s \, \mu_{s_1} \mu_{s_2} \ldots \mu_{s_h})^q$$

che si ottengono combinando con μ_s in tutti i modi possibili i numeri

$$\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{s-1}.$$

4. Le radici della congruenza

$$x^{2^r q} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p) \tag{4}$$

sono (n. 2) i minimi resti dei numeri

$$\beta_r, \beta^2_r, \ldots, \beta_r^{2^r q}$$

o anche i minimi resti dei numeri

$$\mu_0^h \mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k} \tag{5}$$

essendo $\mu_0 \equiv a^{2^m}$ (mod. p) ed h percorrendo il sistema dei numeri $0, 1, 2, \ldots, q-1$ per ogni combinazione a k a k ($k = 0, 1, 2, \ldots, r$) dei numeri $1, 2, \ldots, r$. Infatti

$$(\mu_0^h \mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^{2^r q} \equiv a^{(2^m h + 2^{m-i_1} + 2^{m-i_2} + \ldots + 2^{m-i_n}) 2^r q} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Inoltre se due numeri (5) fossero congrui (mod. p) avrebbe luogo la congruenza

$$2^m h + 2^{m-i_1} + 2^{m-i_2} + \ldots + 2^{m-i_k} \equiv 2^m h' + 2^{m-j_1} + 2^{m-j_2} + \ldots + 2^{m-j_n} \ (\text{mod. } 2^m q)$$

e ne seguirebbe dapprima l'eguaglianza

$$2^{m-i_1} + 2^{m-i_2} + \ldots + {}^{m-i_k} = 2^{m-j_1} + 2^{m-j_2} + \ldots + 2^{m-j_n}$$

poi

$$h = h'.$$

Dunque i numeri (5) sono tutti incongrui (mod. p) e però forniscono tutte le radici della congruenza (4).

Le soluzioni appartenenti all'esponente $2^s q$ sono i $2^{s-1}(q-1)$ numeri

$$\mu_0^h \mu_s \mu_{s_1} \mu_{s_2} \mu_{s_r},$$

essendo $s_1, s_2, \ldots s_r$ una qualunque combinazione dei numeri $1, 2, \ldots s-1$ e percorrendo h il sistema dei numeri $1, 2, \ldots, q-1$.

5. Per la possibilità della congruenza

$$x^{2^r} \equiv \text{N} \qquad (\text{mod. } p) \tag{6}$$

è necessario e sufficiente che sia

$$N^{2^{m-r}q} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

cioè (n. 4)

$$N \equiv \beta^{\rho}_{m-r},$$

essendo ρ un numero $\leq 2^{m-r}q$, e però anche

$$N \equiv \alpha^{2^r \rho}.$$

Dunque α^ρ è una soluzione della congruenza data. Posto

$$\alpha^\rho \equiv \xi \ (\text{mod. } p),$$

è evidente che tutte le soluzioni della congruenza sono fornite dai numeri

$$\xi \, (\mu_{i_1} \mu_{i_2} \mu_{i_3} \dots \mu_{i_k})^q$$

essendo $\mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_k}$ una combinazione qualunque a k a k ($k=0,1,2,\dots,r$) dei numeri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$.

6. Analogamente perchè la congruenza

$$x^{2^r q} \equiv N \quad (\text{mod. } p) \tag{7}$$

sia possibile occorre e basta che sia soddisfatta la condizione

$$N^{2^{m-r}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Se ciò avviene, sarà (n. 3)

$$N \equiv \alpha^{\sigma}_{m-r} \equiv \alpha^{2^r q \sigma} \quad (\text{mod. } p)$$

e però $\eta \equiv \alpha^\sigma$ è una soluzione della congruenza (7). E allora tutte le soluzioni sono date dai numeri

$$\eta \mu_0{}^h \mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_k},$$

per tutti i valori di h da 0 a $q-1$ e per tutte le combinazioni degli indici $1, 2, \dots r$.

7. Consideriamo ora in generale la congruenza

$$x^n \equiv N \quad (\text{mod. } 2^m q + 1).$$

Perchè sia possibile, occorre e basta che sia

$$N^{\frac{2^m q}{\omega}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2^m q + 1),$$

essendo ω il massimo comun divisore di n e $2^m q$.

Sarà $\omega = 2^r$ o $2^r q$, e se la condizione precedente è soddisfatta, la congruenza si ridurrà rispettivamente alle due altre, risolute nei n[i]. 5, 6,

$$x^{2^r} \equiv N^\varphi, \qquad x^{2^r q} \equiv N^\psi \quad (\text{mod. } p)$$

dove φ e ψ sono determinati dalle congruenze

$$\frac{n}{2^r}\varphi - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 2^{m-r} q), \qquad \frac{n}{2^r q}\psi - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 2^{m-r}).$$

8. Il prof. Alagna nel citato lavoro, dimostra che se $4q+1$ è un numero primo, si ha

$$q^q - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4q+1).$$

Il teorema fu proposto dal sig. Bikmore nel periodico inglese *The Educational Times* (1896). In quali casi ha luogo la congruenza

$$q^q - 1 \equiv 0 \pmod{2^m q + 1}?$$

Si risponde subito a questa domanda non appena si sappia a quale esponente appartenga il numero 2, rispetto al numero primo $2^m q+1$. Poichè

$$2^m q \equiv -1 \pmod{2^m q + 1}$$

si ha

$$(2^m q)^q \equiv -1) \pmod{2^m q + 1}$$

e però, perchè sia

$$q^q \equiv 1 \pmod{2^m q + 1}$$

è necessario e basta che si abbia

$$2^{mq} \equiv -1 \pmod{2^m q + 1}. \tag{8}$$

Da ciò segue, che l'esponente cui appartiene il numero 2. deve essere pari. Se questo esponente è $2^\rho \omega$ ($\omega = 1$, o q), sarà

$$2^{2^{\rho-1}\omega} \equiv -1 \pmod{2^m q + 1},$$

quindi

$$m = 2^{\rho-1} \mathrm{M}$$

essendo M un numero dispari.

Perchè dunque, abbia luogo la congruenza

$$q^q \equiv 1 \pmod{2^m q + 1} \tag{9}$$

è necessario e sufficiente che la parità del gaussiano di 2 *rispetto a* $2^m q+1$ *sia doppia della parità di* m.

Per $m=1$, $m=2$ si deducono allora subito le due proposizioni:

1. *Se* q *è un numero primo* $\equiv 1 \pmod{4}$ *e* $2q+1$ *è primo, si ha sempre*

$$q^q \equiv 1 \pmod{2q + 1}$$

e se $q \equiv -1 \pmod{4}$ *si ha sempre*

$$q^q \equiv -1 \pmod{2q + 1}$$

Se $4q+1$ *è primo si ha sempre*

$$q^q \equiv 1 \pmod{4q + 1}.$$

M. Cipolla.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 635 E 636

635. *Il luogo geometrico dei punti d'incontro delle coppie di trasversali di un triangolo isoscele, che, partendo dagli estremi della base staccano due segmenti eguali, l'uno a partire dalla base, l'altro a partire dal vertice, è il sistema di una ellisse ed una iperbole; calcolarne gli assi e dire in qual caso l'ellisse si riduce a cerchio e l'iperbole diviene equilatera.*

Gallucci.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes di Susa.

Assumendo per assi coordinati la retta a cui appartiene la base CA del triangolo isoscele (*asse x*) e quella cui appartiene l'altezza BH, relativa alla base (*asse y*) e posto che $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HB}$ sieno le direzioni positive, se Q_1, Q_2 son punti della retta BA e P_1, P_2 della retta BC, tali che sia

$$(BQ_1) = (BQ_2) = (CP_1) = (CP_2) = m$$

Si ha, ponendo $\overline{HA} = a$, $\overline{HB} = b$:

$$P_1, P_2 \equiv \left(\frac{-a(c \mp m)}{c}, \ \frac{\pm bm}{c}\right)$$
$$Q_1, Q_2 \equiv \left(\frac{\pm am}{c}, \ \frac{b(c \mp m)}{c}\right)$$

dove, per semplicità, si è posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Essendo $A \equiv (a, o)$, $C \equiv (-a, o)$ si hanno per le rette AP_1 (AP_2) e CQ_1 (CQ_2) le equazioni:

$$\pm m(-bx + ay + ab) = 2acy$$
$$\pm m(\ \ bx + ay + ab) = c(bx - ay + ab),$$

dalle quali, eliminando m, ed accoppiando i segni nei due modi possibili, si hanno le equazioni, che rappresentano il luogo cercato:

$$b^2x^2 + 3a^2y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0$$
$$b^2x^2 - 4abxy - a^2y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Perciò il luogo considerato si compone di una ellisse e di una iperbole; quella si riduce ad un circolo se è $b = a\sqrt{3}$ (cioè *se il triangolo dato è equilatero*), questa si riduce ad una iperbole equilatera se è $b = a$ (cioè *se il triangolo dato è isoscele rettangolo*).

Altra risoluzione del sig. Barisien.

636. *L'inviluppo dei cerchi descritti sulle corde di una conica* $C^{(2)}$ *che passano (prolungate, se il punto è esterno) per uno stesso punto P come diametri, è una quartica bicircolare se* $C^{(2)}$ *ha centro; è una cubica circolare se* $C^{(2)}$ *è parabola. Se P è sopra* $C^{(2)}$ *lo inviluppo è razionale (teorema noto). Se* $C^{(2)}$ *è cerchio, l'inviluppo è in generale un ovale di Cartesio. Esaminare i casi particolari nei quali P è all'infinito oppure è P centro di* $C^{(2)}$.

Retali.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes di Susa.

1. Prendendo per origine delle coordinate ortogonali il punto P e lasciando indeterminata la direzione degli assi, sieno rispettivamente

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$
$$y = mx \qquad (2)$$

l'equazione di $C^{(2)}$ e quella di una retta del fascio di centro P.

Le coordinate dei punti $M_1 \equiv (x_1, y_1)$ ed $M_2 \equiv (x_2, y_2)$ d'incontro delle (1) (2) sono date dalle formule

$$x_1, x_2 = \frac{1}{\beta}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - a_{33}\beta}\right);$$
$$y_1 = mx_1; \qquad y_2 = mx_2,$$

dove, per semplicità, è stato posto

$$\alpha = a_{13} + m a_{23}\,; \qquad \beta = a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2. \tag{3}$$

Il punto medio M_0 del segmento M_1M_2 ha per coordinate

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{\alpha}{\beta}\,; \qquad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = -\frac{m\alpha}{\beta}$$

ed inoltre è

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \frac{1+m^2}{4}(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{\beta^2}(1+m^2)(\alpha^2 - a_{33}\beta),$$

e quindi il circolo avente per diametro M_1M_2 è rappresentato dalla equazione

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(y + \frac{m\alpha}{\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}(1+m^2)(\alpha^2 - a_{33}\beta)$$

cioè

$$\beta(x^2 + y^2) + 2\alpha(x + my) + a_{33}(1 + m^2) = 0$$

e, tenendo conto delle (3):

$$\begin{aligned} f(x, y, m) = m^2 &\left\{a_{22}(x^2 + y^2) + 2a_{23}y + a_{33}\right\} + \\ + 2m &\left\{a_{12}(x^2 + y^2) + a_{23}x + a_{13}y\right\} + a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Poichè si ha

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 2m\left\{a_{22}(x^2 + y^2) + 2a_{23}y + a_{33}\right\} + 2\left\{a_{12}(x^2 + y^2) + a_{23}x + a_{13}y\right\} = 0,$$

dalla equazione

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \tag{5}$$

si ha

$$m = -\frac{a_{12}(x^2 + y^2) + a_{23}x + a_{13}y}{a_{22}(x^2 + y^2) + 2a_{23}y + a_{33}}$$

e quindi l'inviluppo richiesto, che si ottiene eliminando m fra le (4), (5), sarà rappresentato dalla equazione

$$\begin{aligned} \left\{a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + a_{33}\right\}&\left\{a_{22}(x^2 + y^2) + 2a_{23}y + a_{33}\right\} - \\ &- \left\{a_{12}(x^2 + y^2) + a_{23}x + a_{13}y\right\}^2 = 0, \end{aligned}$$

cioè, indicando con A_{rs} l'elemento reciproco di a_{rs} nel discriminante della (1):

$$\begin{aligned} A_{33}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(A_{13}x + A_{23}y) + (A_{11} + a_{11}a_{33})x^2 + \\ 2a_{13}a_{23}xy + (A_{22} + a_{22}a_{33})y^2 + 2a_{13}a_{33}x + 2a_{23}a_{33}y + a^2_{33} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Se è

$$A_{33} = 0,$$

cioè se $C^{(2)}$ è una parabola, la (6) diviene

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2)(A_{13}x + A_{23}y) + (A_{11} + a_{13}a_{33})x + 2a_{13}a_{23}xy + \\ + (A_{22} + a_{22}a_{33})y^2 + 2a_{13}a_{33}x + 2a_{23}a_{33}y + a^2_{33} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

che rappresenta un *cubica circolare*, e se P è sulla $C^{(2)}$, cioè se è $a_{33} = 0$, la (7) si riduce alla seguente:

$$2(x^2 + y^2)(A_{13}x + A_{23}y) - (a_{23}x - a_{13}y)^2 = 0 \tag{8}$$

che rappresenta una *cubica circolare cuspidale* e quindi *razionale*.

In particolare se P è il vertice della $C^{(2)}$, cioè se la (1), rappresentando una parabola riferita all'asse principale (x) ed alla tangente al vertice (y), diviene $y^2 = 2$, la (8), trascurando un fattore costante, prende la forma

$$x(x^2 + y^2) + \frac{p}{2} y^2 = 0$$

che rappresenta una *Cissoide di Diocle*,

3. Supponendo invece

$$A_{33} \gtrless 0,$$

cioè supponendo che $C^{(2)}$ sia una conica a centro, la (6) rappresenta, in generale, una *quartica bicircolare*.

Se $C^{(2)}$ passa per P, cioè se è $a_{33} = 0$, la (6) diviene

$$A_{33}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(A_{13}x + A_{23}y) - (a_{23}x - a_{13}y)^2 = 0.$$

che rappresenta una quartica bicircolare con una cuspide in P ed ha per tangente di regresso

$$a_{23}x - a_{13}y = 0.$$

Tale quartica, avendo tre punti doppi (P ed i due punti ciclici del piano) per una nota formola di Plücker, indicando con p il genere della curva, si ha

$$p = \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = 0,$$

cioè la curva è razionale.

4. *Se* $C^{(2)}$ *è un circolo* cioè se è

$$a_{11} = a_{22} = 1; \qquad a_{12} = 0,$$

la (6) diviene

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(a_{13}x + a_{23}y) + (2a_{33} - a_{23}^2)\, x^2 + 2a_{13}\, a_{23}\, xy + \\ + (2a_{33} - a_{13}^2)\, y^2 + 2a_{13}\, a_{33}\, x + 2a_{23}\, a_{33}y + a^2_{33} = 0\end{aligned} \qquad (9)$$

che può scriversi anche

$$\begin{aligned}&[x^2 + y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} - 1/_2\, (a^2_{13} + a^2_{23})]^2 \\ &+ (a^2_{13} + a^2_{23})\, [a_{13}x + a_{23}y + a_{33} - 1/_4\, (a^2_{13} + a^2_{23})] = 0\end{aligned}$$

e questa, essendo della forma

$$[f_2\,(x, y)]^2 + K \cdot f_1\,(x, y) = 0$$

dove $f_n\,(x, y)$ indica una funzione di grado n in x e y e K è una costante, mostra evidentemente di rappresentare un *ovale cartesiano*.

In particolare se è $a_{33} = 0$, cioè se P è sul circolo $C^{(2)}$, la (9) diviene

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(a_{13}x + a_{23}y) - (a_{23}x - a_{13}y)^2 = 0$$

la quale rappresenta una *cardioide*.

Ciò resta ancor più evidente prendendo per asse delle x, la cui direzione fu lasciata indeterminata, la tangente di regresso, cioè supponendo $a_{23} = 0$, nel qual caso la precedente diviene

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a_{13}x\,(y^2 + x^2) - a^2_{13}y^2 = 0$$

che è l'equazione normale di una cardioide, coincoide del circolo

$$x^2 + y^2 + a_{13}x = 0.$$

5. *Se P è il centro della curva* $C^{(2)}$ i cerchi son tutti concetrici e perciò non si ha inviluppo reale.

6. *Se P è un fuoco della* $C^{(2)}$, la (1) diviene

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2\delta x-e^2\delta^2=0,$$

dove e e δ rappresentano rispettivamente l'eccentricità e la distanza del fuoco dalla corrispondente direttrice e quindi la (6) diviene:

$$(1-e^2)(x^2+y^2)^2+2e^2\delta x(x^2+y^2)+e^2\delta^2x^2(e^2-2)-2e^2\delta^2y^2-2e^4\delta^3x+e^4\delta^4=0$$

che si scinde nelle due equazioni:

$$(1\pm e)(x^2+y^2)+e^2\delta x-e^2\delta^2=0,$$

le quali rappresentano una coppia di circoli.

Nel caso però in cui $C^{(2)}$ sia una parabola si ha $e=1$ e perciò uno dei circoli si riduce alla retta

$$x+p=0,$$

(direttrice della parabola) e quindi si ha il

Teorema. — *I circoli che hanno per diametri le corde passanti per il fuoco di una parabola sono tangenti alla direttrice.*

7. Considerando da ultimo il caso in cui *sia P a distanza infinita*, se è $C^{(2)}$ rappresentata dalla (1) e una qualunque delle rette parallele del fascio P_∞ ha per equazione

$$y=k, \tag{10}$$

le coordinate dei punti M_1, M_2, d'incontro delle (1) (10) son date da

$$x_1,\ x_2=\frac{1}{a_{11}}\left[-(a_{12}k+a_{13})\pm\sqrt{-A_{33}k^2+2A_{23}k-A_{22}}\right],$$
$$y_1=y_2=k.$$

Con un procedimento analogo a quello usato nel § 1 per il caso generale, si ha, per l'equazione del circolo di diametro M_1M_2

$$\left(x+\frac{a_{12}k+a_{13}}{a_{11}}\right)^2+(y-k)^2=\frac{-A_{33}k^2+2A_{23}k-A_{22}}{a^2_{11}},$$

cioè

$$f(x,y,k)=k^2(a_{11}+a_{22})+2k(a_{12}x-a_{11}y+a_{23})+a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+a_{33}=0$$

e poichè l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial k}=0$$

dà

$$k=-\frac{a_{12}x-a_{11}y+a_{23}}{a_{11}+a_{22}},$$

si ha per l'inviluppo cercato l'equazione:

$$x^2(A_{33}+a^2_{12})+2a_{11}a_{12}xy+a_{11}a_{22}y^2-2x(A_{13}-a_{12}a_{13})+2a_{11}a_{23}y+A_{11}+a_{11}a_{33}=0 \tag{11}$$

che si può scrivere anche

$$a_{11}\varphi+A_{33}x^2-2A_{13}x+A_{11}=0.$$

La (11), in generale, rappresenta una conica.

Altra risoluzione del sig. Barisien.

QUISTIONI PROPOSTE

638. Dimostrare che in un triangolo sferico qualunque si ha

$$\Sigma \frac{\operatorname{sen}\beta \cos(s-b) - \operatorname{sen}\gamma \cos(s-c)}{1-\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma} = 0,$$

dove con s s'intende il semiperimetro.

639. (*) Fra m persone delle quali m_1 parlano solo il francese, m_2 solo l'inglese e le altre tanto il francese quanto l'inglese se ne vogliono scegliere n in modo che n_1 di queste parlino almeno il francese e le altre almeno l'inglese: in quante maniere si potrà fare la scelta?

G. Pesci.

640. Dimostrare che per $-\rho < x < \rho$ è

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} = \frac{a}{\sqrt{b^2-4ac}}\, l\left(\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad 4ac-b^2<0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} = \frac{-2a}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad 4ac-b^2>0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} = \frac{-2a}{b+2cx} \quad 4ac-b^2=0$$

dove ρ è, in valore assoluto, la più piccola fra le radici $-x_1$, $-x_2$ di $a+bx+cx^2=0$ ed inoltre

$$c_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\binom{-1}{j}\binom{-1}{i-j}}{x_1^j\, x_2^{i-j}}.$$

641. Dimostrare che, se si indicano con $d_{i1}, d_{i2} \ldots d_{il_i}$ tutti i divisori del numero intero i, con $\varphi^{(i)}$ il numero dei numeri primi con i ed inferiori ad i, e con α_i una radice di $x^n-1=0$ $(i=1,2,\ldots n)$, si ha:

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2} = \prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{l_1}\varphi(d_{1i}) + \alpha_j \sum_{i=1}^{l_2}\varphi(d_{2i}) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \alpha_j^{n-1}\sum_{i=1}^{l_n}\varphi(d_{ni})\right\}.$$

Occhipinti.

(*) Questo esercizio di analisi combinatoria fu proposto nel *Supplemento al Periodico* del decembre scorso (giuoco 142); essendo rimasto insoluto lo riproponiamo qui.

BIBLIOGRAFIA

GELIN. — *Traité d'arithmetique élémentaire.* Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique. Namur, Wesmael-Charlier, 1902.

Nel fasc. III, Anno XIII, 1898, di questo periodico abbiamo parlato della 4ª edizione di questo ottimo libro. Sulla 5ª edizione, riferiamo il giudizio dato dal chiarissimo prof. P. Mansion, mentre la presentava all'Accademia reale del Belgio, (vedi Bulletins, n. 6, juin, 1902).

Il Trattato d'Aritmetica elementare del sig. abate Gelin, ha ottenuto, alcuni anni or sono, uno dei premi *De Keyn* conferiti dall'Accademia. Fino dalla sua prima edizione (1881) quest'Aritmetica era la più rigorosa e la più chiara che fosse comparsa nel Belgio; poi, nella 2ª ediz., (1885) essa era la più completa, e, come manuale pratico, la migliore che fosse pubblicata in francese. Nelle edizioni seguenti (1888, 1897) e in quella del 1902, che presentiamo oggi all'Accademia, l'Autore ha introdotto una quantità di miglioramenti di dettaglio, tanto dal punto di vista scientifico che dal punto di vista delle applicazioni; per esempio nella teoria dei numeri primi e nella esposizione del sistema metrico. Attualmente è senza dubbio la sola opera di questo genere nella quale si possano trovare le vere definizioni di metro, chilogrammo, litro, stero, adottate dal *Comitato internazionale dei pesi e misure* nel 1889, e delle notizie assolutamente precise sulle misure e monete antiche e moderne, che è utile di conoscere ai nostri tempi. Forse non è privo d'interesse ricordare che il sig. Gelin è stato il primo (così almeno crediamo), che ha fatto osservare come sotto l'antico regime la divisione del piede era decimale in due terzi del Belgio.

Il Trattato d'Aritmetica del sig. Gelin resta il migliore dal punto di vista del fondo e della forma, e il più completo dal punto di vista delle applicazioni, che sia stato pubblicato nel Belgio. P. MANSION.

NIEWENGLOWSKI. — *Cours d'Algèbre* à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques speciales et des candidats à l'École normale superieure et à l'École polythécnique. Paris, Colin, 1902. 2 volumes. 5ᵐᵉ édition.

L'esaurimento di quattro edizioni dimostra con quale favore è accolta in Francia quest'opera del prof. Niewenglowski, ispettore dell'Accademia di Parigi. La nuova edizione differisce dalle precedenti per l'ordine delle materie, per l'aggiunta del 1° capitolo che contiene un riassunto semplice e chiaro della teoria puramente analitica dei numeri positivi e negativi, e per la semplificazione di alcune dimostrazioni.

Il contenuto è assai più vasto di quanto possa far supporre il modesto titolo di Corso d'Algebra. Infatti il 1° volume di 387 pag. diviso in 21 capitoli contiene tutta l'Algebra elementare ed i complementi cioè analisi combinatoria, formula del binomio, limiti, determinanti, equazioni lineari, numeri complessi, serie, frazioni continue, continuità delle funzioni, funzione esponenziale logaritmica, ecc.

Il secondo volume di 488 pag. è diviso in 20 capitoli, i primi nove dei quali contengono gli elementi di calcolo differenziale e integrale, e gli 11 rimanenti la teoria delle equazioni.

L'opera termina con tre note, la prima delle quali contiene un esempio di funzione continua senza derivata $[F(x) = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos \pi a^n x]$, la seconda contiene la dimostrazione del teorema di D'Alembert pubblicata dal prof. Valecki nei " Comptes Rendus „ de l'Académie des Sciences (19 marzo 1883), la terza, scritta da Borel, è il riassunto dei lavori del Borel stesso sulle serie convergenti, che valsero all'autore il gran premio delle scienze matematiche assegnato dall'Accademia delle Scienze.

La sobrietà e la chiarezza dell'esposizione, non disgiunta dal rigore del ragionamento, la modernità dei concetti, l'abbondanza di esercizi e di applicazioni su tutti gli argomenti esposti, rendono quest'opera molto pregevole.

MAUPIN. — *Opinions et curiosités touchant la mathématique.* 2me série. Paris, C. Naud. 1902.

Nel fasc. I anno XV di questo periodico abbiamo fatto cenno della prima serie di curiosità relative alla matematica raccolte dal sig. Maupin. Di questa seconda serie possiamo ripetere quanto fu detto sulla prima.

Il libro non ha la pretesa di essere un lavoro dotto, ma è semplicemente la raccolta di cose curiose capitate sotto gli occhi di uno studioso di storia della matematica nel consultare opere antiche ed anche abbastanza moderne, e può esser letto con piacere ed interesse da chiunque.

Si compone di due parti, la prima delle quali, divisa in 19 capitoli, contiene cose curiose estratte da vari autori, cominciando da Gian Piero de Mesmes (1557) e terminando ad un discorso sul calcolo delle probabilità fatto dal grande Arago nel 1815 alla Camera dei Deputati, a proposito dei giurati, discorso che persuase poco, a quanto sembra, i suoi colleghi; e a due pretese risoluzioni della quadratura del circolo (1852 e 1856).

La seconda parte è un riassunto dell'opera di Simone Stevin di Bruges, amico e maestro di Maurizio di Nassau contenente l'aritmetica, i sei libri d'algebra di Diofanto, la pratica aritmetica, le memorie del principe di Nassau sulla cosmografia, la pratica di geometria, la statica e l'ottica, ecc.

ROUSE BALL. — *Breve compendio della storia delle matematiche.* Versione dall'Inglese con note aggiunte e modificazioni dei dottori D. Gambioli e G. Puliti riveduta e corretta dal prof. G. Loria. VOL. I. Lo matematiche dall'antichità al rinascimento. Bologna, Zanichelli, 1903.

Questo libro del chiaro rettore del Collegio delle trinità in Cambridge nel 1901 aveva già avuto la fortuna di giungere alla terza edizione inglese. Esso, dice l'autore nella prefazione alla 3a edizione, può servire come introduzione allo studio di opere più estese di questo genere; ma ha principalmente lo scopo di dare una breve e popolare notizia dei fatti più importanti della storia della matematica; fatti che possono desiderare di conoscere anche coloro che non hanno o la buona volontà o il tempo di studiarli sistematicamente.

Per la storia fino al 1758 l'autore dichiara di avere attinto principalmente alla classica opera di M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

Mancando in Italia un compendio di storia della matematica, ci sembra ottima l'idea dei professori Puliti e Gambioli di tradurre l'opera pregevolissima del Rouse Ball, con opportune note ed aggiunte.

La prima parte, che va dalle epoche più remote fino a tutto il rinascimento, è dovuta al dott. Puliti, il quale ha aggiunto alla fine del volume una lunga nota sulla scuola Pitagorica che è indubbiamente fra le più importanti dell'antichità.

La seconda parte non ancora pubblicata è opera del dott. Gambioli.

È garanzia della serietà ed importanza di questo libro, il nome del più autorevolo cultore degli studi storico-matematici in Italia, il prof. G. Loria, che ha coadiuvato i due traduttori, correggendo le bozze di stampa.

VIVANTI. — *Complementi di matematica ad uso dei chimici e naturalisti.* Manuali Hoepli, N. 329-330.

Sono ben rari ormai i matematici che, restringendosi nella cerchia dei propri studi, non cercano di volgere l'occhio curioso nel campo delle altre scienze e delle arti, sia pure da dilettanti, non volendo che i profani applichino il poco rispettoso proverbio " *Purus mathematicus, purus asinus* ". Invece non solo i cultori delle arti belle, ma anche i cultori delle altre scienze guardano con terrore e diffidenza la matematica, come cosa noiosa, indigesta, che vaga nel campo delle nuvole.

Eppure la matematica è la sola scienza che può fare a meno del sussidio delle altre, che non ha bisogno di altro laboratorio che un cervello umano ben costruito e ben equilibrato. Mentre tutte le altre scienze economiche, sociali, naturali hanno bisogno di ricorrere al sussidio della matematica; anzi non possono pretendere al nome di scienza, se non quando dai fenomeni osservati si possano dedurre delle leggi generali esprimibili in numeri. L'antipatia, la diffidenza dei più contro la matematica è dovuta principalmente alla natura stessa della nostra scienza, che deve svolgersi per mezzo di formule e simboli, che agli occhi dei profani assumono un carattere misterioso come quello di una lingua ignota; ed è per conseguenza di assai difficile volgarizzazione; un po' è dovuta all'indole e alle abitudini dei suoi cultori, che mal si rassegnano a fare uno sforzo per renderla più popolare che sia possibile.

Ma il progresso delle scienze naturali ha cominciato a persuadere i cultori di di queste, che dalla nozione sia pure sommaria, dei metodi matematici possono ricavare un potentissimo ausilio dai loro studi; e ciò è stato ufficialmente riconosciuto dai nuovi regolamenti Universitari, che impongono un corso complementare di matematiche per i chimici.

Il prof. Giulio Vivanti che, percorrendo gli eventi, aveva fino dal 1900-01 fatto un corso libero per i naturalisti dell'Università di Messina, era meglio di ogni altro nel caso di preparare un libro che contenesse in breve mole le nozioni fondamentali di matematica superiore, che possono essere utili agli studenti di chimica non solo, ma anche a tutti coloro che si dedicano ad una qualsiasi scienza applicata.

Il manuale da esso pubblicato ha dunque il carattere di un libro di volgarizzazione; si propone di condurre il lettore rapidamente e col minimo sforzo possibile alla conoscenza dei principali metodi matematici, di far conoscere i risultati, omettendo le dimostrazioni, quando sono troppo difficili, mostrando contemporaneamente esempi delle applicazioni che si possono fare alle scienze pratiche. Ottenere tutto ciò senza sacrificare interamente il rigore scientifico non è certo cosa facile. Ma pure ci sembra che l'egregio autore, se pure non l'ha raggiunto, si sia assai avvicinato allo scopo; quantunque certe dimostrazioni debbano sembrare ancora troppo scabrose e certi concetti elevati debbono essere assimilati non senza difficoltà dalle persone alle quali è principalmente destinato il libro.

La distribuzione delle materie adottate è la seguente:

Parte I. Algebra. — Analisi combinatoria, potenza d'un binomio, determinanti, equazioni lineari, serie.

Parte II. Geometria analitica — 1° *geometria del piano*. Sistemi di cordinate, punti e rette, coniche, altre curve; 2° *geometria dello spazio*, coordinate e coseni direttori, punti, rette e piani, quadriche curve nello spazio.

Parte III. Calcolo infinitesimale. — Funzioni, limiti *continuità*, derivate e differenziali. Serie di Taylor e di Mac-Laurin. Applicazioni geometriche. Massimi e minimi. Integrali, equazioni differenziali.

Parte IV. Calcolo delle probabilità. — Definizioni e teoremi generali. Applicazioni ai giuochi. Teoremi di Bernouilli. Legge dei grandi numeri; applicazioni. Teoria degli errori. Metodo dei minimi quadrati.

Parte V. Meccanica.

Parte VI. Termodinamica e meccanica chimica.

Come si vede da questo prospetto, di geometria analitica è posto quel tanto che basta perchè il lettore si familiarizzi coi metodi di rappresentazione delle funzioni per mezzo di linee o superficie, ed è dato un maggiore sviluppo al calcolo infinitesimale che, come osserva giustamente l'A., è il metodo universale che permette di porre in equazione qualunque problema scientifico di carattere quantitativo, e al calcolo delle probabilità il cui uso è così frequente in tutte le applicazioni.

Questo estratto di cognizioni è precisamente ciò che è necessario e sufficiente per i chimici, ecc.? Solo i cultori delle scienze applicate potranno rispondere in modo esauriente. A noi sembra che in generale la scelta sia stata fatta con ponderazione ed acume, tolta qualche lieve eccezione. Per esempio dubitiamo che la teoria dei determinanti potrebbe essere omessa.

ERRATA-CORRIGE

Ai nomi dei risolutori della q. 618 si aggiunga quello del D.r **Nicolai** e a quelli delle q. 604, 605 il sig. **Barisien**.

ὃν οἱ θεοὶ φιλοῦσιν ἀποθνήσκει νέος.

Ai primi dello scorso aprile, veniva rapito alla famiglia e alla scienza il giovane

Dott. ATTILIO CREPAS

che i lettori del *Periodico di Matematica* e del *Supplemento* avevano avuto occasione di conoscere ed apprezzare, e che, per l'acutezza dell'ingegno, l'amore allo studio della Matematica, alla quale si era dedicato, l'attività grandissima, dava sicuro affidamento che avrebbe conquistato un posto notevole fra i matematici.

La falce inesorabile della morte lo ha rapito troppo presto all'affetto della famiglia e degli amici, troncando le speranze che si fondavano giustamente su lui; è morto combattendo per la scienza, poichè l'ultima parte di un suo lavoro si pubblicava nel precedente fascicolo di questo giornale, quando la sua spoglia mortale veniva composta nella sua ultima dimora.

Ecco brevi notizie biografiche di lui.

Attilio Crepas, nacque ad Adria (Rovigo) nel 1880. Percorse gli studi classici al Ginnasio-Liceo Parini di Milano e gli studi di Matematica pura alla R. Università di Pavia, ove si laureò con pieni voti assoluti e con lode. Insegnò subito Matematica all'Istituto Tirelli di Milano e fu poi nominato assistente di geometria superiore all'Università di Pavia, assistente cioè dell'illustre prof. Aschieri. Scrisse in vari periodici, fra cui il *Pitagora*, il *Periodico di Matematica* e il *Supplemento*. All'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vennero lette le seguenti sue memorie: *Ricerche sui piani che secano e toccano delle curve algebriche in un iperspazio*, (estratto di una parte della dissertazione di laurea). *Sulle coniche che secano e toccano delle curve in un iperspazio.* (Id.) Una terza memoria, è stata letta e pubblicata dopo la morte di lui. I funerali riuscirono degni del compianto giovane. Al cimitero, fra gli altri, disse nobili parole il prof. Berzolari dell'Ateneo pavese. La salma riposa nella tomba di famiglia a Verona.

***

Il 10 maggio, a soli trentott'anni, moriva a Bassano Veneto il

Prof. Dott. G. B. MARANGONI

insegnante di matematica in quel Ginnasio pareggiato, da lunghi anni abbonato al *Periodico* e socio di *Mathesis*. Dotato di forte ingegno, di vasta cultura, critico acutissimo di scritti scientifico-didattici, era anche appassionato e valente cultore della musica, aveva un'anima d'artista. Quantunque nella vita privata di carattere mite, fu pubblicista battagliero; entrato nelle lotte cittadine della sua città di adozione, molte amarezze ne trasse, e queste forse lo condussero alla tomba.... Ed è morto nel fior degli anni, povero infelice, quando agli altri più sorride la vita, quella vita che mai volle sorridere a lui! Nel pensare al povero morto mi sovviene del grande e sventurato poeta di Consalvo e della Ginestra....

G. Cardoso-Laynes.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 10 giugno 1908.