

APPUNTI CORSO GEOGEBRA 23-24-25-26-27 LUGLIO 2024

Scuola Estiva Mathesis-Sigrav.

"Mathematics Summer School July 23-28 2024"

Serra San Bruno.

Formatore: **Prof. Marcello Pedone**

***Scaricare il software GeoGebra nella versione 5.0 Classic che è utilizzabile offline.**

Indicazioni sui comandi principali del software GeoGebra.

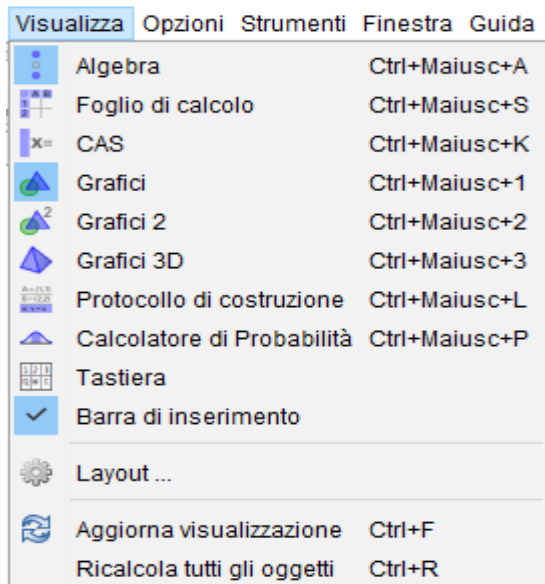
GeoGebra

File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida



12 pulsanti che numero da sinistra verso destra. Premendo ciascuno di essi si apre una tendina con varie voci (o comandi)

Cliccando su visualizza si apre un menu a tendina



che permette di conoscere ed utilizzare tutte le potenzialità del software ossia, algebra associata a grafici sul piano cartesiano, geometria del piano, geometria dello spazio, probabilità.


Nella barra inferiore



si inseriscono le formule o le operazioni

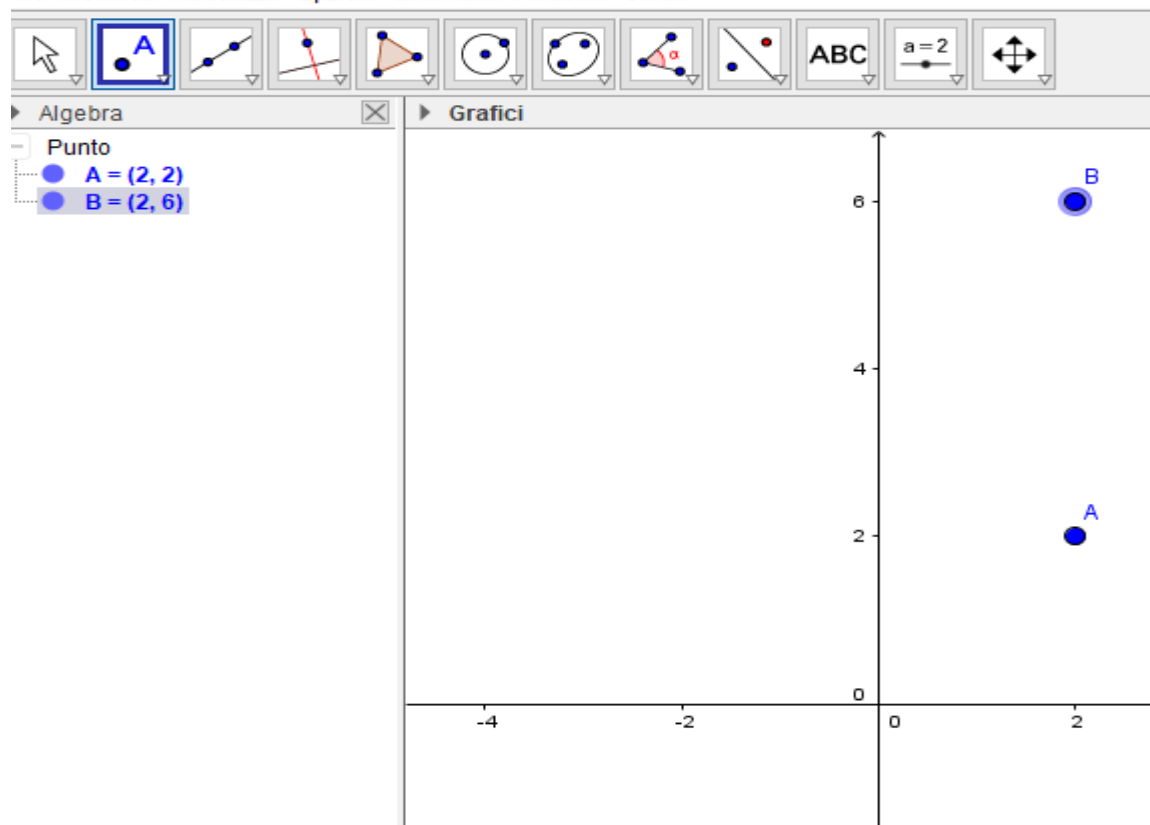
Rappresentazione di un punto

Per rappresentare un punto si possono seguire due modalità:

- Cliccare sul pulsante 2  e poi sul piano nella sezione destra grafici. Si evidenzierà il punto. Nella sezione algebra a sinistra compaiono le coordinate del punto.
- Scrivere nella barra di inserimento ad esempio $B=(2,6)$ e premere invio


GeoGebra


File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida




Rappresentazione di una retta

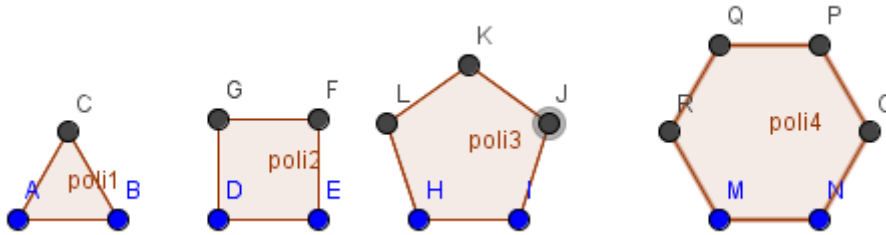
Rappresentare nel piano i due punti. Per disegnare la retta passante per A e B si deve cliccare sul

pulsante 3  e poi nel piano sui punti A e B. Si disegnerà la retta nella sezione grafici. Contemporaneamente, nella sezione Algebra di sinistra, comparirà l'equazione della retta. E'

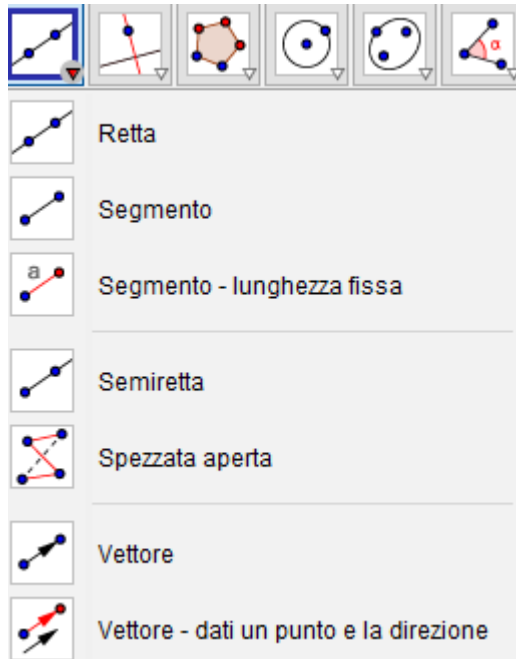
possibile anche muovere i punti sul piano: basta cliccare sul pulsante 1  e poi sul punto che si intende spostare.

Calcolo del numero delle diagonali di un poligono qualsiasi

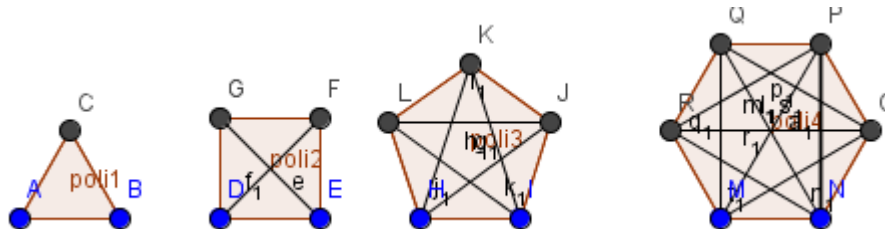
Cliccare sul pulsante 5  sulla voce poligono regolare. Nella sezione grafici di destra cliccare in due punti distinti per individuare gli estremi di un lato. Poi si apre un riquadro in cui si deve inserire il numero di lati del poligono. Scrivendo 3 si ottiene un triangolo equilatero, se 4 un quadrato, ecc.



Per ciascuno dei poligoni è possibile disegnare le diagonali cliccando sul pulsante



e sulla voce segmento. Poi nella sezione grafici, cliccando sui vertici non consecutivi, a due a due, si disegnano le diagonali.

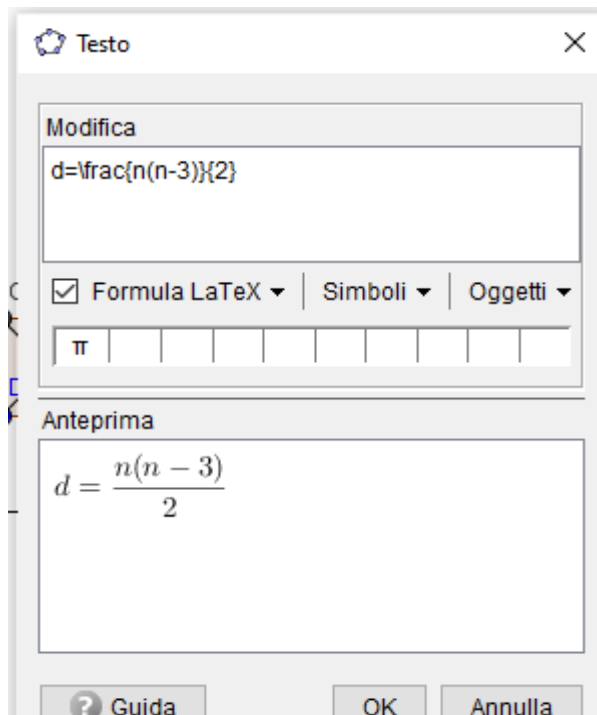


Si può osservare che da ciascun vertice escono $n-3$ diagonali, che ogni poligono ha n vertici e che ogni diagonale è comune a due vertici. Pertanto il numero d di diagonali di un poligono con n lati, è dato dalla formula $d = \frac{n(n-3)}{2}$. E' possibile scrivere tale formula accanto al grafico su cui sono

disegnati i poligoni con le diagonali, cliccando sul pulsante



e sulla voce testo. Si apre una finestra all'interno della quale si scrive la formula

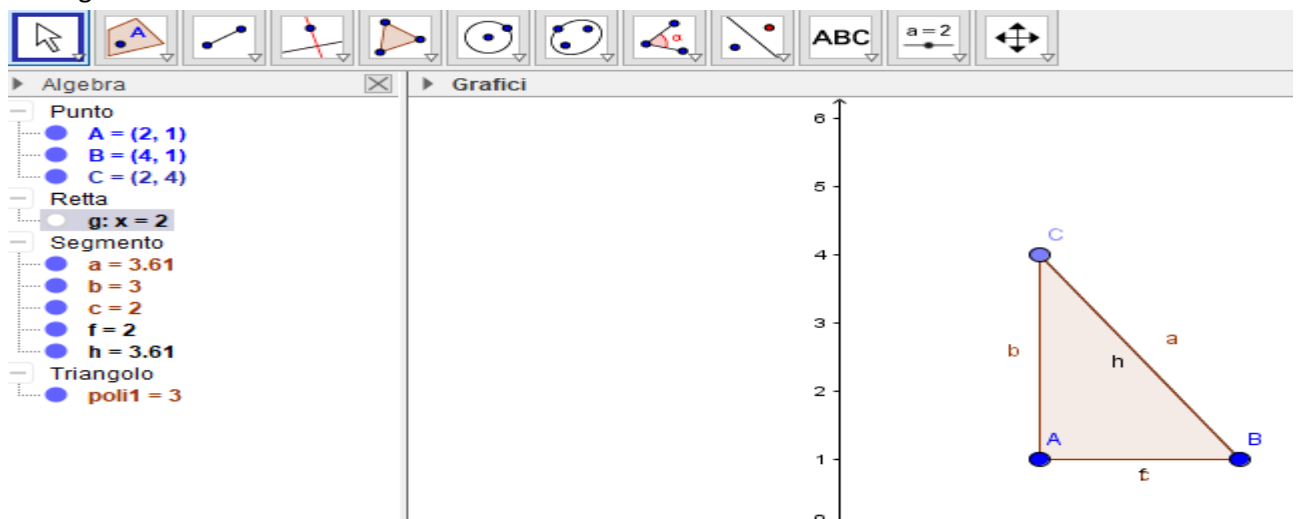


Disegnare un triangolo rettangolo


Per disegnare un triangolo rettangolo non è consigliabile disegnare tre opportuni segmenti consecutivi perché, spostando anche solo uno dei tre vertici, il triangolo muterebbe e potrebbe non essere più rettangolo. Bisogna quindi disegnare un segmento a piacere, poi tracciare la retta perpendicolare a quel segmento e passante per uno dei suoi estremi ossia premere il pulsante 4



alla voce retta perpendicolare e cliccare successivamente su uno dei suoi estremi e sul segmento. Disegnare poi un punto sulla retta utilizzando il comando punto su oggetto. Quindi individuati i tre vertici si può disegnare il triangolo. Per eliminare la retta usata per la costruzione, dal menu modifica, seleziona mostra/nascondi oggetto e clicca sulla retta. Rimarrà il triangolo rettangolo.






Se cliccando sul pulsante 1  e poi sul punto C che trascino, muovo il vertice C, ottengo un nuovo triangolo che sarà ancora un triangolo rettangolo. Per verificarlo bisogna procedere con la misurazione degli angoli.

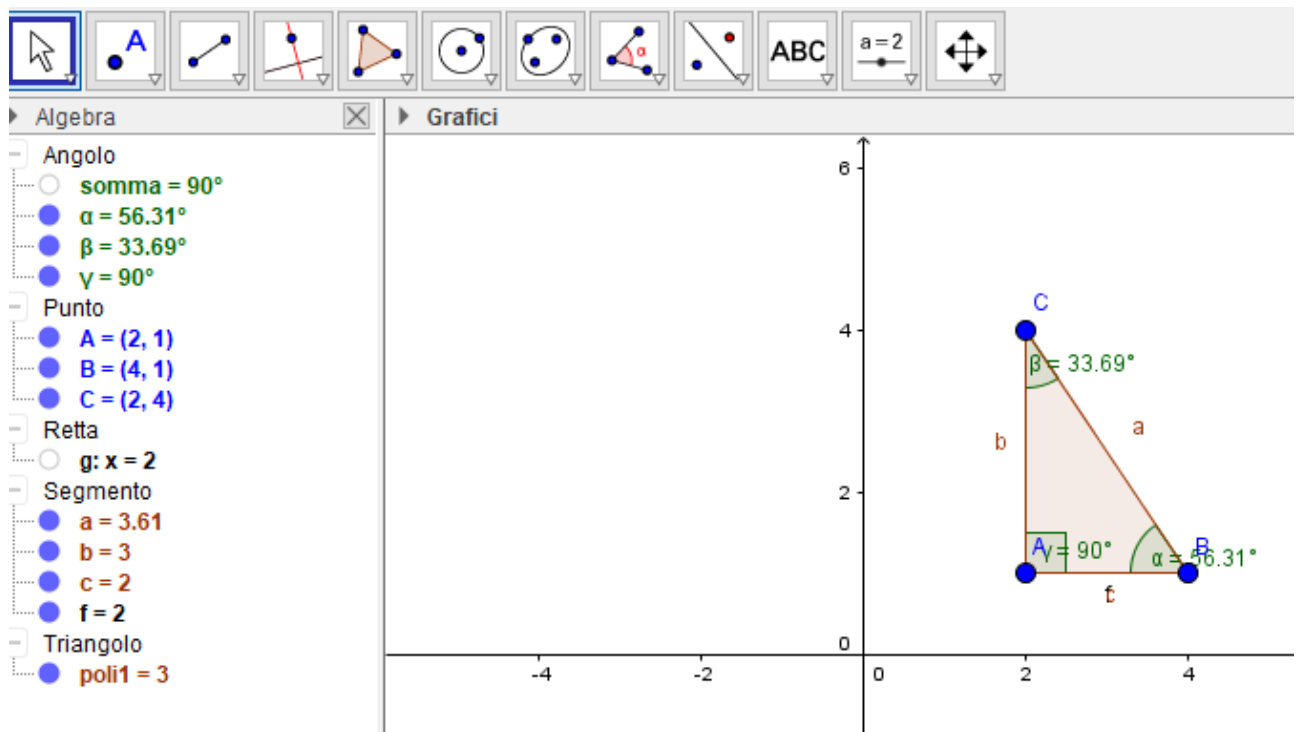
Misurare gli angoli



Per misurare un angolo si clicca sul tasto 8  e poi si clicca su tre punti dei lati dell'angolo posti in senso orario. Comparirà l'etichetta dell'angolo e la sua misura. Per verificare se il triangolo precedente è rettangolo basta misurare l'angolo BAC.

Si può poi verificare che i due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari. Se ne può calcolare la somma scrivendo nella barra di inserimento $\text{somma}=(\alpha + \beta)$ e premendo invio.

Nella sezione algebra comparirà il risultato



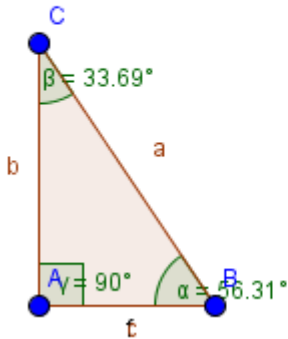
Se si vuole evidenziare all'interno della sezione grafici la somma dei due angoli acuti, bisogna schiacciare il pulsante testo



cliccare in un punto della sezione grafici e si aprirà una finestra nella

quale si deve scrivere $\text{somma}=\alpha + \beta=$ e poi cliccare su α , su β e su $\text{somma} =90^\circ$ che si trovano nella sezione algebra. Comparirà, nella sezione grafici, la seguente scrittura

$$\text{somma}=\alpha+\beta=56.31^\circ+33.69^\circ=90^\circ$$



Il vantaggio di questo procedimento di far comparire la somma nella sezione grafici, è quello di avere la possibilità di verificare effettivamente che gli angoli acuti sono complementari, in quanto se muovo



con uno dei due vertici degli angoli acuti, si osserva anche a livello numerico che variano le ampiezze degli angoli α e β ma non la loro somma.

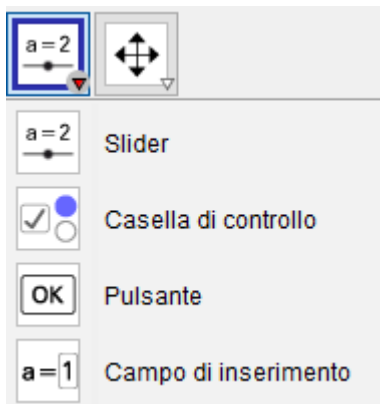
Calcolo della somma degli angoli interni di un triangolo.



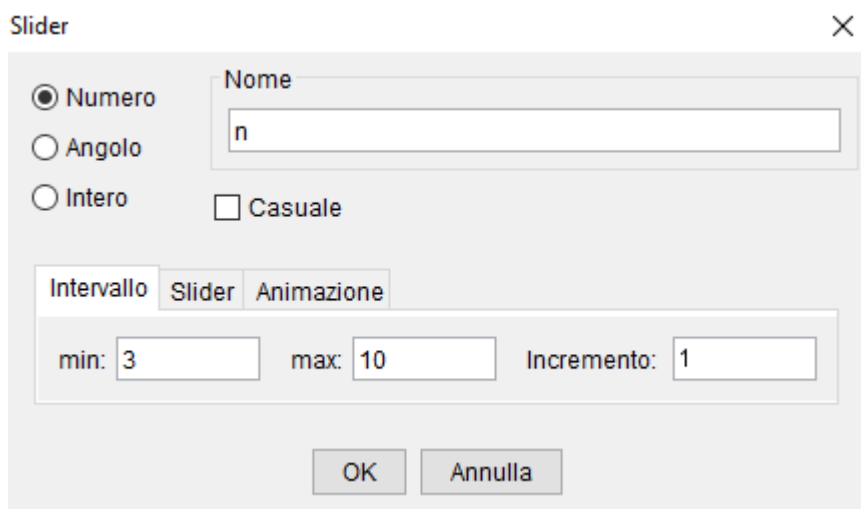
Con il pulsante disegnare un triangolo qualsiasi, possibilmente con un lato parallelo all'asse x, per comodità. Poi misurare, in senso orario i suoi tre angoli interni. Nella barra di inserimento scrivere $\text{somma}=\alpha + \beta + \gamma$ e premere invio. Utilizzando il teorema dell'angolo esterno si potrebbe verificare ulteriormente che la somma è un angolo piatto.

Uso delle slider per animazioni: ottenere i vari poligoni regolari di lato costante, al variare del numero di vertici

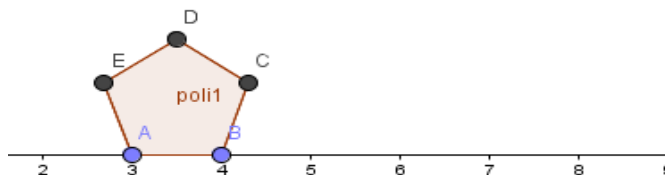
Cliccare sul pulsante 11



alla voce slider e poi sul piano della sezione grafici. Appare una finestra con le voci Nome, min, max, incremento da compilare e poi cliccare su ok.



Premere il pulsante sulla voce poligono regolare e cliccare nella sezione grafici in due punti in modo da definire il lato del poligono. Compare una finestra che ci chiede di inserire il numero di vertici. Inserire la variabile n già usata nella slider. A questo punto muovendo con il mouse la slider, il triangolo diventa quadrato e poi pentagono ecc. al crescere di n .

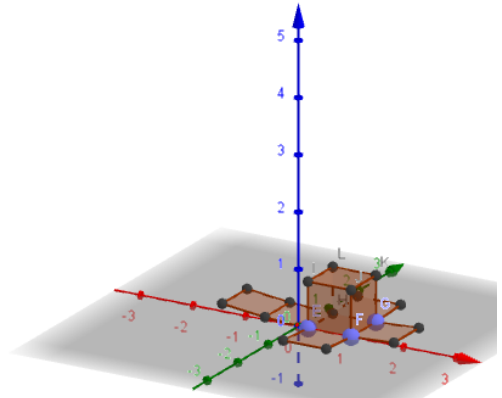
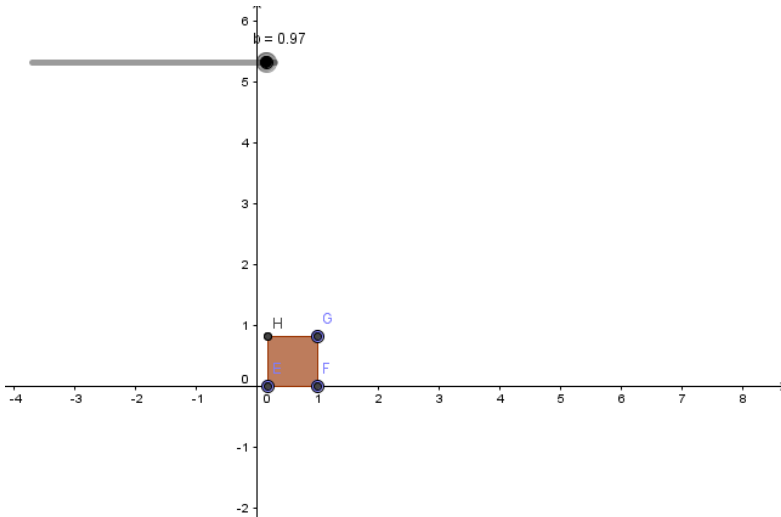


Si può rendere l'animazione attiva, cliccando con il tasto destro sul punto mobile della slider che compare nella sezione grafici ed evidenziare il comando "animazione attiva".

Sviluppo di un cubo



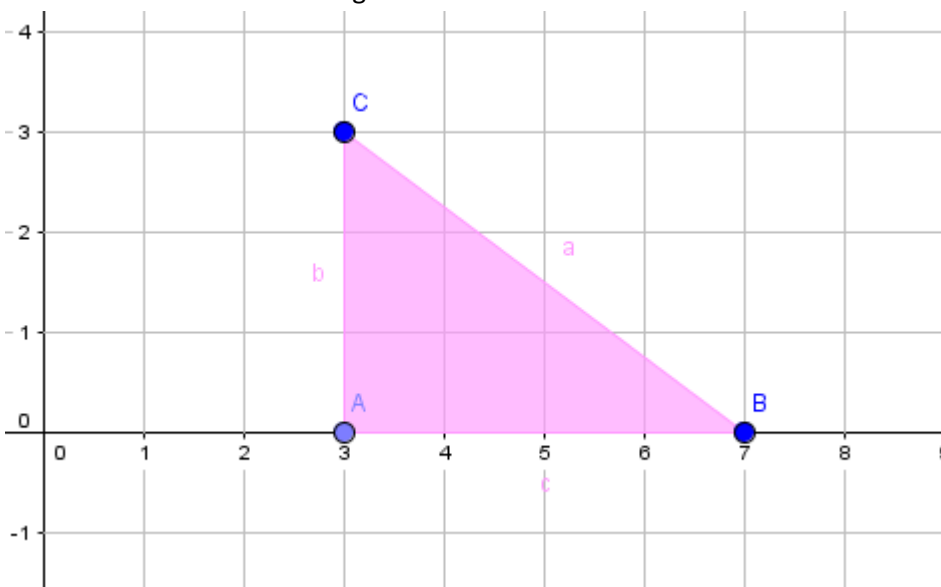
Premere il pulsante poligono regolare e cliccare su due punti della sezione grafici per definire il lato. Alla richiesta del numero di vertici scrivere 4 per ottenere un quadrato. Poi dal menu selezionare la voce visualizza GRAFICO 3D e poi il pulsante dei solidi alla voce cubo. Si aprirà la sezione grafici 3D. Cliccando sul primo vertice e poi sul secondo del quadrato disegnato sul piano xy , si costruisce il cubo. Cliccando ancora sul pulsante solidi alla voce sviluppo piano, e cliccando sul cubo, muovendo la slider che compare, si ottiene lo sviluppo. Anche in questo caso si può usare l'animazione attiva.



Inoltre premendo il pulsante 12 alla voce ruota vista grafica e cliccando sul cubo o sul suo sviluppo, si ha la possibilità di vedere il solido da diversi punti di vista.

Teorema di Pitagora

Costruire un triangolo rettangolo con le indicazioni date precedentemente e utilizzando la griglia, fare in modo che abbia i cateti di lunghezza 3 e 4.



N.B.- E' possibile misurare la lunghezza dei lati premendo il pulsante 8 alla voce distanza o lunghezza e cliccando sui tre lati




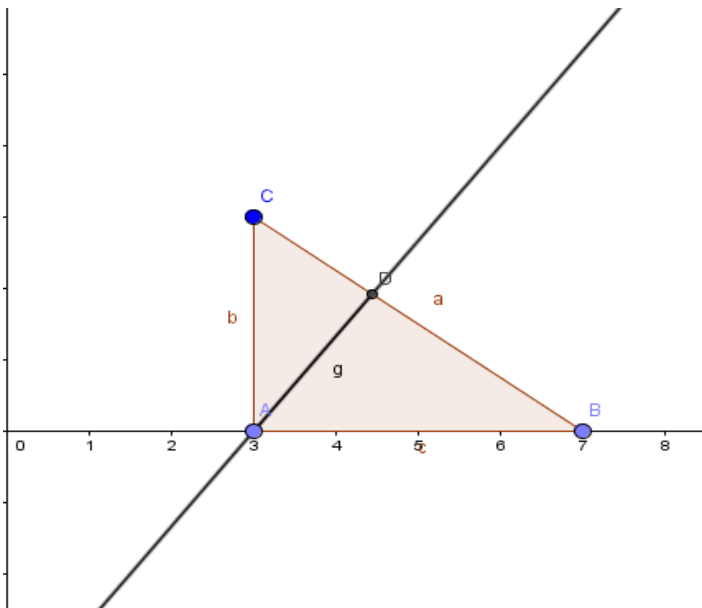
- si può calcolare l'area del triangolo usando lo stesso pulsante 8 alla voce Area e cliccando all'interno del triangolo (si avrà $area=6$) oppure disegnando e calcolando la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa.



Premendo il pulsante 4 alla voce retta perpendicolare e cliccando successivamente sul punto A e sul lato BC si disegna l'altezza relativa all'ipotenusa.




Poi con il pulsante 2  alla voce intersezione e cliccando sulla retta perpendicolare e sul lato BC si ottiene il punto D di intersezione, cioè il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa.




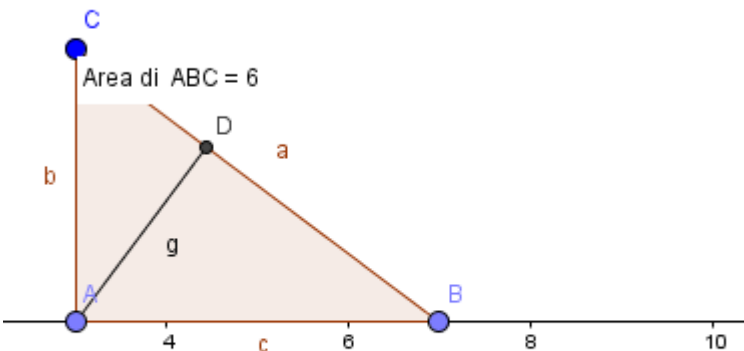
Si deve costruire il segmento AD cliccando sul pulsante 3 alla voce segmento e poi su A e D per evidenziare il segmento altezza. Per nascondere la retta passante per A e D, che è stata utile per la costruzione, si clicca su di essa con il tasto destro del mouse e si seleziona la voce mostra oggetto. Si misura l'altezza usando il



pulsante 8  alla voce distanza o lunghezza e cliccando su di essa.



- per scrivere nella sezione grafici la formula dell'area del triangolo si deve premere il pulsante 10  alla voce testo e cliccando in un punto qualsiasi della sezione grafici. Si apre una casella nella quale inserire una formula Latex frazioni scrivendo al numeratore b per c cliccando su di essi nella sezione algebra e/o una formula Latex frazioni scrivendo al numeratore a per g cliccando su di essi nella sezione algebra.



$$area = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot 2.4}{2} = Area di ABC = 6$$

Il vantaggio di questa formula consiste nella possibilità di far variare la lunghezza dei lati e nell'ottenere il valore dell'area già modificato.

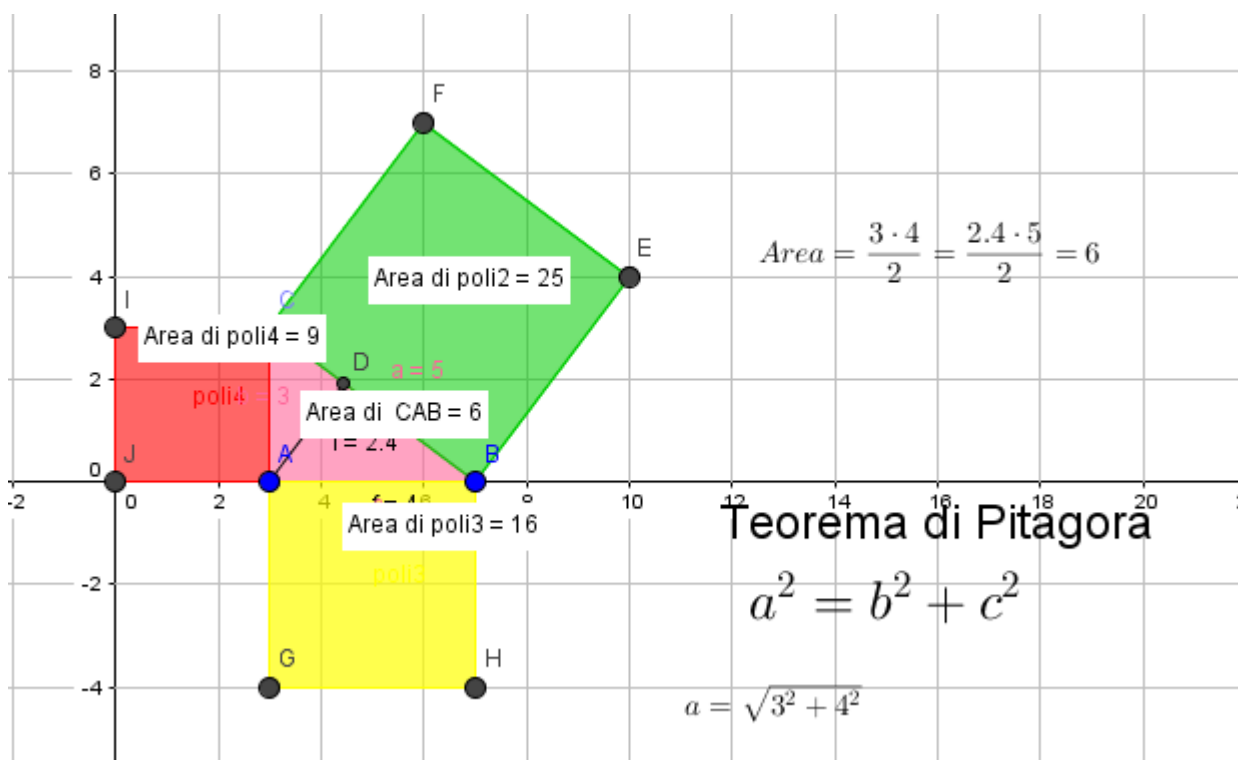


Riprendendo l'esercizio sul teorema di Pitagora si può, usando il pulsante 10 alla voce testo e cliccando in un punto qualsiasi della sezione grafici, scrivere nel riquadro Teorema di Pitagora $a^2=b^2+c^2$.

Per verificare la formula si possono costruire i quadrati sui lati del triangolo e calcolarne le aree premendo il



pulsante 8 alla voce Area e cliccando all'interno di ciascun quadrato



Segmenti e punti notevoli di un triangolo

Baricentro



Con il pulsante 5 disegnare un triangolo qualsiasi. Premere poi il pulsante 2 alla voce punto medio o centro e cliccare sui tre lati del triangolo. Si evidenzieranno i tre punti medi dei lati. Per fare una verifica banale che tali punti siano effettivamente punti medi, basta, per ciascun lato, procedere alla misura della lunghezza delle due parti in cui esso è stato suddiviso. Usando il pulsante 3 alla voce segmento si possono disegnare le tre **mediane**, segmenti che congiungono ciascun vertice con il punto medio del lato



opposto. Il Baricentro, punto di intersezione delle tre mediane, si ottiene premendo il pulsante 2 alla voce intersezione e cliccando su due delle tre mediane. Nella sezione Algebra compaiono le coordinate del baricentro.



Punto

- A = (2.3, 5.7)
- B = (3, -1)
- C = (6.66, 2.7)
- D = (2.65, 2.35)
- E = (4.83, 0.85)
- F = (4.48, 4.2)
- G = (3.99, 2.47)
- H = (4.48, 4.2)
- I = (4.48, 4.2)
- J = (3, -1)
- K = (4.48, 4.2)

Segmento

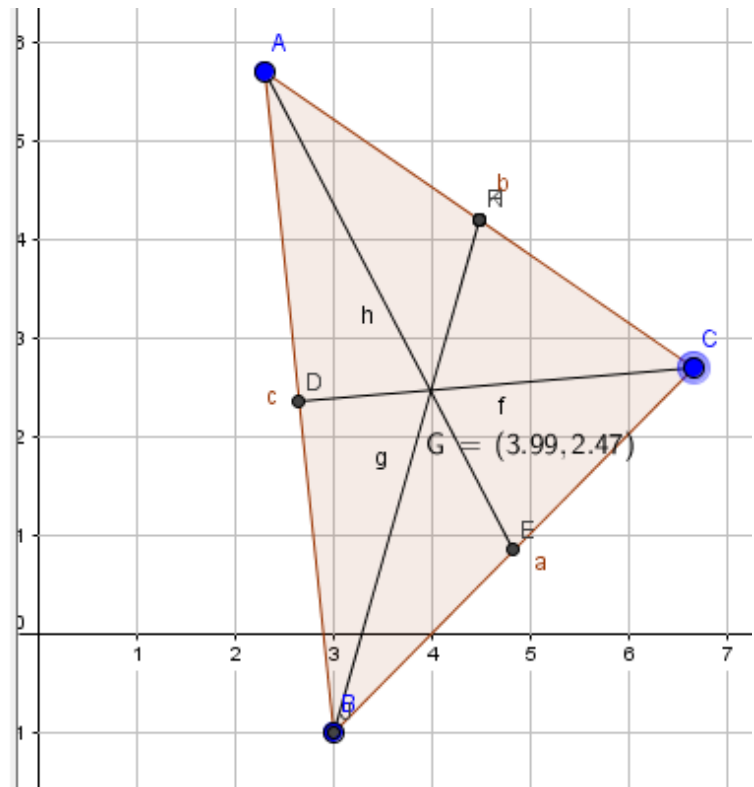
- a = 5.2
- b = 5.29
- c = 6.74
- f = 4.03
- g = 5.41
- h = 5.47

Testo

- testo1 = "G = (3.99, 2.47)"

Triangolo



- poli1 = 13.56





Tali coordinate possono essere trasportate nella sezione grafici cliccandoci su e trascinando. Esse cambieranno se usando il pulsante 1 muoviamo i vertici del triangolo.

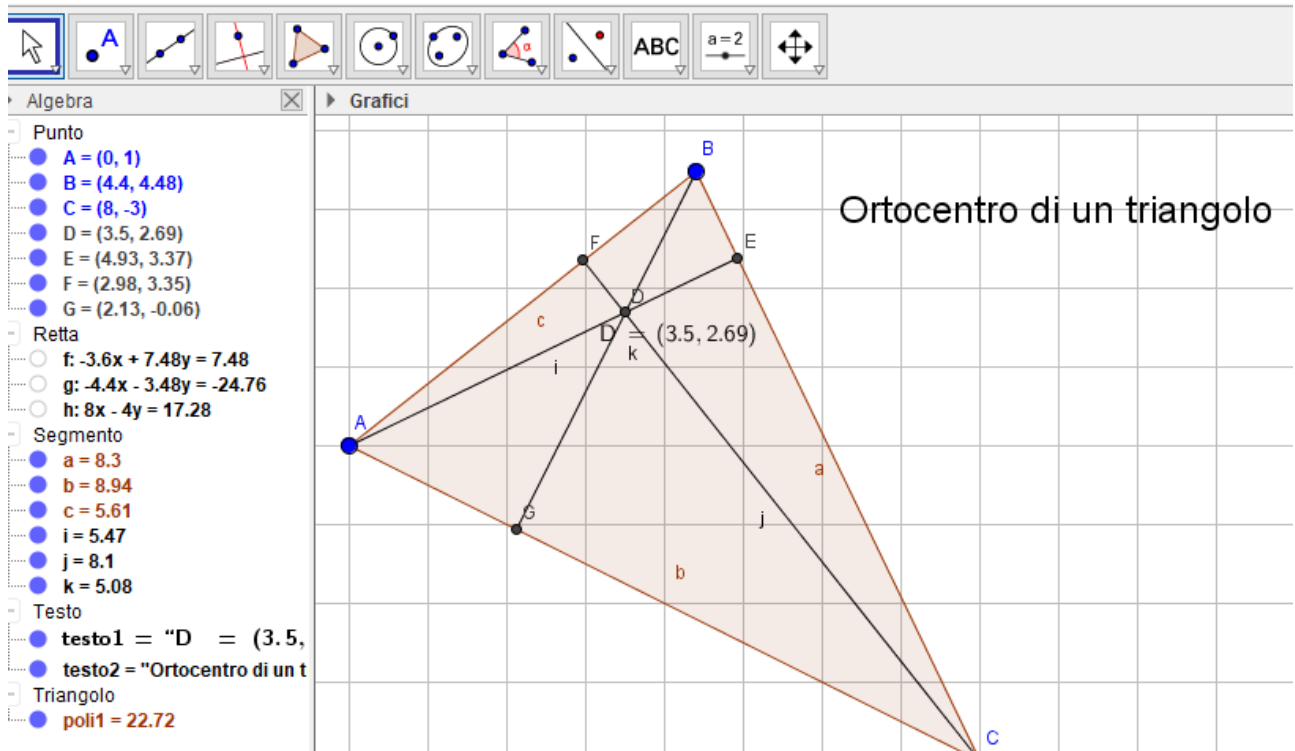
Ortocentro



Con il pulsante 5  disegnare un triangolo qualsiasi. Premendo il pulsante 4  alla voce retta perpendicolare e cliccando successivamente su ciascun vertice e sul lato ad esso opposto, si costruiscono le

rette contenenti le altezze. Evidenziare i punti di intersezione tra tali rette e i lati usando il pulsante 2  alla voce intersezione. In questo modo si ottengono i piedi delle altezze. Cliccando sul pulsante 3 alla voce segmento e poi sulle coppie di punti estremi delle altezze, si evidenziano le tre **altezze**. Per nascondere le rette utili per la costruzione, si clicca su ciascuna di esse con il tasto destro del mouse e si seleziona la voce

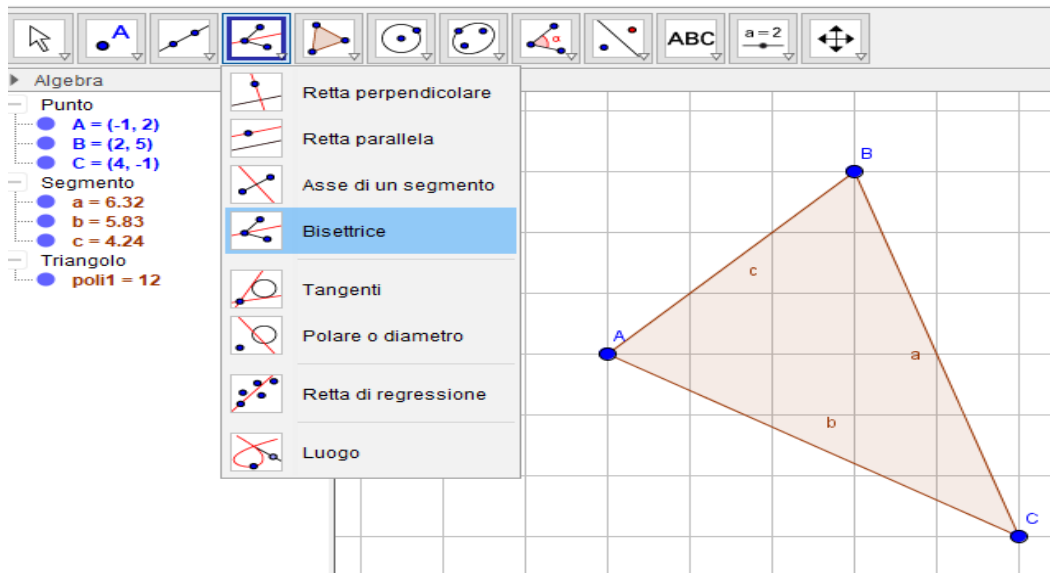
mostra oggetto. Il punto notevole **ortocentro** si evidenzia premendo il il pulsante 2  alla voce intersezione e cliccando su due delle tre altezze.



Incentro



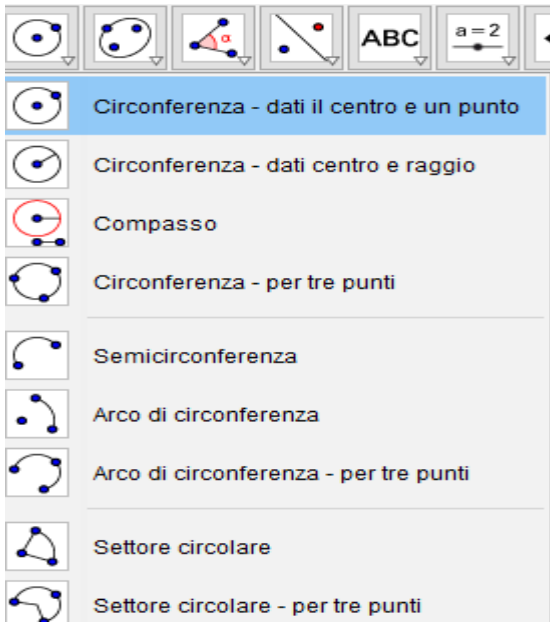
Con il pulsante 5 disegnare un triangolo qualsiasi. Premendo il pulsante 4



alla voce bisettrice e cliccando in senso orario sui vertici a tre a tre, si disegnano le rette che contengono le bisettrici degli angoli interni al triangolo. Si intersecano queste con i lati e si disegnano i segmenti **bisettrici** analogamente a quanto fatto con le altezze. Per nascondere la rette utili per la costruzione, si clicca su ciascuna di esse con il tasto destro del mouse e si seleziona la voce mostra oggetto. Il punto notevole

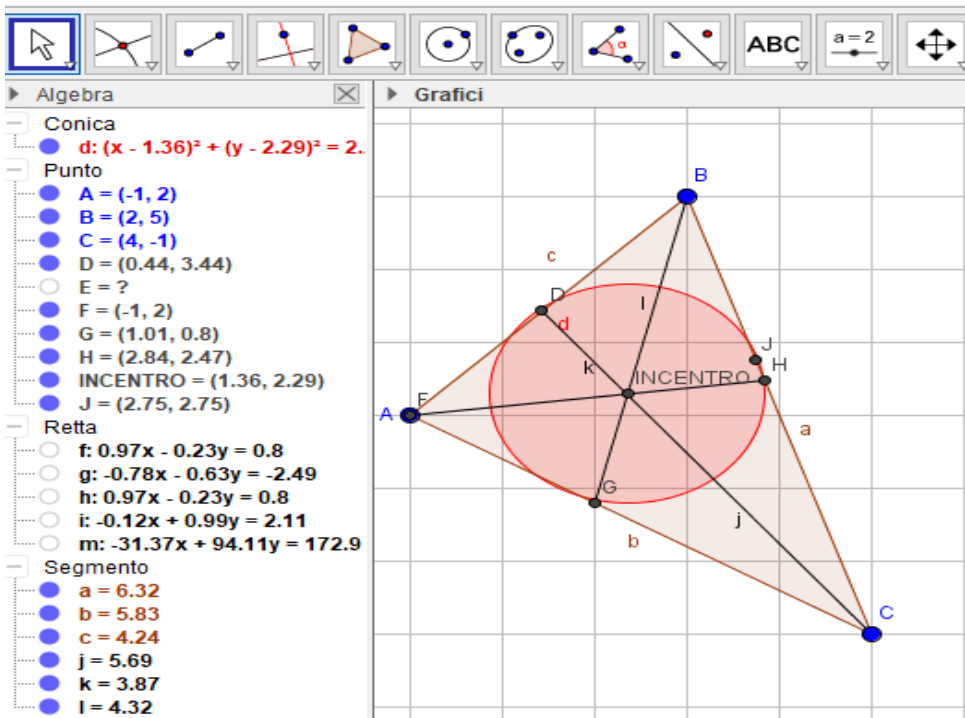


incentro, di intersezione delle tre bisettrici, si evidenzia premendo il pulsante 2 alla voce intersezione e cliccando su due delle tre bisettrici. Incentro rappresenta il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Per disegnarla si deve individuare il raggio tracciando la retta passante per l'incentro e perpendicolare ad uno dei lati, individuando il punto di intersezione tra tale retta e il lato. Premendo il tasto 6 alla voce circonferenza-dati il centro e un punto, si disegna la circonferenza inscritta.



GeoGebra

File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida



Circocentro



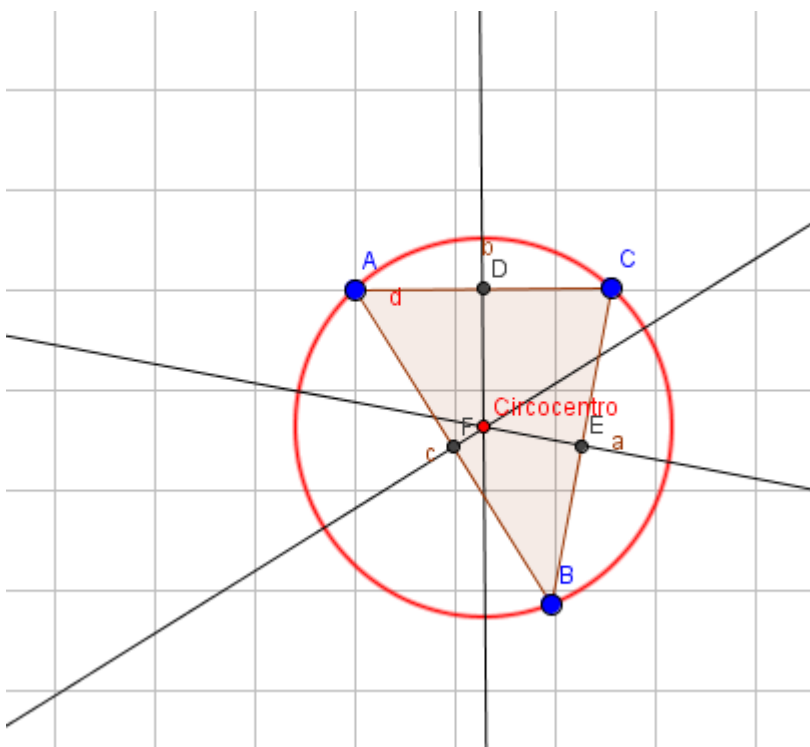
Con il pulsante 5 disegnare un triangolo qualsiasi. Premere poi il pulsante 2 alla voce punto medio o centro e cliccare sui tre lati del triangolo. Si evidenzieranno i tre punti medi dei lati. Con il pulsante 4



alla voce retta perpendicolare e cliccando successivamente su ciascun punto medio e sul lato su cui esso giace, si costruiscono gli **assi**. Il punto notevole **circocentro** è il punto di intersezione dei tre assi e si può



evidenziare premendo il pulsante 2 alla voce intersezione e cliccando su due assi. Per disegnare la circonferenza circoscritta al triangolo si preme il tasto 6 alla voce circonferenza-dati il centro e un punto, cliccando sul circocentro e su uno dei vertici del triangolo.



Simmetria assiale e simmetria centrale

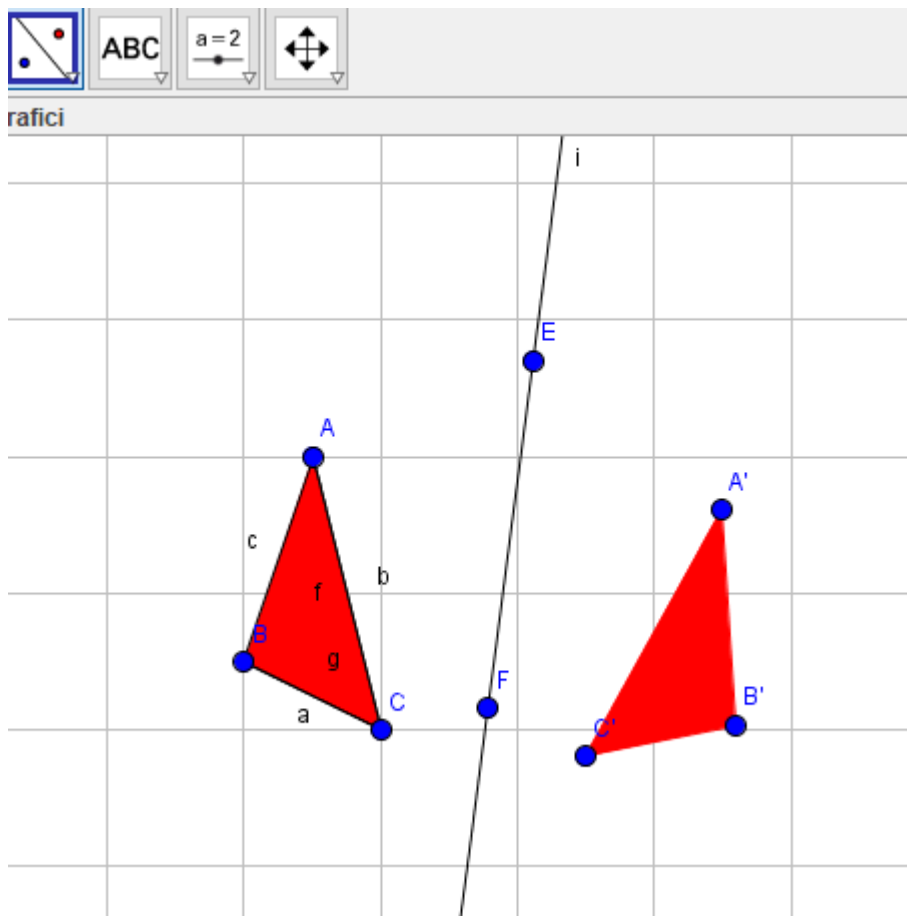


Con il pulsante 5 disegnare un triangolo qualsiasi, colorarlo cliccando su di esso con il tasto destro alla voce proprietà colore ed evidenziare inoltre i lati colorandoli di nero. Disegnare nello stesso piano una retta



per due punti con il pulsante 3.

Premere il pulsante 9 e cliccare sul triangolo e sulla retta che funge come **asse di simmetria**. Si otterrà il triangolo simmetrico.

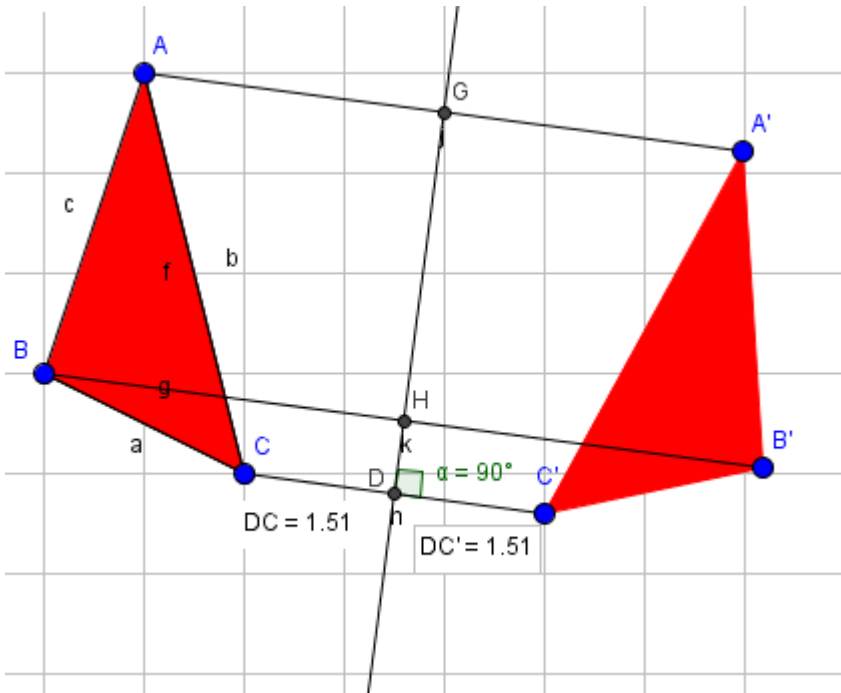


Per far verificare che le due figure sono simmetriche, si possono disegnare i segmenti AA' , BB' , CC' e si possono evidenziare le intersezioni di tali segmenti con l'asse di simmetria. Se i punti ottenuti sono i punti medi di ciascun segmento, allora la figura $A'B'C'$ è sicuramente la simmetrica di ABC . Si può anche far notare che gli angoli che si formano dall'intersezione di CC' con l'asse di simmetria sono retti.

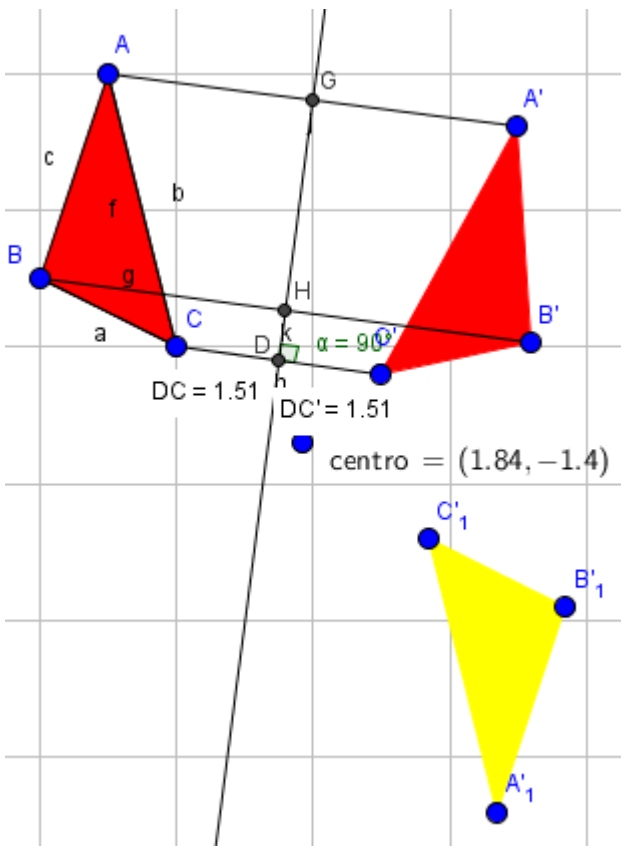
Interessante inoltre è andare a vedere cosa accade muovendo la retta o qualche vertice del triangolo con il



pulsante1




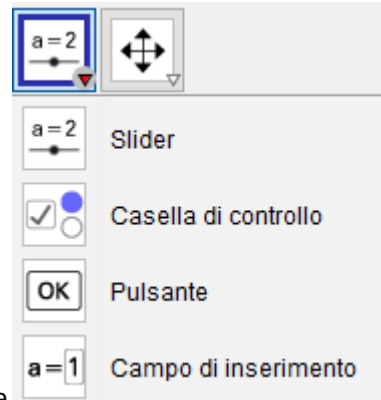
Per la simmetria centrale, sullo stesso piano disegno un punto e lo rinomino “centro”. Premendo il pulsante 9 alla voce simmetria centrale e cliccando sul triangolo ABC e sul centro si ottiene il triangolo corrispondente nella simmetria centrale




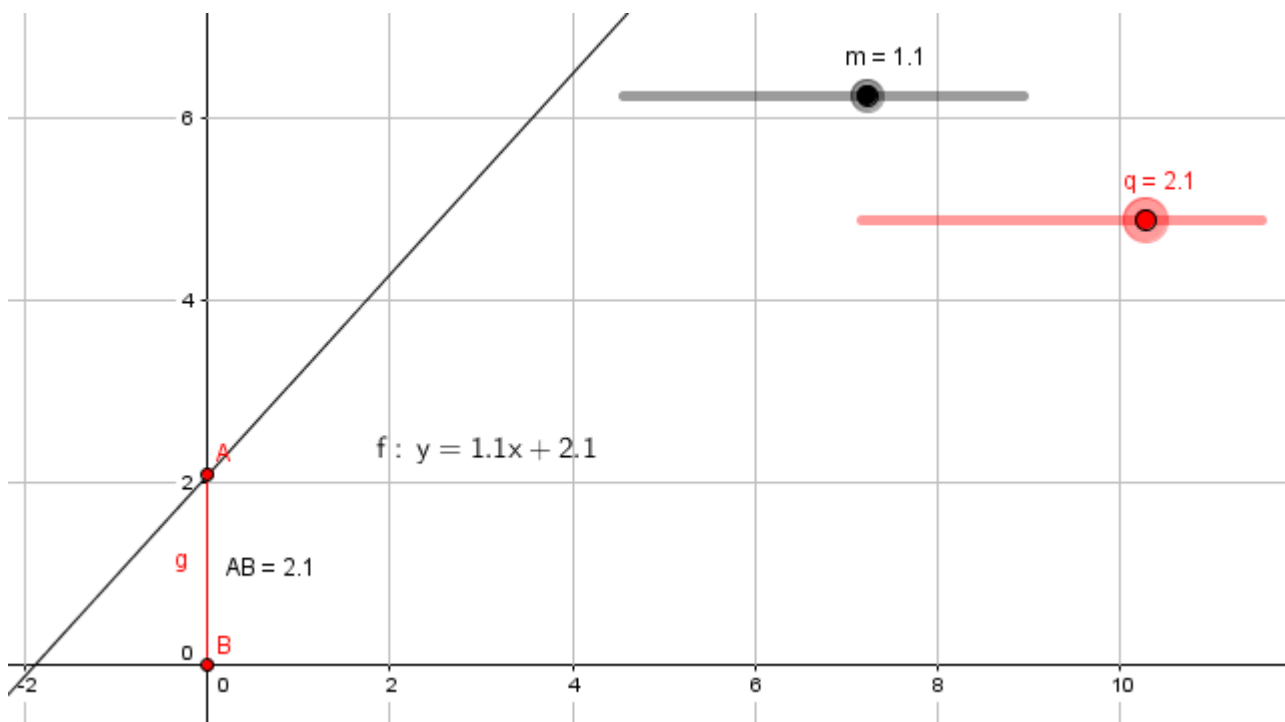
Equazione della retta e sistemi lineari



Premendo il pulsante  alla voce testo e cliccando in un punto qualsiasi della sezione grafici, scrivere

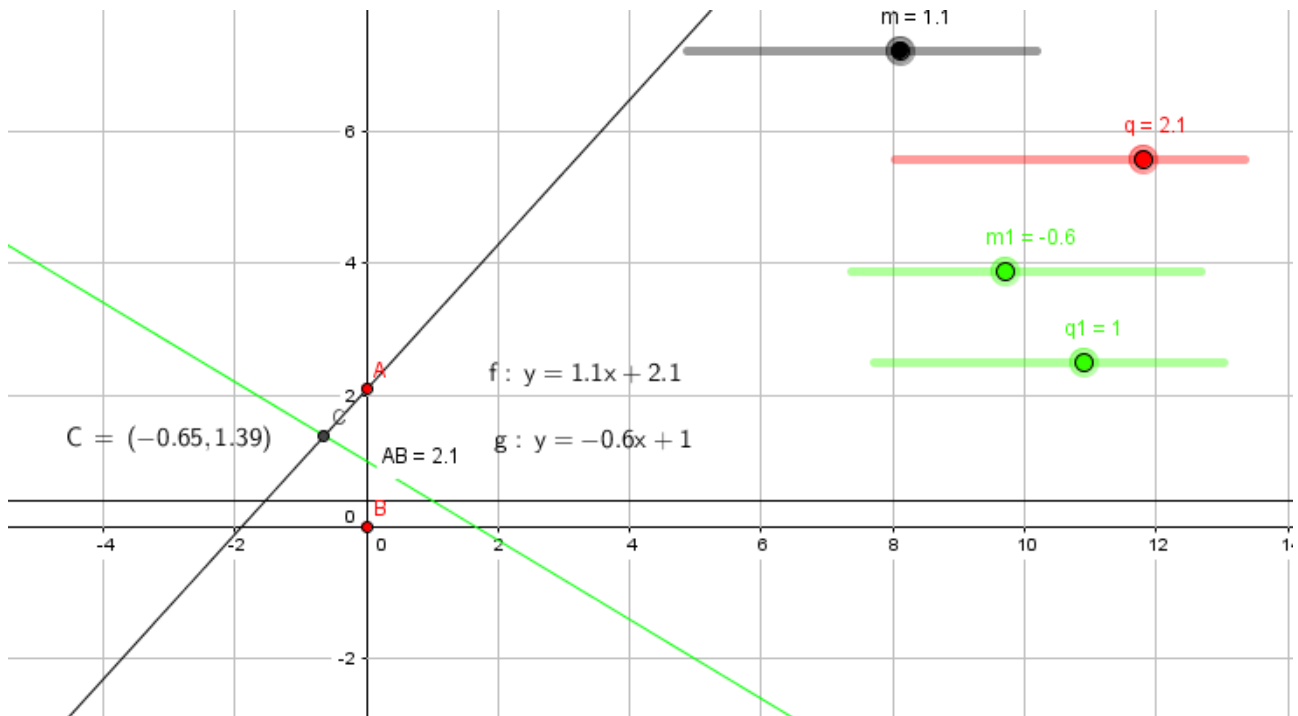


nel riquadro $y=mx+q$. Inserire poi due slider con il pulsante  e cliccando nel piano. Nel primo riquadro che compare inserire m , nel secondo riquadro inserire q . Nella barra inferiore di inserimento scrivere $y=mx+q$. Nella sezione Algebra di sinistra compare la retta $f:y=x+1$ perché nella slider $m=1$ e $q=1$. Posso, usando il tasto sinistro, evidenziare tale formula e trascinarla nella sezione grafici. Muovendo la prima slider o la seconda, posso far vedere come varia l'inclinazione della retta al variare di m o come varia il punto di intersezione della retta con l'asse y al variare di q . Utilizzando il tasto intersezione si evidenzia il punto A di intersezione tra la retta e l'asse y , si può far notare che l'ordinata del punto A , ossia la lunghezza del segmento OA , è proprio uguale al valore di q .

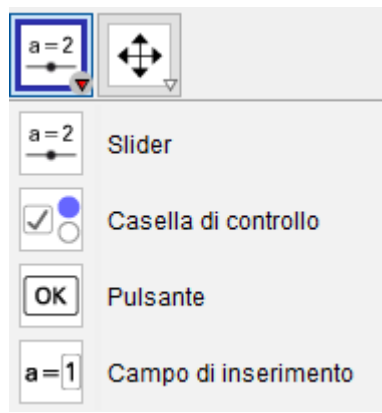


All'interno dello stesso piano inserire due altre slider di colore verde e chiamarle m_1 e q_1 . Nella barra di inserimento scrivere $y=m_1+q_1$ e cliccare invio. Nella sezione Algebra di sinistra compare la retta g e la sua equazione, nella sezione grafici compare la retta e la coloro di verde. Con il pulsante 2 intersezione e cliccando sulle due rette, evidenzio il loro punto di intersezione. Trascinando le equazioni delle due rette nella parte

del grafico posso far comprendere che le coordinate del punto di intersezione non sono altro che la soluzione del sistema lineare con le equazioni delle due rette



Parabola



Inserire tre slider con il pulsante e chiamarle a, b, c.



Con il pulsante alla voce testo e cliccando in un punto qualsiasi della sezione grafici, scrivere nel riquadro $y = ax^2 + bx + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Nella barra di inserimento scrivere $\Delta = b^2 - 4 * a * c$ e premere INVIO

$xv = (-b)/(2*a)$ e premere INVIO

$yv = (-\Delta)/(4*a)$ e premere INVIO


$V = (xv, yv)$ e premere INVIO

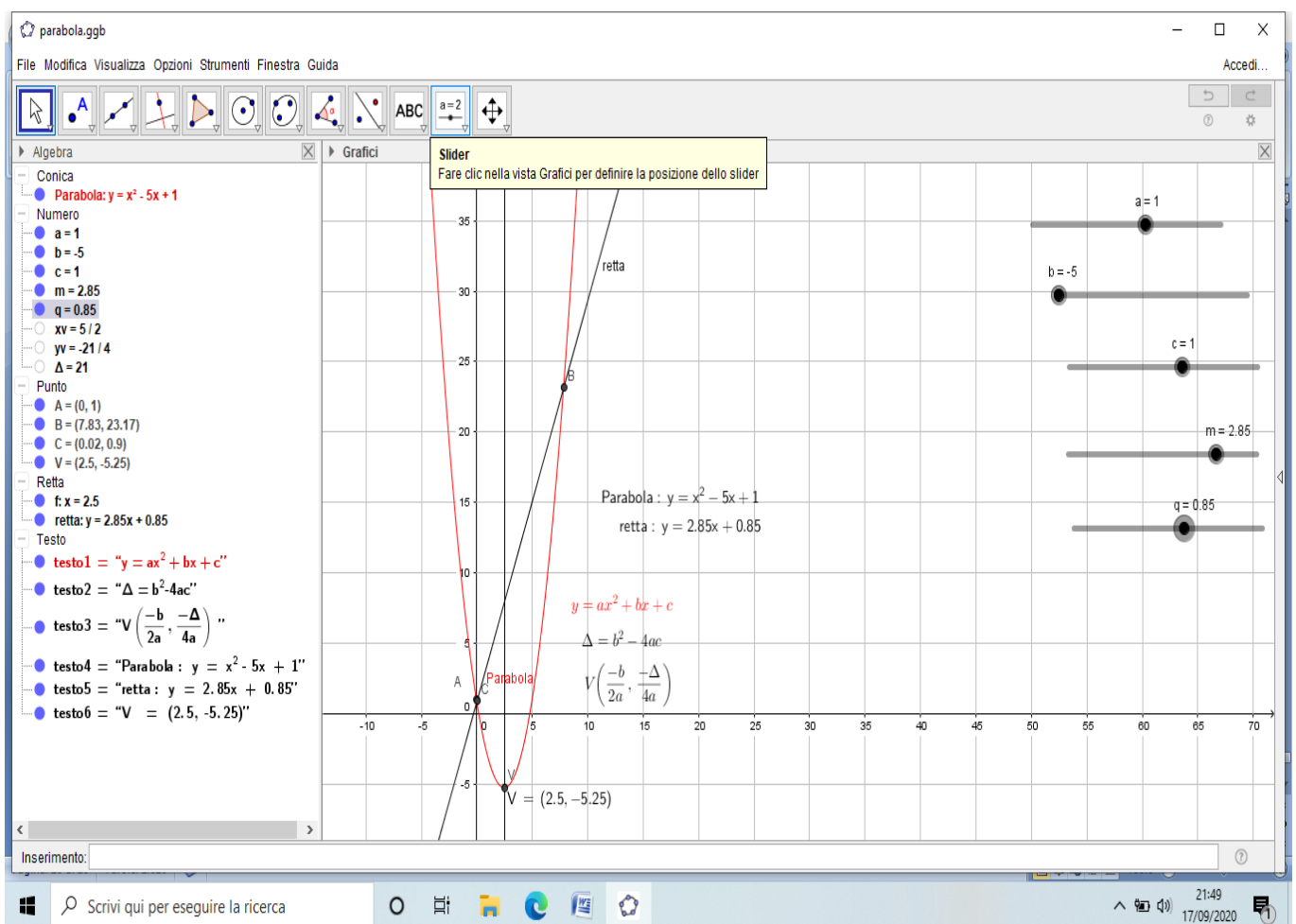
$Y = a*x^2 + bx + c$ e premere INVIO

Nella sezione grafici comparirà la parabola. Scrivendo nella barra di inserimento $x = xv$, sul grafico comparirà l'asse di simmetria. Muovendo le slider si può far comprendere il significato geometrico dei coefficienti a , b e c .

Per la risoluzione di un sistema di secondo grado si devono creare altre due slider e chiamarle m e q e nella barra di inserimento scrivere $y = mx + q$ e premere INVIO.

Nella sezione grafico comparirà la retta. Si possono trascinare le equazioni di parabola e retta dalla sezione

algebra alla sezione grafici. Con il pulsante  alla voce intersezione e cliccando sulla parabola e la retta si possono evidenziare i loro punti di intersezione



Integrale definito e integrale indefinito

Per il calcolo dell'integrale definito di una funzione ad esempio tra -1 e $+1$, si deve inserire nella barra di inserimento l'equazione della funzione, ad esempio $y = -x^2 + 1$ e premere INVIO

Poi nella barra di inserimento scrivere integrale($-x^2 + 1, -1, +1$) e premere INVIO. Si otterrà il valore numerico dell'integrale.

Per il calcolo dell'integrale indefinito della stessa funzione nella barra di inserimento scrivere integrale(-x^2+1,x) e premere INVIO

Per il calcolo della derivata della stessa funzione nella barra di inserimento scrivere derivata(-x^2+1,x) e premere INVIO

