Indice Articoli Anno 1900

LA FUSIONE DELLA PLANIMETRIA CON LA STEREOMETRIA

UNA PAGINA DI STORIA CONTEMPORANEA

DI

GINO LORIA

Nel suo trattato di *Géométrie descriptive* MONGE ha mostrato come alla proposizione " i centri di similitudine esterna di tre cerchi di un piano considerati a due a due " si giungesse nel modo più naturale e luminoso, considerando i circoli dati come sezioni centrali di tre sfere e quindi immaginando i tre coni inviluppati dai piani che ne toccano esternamente due qualunque. È questo forse il più antico e certamente uno dei più brillanti esempi del vantaggio che vi è in certi casi di invocare considerazioni stereometriche nella geometria del piano. Un altro, di natura un po' più elevata, ma non meno bello, venne offerto da QUETELET e DANDELIN, quando mostrarono con quanta naturalezza si pervenga ai fuochi di una curva del second'ordine, con quanta eleganza se ne stabiliscano le proprietà, riguardando quella curva come sezione piana di un cono circolare retto e quei punti come di contatto del piano della curva con sfere inscritte nel cono. Un terzo esempio è somministrato dalla notissima dimostrazione stereometrica della proprietà caratteristica di due triangoli omologici appartenenti allo stesso piano.

Altri ed altri esempi congeneri si aggiunsero in processo di tempo. Essi fecero sorgere e sviluppare il desiderio di introdurre siffatte lucidissime argomentazioni nelle esposizioni più elementari della scienza dell'estensione. Ora a far ciò si opponeva un ostacolo insormontabile, cioè il costume (che risale per lo meno sino ad EUCLIDE) di considerare la planimetria e la stereometria come discipline separate, di esporre quindi le proprietà plastiche dello spazio soltanto dopo di avere esaurite quelle delle figure piane. A togliere questo ostacolo una sola via si apriva dinnanzi all'innovatore animoso: quello di fare della planimetria e della stereometria un tutto organico, riavvicinandone tra loro i temi aventi fra loro intima affinità ed esteriore somiglianza. Chi per primo ebbe tale idea, che, in un regno vivente sotto lo scettro di EUCLIDE, doveva sembrare estremamente anarchica? Non ardisco di rispondere categoricamente a tale domanda, perchè lo studio della storia della scienza in genere e della matematica in ispecie, rivelando che un gran numero di idee, considerate dai moderni come opera propria, sono frutti di investigazioni molto anteriori, impone una prudenza estrema nel pronunciare giudizî di tal fatta. (*) Mi limito pertanto a constatare quanto segue.

Nel 1825 il GERGONNE scriveva: " Il est donc raisonnablement permis de se demander... si notre maniére de diviser la Géométrie, en *Géométrie plane* et *Géométrie de l'espace*, est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses, que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant, on parviendrait, en ne recourant pour ainsi dire qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la Géométrie, des commençants que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lòrsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de proprietés de l'étendue ". (**) Queste auree parole rimasero inascoltate; infatti EUCLIDE e LEGENDRE continuarono ad imperare in Francia come altrove, e non ad esse si deve il primo tentativo a me noto di cancellare la linea di demarcazione esistente fra la geometria piana e quella dello spazio. Esso è rappresentato da *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht am Gymnasien und höheren Realschulen* di C. A. BRETCHNEIDER (Gotha, 1844). In questo ottimo libro — ove molto si può ancora imparare, malgrado i progressi che fece la geometria in quest'ultimo mezzo secolo! — la innovazione di cui si tratta è praticata e consigliata riflettendo: 1° che trattenendo un giovane a lungo sulla geometria piana, la sua fantasia geometrica diviene tarda e priva di agilità, 2° che (come l'esperienza dimostra) il metodo didattico, che si fonda sulla separazione della planimetria con la stereometria, non dà di regola migliori risultati di quello basato sulla fusione dell'una coll'altra. In conformità a tal modo di vedere il BRETSCHNEIDER divise la parte del suo libro relativo alla " Geometria sintetica " in tre sezioni intitolate risp. " Geometrie der Lage ", " Geometrie der Gestalt " e " Geometrie des Maasses ".

E poichè la distribuzione della materia è quello che a noi specialmente interessa, poichè d'altronde la questione di redigere un programma a doppio uso (***) è attualmente all'ordine del giorno fra noi, (****) così ritengo opportuno riferirne qui l'indice dei capitoli contenuti in ognuna delle tre citate sezioni.

(*) Mi sia concesso giustificare questa mia riservatezza con un esempio. Fu di recente sollevata la questione: chi per primo tentò fondere il calcolo differenziale con l'integrale? Alcuni risposero ricordando uno, altri un altro dei trattatisti di quest'ultimo ventennio. Ora chi mai avrebbe creduto che la risposta vera non si sarebbe ottenuta se non citando le *Institutiones analyticae* pubblicate per la prima volta a Bologna nel 1767 da V. RICCATI e G. SALADINI?

(**) *Annales de Mathématiques*, T. XVI, p. 209.

(***) Si noti che il BRETSCHNEIDER, prevedendo le opposizioni che avrebbe incontrate, adottò un ordinamento tale che il suo libro potesse anche venire preso come testo da un professore antifusionista.

(****) Cfr. una relazione del Prof. GIUDICE inserita nel T. XIV, p. 34-36 del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*.

I. *Geometria di posizione:* 1° Retta. 2° Piano. 3° Angoli piani. 4° Parallelismo nel piano. 5° Diedri. 6° Angoli di rette e piani. 7° Parallelismo nello spazio.

II. *Geometria della forma:* 1° Figure piane in generale. 2° Proprietà dei triangoli. 3° Quadrilateri, in particolare parallelogrammi. 4° Il circolo. 5° Figure inscritte e circoscritte. 6° Angoli solidi. 7° Poliedri in generale. 8° Piramidi. 9° Prismi. 10° La sfera.

III. *Geometria di misura:* 1° Divisione e misura delle rette. 2° Proporzioni. 3° Area delle figure rettilinee. 4° Similitudine. 5° Relazioni metriche tra figure simili. 6° Periferia ed area del circolo. 7° Volume di prismi e piramidi. 8° Similitudine e simmetria di solidi. 9° Area e volume di figure tronche. 10° Area e volumi della sfera e di solidi annulari.

***

Se il Bretschneider abbia trovato seguaci ignoro; (*) ma è certo che non debbono essere stati molto numerosi e significanti, dal momento che il nuovo metodo da lui immaginato cadde ben presto in dimenticanza (il Baltzer stesso, che in molte occasioni attinse a larga mano all'opera del Bretschneider, non solo non ne adottò il concetto fondamentale, ma nemmeno lo onorò di una semplice citazione!) Sicchè si può affermare, senza tema di ingannarsi, che dalle idee dell'egregio professore del Liceo di Gotha non trasse la propria ispirazione il secondo, in ordine di tempo, di coloro che propugnavano l'utilità di alternare nell'insegnamento gli argomenti di geometria piana con quelli di geometria solida; è desso il sig. C. Méray, autore dei *Nouveaux Éléments de Géométrie* pubblicati a Parigi nel 1874, il quale giustifica l'innovazione da lui arrecata, con le parole seguenti: " J'ai abbandonnée la distinction d'usage entre la Géométrie plane et la Géométrie dans l'espace. Outre qu'elle n'est pas dans la réalité des choses, puisque la nature ne nous offre que des figures dans l'espace, elle met un long interval entre la théorie de la ligne droite et celle du plan, dont chacune cependant est nécessaire à la parfaite intelligence de l'autre; elle nécessite même une interruption dans l'étude de la ligne droite. Enfin, elle est encore plus nuisible dans l'enseignement professionnel, car la pratique des Arts réclame bien plus la connaissance approfondie des principales combinaisons de droites et de plans, que celle de propositions théoriques, comme les propriétés des sécantes du cercle. Ces inconvenients m'ont paru surpasser de beaucoup les avantages que cette méthode peut avoir comme artifice didactique; si elle divise et aplanit un peu les premières difficultés de la Géométrie, on ne pent nier qu'elle soit pour beaucoup dans la

(*) Tale è forse A. Steen, capo della scuola dei fusionisti danesi.

lenteur que mettent les élèves à acquérir la faculté de *lire dans l'espace* „.

A chi legge non isfuggirà certamente l'indiscutibile analogia di natura che esiste fra i motivi addotti dall'eminente geometra francese e quelli che guidarono il BRETSCHNEIDER a conclusioni analoghe. Riguardo alla maniera in cui quello tradusse in atto le proprie idee, affinchè il lettore se ne formi un concetto dirò che il MÉRAY abbandonò la solita divisione in libri, e distribuì tutta la materia trattata in ventisette capitoli, ai quali seguono sette appendici relative a questioni speciali. Un esame un po' attento di tutta l'opera manifesta che quei ventisette capitoli compongono varî gruppi. Infatti dai primi sette si apprendono relazioni di posizione e il paragone (cioè la semplice constatazione dell'eguaglianza o della diseguaglianza) di angoli e porzioni di rette; per precisare questi dati notisi che — prescindendo dal Cap. I introduttorio — il II contiene delle generalità sopra rette e piani, il III è consacrato al parallelismo (con ispeciale riguardo al moto di traslazione) nonchè all'intersezione di rette e piani, il IV alla perpendicolarità (con nozioni relative al moto di rotazione), il V ed il VI trattano del paragone fra angoli (piani o diedri) o fra segmenti rettilinei, ed il VII delle proprietà principali dei triangoli. — Passando quindi alla misura, il MÉRAY consacra un capitolo (l'VIII) alle mutue distanze fra punti, rette e piani, ed applica subito le nozioni stabilite alla determinazione della lunghezza di un arco di curva (Cap. IX), dell'area di una superficie piana (Cap. X) o curva (Cap. XI), e del volume dei solidi (Cap. XII). L'autore ritorna poi a questioni attinenti alla posizione, trattando delle figure omotetiche e simili (Cap. XIII) e di quelle simmetriche (Cap. XIV) e dimostrando le principali proprietà del triedro. Nel resto dell'opera il concetto di fusione non rappresenta più che una parte secondaria, giacchè i Cap. XVI-XXI sono tutti dedicati al cerchio ed ai poligoni regolari, mentre i restanti trattano successivamente di cilindri, di coni, di superficie di rivoluzione e finalmente della sfera.

All'opera del MÉRAY non arrise migliore fortuna di quello che ebbe lo scritto del BRETSCHNEIDER, giacchè, non soltanto le proposte ivi fatte vennero accolte con estrema diffidenza dalla classe dei vecchi insegnanti, affetti dappertutto di misoneismo cronico, pronti sempre a giudicare le cose nuove più difficili delle antiche; ma anche agli scienziati essa passò inosservata, onde venne troppo presto dimenticata, e si presenta, dopo un quarto di secolo, come opera nuova, tuttora in attesa di un giudizio. Ma chi voglia oggi misurarne il valore deve tener sempre presente l'epoca in cui venne scritta; altrimenti rischierebbe di misconoscerne le doti di originalità e quegli altri pregi che ora in Francia (probabilmente per l'incontestata autorità nel frattempo acquistatasi, coi suoi lavori di analisi, quello si considera, da un certo punto di vista, per il WEIERSTRASS della Francia) vengono riconosciuti nel modo più esplicito, cioè coll'adozione di quell'opera come libro di testo in parecchi istituti. (*)

***

I venticinque anni che sono ormai scorsi dalla pubblicazione dei *Nouveaux éléments de géométrie* sino ad oggi compongono un periodo estremamente importante per tutto quanto concerne la filosofia e la didattica della geometria. Si ricordi infatti che gli è nel decennio 1870-1880 che si diffusero in tutto il mondo, divenendo proprietà comune, le idee radicalmente riformatrici di LOBATSCHEFFSKY e BOLYAI; fu allora che divenne generale e profonda la convinzione della necessità di sottoporre ad una revisione completa la materia della geometria di Euclide, nonchè il metodo con cui è trattata, specialmente coll'intento di misurare quanto solido fosse l'edificio eretto dal sommo Alessandrino. E nei quindici anni che seguirono, questo assiduo lavoro di revisione non è cessato un istante; inoltre, in Italia, una schiera di giovani valorosi, abbandonando le aule universitarie, dove avevano apprese le nuove idee, popolarono le scuole medie, infiammati dalla nobile intenzione di far fruttare quanto avevano appreso, sicchè un soffio di nuova vita parve circolare nelle aule, in cui dianzi maestri e discepoli sonnecchiavano sugli *Elementi* di Euclide.

Come esponente di questo nuovo stato di cose ci si presenta un trattato di geometria informato all'idea di fondere la planimetria con la stereometria; ma di fonderle, non col semplice intento di rendere più agevole, più dilettoso, più fecondo lo studio della geometria, ma con quello, ben più nobile ed alto, di rendere meno numerosi o più chiari i postulati fondamentali della geometria, più semplici e rigorose certe argomentazioni, più " pura „ la compagine di alcune teorie coll'eliminazione di certi elementi estranei. Il trattato a cui alludo (il lettore se n'è già accorto) è quello pubblicato da R. DE PAOLIS quindici anni or sono sotto il titolo di *Elementi di geometria* (Torino, 1884), ed ove tutta la scienza dell'estensione è divisa in sei sezioni, cioè: 1° Verità fondamentali, 2° le figure fondamentali della geometria (triangoli e poligoni, angoli triedri e angoli poliedri, solidi poliedri, 3° cerchio, cono, cilindro e sfera, 4° teoria dell'eguaglianza, 5° teoria della proporzionalità, 6° teoria della misura. Va rammentato che dal ben auspicato connubio fra planimetria e stereometria, celebrato dal DE PAOLIS, nacquero delle nuove dimostrazioni, così importanti dal punto di vista dottrinale, da costituire un vero progresso scientifico.

La novità dei concetti e la concisione del dettato fanno apparire, oggi, come quando vennero alla luce, gli *Elementi* del DE PAOLIS, piut-

(*) Vennero anche costruiti dei modelli in legno per illustrarne il contenuto e facilitarne l'intelligenza tosto come un " livre du maître „ all'uso francese, che come un manuale scolastico: ciò spieghi perchè essi ottennero scarsa diffusione nelle scuole italiane, anche in quelle dirette da fusionisti. Fortunatamente due egregi insegnanti (uno dei quali discepolo del De Paolis) contribuirono al trionfo delle nuove idee, esperimentando il nuovo metodo nell'Accademia Navale di Livorno e poi pubblicando un'opera (*), ove i procedimenti ideati dal compianto professore dell'Università di Pisa sono modificati in modo da meglio corrispondere alle esigenze delle scuole, e formano un trattato che nulla vieta di adottare come piattaforma di un insegnamento elementare della geometria. In conseguenza il numero dei fusionisti da manipolo diventò legione; (**) e si accrebbe a dismisura il numero di coloro che, pur non arrolandosi in tale schiera, assumono un'attitudine favorevole alla fusione, e se ne servono ne' casi in cui da essa provengano indiscutibili vantaggi. (***)

***

Il problema della fusione non può, nè deve restringersi entro gli angusti confini della geometria elementare. E di vero — per non parlare della geometria sintetica, ove la considerazione simultanea di figure piane e di figure solide è sangue e midollo di tutti i concetti e di tutti i metodi — è naturale domandarsi se essa sia teoricamente possibile e praticamente utile nella geometria analitica. Orbene, per quanto concerne la parte elementare di questa disciplina, l'Italia ha già da tempo risposto affermativamente a tale domanda; giacchè, tanto nella *Geometria alle coordinate* (Parma, 1891) di L. Raschi, quanto nel *Trattato di geometria analitica* (Livorno, 1893) di G. Lazzeri, sono esposti contemporaneamente i fondamenti del metodo delle coordinate per forme di I, II e III specie, e quindi applicati alle figure di primo ordine (rette e piani) ed a quelle di secondo (coniche e quadriche). Per quanto invece concerne la geometria analitica superiore o geometria differenziale delle curve e superficie, la risposta venne data da quello stesso eminente scienziato che si fece in Francia apostolo della fusione per l'insegnamento elementare. Giacchè il Méray nella IV ed ultima parte (Paris, 1898) delle sue ottime *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, più ancora che mescolare le considerazioni concernenti il piano con considerazioni relative allo spazio, riguarda la planimetria infinitesimale siccome caso particolare della stereometria, ed ottiene così rilevanti

(*) G. Lazzeri e A. Bassani, *Elementi di geometria*. Livorno, 1ª ediz., 1891; 2ª, 1898.

(**) Cfr. la vivace relazione del Prof. De Amicis, *Pro fusione*, Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario, T. XIII, 1898, p. 49-72; e l'articolo del Dott. G. Candido *Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréometrie dans l'enseignement de la géometrie élémentaire en Italie* in *L'enseignement mathématique*, T. I, 1899, p. 204-215.

(***) Basti annoverare fra questi ultimi il Prof. Veronese (v. le dichiarazioni nella Prefazione agli *Elementi di Geometria*. Padova, 1897, da lui redatti colla collaborazione del Prof. Gazzaniga).

semplificazioni e ravvicinamenti importanti. A tale innovazione siamo sicuri che molti faranno buon viso: giacchè se in taluno può sorger dubbio sulla possibilità che uno, digiuno di planimetria, sia in grado di assimilarsi la stereometria, nessuno potrà giudicare più difficile il rettificare una curva gobba del rettificarne una piana, ovvero più complicata la determinazione analitica del piano tangente ad una superficie di quello che sia la risoluzione del corrispondente problema per una curva piana.

Da tutto quanto precede scaturisce che l'idea di fare un tutto della geometria del piano e di quello dello spazio, sorta dapprima dal modesto desiderio di meglio corrispondere ai fini ed alle esigenze dell'insegnamento elementare, si manifestò gradatamente sotto l'aspetto assai più imponente di metodo atto a rendere più perfetta la struttura della geometria, più sciolto e regolare il funzionamento de' suoi organi. Concepita in origine come applicabile soltanto ai rudimenti della scienza della estensione, essa a poco a poco mette ali così robuste da poterne attingere le vette più eccelse. Quanto essa sia esente da artificio, quanto corrisponda allo stato odierno della scienza, è dimostrato dal vederla nascere (almeno) nella mente di tre persone differenti per indole di studi, per tendenze scientifiche e per nazionalità, dal vederla riuscir vittoriosa sull'indifferenza sprezzante di alcuni, sull'aperta opposizione di altri. Non basta forse ciò a consigliare chiunque insegna a considerare il metodo della fusione almeno come uno di quelli che si possono scegliere per l'istruzione della gioventù? E l'aver aggiunto un metodo di esposizione e coordinamento, nuovo e potente, a quello che ha il suo prototipo negli *Elementi* di EUCLIDE, non è forse titolo sufficiente per accordare un posto stabile nella storia della scienza a coloro che primi predicarono coll'esempio il principio della fusione?

Genova, 20 Aprile 1899.

OSSERVAZIONI SOPRA LE COORDINATE POLARI

DI

GINO LORIA

Si sogliono ordinariamente considerare come coordinate polari di un punto P del piano il *raggio vettore* ρ e *l'anomalia* ω, cioè il numero positivo che misura la distanza di P da un punto fisso O (*polo*) e l'angolo, contato in un senso determinato, formato dalla semiretta OP con una semiretta fissa uscente da O (*asse polare*). Tale definizione è perfettamente logica e non presenta inconveniente alcuno, allorquando si considerano dei punti isolati; inoltre, essa viene in certo modo legittimata considerando, assieme al sistema di coordinate polari, il sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la cui origine cade nel polo e di cui l'asse delle ascisse coincide coll'asse polare; l'accettabilità di essa viene ancora confermata notando che la prima delle definite coordinate polari altro non è che il *modulo* o *valore assoluto* del numero complesso rappresentato nel modo consueto dal punto P.

Ma, quando si considerano delle serie continue di punti (linee) e si vogliono studiarle coll'uso esclusivo delle coordinate polari, s'incontra una difficoltà assai grave. Infatti per rappresentare mediante un tale sistema una curva, si dovrà adoperare un'equazione della forma

$$f(\rho, \omega) = 0; \tag{1}$$

orbene è chiaro che facendo variare ω da $-\infty$ a $+\infty$, in generale, in certi intervalli ρ risulterà positivo, ma in altri negativo, e ad interpretare siffatti valori è impotente la definizione che abbiamo riferita in principio.

Ad ovviare a tale inconveniente basta modificare un po' le considerazioni di partenza, surrogandole con le seguenti: Si consideri in un piano un punto fisso O ed una semiretta fissa a uscente da esso, e s'immagini che una semiretta giri attorno a O partendo dalla posizione a o rotando nel senso considerato come positivo o nell'opposto. Per ogni sua posizione r si troveranno su di essa infiniti punti (li indicheremo con M) ed altrettanti se ne troveranno sulla semiretta complementare $\overline{r}$ (li indicheremo con $\overline{\mathrm{M}}$). Orbene per fissare la posizione di un punto M si prenderanno i numeri:

$$\rho = + \text{lunghezza } \overline{\mathrm{OM}}, \ \omega = \text{angolo } (ar),$$

mentre per fissare quella di un punto $\overline{\mathrm{M}}$ si assumeranno i numeri

$$\rho = - \text{lunghezza } \overline{\mathrm{O}\overline{\mathrm{M}}}, \ \omega = \text{angolo } (ar).$$

In conseguenza tutti i punti di qualsivoglia semiretta avranno positiva la prima coordinata polare, mentre tutti quelli della semiretta complementare l'avranno negativa; la seconda coordinata sarà la stessa per tutti i punti di una semiretta, e precisamente positiva o negativa secondochè la semiretta mobile per raggiungere la posizione considerata ruotò nel senso positivo o nell'opposto.

Osservando: 1° che se una semiretta r fa con la retta fissa a un certo angolo, la complementare fa con a l'angolo $\omega \pm \pi$, 2° che per arrivare a quella posizione r può sempre ruotare nel senso positivo, risulta evidente che per determinare un punto mediante coordinate polari, si potranno sempre surrogare i numeri precedenti con altri sempre positivi. Ma tale artificiosa sostituzione, se può tornare utile quando si tratti di punti isolati o quando si voglia passare a coordinate cartesiane, complica di regola la risoluzione delle questioni riferentisi alle curve, in particolare quella del problema (pel geometra fondamentale) che consiste nel determinare la forma della curva rappresentata da un'equazione del tipo (1).

Per dimostrare la verità di questo asserto addurremo due soli esempi, dopo avere premessa l'osservazione seguente: per costruire la curva rappresentata dalla equazione (1), il modo più consentaneo alla natura delle cose è di far ruotare una semiretta attorno al polo, in un senso o nell'altro, partendo dalla posizione a, e determinare sopra ciascuna i punti corrispondenti della curva; tale rotazione dovrà essere continuata indefinitamente in entrambi i sensi, se si tratta di una curva trascendente, ma se si tratta di una curva algebrica si potrà arrestarla dopo un certo numero di giri, perchè, a un certo momento, si ricadrà in punti già segnati.

Esempio I. — Abbiasi la curva rappresentata dalla equazione

$$\rho = 2\mathrm{R} \operatorname{sen} \omega; \tag{2}$$

è subito visto essere dessa non altro che il cerchio di raggio R tangente all'asse polare nel polo e posto nel semipiano delle y positive. Ora dalla (2) risulta che:

$$\begin{array}{llll} \text{per} & 0 < \omega < \pi & \text{è} & \rho > 0 \\ \text{per} & \pi < \omega < 2\pi & \text{è} & \rho < 0. \end{array}$$

Interpretando questi fatti conformemente alle esposte definizioni si vede che su ognuna delle semirette uscenti dal polo e situate nel semipiano delle y positive si trova un punto della nostra curva, e che altrettanto accade per la complementare di ognuna delle semirette situate nell'altro semipiano: ciò è appunto quello che corrisponde allo stato di cose rappresentato dalla figura, che lasciamo al lettore di tracciare.

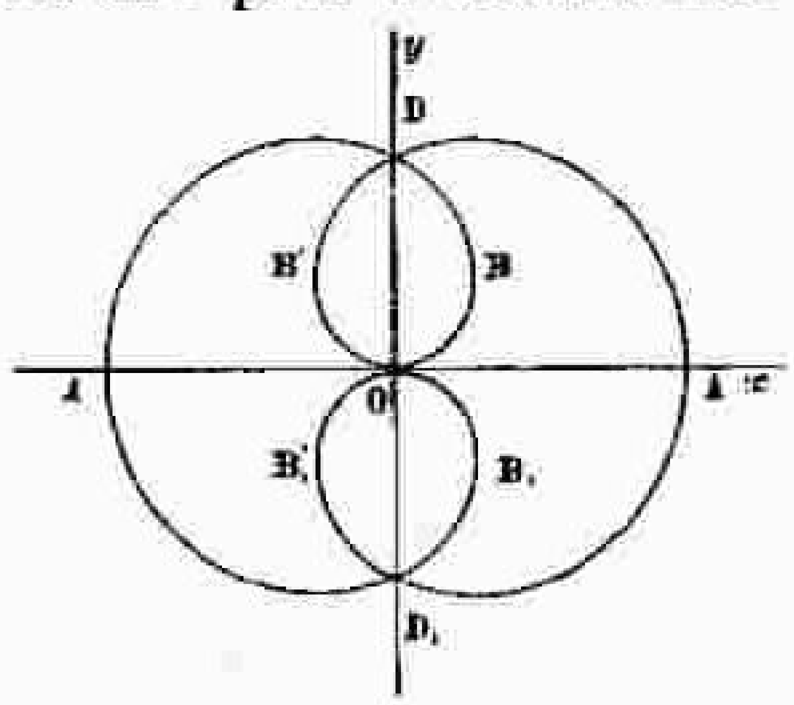


Fig. 1.

Esempio II. — La curva rappresentata dalla fig. 1 rientra nella categoria delle " rodonee „ di Guido Grandi, la cui equazione generale è $\rho = 2\mathrm{R} \operatorname{sen} m\omega$; ora tale classe di curve, meglio di qualunque altra, può servire a dimostrare l'utilità delle nuove coordinate polari; essa ci somministrerà il secondo esempio che vogliamo svolgere. — La curva

$$\rho = 2\mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}, \tag{3}$$

in coordinate cartesiane è rappresentata dall'equazione seguente:

$$(x^2 + y^2)^3 - 4\mathrm{R}^2(x^2 + y^2)^2 + 3\mathrm{R}^4 y^2 = 0.$$

Essa è dunque una curva del sest'ordine, simmetrica rispetto ai due assi della coordinata, avente nell'origine un punto di contatto di due rami con per Ox relativa tangente; su quest'asse ha inoltre due punti semplici A, A' tali che $\overline{0\mathrm{A}} = \overline{0\mathrm{A}'} = 2\mathrm{R}$, mentre sull'asse delle y ha due punti doppi D, D_1 tali che $\overline{0\mathrm{D}} = \overline{0\mathrm{D}_1} = \mathrm{R}\sqrt{2}$. La forma generale della curva risulta dalla fig. 1. — Ora riprendiamo la equazione (3), per applicare ad essa le nostre considerazioni generali. Per ottenere tutta la curva basterà evidentemente far compiere alla semiretta r due giri; la (3) fa vedere che

$$\begin{array}{llll} \text{per} & 0 < \omega < 2\pi & \text{è} & \rho > 0, \\ \text{per} & 2\pi < \omega < 4\pi & \text{è} & \rho < 0. \end{array}$$

Perciò su ogni semiretta del primo giro esiste un punto della curva in questione; il luogo geometrico di essi è l'arco $0BDA'D_1B_10$. Invece su nessuna semiretta del secondo giro si trovano punti della curva, ma uno ne esiste sulla complementare di ciascuna; si genera in conseguenza l'arco $0B'_1D_1ADB'0$, che completa la curva.

È superfluo per noi il moltiplicare gli esempi; il giovane lettore potrà svolgergli per proprio esercizio. Importa invece fare un'osservazione concernente certe spirali notevoli conosciutissime.

Definita la spirale di Archimede mediante l'equazione

$$\rho = a\omega \quad \text{ove} \quad a > 0, \tag{4}$$

facendo variare ω da 0 a $+\infty$ si conclude che la curva parte dal polo e fa attorno ad esso nel senso positivo infinite circonvoluzioni allontanandosene indefinitivamente; si ottiene così la curva segnata a tratto punteggiato nella fig. 2. Se invece si fa variare ω da 0 a $-\infty$, attenendosi alle convenzioni suesposte, si ottiene un altro ramo di curva, simmetrico rispetto a $0y$ della curva dianzi tracciata: è quello che è segnato nella fig. 2 a tratto continuo. Ora è chiaro che volendo

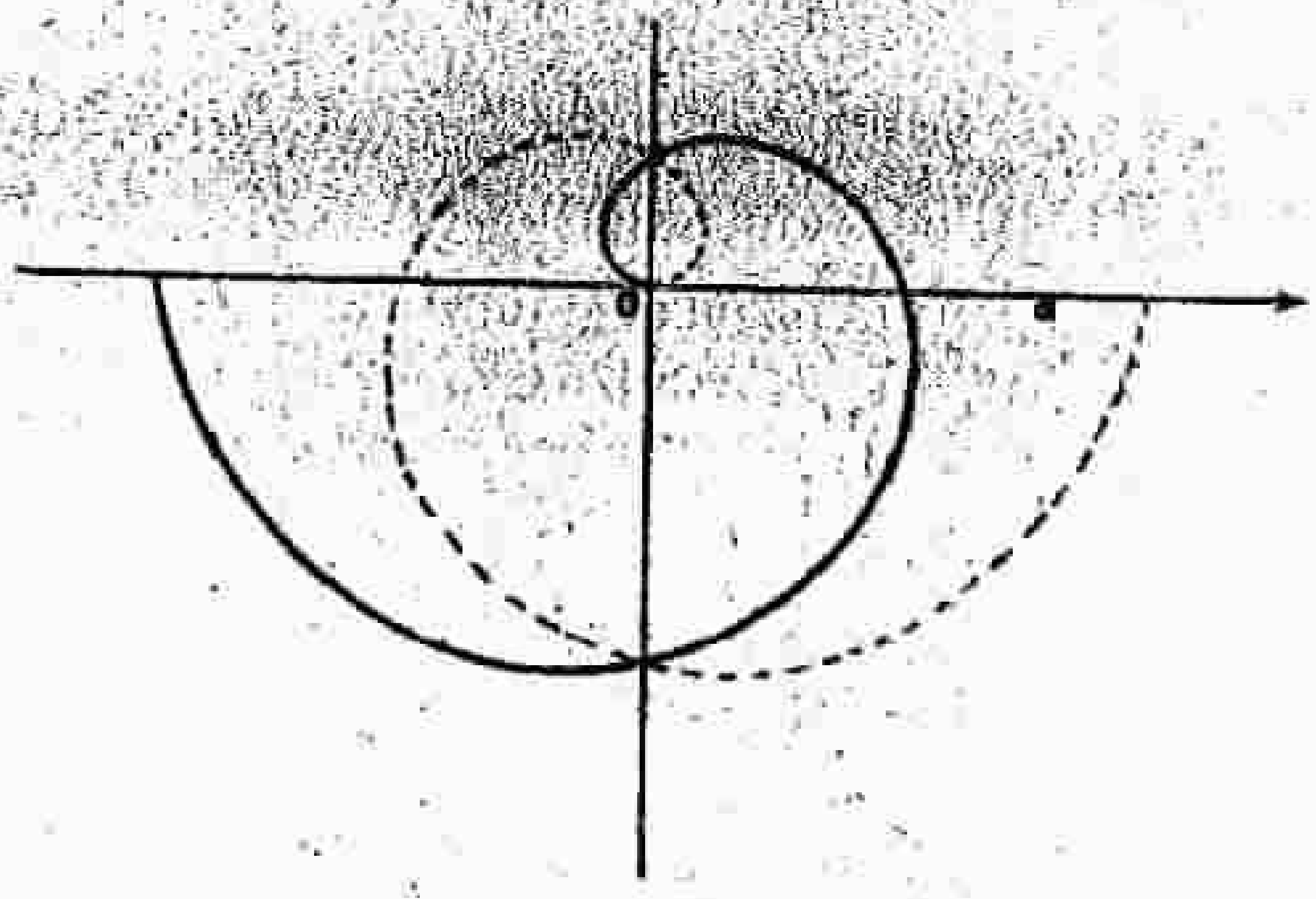


Fig. 2.

lasciare alla ω la massima libertà, di cui ha diritto, converrà concederle tutti i valori da $-\infty$ a $-\infty$; onde (contrariamente a quello che di consueto si pratica) come *rappresentazione geometrica* COMPLETA dell'equazione (1) si deve considerare l'insieme dei due rami segnati nella fig. 2. Perciò la spirale d'Archimede è una curva simmetrica rispetto all'asse delle y e possiede infiniti punti doppi distribuiti su quest'asse.

Similmente: tutte le spirali rappresentate dall'equazione

$$\rho = a\omega^n, \tag{5}$$

ove n è intero positivo, sono curve simmetriche rispetto a O_x se n è pari, a $0y$ se n è dispari; in ogni caso sono fornite di ∞^1 punti doppi, allogati sopra una retta. — Di analoghe prerogative godono le spirali

$$\rho^m = a\omega^n, \tag{6}$$

ove m e n sono numeri interi, positivi o negativi; lasciamo al lettore di enunciarle, nonchè di verificare che la spirale logaritmica, oltre il ramo continuo generalmente considerato, ne possiede un secondo punteggiato.

Considerazioni analoghe a quelle qui svolte, potrebbero istituirsi relativamente alle coordinate polari nello spazio.

Genova, 10 Aprile 1899.

SULLA DEFINIZIONE DEL NUMERO

1. Nella mia *Teoria delle Grandezze* (*) ho dato la seguente definizione: " Data una classe di grandezze Γ (senza porre per essa nessuna " condizione) e prese due sue grandezze qualunque A e B, secondochè " esse sono uguali disuguali, diremo che esse hanno *uguali numeri* o " *numeri disuguali* „.

A tale definizione, citata nei precisi termini ora detti e senza alcun'altra delle parole che poi seguono nel testo, il Prof. A. M. Bustelli, in un suo lavoro (**) fa la seguente osservazione: " Mi pare che questo " modo di esprimersi dell'autore possa dar luogo a degli equivoci. Parrebbe infatti, stando a codesta enunciazione, che il numero fosse " qualche contrassegno assoluto di A e B nel modo stesso che è tale " delle pluralità. Ma ciò evidentemente non è, quando si tratta di grandezza in generale, perchè allora il numero è relativo all'unità di " misura; e cosiffatte relatività l'autore avrebbe fatto bene a metterle " in rilievo da bel principio „.

E il Prof. De Amicis in una sua *Lettera aperta* al Prof. Bustelli (***) trova giustissima l'obbiezione e aggiunge: " Al sostantivo grandezze " doveva seguire l'aggettivo misurabili, e, se io non erro, dovevasi " poi dimostrare che se A, B hanno numeri uguali (o disuguali) per " una data unità di misura, hanno pure numeri uguali (o disuguali " per qualunque altra unità di misura „. (****)

Per la chiara cognizione di quanto sto per scrivere, aggiungo che alla mia citata definizione fanno seguito poco dopo nel mio libro le parole: " Collegando ad ogni grandezza di Γ un ente da dirsi numero, " considerati due di questi enti possiamo sempre concludere che deve " dirsi che essi sono uguali o disuguali. Questi enti sono quindi per " noi grandezze „. E poco più in giù: " Se indicando S il simbolo del" l'operazione generatrice della classe Γ ed essendo A, B . . . . L, M gran-

(*) Bettazzi, *Teoria delle Grandezze*. Pisa, Spoerri, 1890, pag. 67.

(**) A. M. Bustelli, *La Matematica ed i fenomeni naturali*. Dispensa 1ª. *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche*. Milano, Trevisini, 1898, pag. 56.

(***) *La matematica ed i fenomeni naturali*. Discorsi del Prof. Anton Maria Bustelli. Lettera aperta del Prof. Enrico De Amicis all'autore. *Periodico di matematica*, Tomo XIV, Marzo-Aprile 1899.

(****) In detti lavori si fanno anche altre osservazioni alla mia citata *Teoria delle Grandezze*; ma su quelle non intendo in questa circostanza intrattenermi pubblicamente, ed alcuno, del resto, riconosco giuste senz'altro io pure.

" dezze di questa classe, $\alpha, \beta \dots \lambda, \mu$ i loro numeri si abbia $S(A, B, \dots L) = M$, " a μ daremo il nome di somma di $\alpha, \beta \dots \lambda$ e scriveremo allora " $\alpha + \beta + \dots + \lambda = \mu$ ".

Esaminerò le obiezioni mosse, prendendo motivo così ad illustrare e chiarire la definizione da me usata.

2. E innanzi tutto, una definizione di quella forma colla quale si introduce una parola nuova *(numero)* senza dare ad essa un significato, costituisce un errore? Senza dubbio no; essa, per adottare la terminologia usata dal Prof. Burali-Forti (*) è una definizione di quarta specie, simile a quella a cui ricorre Euclide il quale, per esprimere un certo fatto geometrico, che egli definisce, usa la frase: *avere ragioni uguali,* nella quale comparisce il nome di *ragione* senza che ad esso si dia un significato. Definizioni di questo genere ci permettono spesso di preparare la via alla creazione di concetti nuovi, per es. gli ordini di infinitesimo, o ad introdurre concetti difficili a definire direttamente in sè, come per es. il tempo. (**)

Nè si può opporre che con tal modo si fa uso di parole non definite; giacchè una parola acquista spesso un diverso significato a seconda delle frasi in cui entra, talchè sono veramente queste frasi che vanno definite quando la parola non debba usarsi isolata: e se son ben definite le frasi, poco importa che siano definite tutte le parole che vi compaiono, precisamente come per definire una parola poco importa che abbiano o no ricevuto un significato le sillabe che la compongono. L'essenziale è che non ci si prenda la libertà di usare quelle parole fuori delle frasi colle quali sono state presentate, o delle altre di cui si sia dopo data la definizione.

Ciò non toglie per altro che si possa a quella parola dare dei significati per usarla isolatamente o farla servire ad indicare enti nuovi, purchè quei significati si accordino coll'uso delle frasi già definite. Così alla parola *ragione* usata da Euclide si può dare il significato di *rapporto* fra due grandezze, non perchè ciò sia necessario, ma perchè la fraseologia del rapporto è identica a quella della ragione; agli ordini di infinitesimo, o almeno ad alcuni, si dà il significato di numero, o si tengono in conto di enti nuovi, e via dicendo. Ma nel momento di dar la definizione di una frase, questa questione del dare un significato ad una parola di essa usata sola, si lascia impregiudicata.

L'obiezione del Prof. Bustelli apparisce (per le parole che egli cita) che sia fatta alla mia definizione della frase " aver numeri

(*) Burali-Forti, *Logica matematica*, Milano, Manuali Hoepli, 1894, pag. 140.

(**) Vedi mia *Teoria delle Grandezze*, pag. 5-6. Il Couturat, *De l'infini mathématique*, 2ª Parte, Libro I, Cap. III, scrive: " In generale il matematico non definisce mai nessuno dei concetti fon- " damentali della scienza: nè il numero, nè la lunghezza, nè la durata, nè la massa, che sono tut- " tavia gli oggetti proprii della speculazione matematica e gli elementi costitutivi di tutte le gran- " dezze. Egli non può nè deve definire che l'uguaglianza e l'addizione di due grandezze omogenee; " queste definizioni gli bastano a caratterizzare ogni specie di grandezze e le determinano intera- " mente " e altrove (ivi 1ª Parte, Libro I, Cap. III). " Il matematico... *pone* dei simboli e pone insieme " le regole, secondo cui dovrà combinarli insieme, e queste regole bastano a caratterizzare questi " simboli e a dar loro un valore matematico. In una parola, egli crea degli enti matematici per " mezzo di convenzioni arbitrarie.

uguali „; ma siccome egli dice che si viene così a fare di ogni numero il contrassegno di una grandezza, senza che si sia stabilito di assumere un'unità, mentre il numero è relativo a questa unità, io osservo che con quella mia parola si definisce la frase " aver numeri uguali „ la quale accenna all'uguaglianza di due grandezze, che è un fatto assoluto e non relativo ad un'unità. Mi pare dunque che l'obiezione sia piuttosto da trasportarsi a quel tratto (da me superiormente citato) nel quale mi propongo di attribuire alla parola numero il significato di ente che stia da sè. Altrettanto dicasi dell'obiezione del Prof. De Amicis, il quale, chiedendo che si dimostri che se A e B hanno numeri uguali rispetto ad un'unità non li possono avere disuguali rispetto a qualche altra unità, tende a far vedere che la frase, " aver numeri uguali „ corrisponde ad una relazione assoluta fra A e B, indipendente dal mezzo scelto per la rappresentazione (unità): se ci limitiamo a quelle parole citate dal Prof. Bustelli, la frase " aver numeri uguali „ esprime l'assoluta uguaglianza delle grandezze ed è inconciliabile colla frase, " aver numeri disuguali „ che è il contrassegno delle grandezze disuguali, talchè anche tale obiezione deve esser fatta non a quella frase ma all'idea seguente, che ad *ogni* grandezza si faccia corrispondere *un* numero.

Circa l'aggettivo *misurabili* che il Prof. De Amicis vorrebbe aggiunto alla parola grandezze, osservo che il concetto di misura non essendo che quello di applicazione del numero alle grandezze, non mi pare che si possa parlare di grandezze misurabili, prima di parlare del numero, a meno che con quella parola misurabili non si voglia alludere a speciali classi di grandezze da definirsi prima in modo conveniente; limitazione che io in quella definizione non intendevo porre, volendo io nel mio libro studiare il concetto di numero nella sua ampiezza e non il solo numero (reale) che si ottiene dalle ordinarie classi continue.

3. Esaminiamo dunque l'idea, alla quale soltanto si possono riferire le mosse obiezioni, che cioè " ad ogni grandezza si colleghi un ente da dirsi numero „; e vediamo anzitutto due modi di far tale collegamento, cioè o senza fare intervenire il concetto di unità, o servendosi di esso. Quando si dice: " ad ogni grandezza si faccia corrispondere un ente nuovo da chiamarsi *numero* „ questo nuovo ente non vien definito in sè, ma soltanto dalle relazioni di uguale, e di somma, che esso ha con altri numeri; talchè di tale ente non può farsi uso se non nelle frasi che alludono a queste relazioni, oltre, s' intende, a tutte quelle altre che vengono definite mediante esse, come quelle in cui si parla di moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza ecc. che si definiscono, ricorrendo soltanto ai concetti di uguale e di somma. L'introduzione di un ente apposito per ciascuna grandezza, se altro non si dice, non autorizza ad usare la locuzione " numero di A „ legata a frasi consimili (numero di B, numero di C, ecc.), da relazioni diverse da quelle ora citate di uguale e di somma e dipendenti; e quindi in sostanza la teoria dei numeri non è mutata da questa introduzione del numero isolato, e perciò a rigore potrebbesi fare a meno di una tale introduzione. Non si può negare peraltro che l'introduzione di questo ente, cioè in sostanza l'autorizzazione di usare sola la locuzione *numero di A*, (purchè se la si usa associata ad altre sia sempre nel senso sopra detto) è utile per la rappresentazione delle grandezze, giacchè in sostanza questo ente numero viene a potersi concepire come la grandezza stessa priva di ogni altra proprietà che non sia quella di potersi paragonare colle altre omogenee, per giudicare se ad esse è uguale o no, o se di esse è la somma. Questa concezione del numero è didatticamente utile e insieme facile assai. Siccome le grandezze geometriche (segmenti per es.) sono gli enti ideali che si ottengono dalla considerazione di cose della realtà astraendo da alcune loro proprietà, da tutte quelle cioè che non influiscono su ciò che praticamente si dice forma ed estensione, (*) così non resta difficile allo scolaro il continuare per queste grandezze l'astrazione, e spogliarle di altre proprietà per ridursi soltanto a quelle esprimibili colle parole uguale e somma, nel qual modo resta nella mente il concetto di numero. L'esperienza mi ha mostrato la facilità di un simile concetto.

4. Per indicare questi numeri così introdotti e per scrivere i risultati delle operazioni si richiede per ciascuno di essi un segno scritto ed una voce. Ma siccome l'uso ha già introdotto una terminologia apposita e razionale per tale scopo, conviene servirsi di questa, e ad uno di questi numeri far corrispondere il segno 1 e la voce "*uno*"; al numero somma di $1+1$ il segno 2 "*due*", al numero metà di 1 il segno $\frac{1}{2}$ (un mezzo) ecc. Come si capisce, peraltro, il numero a cui far corrispondere il segno 1 è pienamente arbitrario; il che a prima vista appare strano, perchè avremmo la possibilità di *più* numeri 1, anzi qualunque numero potrebbe essere 1, mentre invece siamo usi a parlar di *numero* 1 (al singolare). La stranezza, solo apparente, dipende dal fatto che si fa confusione ordinariamente fra il numero e la sua rappresentazione materiale, dicendo indifferentemente numero tanto l'ente, quanto la voce ed il segno che lo rappresentano. Sparirebbe la stranezza e insieme si farebbe cosa a mio credere più propria e più opportuna, se si usassero nomi diversi, dicendo per es. *numero* l'ente e *simboli numerici* (verbali o scritti) i segni ad esso destinati: allora non parrebbe assurdo che ad un medesimo numero corrispondessero più simboli numerici o che un medesimo simbolo numerico potesse rappresentare volta a volta e secondo le circostanze numeri diversi. (**)

(*) Cfr. la mia *Introduz. a un corso di geom. elem.* Lezione pubblicata nel giornale *Il Pitagora*, fasc. I.

(**) Tale convenzione farebbe risaltare meglio la differenza fra il metodo d' introduzione del numero partendo dalle grandezze (sintetico) da noi seguito, per l'altro che introduce i numeri come enti da sè, indipendenti da altri (analitico). Il primo introduce il numero e poi usa i simboli numerici per rappresentarlo, il secondo introduce e studia i puri simboli aritmetici, che applica dopo direttamente alle grandezze.

E del resto si rifletta che anche nell'uso comune non si usa poi già costantemente lo stesso simbolo per indicare uno stesso numero: per es. il 10 si indica talora con 1 quando si cessi di parlare di unità e si parli di diecine, e così dicasi del 100, del 1000 ecc.; il 9 del sistema decimale si scrive 10 nel sistema di numerazione a base 9 e invece si indica col segno 11 in quello a base 8, e coi segni 12, 13, 14, 21, 100, 1000 rispettivamente nei sistemi a base 7, 6, 5, 4, 3, 2 e così dicasi di qualunque altro numero.

Con questo metodo ad ogni grandezza corrisponde il proprio numero che *in modo assoluto* la rappresenta. Le obiezioni citate, allora, non hanno più ragione di essere, perchè in tal modo il numero è davvero il contrassegno assoluto della grandezza.

5. Il metodo ora accennato, per il quale ad ogni grandezza di una classe si fa corrispondere un ente che la rappresenta in modo assoluto, fa sì, come si è detto, che ogni numero possa rappresentarsi con uno qualunque dei simboli numerici. Ciò, veramente, fa contro l'uso comune, secondo il quale ogni segno numerico risveglia l'idea di un ente *determinato,* tantochè, per es. il numero 1 è un ente di natura ben fissa e definita nella mente di ciascuno: la corrispondenza variabile fra numeri e simboli, intesa non nel senso che, ideato un sistema di simboli per tutti i numeri, se ne possa ideare uno o più altri differenti, ma nel senso che proprio lo *stesso* sistema di simboli possa rappresentare in modo diverso la classe di tutti i numeri, pare dunque non opportuna. Si aggiunga a carico di questo metodo, che con esso ad ogni classe di grandezze corrisponde uno *speciale* sistema di numeri, quelli che la rappresentano; ed allora tali sistemi di numeri costituiscono un ben meschino vantaggio e meriterebbe il conto di identificarli colle grandezze stesse, se non si potessero ridurre ad un sistema unico di numeri, che servissero a *tutte* le classi di grandezze o almeno a tutte quelle di un certo tipo (classi continue).

Per raggiungere tale intento bisognerebbe che il numero di una grandezza di una classe, per es. di *un* certo segmento, fosse anche il numero di una grandezza di un'altra classe, per es. di *un* angolo; ma il numero di un dato segmento sarà uguale al numero di *quale* angolo? Occorrerebbe in ogni classe fissare una grandezza ad arbitrio e stabilire che fosse lo stesso il numero di tutte quelle grandezze scelte, talchè avuta la classe dei numeri, per es. dei segmenti, gli angoli sarebbero rappresentati dagli stessi numeri, facendo servire il numero di un dato segmento a rappresentare un angolo da stabilirsi ad arbitrio, e quindi il numero per l'angolo non sarebbe più un ente che rappresenta *assolutamente* quell'angolo, ma lo rappresenta dipendentemente da una scelta fatta nella classe, contro il concetto stesso che ha servito a creare i numeri con questo metodo.

Non pare quindi conveniente tener questa precisa via per introdurre il concetto di numero.

6. Ed allora, se davvero si vuole ad ogni grandezza far corrispondere un numero, converrà tener l'altro metodo (quello, in sostanza, a cui mi sono attenuto io nei Capitoli II e III della Parte 2ª della mia *Teoria delle Grandezze*) col quale si fa corrispondere ad ogni grandezza di una classe un numero che la rappresenta rispetto ad una speciale grandezza della classe stessa: cioè, per usare un linguaggio più rigoroso, scelta una grandezza A della classe, se B è un'altra grandezza qualunque della classe, ad ogni *coppia* di grandezze B, A si fa corrispondere un ente che si dice rappresenti B. Ciò equivale a convenire, colle regole accennate al § 2, di usare la locuzione *numero di* B, ma non già isolata, sibbene unita all'altra (espressa o sottintesa) *rispetto ad A*, che si suol tacere quando, com'è frequente il caso, l'ambiguità è impossibile. Introducendo dunque *un* numero per rappresentare ogni grandezza con questo metodo, apparisce necessario ricordare la grandezza scelta come unità, e l'obiezione del Prof. Bustelli diviene una giusta osservazione, se la si riferisce non alle parole che egli cita, ma alle seguenti da me riportate, sebbene rispondano ad esse i seguenti capitoli del libro, nei quali l'idea è completamente chiarita. Scelta dunque una grandezza arbitraria A in una classe Γ (che, senza dirlo ogni volta, supporremo ad una dimensione e continua acciocchè i numeri che definiamo siano gli ordinari numeri reali), ad ogni grandezza della classe faremo corrispondere un ente, il numero, sempre dando alle frasi " numeri uguali „ " numero somma di più altri „ il significato stabilito in principio. Si creerà così una classe di numeri, che sono i numeri della classe proposta rispetto all'unità A. Parrebbe allora che per ogni grandezza scelta come unità A, risultasse una speciale classe di numeri rappresentativi; ma evidentemente la classe ottenuta coll'unità A serve, comunque si scelga un'altra unità, giacchè la classe con sè stessa si può porre, ed in un modo unico, in quella corrispondenza che nella mia *Teoria delle Grandezze* (Parte 2ª, Cap. II) dissi *corrispondenza metrica,* e che non è che la corrispondenza di proporzionalità diretta, stabilendo la condizione che debba corrispondere B ad A. La corrispondenza metrica fra due classi di grandezze o fra una classe e sè stessa si definisce così: 1° che sia univoca, 2° che a grandezze uguali corrispondano grandezze uguali, 3° che ad una grandezza di una classe, che sia somma di altre, corrisponda la somma delle corrispondenti di esse. Chiaramente se una classe è in corrispondenza metrica con sè stessa in modo che ad A corrisponda B, se costruiamo la classe dei numeri coll'unità A e li associamo rispettivamente a quelle grandezze che in quella corrispondenza metrica corrispondono alle grandezze che essi rappresentano coll'unità A, questa nuova associazione fra grandezze e numeri ha luogo in modo che a grandezze uguali vanno associati numeri uguali e alla grandezza somma di più altre il numero somma dei numeri ad essi rispettivamente associati;

talchè i numeri che rappresentavano le grandezze della classe rispetto all'unità A, le rappresentano ora rispetto all'unità B. E del pari se si mette in corrispondenza metrica la classe in questione con un'altra di altre grandezze (purchè continua anch'essa) in modo che ad A corrisponda un'arbitraria grandezza A′, si vede che i numeri introdotti nella prima classe rispetto all'unità A servono per l'altra classe rispetto all'unità A′, e che quindi una classe di numeri introdotti come rappresentanti di una classe (continua) di grandezze con una certa unità, serve a rappresentare qualunque identica o distinta classe continua rispetto a qualunque unità.

Tutto ciò dimostra quanto chiedeva il Prof. De Amicis nella sua seconda obiezione, e trovasi appunto sviluppato nei Cap. II e III della Parte 2ª della mia *Teoria delle Grandezze.*

Con questo metodo ad ogni grandezza di una classe corrisponde un numero che può dirsi la rappresenti; ma questo numero non è sempre lo stesso, giacchè dipende dalla scelta dell'unità. Esso perciò non è contrassegno delle grandezze, ma delle coppie di esse grandezze e dell'unità, come s'è già accennato.

Questa variabilità dell'ente numero che rappresenta una grandezza non nuoce alla rappresentazione delle grandezze stesse, giacchè la locuzione " numero di una grandezza „ si associa soltanto alle frasi " uguale al numero di un'altra „ o " somma dei numeri di più altre „, oltrechè alle dipendenti da queste (come già si è detto), e quest'associazione, come s'è visto, accade qualunque sia l'unità rispetto alla quale i numeri rappresentano le grandezze.

In questo metodo possiamo ad un medesimo numero associare un unico simbolo numerico, che è ciò che si fa ordinariamente: quindi ogni simbolo numerico rappresenta in sostanza non una grandezza fissa, ma una grandezza variabile, determinata per altro quando è fissata l'unità.

Si può riassumere lo spirito di questo metodo, dicendo consistere esso nel creare una classe di enti destinati a rappresentare complessivamente ogni classe di grandezze, a cui la si faccia corrispondere metricamente: e che *in ciascuna corrispondenza* ogni numero rappresenta singolarmente ed assolutamente una grandezza.

Si osservi che lo stabilire una corrispondenza metrica fra la classe di grandezze e quella dei numeri non è che il far corrispondere ad ogni grandezza quel numero che è la sua misura rispetto a quella grandezza a cui si fa corrispondere il numero 1: talchè con questo metodo si ha il vantaggio che coll'introduzione del numero risulta immediatamente già stabilita la teoria della misura.

Anche con questo metodo l'introduzione del concetto di numero è didatticamente facile. Si può partire da un'arbitraria classe, per es. quella dei segmenti, e dire di astrarre in ogni segmento da tutte le proprietà eccetto quelle che rappresentano le relazioni di uguaglianza e di somma (e dipendenti, cioè differenza, multiplo, summultiplo, limite di variabili convergenti) che possono legarlo ad un determinato segmento S. Resta così un ente per ogni segmento, finchè si mantiene fisso quel segmento S scelto (unità); e per tali enti si devono dare le definizioni necessarie acciocchè essi rappresentino i vari segmenti in quelle relazioni. E quindi per definizione diremo uguali due di tali enti che corrispondono a grandezze uguali, e un ente lo diremo somma di più altri se corrisponde ad un segmento che è somma dei corrispondenti agli altri. E a tali enti si darà il nome di *numeri*, e a quello che corrisponde al segmento unità il nome di *uno*. Poi si dimostrerà colla possibile corrispondenza metrica fra due classi, o di una classe con sè stessa, che questi numeri possono identificarsi con quelli che vengono in modo analogo da un'altra classe di grandezze, o dalla stessa cambiando unità.

Mi pare che il metodo da me seguito nella *Teoria delle Grandezze* e da me illustrato nei precedenti paragrafi, sia suscettibile di una leggiera modificazione che lo migliora. Invece delle definizioni: " Di grandezze uguali diremo che hanno numeri uguali „ e " se la grandezza A è somma di B, C ecc. diremo che il numero di A è uguale alla somma di quelli di B, C „ ecc., potremo dare l'altra: " Due grandezze uguali hanno *lo stesso* numero „: il numero di A *è* la somma di quelli di B, C ecc.

E invero, a rigore, numeri uguali non ci sono: e si usa a proposito dei numeri la parola *uguale* solamente per accennare a due diversi modi di indicare il medesimo numero o a due espressioni che esprimono operazioni, le quali diano lo stesso risultato $\left(\frac{8}{4}=2; 5+3=9-1 \text{ ecc.}\right)$ Per i numeri l'uguaglianza è l'*identità*.

Il metodo di introduzione dei numeri si svolge allora in modo identico a quello esposto nei precedenti paragrafi, salvo leggiere e facili modificazioni di qualche parola. Forse sarebbe utile, non necessario, modificare la definizione di corrispondenza metrica (proporzionalità) dicendo essere in corrispondenza metrica due classi di grandezze quando alla sottoclasse composta di una grandezza e delle sue uguali, corrisponde quella d'un'altra grandezza con tutte le sue uguali e ad una sottoclasse che contenga tutte le grandezze (uguali fra loro) somma di grandezze date la sottoclasse che contiene le somme delle grandezze corrispondenti e le loro uguali.

Torino, Aprile 1899.

RODOLFO BETTAZZI.

SULLE DISTANZE DEI PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

In una mia *nota* (*) feci conoscere una relazione tra le distanze di 5 punti, 4 dei quali sono posti in uno stesso piano. Mi propongo ora di far vedere come per mezzo di essa si possa ricavar subito la distanza di un punto qualunque da uno qualsivoglia dei *punti notevoli* di un triangolo, e quindi, in particolare, le distanze a due a due di questi punti.

1. Siano A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinque punti, dei quali i primi quattro siano situati nello stesso piano. Se si indica con a_{ik} la distanza A_iA_k; con Δ_{ikl} l'area del triangolo $A_iA_kA_l$, e con ε_5 l'area del triangolo che ha per lati i prodotti $a_{23}\,a_{14}$, $a_{31}\,a_{24}$, $a_{12}\,a_{34}$ dei lati opposti del quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, la relazione è la seguente:

$$a^2_{15}\,\Delta_{234} - a^2_{25}\,\Delta_{341} + a^2_{35}\,\Delta_{412} - a^2_{45}\,\Delta_{123} - \varepsilon_5 = 0,$$

nella quale, per le aree Δ, va tenuto conto dell'ordinaria regola dei segni.

Sia M un punto del piano di un triangolo ABC, X un altro punto qualsivoglia (che può anche non essere situato nel piano ABC) le cui distanze dai vertici A, B, C indicheremo con x, y, z. Applicando la relazione suddetta ai 5 punti A, B, C, M, X, si trova

$$\overline{XM}^2 . \Delta = x^2 . MBC + y^2 . MCA + z^2 . MAB - \varepsilon, \tag{1}$$

dove $\Delta = ABC$, e ε è l'area del triangolo che ha per lati i prodotti MA . BC, MB . CA, MC . AB.

Indicando con l, m, n le distanze del punto M dai vertici A, B, C, e supponendo che il punto X coincida con M, dalla (1) si trae

$$\varepsilon = l^2 . MBC + m^2 . MCA + n^2 . MAB. \tag{2}$$

2. Supponiamo che il punto M coincida col baricentro G del triangolo ABC. Poichè in tal caso

$$GBC = GCA = GAB = \frac{1}{3} ABC;$$

$$l^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2); \quad m^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2); \quad n^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2);$$

le (1) e (2) danno

$$\overline{XG}^2 . \Delta = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) . \Delta - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) . \Delta;$$

dalle quali si ricava:

$$\overline{XG}^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \text{ (**)} \tag{3}$$

Per mezzo della (3) si può calcolare la distanza di un punto qualunque X dal baricentro G, quando si conoscano le sue distanze x, y, z dai vertici A, B, C. In

(*) *Intorno alla relazione tra le distanze di 5 punti dello spazio* (vol. XXXIV del *Giornale di Matematiche di Battaglini*, n. 4).

(**) Il Dr. Henke di Dresda trova questa relazione servendosi di considerazioni sui *momenti d'inerzia*. (V. il fasc. del 26 ott. 1897 del *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftliche Unterricht*). Va notato che la relazione vale anche nel caso che il punto X non sia situato nel piano ABC.

particolare, si potranno calcolare in funzione dei lati a, b, c le distanze del baricentro da ciascuno dei punti notevoli. (*)

3. Supponiamo che il punto M coincida col centro O del cerchio circoscritto al triangolo ABC. Allora, detto R il raggio del circumcircolo, si ha

$$l = m = n = \mathrm{R};$$

$$\mathrm{OBC} = \frac{1}{4}\, a\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}\,; \qquad \mathrm{OCA} = \frac{1}{4}\, b\sqrt{4\mathrm{R}^2 - b^2}\,; \qquad \mathrm{OAB} = \frac{1}{4}\, c\sqrt{4\mathrm{R}^2 - c^2}\,;$$

e poichè

$$\mathrm{R}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16\,\Delta^2}; \qquad 16\,\Delta^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4;$$

si ha

$$\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2} = \frac{a}{4\Delta}(b^2 + c^2 - a^2); \quad \sqrt{4\mathrm{R}^2 - b^2} = \frac{b}{4\Delta}(c^2 + a^2 - b^2); \quad \sqrt{4\mathrm{R}^2 - c^2} = \frac{c}{4\Delta}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Tenendo conto di queste relazioni, dalle (1) e (2) si ricava

$$\overline{\mathrm{XO}}^2 . \Delta = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2) . x^2 + b^2(c^2 + a^2 - b^2) . y^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2) . z^2}{16\,\Delta} - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{a^2b^2c^2}{16\,\Delta};$$

quindi

$$(4) \quad \overline{\mathrm{XO}}^2 = \frac{1}{16\,\Delta^2}[a^2(b^2+c^2-a^2).x^2 + b^2(c^2+a^2-b^2).y^2 + c^2(a^2+b^2-c^2).z^2 - a^2b^2c^2]. \; (**)$$

Per mezzo della (4) si può calcolare la distanza di un punto qualunque X dal centro O del circumcircolo. In particolare, si potranno trovare per mezzo di essa le distanze del centro O da tutti i punti notevoli.

Se il punto X coincide col punto K di *Lemoine*, poichè in questo caso

$$x^2 = \frac{b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}; \quad y^2 = \frac{c^2a^2(2c^2 + 2a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}; \quad z^2 = \frac{a^2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2};$$

dalla (4) si ricava

$$\overline{\mathrm{KO}}^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3a^2b^2c^2}.$$

Se il punto X coincide col punto positivo Ω di *Brocard*, poichè in questo caso

$$x^2 = \frac{b^4c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}; \quad y^2 = \frac{c^4a^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}; \quad z^2 = \frac{a^4b^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2},$$

dalla (4) si ricava

$$\overline{\Omega\mathrm{O}}^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Dalla simmetria di questa formola si deduce che i due punti di *Brocard* sono equidistanti dal centro del circumcircolo.

(*) V. in proposito l'art. di A. Martini-Zuccagni (*Supplemento al Periodico di matematica*, anno I, fasc. I).

(**) Cfr. questo risultato coll'altro ottenuto nella mia nota: *Sopra una particolare corrispondenza tra i punti di un piano e i punti di un paraboloide ellittico*. (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. XXXII). In questa nota (v. n. 13) trovai il valore della potenza di un punto qualunque rispetto al cerchio circoscritto ad un triangolo. Aggiungendo R^2 al valore della potenza si ha il quadrato della distanza di un punto del piano del triangolo dal centro del circumcircolo.

4. Supponiamo che il punto M coincida col centro O′ del cerchio inscritto. In tal caso, detto p il semiperimetro del triangolo ABC, si ha

$$\mathrm{MBC} = \frac{a\Delta}{2p}; \quad \mathrm{MCA} = \frac{b\Delta}{2p}; \quad \mathrm{MOB} = \frac{c\Delta}{2p};$$

$$l^2 = \frac{bc(p-a)}{p}; \quad m^2 = \frac{ca(p-b)}{p}; \quad n^2 = \frac{ab(p-c)}{p};$$

quindi dalle (1) e (2) si ricava

$$\overline{\mathrm{XO'}}^2 \,.\, \Delta = \frac{\Delta}{2p}(ax^2 + by^2 + cz^2) - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{abc\,\Delta}{2p};$$

quindi

$$\overline{\mathrm{XO'}}^2 = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2 - abc}{2p}. \tag{5}$$

Per mezzo della (5) si può calcolare la distanza di un punto qualunque, e in particolare di ciascun punto notevole, dal centro O′ del cerchio inscritto.

5. Se il punto M coincide col centro ortico H, siccome si ha

$$\overline{\mathrm{HA}}^2 = 4\mathrm{R}^2 - a^2; \quad \overline{\mathrm{HB}}^2 = 4\mathrm{R}^2 - b^2; \quad \overline{\mathrm{HC}}^2 = 4\mathrm{R}^2 - c^2;$$

$$\mathrm{HBC} = \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{16\,\Delta}; \quad \mathrm{HCA} = \frac{b^4 - (c^2 - a^2)^2}{16\,\Delta}; \quad \mathrm{HAB} = \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{16\,\Delta};$$

dalle (1) e (2) si ricava

$$\overline{\mathrm{XH}}^2 = \frac{1}{16\,\Delta^2}\Big\{(x^2 - 4\mathrm{R}^2 + a^2)[a^4 - (b^2 - c^2)^2] + (y^2 - 4\mathrm{R}^2 + b^2)[b^4 - (c^2 - a^2)^2] + $$
$$+ (z^2 - 4\mathrm{R}^2 + c^2)[c^4 - (a^2 - b^2)^2]\Big\},$$

per mezzo della quale si troverà la distanza di un punto qualunque X dall'ortocentro.

6. Per ricavare dalle (1) e (2) la distanza di un punto qualunque X dal centro $\mathrm{O_9}$ del cerchio dei nove punti, si faccia coincidere il punto M col punto $\mathrm{O_9}$, e si osservi che

$$\overline{\mathrm{O_9A}}^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{R}^2 + b^2 + c^2 - a^2); \quad \overline{\mathrm{O_9B}}^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{R}^2 + c^2 + a^2 - b^2);$$

$$\overline{\mathrm{O_9C}}^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{R}^2 + a^2 + b^2 - c^2);$$

$$\mathrm{O_9BC} = \sqrt{a^2\mathrm{R}^2 - \left(\frac{b^2 - c^2}{2}\right)^2}; \quad \mathrm{O_9CA} = \sqrt{b^2\mathrm{R}^2 - \left(\frac{c^2 - a^2}{2}\right)^2};$$

$$\mathrm{O_9CA} = \sqrt{c^2\mathrm{R}^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2}.$$

7. Supponiamo che il punto M coincida col punto K di *Lemoine*. Le distanze del punto K dai lati sono, com'è noto:

$$\frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \frac{2b\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \frac{2c\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};$$

quindi si ha,

$$\mathrm{KBC} = \frac{a^2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \mathrm{KCA} = \frac{b^2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \mathrm{KAB} = \frac{c^2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};$$

e poichè le distanze l, m, n del punto K dai punti A, B, C sono quelle indicate nel n. 3, dalle relazioni (1) e (2) si ricava:

$$\overline{XK}^2 . \Delta = \frac{\Delta}{a^2+b^2+c^2}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - \varepsilon ,$$

$$\varepsilon = \frac{3a^2b^2c^2\,\Delta}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

quindi:

$$\overline{XK}^2 = \frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}. \tag{6}$$

Per mezzo della (6) si può calcolare la distanza di un punto qualunque X dal punto di *Lemoine*. Volendo, ad esempio, trovare la distanza tra il punto di *Lemoine* e il punto positivo Ω di *Brocard*, basterà porre in luogo di x, y, z i valori delle distanze di Ω dai vertici A, B, C (indicati nel n. 3), e si avrà:

$$\overline{\Omega K}^2 = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2} - \frac{3}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right).$$

Dalla simmetria di questa formola si deduce che il punto di *Lemoine* è equidistante dai due punti di *Brocard*.

Inoltre, come si può subito verificare, si ha:

$$\overline{KO}^2 = \overline{\Omega O}^2 + \overline{\Omega K}^2,$$

e perciò i quattro punti O, L, Ω, Ω' giacciono sopra una stessa circonferenza *(circonferenza brocardiana)*, di diametro KO.

8. Supponiamo infine che il punto M coincida col punto positivo Ω di *Brocard*. Le distanze del punto Ω dai lati del triangolo ABC sono

$$\frac{2ac^2\,\Delta}{K};\quad \frac{2ba^2\,\Delta}{K};\quad \frac{2cb^2\,\Delta}{K};$$

dove

$$K = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2;$$

quindi si ha

$$\Omega BC = \frac{a^2c^2\,\Delta}{K};\quad \Omega CA = \frac{b^2a^2\,\Delta}{K};\quad \Omega AB = \frac{c^2b^2\,\Delta}{K};$$

e poichè le distanze l, m, n del punto Ω dai punti A, B, C sono quelle indicate nel n. 3 dalle (1) e (2), si ricava

$$\overline{X\Omega}^2 . \Delta = \frac{\Delta}{K}(a^2c^2x^2 + b^2a^2y^2 + c^2b^2z^2) - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{a^2b^2c^2 . \Delta}{K};$$

quindi

$$\overline{X\Omega}^2 = \frac{a^2c^2x^2 + b^2a^2y^2 + c^2b^2z^2 - a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}. \tag{7}$$

Per mezzo della (7) si può trovare la distanza di un punto qualunque dal punto positivo Ω di *Brocard*. Poichè, per esempio, i quadrati delle distanze del punto negativo Ω' di *Brocard* dai vertici A, B, C, sono

$$\frac{c^4b^2}{K};\quad \frac{a^4c^2}{K};\quad \frac{b^4a^2}{K};$$

si ha, per la distanza dei due punti di *Brocard:*

$$\overline{\Omega\Omega'}^2 = \frac{a^2b^2c^2(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)}{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^2},$$

come si trova anche osservando che dev'essere

$$\Omega\Omega' = \frac{2\Omega K \,.\, \Omega O}{KO}.$$

Fermo, Gennaio 1898.

CORRADO CIAMBERLINI.

SOPRA LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

nelle quali la parte reale è un polinomio algebrico, razionale intero.

NOTA DI LABINDO GIANNI

I.

1. Se $f(z)$ indica un polinomio algebrico, razionale, intero di grado m in z, e se in esso si pone $z = x + iy$, ove x ed y sono due variabili reali ed i è l'unità immaginaria, separando in $f(x+iy)$ la parte reale U dal coefficiente V dell'immaginario, allora tanto la U quanto la V sono manifestamente due polinomî in x ed y algebrici, razionali interi del grado stesso di $f(z)$.

Io mi propongo, inversamente, di prendere in esame quelle funzioni di variabile complessa nelle quali la parte reale è un polinomio algebrico, razionale, intero: di esporne le principali proprietà: e da queste dedurre — ciò che d'altronde è molto facile a prevedere — che la forma analitica di funzioni cosiffatte è quella di un polinomio in z algebrico, razionale, intero.

2. Si osservi subito, in generale, che se $\mathrm{U} + i\mathrm{V}$ è una funzione di una variabile complessa nella quale la parte reale è separata dalla immaginaria, avendosi

$$-\mathrm{V} + i\mathrm{U} = i(\mathrm{U} + i\mathrm{V}),$$

anche $-\mathrm{V} + i\mathrm{U}$ è manifestamente una funzione della stessa variabile complessa. Perciò qualunque proprietà che compete alla U per il fatto che è parte reale di una funzione di variabile complessa, competerà pure a $-\mathrm{V}$; e se da un gruppo di ipotesi fatte sopra U si deduce una certa proprietà per la V, quella stessa proprietà appartiene anche alla U, quando quel gruppo di ipotesi si riferisca alla $-\mathrm{V}$. Tale osservazione sarà applicata molto utilmente nel seguito.

II.

1. Essendo:

$$U + iV = f(x + iy)$$

una funzione della variabile complessa $x + iy$, nella quale U e V indicano respettivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, sono verificate le relazioni

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy} \quad ; \quad \frac{dU}{dy} = -\frac{dV}{dx}. \tag{1}$$

E quindi, se si suppone in primo luogo che U sia una funzione lineare delle variabili x ed y, ed abbia perciò la forma

$$U = mx + ny + h,$$

si deduce subito, in virtù delle (1),

$$V = my - nx + k,$$

la quale prova che anche la V è una funzione lineare delle variabili stesse.

2. Se la U è una espressione di 2° grado in x ed y, poichè deve verificare l'equazione:

$$\Delta^2 U = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = 0,$$

in U dovranno comparire ambedue i termini in x^2 ed in y^2 o nessuno dei due: e se vi compariscono, debbono avere coefficienti numericamente eguali, ma di segno contrario. Talchè la forma generale della U sarà la seguente:

$$U = mx^2 + 2nxy - my^2 + hx + ky + r.$$

Da questa, a causa delle (1), si otterrà

$$\frac{dV}{dy} = 2mx + 2ny + h \quad , \quad \frac{dV}{dx} = -2nx + 2my - k.$$

Indicando quindi con φ una funzione arbitraria della sola x si avrà:

$$V = 2mxy + ny^2 + hy + \varphi.$$

Da questa, tenendo conto della seconda delle precedenti eguaglianze ed indicando con φ' la derivata prima di φ rispetto ad x, si deduce

$$2my + \varphi' = -2nx + 2my - k.$$

Da cui

$$\varphi' = -2nx - k, \qquad \text{e perciò} \qquad \varphi = -nx^2 - kx + s$$

dove s è la costante d'integrazione. Sarà quindi:

$$v = ny^2 + 2mxy - nx^2 + hy - kx + s.$$

Così, in generale, assegnando alla U la forma che ha il polinomio in x ed y di grado m, il quale soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = 0$, si vede subito quale è la via che si avrebbe a tenere per determinare, ove esista, la forma corrispondente della V, allo scopo di costruire la funzione $U + iV$ della variabile $x + iy$. Dall'esame allora della U e della V se ne potrebbero dedurre le loro scambievoli proprietà e si potrebbe ancora risalire alla forma analitica della funzione $f(x + iy)$ che è eguale ad $U + iV$. Ma non si tarda a riconoscere che questo metodo, così semplice dal lato teorico, non sarebbe poi altrettanto semplice quando si volesse praticamente attuare: mentre d'altra parte non è difficile studiare molte delle proprietà dei polinomi U e V anche senza che sia sviluppata la loro forma; per lo meno quelle che sono sufficienti a farci dedurre la espressione analitica della funzione di $x + iy$ che ha dato luogo alla $U + iV$.

3. Cominciamo col dimostrare che: " *Se la parte reale di una funzione della variabile complessa* x + iy *è un polinomio in* x *ed* y *di grado* m, *essendo* m *un numero intero e positivo, anche il coefficiente dell'immaginario deve essere un polinomio in* x *ed* y *del grado stesso* m ".

Se infatti la U è di grado m, una almeno delle sue derivate prima parziali rispetto ad x e ad y sarà un polinomio di grado $m - 1$, l'altra un polinomio di grado non superiore all' $(m - 1)^{\text{esimo}}$. Indicando respettivamente quelle derivate con P_1 e P_2, si avrà, in virtù delle (1)

$$\frac{dV}{dy} = P_1 \qquad \frac{dV}{dx} = -P_2.$$

E se è P_2 quello dei due polinomi che certamente è di grado $m - 1$, sarà $\int P\, dx$ un polinomio di grado m, che indicheremo con P. Talchè, indicando con $\varphi(y)$ una funzione arbitraria della sola y, si avrà

$$V = -P + \varphi(y).$$

Ma per la prima delle precedenti eguaglianze si ha

$$-\frac{dP}{dy} + \varphi'(y) = P_1.$$

E questa c'indica chiaramente che $\varphi'(y)$ deve essere un polinomio di grado non superiore all'$(m - 1)^{\text{esimo}}$: quindi la conseguenza che $\varphi(y)$ è di grado non superiore ad m. E perciò $V = -P + \varphi(y)$ è un polinomio di grado m, come si voleva dimostrare.

a) Poichè se V è un polinomio di grado m, tale è pure $-V$, così, in ordine a quanto abbiamo osservato in principio (I, 2) potremo ancora affermare:

" *Se il coefficiente dell'immaginario di una funzione della variabile complessa* x + iy *è un polinomio di grado* m *in* x *ed* y, *anche la parte reale è un polinomio in* x *ed* y *del grado stesso* ".

b) Per il nostro scopo, nella dimostrazione del teorema precedente è bastato assicurare che una almeno delle due derivate di U rispetto ad x e ad y era un polinomio di grado $m-1$; ma è facile provare che entrambe le derivate della U sono di grado $m-1$, posto che la U sia un polinomio di grado m.

Per $m=2$, la cosa è manifesta solo che si osservi la forma che in tale ipotesi ha la U (II, 2). Quando m sia maggiore di 2, la nostra affermazione risulterà provata tostochè si dimostri che in U deve sempre esistere almeno un termine della forma $\alpha x^r y^s$, con $r+s=m$ ed r ed s differenti da zero. Per provar questo, si osservi che se la U è un polinomio in x ed y del grado m e non contiene i termini in x^m ed in y^m, deve allora contenere certamente almeno un termine $\alpha x^r y^s$, con $r+s=m$. Chè se poi la U contenga uno almeno dei termini in x^m o in y^m, per es. il termine βx^m, si potrà porre:

$$\mathrm{U}=\beta x^m+\varphi(x,y),$$

e la $\varphi(x,y)$ risulterà: di termini indipendenti da x e da y; di termini contenenti ambedue le variabili x ed y; di termini contenenti la sola y e di termini contenenti la sola x: ma questi ultimi di grado inferiore ad m. Ciò posto, poichè deve aversi $\Delta^2\mathrm{U}=0$, sarà

$$m(m-1)\beta x^{m-2}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0.$$

Ora perchè tale relazione sia verificata, dovrà intanto la espressione

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

contenere il termine: $-m(m-1)\beta x^{m-2}$. Ma per quanto si è visto circa la forma dei termini di $\varphi(x,y)$, nessuno di essi derivato due volte rispetto ad x può originare un termine della forma: γx^{m-2}: dunque dovrà necessariamente aversi:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}=-m(m-1)\beta x^{m-2}+\psi(x,y).$$

E perciò sarà:

$$\varphi(x,y)=-\frac{m}{2}(m-1)\beta x^{m-2}y^2+\xi(x,y)$$

ove ξ è il simbolo di un polinomio in x ed y. Laonde:

$$\mathrm{U}=\beta x^m-\frac{m(m-1)}{2}\beta x^{m-2}y^2+\xi(x,y).$$

E questa eguaglianza prova appunto quanto volevamo dimostrare.

c) Poichè se V è un polinomio di grado m, tale è pure $-\mathrm{V}$, così potremo concludere (I, 2) che per $m>2$ anche V conterrà sempre un termine di grado m nel quale compariscono entrambe le variabili x ed y. E si potrà quindi in generale affermare che:

" Se U + iV *è una funzione della variabile complessa* x + iy *ed* U *è un polinomio in* x *ed* y *del grado* m > 2, *non è possibile che* U *e* V *siano somme di termini che contengono la sola* x *con termini che contengono la sola* y *".*

d) La verità della precedente proposizione può anche accertarsi nel seguente modo che ha carattere di maggiore generalità.

Si consideri una funzione U della x e della y nella quale le variabili siano separate così da avere:

$$U = \varphi(x) + \psi(y);$$

e vediamo di determinarla in modo che soddisfi alla equazione $\Delta^2 U = 0$.

Dovendosi allora avere

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0,$$

sarà necessariamente

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2m \quad , \quad \frac{d^2\psi}{dy^2} = -2m$$

ove $2m$ è una costante. Quindi:

$$\varphi = mx^2 + hx + n \quad , \quad \psi = -my^2 + ky + p$$

essendo h, n, k, p altre costanti. E ponendo $r = n + p$ sarà:

$$U = mx^2 + hx - my^2 + ky + r. \tag{2}$$

Dunque la funzione U di x e di y, che soddisfa alla $\Delta^2 U = 0$ e che ha le variabili separate, è un polinomio di secondo grado in x ed y, la cui forma è appunto data dalla (2). Da ciò la conseguenza che se la parte reale U di una funzione della variabile complessa $x + iy$ è un polinomio di grado $m > 2$, non potrà essere

$$U = \varphi(x) + \psi(y).$$

E questo conferma appunto quanto avevamo concluso precedentemente *c*).

e) Una funzione $U + iV$ della variabile complessa $x + iy$ nella quale la U ha la forma data dalla (2) esiste effettivamente. Si può infatti mediante la U costruire la V; e si ha

$$V = 2mxy + hy - kx + s.$$

III.

1. Premettiamo due proposizioni semplicissime relative alle funzioni omogenee, delle quali avremo occasione di servirci in seguito.

LEMMA 1°. — *" Se una funzione di due (o più) variabili è omogenea, le sue derivate parziali rispetto alle variabili stesse sono funzioni omogenee ".*

Sia $f(x, y)$ una funzione omogenea di x e di y, e sia m l'ordine della sua omogenità. Ponendo: $\frac{x}{y} = X$, $\frac{y}{x} = Y$, potremo scrivere:

$$f(x, y) = y^m f(X, 1) \quad , \quad f(x, y) = x^m f(1, Y).$$

Indicando con f'_x, f'_y le derivate parziali di f rispetto ad x e ad y, si avrà:

$$f'_x(x, y) = y^{m-1} f'_X(X, 1) \quad , \quad f'_y(x, y) = x^{m-1} f'_Y(1, Y).$$

Queste relazioni provano appunto che f'_x, f'_y sono funzioni omogenee.

LEMMA 2°. — “*Se le derivate prime rispetto ad* x *ed* y *di una funzione di queste due variabili sono polinomi omogenei di grado* r, *la funzione è un polinomio omogeneo, all'infuori di una costante additiva*”.

Sia $f(x, y)$ una funzione delle due variabili x ed y; e le sue derivate prime rapporto ad x e ad y, che indicheremo rispettivamente con $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, siano polinomi omogenei del medesimo grado r. Si avrà intanto

$$f(x, y) = \int \varphi(x, y)\, dx + \chi(y),$$

dove χ è il simbolo di una funzione arbitraria. Ponendo

$$\Phi(x, y) = \int \varphi(x, y)\, dx,$$

siccome $\varphi(x, y)$ è un polinomio in x ed y, i termini di Φ si sono ottenuti da quelli di φ colla moltiplicazione di ciascuno di questi per un fattore αx, ove α è un numero diverso da termine a termine: e quindi poichè φ è un polinomio omogeneo di grado r, sarà Φ un polinomio omogeneo di grado $r+1$. Ora si ha:

$$\frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\chi}{dy} = \psi(x, y). \tag{3}$$

Ma ψ è per dato un polinomio omogeneo di grado r: $\frac{d\Phi}{dy}$, se non è zero, è, in forza del primo lemma, un polinomio pure omogeneo di grado r; dunque dovrà essere necessariamente

$$\frac{d\chi}{dy} = hy^r,$$

essendo h una costante. Laonde:

$$\chi(y) = \frac{h}{r+1} y^{r-1} + k.$$

ove k è un'altra costante. Sarà per conseguenza:

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{h}{r+1} y^{r-1} + k.$$

Questa eguaglianza prova appunto che $f(x, y)$ è un polinomio omogeneo di grado $r+1$, all'infuori di una costante additiva.

a) Se fosse $\frac{d\Phi}{dy}$ eguale a zero, la Φ sarebbe indipendente dalla y, ed avrebbe perciò la forma αx^{r+1}. Quindi si avrebbe dovuto avere $\varphi=(r+1)\alpha x^r$. E sebbene questo caso non sia esplicitamente contemplato nell'ipotesi del nostro teorema, pure questo sussiste ancora. In tale supposizione, la (3) ci dà

$$\psi=\frac{d\chi}{dy}=hy^r.$$

E quindi

$$f(x, y)=\alpha x^{r+1}+\frac{h}{r+1}y^{r+1}+k,$$

che è una funzione omogenea di x e di y all'infuori di una costante additiva.

2. Ciò premesso, riprendasi ora la nostra funzione

$$U+iV=f(x+iy),$$

e suppongasi che la U sia un polinomio omogeneo di grado p. Poichè deve aversi:

$$\frac{dU}{dx}=\frac{dV}{dy} \quad , \quad \frac{dU}{dy}=-\frac{dV}{dx},$$

e $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ sono, in virtù del primo lemma, polinomi omogenei di grado $p-1$, tali saranno ancora $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$. E allora, per il secondo lemma, V sarà un polinomio omogeneo di grado p, all'infuori di una costante additiva. Dunque:

" *Se la parte reale di una funzione della variabile complessa* $x+iy$ *è un polinomio omogeneo, il coefficiente dell'immaginario è, all'infuori di una costante additiva, un polinomio omogeneo (del medesimo grado)* ".

a) Poichè se V è un polinomio omogeneo, tale è pure $-V$, così potremo anche affermare (I, 2):

" *Se il coefficiente dell'immaginario di una funzione di variabile complessa è un polinomio omogeneo, la parte reale è, all' infuori di una costante additiva, un polinomio omogeneo (del medesimo grado)* ".

3. Abbiamo visto che se nella $U+iV$ la U è un polinomio in x ed y di grado m, tale è pure la V. Si aggruppino in U tutti i termini di grado m e si chiami U_m il polinomio che così si ottiene; si chiami U_{m-1} quello che si ottiene aggruppando i termini di U che sono di grado $m-1$ e così via via. Si faccia lo stesso per i termini di v e si adottino notazioni analoghe alle precedenti. Sarà allora

$$U=\Sigma U_s \quad , \quad V=\Sigma V_s \quad (s=m, m-1, \ldots 2, 1, 0).$$

E si potrà scrivere

$$U+iV=\Sigma(U_s+iV_s).$$

Quindi

$$\Sigma \frac{dU_s}{dx} = \Sigma \frac{dV_s}{dy} \quad ; \quad \Sigma \frac{dU_s}{dy} = \Sigma\left(-\frac{dV_s}{dx}\right).$$

Ora poichè U_s e V_s sono polinomî omogenei, tali saranno pure

$$\frac{dU_s}{dx} \quad , \quad \frac{dU_s}{dy} \quad , \quad \frac{dV_s}{dx} \quad , \quad \frac{dV_s}{dy}.$$

E le precedenti eguaglianze non potranno sussistere, se non si abbia separatamente

$$\frac{dU_s}{dx} = \frac{dV_s}{dy} \quad , \quad \frac{dU_s}{dy} = -\frac{dV_s}{dx},$$

per tutti i valori di s da zero ad m. Ciò vuol dire che ciascuna $U_s + iV_s$ è una funzione della variabile complessa $x + iy$. Potremo quindi concludere che:

" *Se* $\mathrm{U} + i\mathrm{V}$ *è una funzione della variabile complessa* $\mathrm{x} + i\mathrm{y}$, *e la sua parte reale è un polinomio in* x *ed* y *di grado* m, *la funzione è decomponibile in una somma di funzioni della variabile stessa, le quali hanno la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario che sono polinomî omogenei di grado* m, m — 1, m — 2... *respettivamente* ".

4. Poichè la $U_s + iV_s$ considerata precedentemente è una funzione di $x + iy$, pongasi

$$U_s + iV_s = \varphi(x + iy).$$

E chiamando z la variabile $x + iy$, si potrà scrivere:

$$U_s + iV_s = \varphi(z).$$

Se ora si indica con φ' la derivata di φ rispetto a z, si ha

$$\frac{dU_s}{dx} + i\frac{dV_s}{dx} = \varphi' \quad ; \quad \frac{dU_s}{dy} + i\frac{dV_s}{dy} = i\varphi'. \tag{4}$$

Ma, per il teorema di Eulero relativo alle funzioni omogenee, si ha

$$x\frac{dU_s}{dx} + y\frac{dU_s}{dy} = sU_s \quad ; \quad x\frac{dV_s}{dx} + y\frac{dV_s}{dy} = sv_s.$$

Da queste si deduce immediatamente

$$s(U_s + iV_s) = x\left(\frac{dU_s}{dx} + i\frac{dV_s}{dx}\right) + y\left(\frac{dU_s}{dy} + i\frac{dV_s}{dy}\right).$$

Ossia per le (4):

$$s(U_s + iV_s) = (x + iy)\varphi'. \tag{5}$$

Poichè poi $\frac{dU_s}{dx}$, $\frac{dV_s}{dx}$ sono polinomi omogenei di grado $s - 1$, si dedurrà in modo analogo, indicando con φ'' la derivata di φ' rispetto a z,

$$(s - 1)\varphi' = (x + iy)\varphi''.$$

E similmente

$$(s-2)\varphi'' = (x+iy)\varphi'''$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2\varphi^{(s-2)} = (x+iy)\varphi^{(s-1)}$$
$$1\varphi^{(s-1)} = (x+iy)\varphi^{(s)}.$$

Si ottiene per conseguenza

$$\pi(s)(U_s + iV_s) = (x+iy)^s\varphi^{(s)}.$$

E perchè

$$\varphi^{(s)} = \frac{d^sU_s}{dx_s} + i\frac{d^sV_s}{dx^s},$$

sarà $\varphi^{(s)}$ una costante complessa. Ponendo allora

$$c_s = \frac{\varphi^{(s)}}{\pi(s)},$$

si avrà finalmente

$$U_s + iV_s = c_s(x+iy)^s. \tag{6}$$

Potremo dunque in generale affermare:

Una funzione della variabile x + iy, *che ha la parte reale e il coefficiente dell' immaginario, che sono polinomî omogenei di grado* s, *è eguale al prodotto di una costante complessa per la potenza* s^{esima} *di* x + iy.

E in virtù di quanto si è visto precedentemente (III. 2, a), potremo dire anche più generalmente:

Se la parte reale o il coefficiente dell' immaginario di una funzione della variabile complessa x + iy *è un polinomio omogeneo in* x *ed* y, *la funzione, è all' infuori di una costante additiva eguale al prodotto di una costante complessa per una potenza di* x + iy, *il cui esponente è eguale al grado del polinomio omogeneo. La costante additiva è nel primo caso immaginaria, nel secondo, reale.*

a) Abbiamo dimostrato la (6) per tutti i valori di s positivi, interi, diversi da zero: ma si riscontra facilmente che essa sussiste anche per $s=0$. In tal caso infatti $U_s + iV_s$ è una costante complessa: e la (6) ci dice appunto questo.

b) Pel nostro intento, che è quello di considerare funzioni $U_s V_s$ che sono polinomî in x ed y di grado intero e positivo, la (6) serve completamente, avendola ricavata appunto in tale ipotesi. Ma non è fuori di proposito l'avvertire che essa è valida per qualsivoglia valore di s, come si dimostra agevolmente nel seguente modo.

La $U_s + iV_s$ è una funzione φ della $z = x+iy$ che soddisfa, come abbiamo visto, all'equazione differenziale (5)

$$s\varphi = z\varphi'.$$

Ora questa può scriversi

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = s\frac{dz}{z}.$$

Quindi, essendo c una costante, sarà

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = s\int \frac{dz}{z} + c.$$

Cioè

$$\log \varphi = s \log z + c.$$

E ponendo $c = \log c_s$, si ha subito:

$$\varphi = c_s z^s,$$

nella quale nessuna ipotesi limita ora il valore di s.

5. Sostituendo nella relazione

$$U + iV = \Sigma (U_s + iV_s)$$

la espressione di $U_s + iV_s$ data dalla (6), si ottiene

$$U + iV = \Sigma c_s (x + iy)^s.$$

E questa denota appunto la forma che ha la funzione della variabile complessa che avevamo presa in esame.

Firenze, Marzo 1899.

PROPRIETÀ DELL'ORTOCENTRO DEL TRIANGOLO

1. Dato un triangolo ABC ed un punto H, sono determinate le tre rette AL, BM, CN coniugate armoniche di H rispetto ai tre angoli A, B, C ossia le *polari* di H rispetto agli angoli del triangolo. I punti d'incontro L, M, N di queste polari di H con i lati BC, CA, AB stanno su una retta che si chiama la *retta polare* di H rispetto al triangolo ABC. La corrispondenza tra un punto e la sua polare rispetto ad un triangolo conduce a notevoli risultati ed è stata ampiamente studiata (vedi Trudi e Cremona, *Giornale di Matematica,* vol. I). Ricorderò che se A_1, B_1, C_1 sono i punti d'incontro di AH, BH, CH con BC, CA, AB ed A_2, B_2, C_2 i coniugati armonici di H rispetto alle coppie AA_1, BB_1, CC_1, i punti A_2, B_2, C_2 sono i vertici del triangolo formato dalle AL, BM, CN e questo triangolo è omologico ad ABC con il centro d'omologia H e con l'asse d'omologia LMN polare di H rispetto ad ABC.

Se H è l'ortocentro di ABC, il triangolo A_2, B_2, C_2 avrà certe proprietà rispetto agli elementi del triangolo ABC; lo studio di queste proprietà è l'argomento della presente nota.

2. Sia A' la proiezione dell'ortocentro H di ABC nella sua polare AL rispetto all'angolo $\widehat{A}$. I punti A, B_1, C_1, A' stanno sul cerchio descritto su AH come diametro, quindi $LA \,.\, LA' = LB_1 \,.\, LC_1$; i punti B_1, C_1 stanno sul cerchio descritto su BC come diametro, quindi $LB_1 \,.\, LC_1 = LB \,.\, LC$ e per conseguenza $LA \,.\, LA' = LB \,.\, LC$, ossia A' deve stare sul cerchio ABC.

Risulta così il teorema: *in ogni triangolo le proiezioni dell'ortocentro sulle sue polari rispetto ai tre angoli stanno sul cerchio circoscritto.*

Vedremo ora che l'ortocentro è il solo punto del piano del triangolo che abbia questa proprietà.

3. Ricerchiamo prima di tutto il luogo dei punti K, le cui proiezioni sulle loro polari rispetto ad un angolo A del triangolo stanno sul cerchio circoscritto. Sia D il punto diametralmente opposto ad A nel cerchio ABC ed N un punto qualunque di questo cerchio; al variare di N i fasci delle rette $AN = n$ e $DN = m'$ variano proiettivamente, ma la $AK = m$ varia proiettivamente ad AN, dunque i due fasci di centri A, D formati con le rette m, m' sono proiettivi e perciò K descrive una conica α che passa per A, D ed anche per B, C come è facile vedere. Considerando le bisettrici dell'angolo A si scorge che la conica α ha i punti all'infinito nelle loro direzioni e quindi è una iperbole equilatera.

Procedendo allo stesso modo per i vertici B, C si trovano altre due iperbole equilatere β, γ circoscritte ad ABC e con gli assintoti paralleli rispettivamente alle bisettrici di $\widehat{B}, \widehat{C}$.

Un punto le cui proiezioni sulle sue polari rispetto ad A, B, C stanno sul cerchio ABC deve necessariamente appartenere alle tre iperboli α, β, γ; ma queste all'infuori di A, B, C non hanno che il solo punto H di comune, dunque resta dimostrato che la proprietà del numero precedente compete unicamente all'ortocentro.

4. Sarebbe forse interessante studiare le proprietà delle tre iperbole α, β, γ; mi limiterò ad alcune ovvie osservazioni.

Le iperbole α, β, γ hanno i centri rispettivamente nei punti medii di BC, CA, AB. L'iperbole α ha come tangente in A la simediana di BC e le tangenti in B, C sono perpendicolari al diametro del cerchio ABC passante per A. Lo stesso per le iperbole β, γ.

I punti di ciascuna delle tre iperbole hanno la proprietà che i cerchi determinati dalle loro proiezioni sopra i tre lati passano per un punto fisso, e questo punto è il centro della rispettiva iperbole.

5. Le considerazioni precedenti dànno delle proprietà dell'iperbole equilatera:

1° *se in una iperbole equilatera si congiungono gli estremi di un diametro con un punto della curva, le proiezioni di un altro punto qua-*

lunque della curva sopra il diametro e sopra le congiungenti stanno su un cerchio passante per il centro di essa.

2° *le rette che proiettano i diversi punti dell'iperbole sopra le loro polari rispetto alle due congiungenti passano per uno stesso punto della curva* ecc.

6. Ritornando alle proprietà dell'ortocentro, è facile vedere che la retta HA′ proiettante di H su AL passa pel punto medio di BC. Infatti se D è il punto d'incontro di HA′ con il cerchio ABC, sarà AD un diametro di questo cerchio e quindi BD è parallela a CH e CD parallela a BH; per conseguenza HA′ passa pel punto medio di BC.

Se A″, B″, C″ sono i punti medii di BC, CA, AB, le tre rette A′A″, B′B″, C′C″ passano per H, quindi i triangoli A′B′C′, A″B″C″ sono omologici col centro d'omologia H; l'asse d'omologia è la retta LMN *asse ortico* di ABC, perchè i punti d'incontro delle coppie di lati B′C′, B″C″; C′A′, C″A″; A′B′, A″B″ sono punti di eguale potenza rispetto al cerchio ABC ed al cerchio dei 9 punti di ABC.

7. I due triangoli $A_2B_2C_2$, A″B″C″ stanno in una posizione notevole: *essi sono ortologici con i due centri di ortologia coincidenti nell'ortocentro del triangolo* ABC. Infatti le perpendicolari abbassate da $A_2B_2C_2$ su B″C″, C″A″, A″B″ passano per H e le perpendicolari abbassate da A″, B″, C″ su B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 passano pure per H. È facile vedere anche che i due triangoli sono *omologici;* noi dimostreremo però che in generale: *se due triangoli sono ortologici con i due centri di ortologia coincidenti, essi sono reciproci rispetto ad un cerchio e quindi omologici.*

Siano ABC, A′B′C′ due triangoli tali che le perpendicolari $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ abbassate da A′, B′, C′ su BC, CA, AB passino per un punto M e che le perpendicolari AA_1', BB_1', CC_1' abbassate da A, B, C su B′C′, C′A′, A′B′ passino per lo stesso punto M. Dalla figura risulta subito che i sei prodotti

$$MA' \,.\, MA_1,\ \ MB' \,.\, MB_1,\ \ MC' \,.\, MC_1,\ \ MA \,.\, MA_1',\ \ MB \,.\, MB_1',\ \ MC \,.\, MC_1',$$

sono eguali, quindi descritto il cerchio di centro M e col raggio eguale alla radice quadrata del valore comune di questi prodotti, i triangoli ABC, A′B′C′ risultano reciproci rispetto a questo cerchio; quindi sono omologici ed il centro d'omologia e l'asse d'omologia sono polo e polare rispetto allo stesso cerchio.

Il teorema reciproco del precedente non si verifica, cioè se due triangoli sono omologici ed ortologici, i due centri di ortologia in generale non coincidono; (*) così ad esempio un triangolo ABC ed il suo primo triangolo di Brocard sono omologici ed ortologici; ma i due centri di ortologia sono distinti, ma è il centro del cerchio ABC e l'altro è il punto di Tarry di ABC.

(*) Per riguardo a questi triangoli Sondat ha dimostrato che la congiungente i due centri di ortologia contiene il centro d'omologia ed è perpendicolare all'asse d'omologia (*Intermédiaire des mathématiciens*, question 38, 1894).

8. Un altro esempio di coppie di triangoli ortologici con i due centri di ortologia coincidenti è il seguente. In un triangolo ABC siano O', O'', O''' i simmetrici del centro O del cerchio circoscritto rispetto a BC, CA, AB; è noto che i due triangoli ABC, $O'O''O'''$ sono simmetrici col centro di simmetria nel centro del cerchio dei nove punti di ABC (vedi ad es. le quistioni 206, 304 del *Periodico*). Aggiungiamo che: *il triangolo* $O'O''O'''$ *è ortologico al triangolo* $A_1B_1C_1$ *ortico di* ABC *ed i due centri di ortologia coincidono nell'ortocentro di* ABC.

La dimostrazione risulta evidente dalla figura.

Dal teorema del n. prec. possiamo poi conchiudere che $O'O''O'''$, $A_1B_1C_1$ sono pure omologici.

9. Un ragionamento del tutto analogo a quello del n. 7 conduce a dimostrare che: *se due tetraedri sono ortologici ed i centri di ortologia sono coincidenti, essi sono reciproci rispetto ad una sfera.* Se ne deduce che i due tetraedri sono anche *iperboloidici* cioè le congiungenti delle coppie di vertici corrispondenti sono quattro rette di un' iperboloide rigato.

G. Gallucci.

CORRISPONDENZA

Orvieto, 16 Giugno 1898.

Sig. Direttore del " Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario "

Livorno.

Il dottor G. B. Marangoni in una sua *Nota critica*, dedicata ai tre professori Frattini, De Amicis e Fazzari, fa *alcune osservazioni* sul mio opuscolo *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche.* Siccome la *Nota*, venuta in mia conoscenza oggi stesso, e non prima, ha relazione anche al giudizio che sul detto mio opuscolo diede nel fascicolo marzo-aprile ultimo di codesto *Periodico* il professore De Amicis; così prego la sua gentilezza di voler dar posto nel prossimo fascicolo del *Periodico* alla seguente mia comunicazione, significandole in pari tempo che consimile preghiera rivolgo oggi stesso al periodico *La nostra scuola*, da cui la *Nota* fu estratta, e agli altri due *Il Pitagora* e la *Scuola educatrice*, che pubblicarono giudizî rispettivamente dei due professori Fazzari e Frattini, sul mio opuscolo, giudizî ai quali anche ha relazione la *Nota* stessa.

Il Marangoni, com'egli stesso richiama nella sua *Nota*, già altra volta si era occupato del mio opuscolo, e precisamente nel numero del 10 dicembre 1898 del periodico *La scuola secondaria italiana*. Allora, e propriamente con mia lettera indirizzata alla direzione di quel periodico ed inserita nel numero 24 dicembre del medesimo, rilevate alcune *inesattezze di fatto* nelle quali era caduto l'articolista, soggiungevo che *quanto al merito o valore intrinseco delle considerazioni* contenute nell'articolo *avrei avuto occasione di parlarne fra brevissimo in una Nota che avrei premessa al 2° discorso d'imminente pubblicazione: in essa Nota, raccolte e ordinate le osservazioni di tutti coloro che mi avessero fatto l'onore di occuparsi del 1° discorso, avrei detto schiettamente e motivatamente quali osservazioni mi fossero sembrate accettabili e quali no.* Ma le condizioni della mia salute, per le quali in febbraio ultimo fui collocato, e mi trovo tuttora, in aspettativa relativamente all'uffizio mio di provveditore agli studi, furono la causa onde rimase, ed è tuttora, sospesa quella mia pubblicazione.

In ogni modo però il 2° *discorso*, con la *Nota* che lo precederà, sarà prestissimo dato alle stampe, e immancabilmente non oltre il novembre prossimo. Nella *Nota* che lo precederà comprenderò pertanto anche l'esame delle nuove censure del Marangoni; ma frattanto vo' rilevare le seguenti altre *inesattezze di fatto*, la terza delle quali è la ripetizione, con rafforzamento, di una di quelle in cui il Marangoni era già incorso nella prima recensione, e già da me denunziate con la richiamata mia lettera del 24 dicembre alla direzione della *Scuola secondaria italiana*. Ecco, senz'altro, le nuove *inesattezze di fatto:*

1°. La lettera del De Amicis a me, sebbene inserita nel fasc. marzo-aprile 1899 del *Periodico di matematica*, non è *posteriore*, ma anteriore alla recensione 10 dicembre 1898 del Marangoni sulla *Scuola secondaria italiana*. La lettera stampata porta nel *Periodico* la data 2 novembre 1898, e la lettera manoscritta, che conservo, porta la stessa data, fu allora diretta a me in Aquila, ed è identica a quella stampata.

2°. Non è esatto che io nel parag. IV abbia fatto *sfuriate contro i filosofi positivisti;* le ho fatte soltanto (si legga bene) contro una certa classe di essi, parlando anzi con rispetto degli altri, e facendo pur qualche nome tra questi.

3°. Mi si attribuisce novamente, e con un crescendo, di *aver diretta la frase indecente " purus mathematicus purus asinus " ai geometri e agli annalisti che hanno voluto porre in questi ultimi tempi la scienza matematica su basi razionali* ecc., e *di aver* con la *frase* stessa *tentato di offendere tutto un gruppo di studiosi italiani, benemeriti della scienza, dell'insegnamento e della patria;* mentre la conclusione esplicita alla quale io pervengo nel N. 20 a pag. 20 è soltanto questa: *Il noto adagio " purus mathematicus purus asinus " è una condanna severa sì, troppo severa, di quei matematici che rimangono chiusi in un ordine speculativo e di pure astrazioni; ma un qualche fondamento giusto lo ha.*

4°. Di quella che il Marangoni chiama *traduzione fedele dal Couturat* ne discorreremo, come di tutto il resto, nella promessa *Nota*, che precederà il 2° discorso; ma, se mai, quella *traduzione* sarebbe non del *capo* VII, cioè dell'intero capo VII, come asserisce il Marangoni, bensì di una *sesta parte appena* di esso capo, occupante, tutto intiero, un pochino più di cinque pagine e mezzo di 16° grande: l'insieme delle particole *fedelmente tradotte dal Couturat* si limiterebbe a un po' meno di una paginetta del mio opuscolo. È una verificazione sperimentale che chiunque può fare.

Mi creda, Sig. Direttore,

Dev.mo suo

ANTON MARIA BUSTELLI.

QUISTIONI PROPOSTE

470. Il luogo dei vertici dell'angolo retto i cui lati abbiano date direzioni ed intercettino in una data iperbole equilatera corde tali, che la differenza dei loro quadrati sia costante, è un'iperbole equilatera concentrica alla data.

Considerando poi il caso in cui le corde debbano essere eguali dedurne la seguente proprietà: Due rette ortogonali passanti per il fuoco di una iperbole equilatera intercettano in questa corde eguali.

Si può generalizzare quest'ultima proprietà?

471. Si consideri il parallelogrammo che ha per vertici due diametri coniugati di un ellisse, e per un punto P di uno di questi diametri si conducano due parallele ai lati del parallelogrammo. Se A, A', B, B' sono i punti d'incontro di tali rette con l'ellisse, a e b i semiassi di questo, si ha

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

CELESTRI.

BIBLIOGRAFIA

MAURICE D'OCAGNE. — *Traité de Nomographie.* — Paris, Gauthier-Villars, 1899. — Fr. 14.

L'uso di grafici (diagrammi o abbachi), i quali diano immediatamente il valore di una funzione a più variabili, va sempre più estendendosi nella matematica applicata; ma i procedimenti per la loro costruzione erano fin'ora poco noti e disparati, perchè non esisteva un'opera che li raccogliesse o li coordinasse.

A questa mancanza ha voluto riparare il prof. M. d'Ocagne (nome già noto ai matematici), il quale ha elevato questo ramo secondario della *Statica grafica* a nuova scienza, attribuendole il nome di *Nomografia;* e con questo titolo egli pubblicò fin dal 1891 un compendioso fascicolo, pregievolissimo; ma i numerosi contributi personali, le moltissime applicazioni fatte, da quell'epoca in poi, dei moderni metodi (all'ingegneria, alla navigazione, alla balistica, all'astronomia, all'idraulica, alle operazioni finanziarie, ...), han fatto sì che quel fascicolo di cento pagine appena è ora diventato un volume di ben cinquecento pagine.

Non è possibile dare, in poche parole, un'idea di tutto ciò che questo volume contiene, perchè gli argomenti in esso trattati sono o nuovi o poco noti, ci limiteremo per ciò ad alcune osservazioni di indole generale.

Noteremo prima di tutto che l'A. (meno che in una parte dell'ultimo capitolo) non suppone nel lettore altro che una conoscenza elementare della *Geometria analitica*, e che, essendosi proposto di essere utile principalmente ai tecnici, comincia coll'occuparsi del caso più semplice (quello delle equazioni a due variabili (cap. I), per risalire di mano in mano a casi più complicati. Poscia, dopo aver studiato a fondo (cap. II) il caso in cui un'equazione a tre variabili può essere rappresentata da un grafico contenente tre sistemi di rette quotate (*anamorfosi* del Lalanne, generalizzata dal Massau), passa a esporre (cap. III e IV) il suo *metodo dei punti allineati a una sol quota* (che nel citato fascicolo del 1891 aveva chiamato *metodo dei punti semplicemente isopleti*), metodo fecondissimo, il quale semplifica la costruzione e l'uso dei grafici e la cui importanza è largamente dimostrata dalle numerosissime applicazioni che l'A. stesso o espone per disteso, o cita soltanto. Ma dove il pregio della geniale idea dei punti allineati è messo in piena luce è nel capitolo seguente (V), nel quale l'A. fa vedere come il metodo stesso si possa facilmente estendere ad alcuni tipi frequentissimi di equazioni a quattro, a cinque e a sei variabili, dando così luogo al *metodo dei punti allineati a due quote* (già *metodo dei punti doppiamente isopleti*). E fra gli esempi citeremo quello delle equazioni complete di 3° e di 4° grado, e quello per la risoluzione di tutti i triangoli sferici. Il cap. VI (ed ultimo), dal punto di vista teorico, è il più importante di tutti. In esso l'A., dopo aver determinati e classificati tutti i modi possibili per rappresentare le equazioni a un numero qualunque di variabili, esamina i tipi generali che comprendono tutti quelli studiati nei capitoli precedenti, e si propone il problema di cercare quando una equazione qualunque sia riducibile a un determinato tipo: si presentano così problemi notevolissimi di Analisi il primo dei quali fu risolto dal nostro Di S^t. Robert. — Ma anche la *Geometria superiore* può nella Nomografia trovare largo campo di applicazione, e lo prova l'utilità che si è già potuto ricavare dal principio di dualità (cap. III, 56-59) e dalla trasformazione omografica (cap. II, 49-50).

A noi pare, insomma, che questo libro meriti di essere studiato sia dai tecnici, sia dai matematici: dai primi perchè fornirà loro il mezzo di evitare (nella maggior parte dei casi) i calcoli numerici, dai secondi perchè presenterà loro nuovi e interessanti problemi teorici, ma di applicazione utile e immediata.

G. Pesci.

H. Poincaré. — *La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes.* — Paris, G. Carré et C. Naud, 1899.

Il volumetto fa parte della collezione " Scientia „ colla quale il benemerito editore intende di esporre, in forma accessibile anche ai non specialisti, i problemi scientifici che sono, come suol dirsi, all'ordine del giorno. Non bisogna dunque richiedere la forma elevata e la profondità delle ricerche analitiche, che il Poincaré adoperò già in due precedenti volumi *Electricité et Optique, Les oscillations électriques;* egli ha qui inteso di sviluppare in modo facile la teoria di Maxwell, e ciò che il Righi chiamò, in modo intuitivo, l'*Ottica delle oscillazioni elettriche* (Bologna, Zanichelli, 1897). Ma, ed è forse superfluo farlo notare, anche in queste pagine elementari abbondano le osservazioni acute e geniali, e si ritrova la chiarezza e la vivacità del dire, che è una delle più brillanti caratteristiche dell'illustre scienziato.

La trattazione può dirsi completa, ed estesa per quanto poteva permetterlo la mole del libro. Dove, malgrado la penna illustre che lo ha dettato ci permettiamo di dirlo, ci siamo imbattuti in parecchie asserzioni, che non si possono certo accettare ad occhi chiusi. Così non sembra logico dire che, riconosciuto il parallelismo fra un dato fenomeno ed un fenomeno meccanico, si abbia garanzia sufficiente della spiegazione meccanica del primo; che innanzi Maxwell i fisici consideravano la scarica di una bottiglia di Leyda come una corrente a circuito aperto, etc.

Trattandosi poi di un'opera di volgarizzazione, ci sarebbe piaciuto di vedere, a fianco delle analogie idrauliche e delle altre sviluppata qualche analogia fra l'elettricità ed il calore. Questo secondo metodo, non sempre applicabile è vero, ha il vantaggio di non materializzare i fenomeni elettrici, e di ravvicinarli a fenomeni, la di cui natura vibratoria è a tutti nota.

Il volumetto fa larga parte ai lavori del nostro Righi e del Garbasso; ed esso è infine da raccomandarsi vivamente come introduzione generale, sia alle altre opere del Poincaré, sia all'insigne studio sopra citato del Righi. (*)

R. Pitoni.

Georges Maupin. — *Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVI, XVII, XVIII siècles,* 1 vol. in-8° di 200 pagine, con figure. Parigi, Georges Carré e C. Naud, editori, 1899.

Nei secoli passati cosa pensavano dell'utilità delle matematiche non solo i dotti, ma specialmente i fabbricatori di libri ed anche gl'ignoranti? Quali vantaggi si credeva trarne per l'educazione; che legame speciale volevasi stabilire tra la dottrina matematica e la religione? Ecco di che tratta questo volume. Offrendo estratti interessanti e curiosi degli autori che cita, il sig. Maupin non si è permesso d'aggiungere che brevi commenti e corte note biografiche, non volendo toglier nulla del loro carattere ai testi citati.

Dobbiamo soggiungere che questo non è un lavoro dotto e che, nei punti principali, è stato cercato di renderlo alla portata di tutti coloro che hanno in matematica mediocri cognizioni.

Questo libro ha, d'altronde, un lato documentario il quale sedurrà coloro che s'interessano all'evoluzione dell'idea matematica attraversa le gravi quistioni di scuole e le scottanti discussioni dei dogmatici. — I matematici s'interesseranno vivamente a questa escursione retrospettiva nel campo della geometria, ed i curiosi, che non si spaventano degli argomenti imprevisti, troveranno piacere nell'intervento delle matematiche nel dogma della Presenza reale. — D'altronde, il volume del sig. Maupin, veramente istruttivo in ogni sua parte, ci offre come d'attualità, dei punti di vista originali su ciò che pensavano i maestri di prima sull'utilità dell'insegnamento del latino.

Molte delle idee che emettiamo oggi a questo proposito sono, per dire il vero, quelle d'ieri, e dobbiamo al libro del sig. Maupin la soddisfazione di apprenderlo.

G. de Longchamps. — *Cours de problèmes de Geom. Analytique.* Parigi, Delagrave, 1898-99.

Quest'opera che consta di tre grossi volumi non è una delle solite raccolte di esercizi, ma bensì un vero e proprio trattato nel quale l'autore, dopo aver classificato i varî problemi che possono presentarsi in Geometria analitica, espone per ciascuna classe, con la chiarezza ed il rigore scientifico che lo distinguono, i vari

(*) Ricordiamo come a questo medesimo scopo giovino le *15 Lezioni sulla luce* di A. Garbasso Milano, L'*Elettricità*, 1897.

metodi che conviene seguire per giungere alla soluzione. La teoria è seguita sempre da numerosi esempi parte già risoluti, parte lasciati a risolvere al lettore, quasi sempre però accennando ai resultati finali.

I due primi volumi comprendono la Geometria a due dimensioni. Vi sono trattati successivamente i problemi che si riferiscono alle tangenti, ai poli ed alle polari, ai luoghi di centri, di fuochi, di vertici, alle normali, alle corde, alle direttrici ecc.

Un capitolo è destinato alle Coordinate baricentriche ed alle tangenziali ed uno alle Trasformazioni delle curve.

Con lo stesso metodo è composto il volume 3° che si riferisce alla Geometria a tre dimensioni. In esso vi si trattano i problemi relativi a tangenti e piani tangenti, centri, poli e piani polari, corde e piani secanti, normali, *piani ciclici e iperciclici, generatrici*, ecc.

L'ultimo capitolo è intieramente destinato allo studio particolareggiato di una superficie speciale. È scelta come esempio per questo studio la superficie di Steiner o *superficie romana* (del 4° ordine e della 3ª classe), quella superficie cioè che è caratterizzata dalla proprietà che ogni suo piano tangente la sega secondo due coniche.

In conclusione la nuova opera del LONGCHAMPS colma un vuoto, giacchè quantunque non manchino, specialmente in Francia, le buone raccolte di esercizi, sia risoluti (per es. quella del Brisse, del Rémond ecc.) od enunciati semplicemente (per es. quella del Laisant), non c'era ancora, almeno ch'io sappia, un libro che contenesse una trattazione sistematica del modo di risolvere i problemi in Geometria analitica.

Il „ *Cours de problèmes* „ mi sembra che riconfermi sempre più l'alto valore dell'autore dell'*Algèbre* e della *Géometrie Analytique*.

G. C. L.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Nouvelles Annales de math. T. XVIII$_3$. 1899 (Paris, Gauthier-Villars).

Fasc. II (febbraio). *Staeckel P.* Sopra alcune proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche (traduzione della Mem. di egual titolo inserita nel t. XLVI dei *Mathematische Annalen*). — *Pleskot A.* Nuovo processo per risolvere le equazioni del terzo grado. — *Fontené G.* Sopra alcuni poliedri mobili comparabili ai poligoni di Poncelet. — *Vaes F. J.* Soluzione grafica di n equazioni lineari con n variabile. — *Vaquant A.* Risoluzione della quistione di Matematiche elementari, Aggregazione delle scienze matematiche; concorso del 1898. — Certificati di studi superiori della facoltà di scienze Sessione di novembre 1898 (Caen, Grenoble). — Risoluzione di quistioni proposte: 1722 (*E. Malo*) 1727 (*G. Tzitzéica*); 1729 (*Tzitzéica*). — Quistioni 480, 495, 496, 512, 513 (nuovamente proposte perchè fin'ora insolute) 1812 (*), 1813, 1814.

AVVERTENZA. — Gli articoli contrassegnati con asterisco (*) sono stati inviati dal Comitato dell'Associazione *Mathesis*.

(*) Questa quistione 1812 (E. Duporcq) deve essere stata inserita per una svista, giacchè enuncia il teorema del Chasles fondamentale nella teoria delle cubiche gobbe, relativo ai piani osculatori in tre punti della curva. — (V. p. es. REYE, *Géométrie de position*, T. II, p. 112 della trad. francese; SCHRÖTER, *Theorie der Oberfläche 2. O und der Raumkurven 3. O*: p. 280). (V. R.)

Fasc. III (marzo). *Ripert L.* Sull'omografia e la dualità applicata alle proprietà metriche del piano. — *Böklen O.* Sulle normali dell'elissoide (tre nuovi teoremi sull'argomento indicato). — *Mariantoni e Palatini.* Sul problema della polisezione dell'angolo (elegante applicazione della teoria delle corrispondenze $(1, n)$ al problema indicato nel titolo) (*). — *Piccioli E.* Un teorema di geometria ad n dimensioni (estensione ad un S_n del teorema: le sviluppanti delle eliche cilindriche di un S_3 son curve piane). — *Facquant A.* Risoluzione della quistione di Analisi (Aggregazione delle Sc. Mat. Concorso del 1898). — Certificati di studi superiori della Facoltà di Sc., sessione di novembre 1898 (Lilla). — Bibliografia. — Quistioni 416. 1816-1818 (**).

(V. R.)

Mathesis, Recueil mathematique etc. par M. M. *P. Mansion* et *J. Neuberg,* T. IX_2, Gand, Ad. Hoste, editeur.

Fasc. III (marzo, 1899). *Barbarin E. Costruzioni sferiche con la riga e col compasso.* — (l'A. si propone di mostrare come sopra grandi superficie sferiche, e in particolare sul piano riemanniano possa usarsi la riga e il compasso per i tracciamenti elementari). — *Jerabek V. Sulla Trisettrice di Maclaurin* (dal centro O e da un punto fisso A d'una circonferenza O^2 si tirano il raggio variabile OM e la corda parallela AN: il luogo del polo P di |MN, rispetto a O^2 è la Trisettrice di Maclaurin avente in B il vertice e in O il fuoco; l'inviluppo di |MN| è una cardioide; il luogo del punto medio di $\overline{MN}$ è una lumaca di Pascal; il luogo del punto comune a |MN| e alla tangente in P, una cardioide). — *Note matematiche:* Osservazioni sul triangolo (*Ripert*); *sul parallelepipedo* (*Stuyvaert*); *Teorema sull'iperbole* (*G. Gerard*). — *Formole relative al triangolo* (*Delahaye*). — Bibliografia. — Quistioni risolute: 1056 (*Droz-Farny*); 1161 (*Gerard, Depréz, Droz*); 1186; 1189 (*Buysens*); 1192 (*Retali*); Quistioni d'esame 881-882. — Quistioni proposte 1211-1214. — Al presente fascicolo è unita come Supplemento la Mem. *Sopra una trasformazione geometrica* del sig. *H. Brocard,* (Estr. dalle Mem. Soc. R. delle Sc. di Liège).

Fasc. IV (aprile). *Barbarin E.* Costruzioni sferiche etc. (continuaz. e fine). — Congresso Internaz. dei matematici a Parigi. — *Retali V.* Sopra una cubica circolare. — *Note matematiche:* Calcolo approssimato di una radice quadrata (*G. Frattini*). — Sulla sfera dei dodici punti (*Ripert*). — Un regolo calcolatore o abaco. (*Lambert*). — Paradosso concernente l'inviluppo delle ellissi omofocali (*Barisien*). — Bibliografia. — Risoluzioni di quistioni proposte. 594. (*Neuberg*): 1041; 1156 (*Gerard*); 1176, 1177 (*Buysens*) (***). — *Quistioni d'esame* 883-887. — Quistioni proposte 1215-1218.

(*) Sia s la perpendicolare ad |AB| in B ed X un punto tale che $n.\widehat{XAB} = \widehat{XBA}$: la retta |BX'| simmetrica di |BX| rispetto ad s sega |AX| in un punto X' il cui luogo è una *curva settrice* Γ^n d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo in A, passante (una volta) pei punti ciclici ecc. La curva C_n studiata dai sigg. Mariantoni e Palatini è dunque la omologica armonica della *settrice* Γ^n quando si prenda A per centro ed s per asse d'omologia, se ne possono ricavare le proprietà da quelle note di Γ^n. Più generalmente se $n.$ X'AB $= n'.(180^0 -$ X'BA) il luogo di X' è una *curva settrice* $\Gamma^{n+n'-1}$ dell'ordine $n+n'-1$, con un punto $(n-1)$-plo in A, un punto $(n'-1)$-plo in B, un punto n'-plo in ognuno dei punti ciclici ecc. Queste *curve settrici* sono state studiate accuratamente dal sig. Prof. *P. H. Schoute* di Groninga (V. *Archives Néerlandaises des Sc. exactes* etc., t. XX, p. 49-94, e *J. de Mat. spéc.,* anno 1885). (V. R.)

(**) Per la quistione 1817 (del sig. Cardoso-Laynes) veggasi la risoluzione che io ne ho data nel T. XIII di questo *Periodico* (pag. 124, quistione 403). (V. R.)

(***) La costruzione data dal sig. Prof. Neuberg, nella nota che segue la risoluzione del sig. Buysens, vale anche nel caso generale di una curva piana qualunque; veggasi la mia quistione 401 (*Periodico di Mat.,* anno XIII, pag. 85). (V. R.)

Fasc. V (maggio). *Jérabek V.* Curve polari reciproche delle epicicloidi ed ipocicloidi (risultati importanti relativi alle curve ρ sen $(n+1)\ \varphi = k$, alle loro inverse etc). — *Orlando L.* Applicazioni dell' inversione (osservazioni su teoremi molto noti). — *Note matematiche:* Sulla quistione 1171; Sulle coniche omotetiche passanti per due punti fissi (*Déprez*). — Bibliografia. — Risoluzioni di quistioni; 1042 (*Retali, Buysens, Gob, Droz, Déprez, Mandart*); 1102 (*Stuyvaert*); 1181 (*Lorent*); 1199. Quistioni d'esame 888-891. — Quistioni proposte 1219-1222.

(V. R.)

Revue de mathématiques Spéciales, redigée par M. M. *E. Humbert* et *G. Papelier*, 9e année. Paris, librairie Nony et Cie.

Fasc. 6° (marzo 1899). *Lagrange A.*, Lezione sulla generazione delle cubiche (prodotto di due fasci proiettivi l'uno di coniche e l'altro di raggi; costruzione della cubica coi due metodi di Chasles e Jonquieres; costruzione (di Hart) del nono punto comune a 2 cubiche passanti per 8 punti dati). — *Lapointe G.*, Sopra una proprietà delle cubiche gobbe. (È il teorema indicato nella nota a pag. 274 del *Periodico di Mat.* che l'A. ricava con trasformazione omografica da una proprietà delle cubiche equilatere). — *Proubet*, Sopra una formola della quale è caso particolare quella degli incrementi finiti. — Soluzione della quistione 753 (Scuola Politecnica, concorso del 1898). *Geom. Analitica.* — Risoluzioni delle quistioni: 746 (relativa all'ellisse di Frégier) (*) 757. — Quistioni proposte 815-816. — *P. Barbarin,* Teoremi da dimostrare, parte 2a. — *Geom. Analitica,* Quistione 768 (Scuola Centrale 1898) (luoghi relativi alla parabola, alla cubica cuspidale; la curva ortoptica di una parabola di *Neil* è una parabola ordinaria etc). — Quistioni proposte 824-826. — Bibliografia.

Fasc. 7° (aprile 1899). Parte 1a. *Chalaux M.* Invarianti di un polinomio intero in x, relativi alla trasformazione lineare $x = x' + h$. — Risoluzione della quistione 762 (Aggregazione delle Sc. mat. 1898) (quistione relativa alla superficie di *Steiner*, che non può riassumersi qui brevemente). Scuola Normale Superiore, Concorso del 1898 (quistione relativa alla superficie cubica circolare $x(x^2+y^2+z^2)+a(x^2+y^2-z^2)=0$, inversa di una quadrica di rivoluzione rispetto a un suo punto). — *Geom. Analitica*, Risoluzione della quistione 758 (**). (ABC è un triangolo inscritto alla conica C^2 e circoscritto a K^2; α, β, γ sono i punti di contatto; il luogo del punto M comune alle rette $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ è una conica del fascio (C^2, K^2)). — *Fisica e Chimica*, Risoluzioni delle quistioni 750 e 752. — Quistioni proposte negli esami orali della Scuola Normale Superiore (1898). — *Matematiche*, 218-272. — *Fisica*, 273-283. — Quistioni proposte 827-828. — *P. Barbarin*, Teoremi da dimostrarsi 829-832 (seguito).

(*) La costruzione delle intersezioni di una conica reale C^2 con le rette isotrope uscenti da un suo punto M si fa assai semplicemente così: Sieno MR la corda normale in M, MT la tangente in M; MC_1, MC_2 bisettrici degli angoli di queste due rette, seghino C^2 respettivamente in A_1 e B_1; posto $(|MA_1|, |RB_1|) \equiv C_1$, $(|MB_1|, |RA_1|) \equiv C_2$, i due punti cercati sono sulla retta $|C_1C_2|$ e posto $(|C_1C_2|, |MR|) \equiv C$, $(|MT|, |C_1C_2|) \equiv T$, sono i punti doppî della involuzione $(C_1, C_2; C, T)$. ne segue che il polo $M' \equiv (|A_1B_1|, |MR|)$ di $|C_1C_2|$ rispetto alla conica C^2 è il punto di *Frégier* corrispondente ad M, ossia lo inviluppo di $|C_1C_2|$ *è la polare reciproca, rispetto a C^2, dell'ellisse di Frégier.* Veggasi il § 17 delle mie *Ricerche sopra l'immaginario in Geometria* (Serie IV, T. IX delle Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna): per diverse proprietà dell' ellisse di Frégier v. *Steiner* (Crelle t. XLV) e *Retali* (Mem. dell'Acc. di Bologna, Serie IV, T. VII, pp. 620-622).

(V. R.)

(**) Risoluzione geometrica: cerchiamo i punti del luogo che cadono su C^2: se A è uno dei punti comuni a C^2 e K^2 e la tangente a K^2 in A seghi C^2 in T, la tangente in T a C^2 toccherà K^2 in un punto α, i due punti $\gamma\beta$ sono riuniti in A sulla $|AT|$, e i due BC sulla $|T\alpha|$ in T; il triangolo ABC è inscritto in C^2 e circoscritto a K^2, le rette $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ si segano in A. Il luogo ha dunque in comune con C^2 i 4 punti (C^2K^2).

(V. R.)

Parte 2ª. — Scuola centrale, Concorso del 1898. — *Trigonometria*, 771 (Calcolo); 772 (Risolvere il triangolo ortico d'un triangolo dato acutangolo ABC; dimostrare ch'esso fra i triangoli inscritti in ABC ha il minimo perimetro). — Scuola delle miniere di Saint-Etienne. 724 (es. di geom. analitica). — Quistioni proposte 833-834.

(V. R.)

Bulletin de mathématiques speciales, publié par M.M. *L. Gerard, G. de Longchamps* et *B. Niewenglowski,* anno 5°.

Fasc 5° (febbraio 1899). — *Michel Ch.* Teoria sintetica delle cubiche a punto doppio e delle curve di terza classe con tangente doppia (continuazione e fine; cenno sulle cubiche cuspidali). — *Bally.* Dimostrazione di alcuni teoremi relativi alle coniche (continuazione; Se P_1P_2 sono i poli di p_1p_2 rispetto a una conica C^2, il covariante fondamentate del sistema formato dalle due coniche C^2 e P_1P_2 è una conica T^2 passante per P_1P_2 e pei punti $(C^2p_1)(C^2p_2)$: reciprocamente. C_2 è il contravariante fondamentale del sistema T^2, p_1p_2; se P_1P_2 sono i punti ciclici, T è il cerchio di Monge di C^2. L'A. dimostra geometricamente varie proprietà col sistema C^2, T^2). — *Gérard L.* Sul teorema di Poncelet (la quistione dei poligoni inscritti a una conica K^3 e circoscritti ad un'altra C^2 si abbassa al 1° grado quando le coniche date hanno fra loro doppio contatto, nel caso generale occorrono le funzioni ellittiche: l'A. mostra che se K^2 e C^2 sono tangenti, bastano le funzioni circolari) (*). — Quistioni risolute 154 (Barisien). — *Barisien.* Nota relativa a due curve che possono essere considerate come una generalizzazione della lumaca di Pascal. La prima curva considerata dall'A., $(x^2+y^2-ax)^2(B^2x^2+A^2y^2) = A^2B^2(x^2+y^2)^2$ è la concoide generalizzata dell'origine O rispetto all'ellisse $B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2$ e al cerchio $x^2+y^2-ax=0$) (**). — Quistioni proposte 165-170.

Fasc. 6° (marzo 1899). — *Michel Ch.* Sulle coniche bitangenti a due coniche date ed i cerchi tangenti a due cerchi dati (nota di geom. analitica). — *Bally E.* Dimostrazione di alcuni teoremi relativi alle coniche (cont. il teorema di Poncelet). — *L. G.* Sul teorema di Rolle. — Quistioni risolute 154; 155 (Barisien). — *Barisien.* Nota relativa a due curve che possono essere considerate come una generalizzazione della lumaca di Pascal (cont. la seconda curva considerata dal sig. B. non è altro che la pedale di un'ellisse rispetto a un punto del suo asse maggiore e perciò perfettamente conosciuta (***). — Quistioni proposte 171-172.

(V. R.)

(*) È ormai provato che Steiner aveva scoperto la trasformazione quadratica razionale generale prima del 1829. (Veggasi la mia nota: *Sur la trasformation quadratique rationelle,* nel T. V, p. 44 dell'*Interm. des Math.*) è dunque molto probabile ch'Egli fosse, nell'epoca indicata, anche in possesso del metodo d'inversione: in ogni caso, assai prima del 1843, *Magnus* (Crelle T. VIII, 1831, p. 52) e il *Bellavitis* (ann. della Sc. T. VI, Padova 1836) avevano esposto completamente questo metodo.

(V. R.)

(**) Se $r_1 = f_1(\theta), r_2 = f_2(\theta), \ldots r_n = f_n(\theta)$ sono le equazioni polari di n curve, riferite allo stesso polo e al medesimo asse polare, la curva $r = \Sigma f_n(\theta)$ si dice *concoide generalizzata* del polo rispetto ad esse. Sebbene non sia stata finora studiata la trasformazione piana doppia del quart'ordine che dà la chiave della teoria delle concoidi, si conoscono parecchie proprietà della curva $r = \Sigma f_n(\theta)$, per es.: se ne può costruire la tangente in un punto, il centro di curvature etc. Nel caso particolare considerato dall'A. la normale alla sestica nel punto (0, B) passa per (A, 0); Concoidi generalizzate di un ellisse o di un cerchio si presentano spesso nelle applicazioni della Geometria descrittiva e precisamente nella teoria delle ombre ed in quella delle linee isofote.

(V. R.)

(***) Se rispetto a due assi rettangolari $0x, 0y$ paralleli a quelli d'un ellisse di semiassi A, B le coordinate del centro sono m, n, la equazione polare

$$r = m\cos\theta + n\cos\theta \pm \sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

rappresenta la pedale dell'ellisse rispetto ad O: ponendo in questa $n = 0$, $m = a$ abbiamo la seconda curva del sig. *Barisien,* che è dunque la pedale di $0(-a, 0)$ rispetto all'ellisse. — Ne segue subito,

El Progreso Matematico, Rivista de Matemáticas puras y aplicadas; director *D. Zoel G. de Galdeano*, catedrático de la Universidad de Zaragoza, serie 2ª, num. 1 (maggio 1899). — Ragione, oggetto e programma. — Appunti per un piano di educazione scientifica. — *D. Zoel G. de Galdeano.* La moderna organizzazione della Matematica (è la prima di una serie di Conferenze tenute dall'A. nel marzo 1898 all'Università di Madrid). — Cronaca; Congresso di Zurigo; congresso di Dusseldorf; la società italiana *Mathesis.* — Bibliografia. — Quistioni risolute (*) (Brocard). — Quistioni proposte 254-256.

(V. R).

Dalla: **Zeitschrift fur Matem. und Naturwiss. Unterricht.** rileviamo nel:

Fasc. V. 1898. 1°. Una recensione sulle: Lezioni di Storia della Matematica di *M. Cantor* (vol. III, Lipsia, *G. B. Teubner*); e sull'opera: Trattazione elementare del potenziale e sue applicazioni alla teoria della gravitazione del magnetismo, dell'elettricità, del calore e dell'idrodinamica di *Holzmüller* (ibd).

2°. Relazione di A. Peter sul VII congresso dell'Associazione fra gli insegnanti di Mat. e Scienze, avuto luogo a Lipsia nell'estate scorso (e di cui fu dato già un cenno nel nostro Bollettino).

Fasc. VI. 1°. In questo fascicolo rilevasi una: Ricerca statistico-scolastica accompagnata da alcune tabelle concernenti gli Istituti delle varie regioni della Germania e i libri di testo di Matematica (Aritm., Alg., Esercitaz. alg., geom. piana, stereometria, trigonom.) ivi adottati. Da queste ricerche risulta che di quei 400 istituti secondari la maggior parte adotta i compendi del Kambly, del Mekler, del Reidt, i trattati algebrici di Bardey, di Kambly, del Reidt; le raccolte di esercizi di Bardey, dell'Heis, dell'Hirsch..., la planimetria del Kambly, dello Spieker, del Lieber, e del Reidt. In questa statistica però non si tien conto dell'epoca in cui quei libri di testo vennero pubblicati, nè vuolsi trarre alcuna conclusione circa il merito scientifico e didattico dei medesimi. L'autore di questo articolo fa rilevare che molte scuole non hanno adottato alcun libro di testo per l'insegnamento della matematica.

2°. Il detto fascicolo contiene una recensione sopra la: Guida pratica per l'insegnamento del conteggio nelle scuole popolari di *K. Streng.*

Fasc. VII. Questo fasc. contiene, fra altre cose:

1°. Un tentativo di ricostruzione di un ponte sul Reno, conforme i Commentari. De bello Gallico di G. Cesare, di *F. Zimmerhaechel.*

---

oltrechè la discussione completa della quartica, anche la sua area, giacchè per un teorema noto, essa in generale è $\frac{\pi}{2}(m^2+n^2)$ aumentata dell'area della pedale rispetto ad O. essa è dunque $\frac{\pi}{2}(m^2+n^2+A^2+B^2)$, e nel caso particolare, del sig. B. $\frac{\pi}{2}(a^2+A^2+B^2)$.

(V. R.)

(*) Il sig. *Brocard* trova per equazione del luogo

$$d^2x^2[(x-a)^2+(y-b)^2]-(bx-ay)^2[x^2+(y-d)^2]=0$$

ma questa non rappresenta, come dice l'A., una curva del quart'ordine perchè si spezza in due fattori, il primo dei quali $(d-b)x+a(y-d)=0$ è la retta che unisce il punto luminoso A col punto B, e l'altro

$$[(d+b)x-ay](x^2+y^2)-d(ax^2+2bxy-ay^2)=0,$$

rappresenta la strofoide obliqua col punto doppio nell'origine C, passante per A, B e per la proiezione di C sopra |AB|. Allo stesso risultato si arriva subito osservando che il luogo è il prodotto dei due fasci involutori quadratici A, B *in posizione ridotta del prim'ordine.* È facile riconoscere la identità del problema di ottica geometrica trattato dal sig. Brocard con quello risoluto sinteticamente dal Prof. *Loria* nel fasc. Juin 1897 dei *Nouvelles Annales.* Il Prof. *Loria* trova la strofoide sopraindicata, ma la genera come prodotto di due fasci di raggi C, B in corrispondenza (1, 2).

(V. R.)

2°. Una recensione dell'opera di *I. P. Schmidt:* Discussioni su alcune teorie e quistioni di Aritmetica e di Algebra elementare, stampata a Triev nel 1897.

Il fasc. VIII è dedicato ad articoli di Botanica e contiene il Resoconto della riunione di naturalisti e medici, che ebbe luogo a Düsseldorf nel settembre 1898.

P. G.

Giornale di Matematica. Nov. e dic. 1898. — *Ramorino A.* Gli elementi immaginari nella geometria (continuazione e fine). — *Viterbi A.* Sui gruppi di sostituzioni a coefficienti interi appartenenti a un corpo di numeri complessi di grado finito qualunque. [Si tratta dei gruppi di sostituzioni della forma di quelle che il Fricke (Zur gruppentheoretischen Grundlegung der autormorphen Functionen, Math. An. XLII Bd) studiò soltanto nel caso in cui i loro coefficienti siano numeri interi d'un corpo reale]. — *Cazzaniga T.* Sul calcolo di qualche determinante numerico. [Si fanno delle applicazioni di due sviluppi dati dal Mangeot (Sur une méthode de développement, An. École n. 1897]. — *Palatini F.* Linee contenute nelle rigate razionali di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni. [Partendo dai resultati ottenuti dal Segre (*Sulle rigate razionali di uno spazio lineare qualunque*, Atti Acc. Torino 1884) si arriva a concludere che in una data rigata di ordine n e direttrice minima m si hanno tanti sistemi di dato ordine k quante sono le unità della parte intera di $\frac{k}{n-m}$, e si danno i caratteri di tali sistemi]. — *Cyp. Stéphanos.* Sur un mode de composition des déterminants et des formes bilinéaires.

Genn. e febb. 1899. — *Gallucci G.* Studio sui tetraedri biomologici con applicazioni alle configurazioni armoniche ed alla configurazione di Klein. [Viene considerata una coppia di tetraedri omologici nei due modi $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} O$, $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} O'$ e insieme a questa si considera un'altra coppia detta *coniugata* ed una terza detta *associata* alla data. Lo studio di queste coppie permette all'A. di stabilire nuove proprietà della configurazione armonica (per la quale trova che le rette k formano una cfz. $(72_8\ 72_8)$ di rette e quadriche tutte reali) e di quella di Klein (per la quale trova che le rette k formano una cfz. $(360_8,\ 720_{16})$ di rette e quadriche in parte immaginarie)]. — *Massarini I.* Intorno alle coniche rispetto alle quali due altre sono polari reciproche. [Contiene la determinazione, fatta per via analitica con metodo uniforme, delle 4 coniche rispetto a ciascuna delle quali due coniche date sono polari reciproche, e delle 32 coniche rispetto a ciascuna delle quali sono polari reciproche una di quelle 4 ed una delle date]. — *Gattorno G.* Sulle due curve luoghi dei centri di curvatura geodetica e di curvatura normale di una linea tracciata su una superficie. [Stabilite alcune formole preliminari, e notato il fatto importante che „ la curvatura geodetica di una linea tracciata su una superficie non è che la curvatura normale cambiata di segno della stessa linea, quando questa linea la si consideri tracciata sopra una superficie ortogonale alla precedente lungo di essa „, l'A. trovasi in grado di studiare parallelamente le due curve nominate nel titolo del lavoro, 1° ricavandone le proprietà fondamentali sia nel caso generale che in casi particolari, 2° trattando il problema inverso della determinazione di una linea (descritta su una conveniente superficie) conoscendo che una data linea ne è il luogo dei centri di una curvatura geodetica o di quelli di curvatura normale]. — *Ciani E.* Sopra la configurazione di Kummer. [È una Nota destinata a sostituirne un'altra dello stesso A. pubblicata nel vol. XXXV del Giornale di Matematiche, allo scopo di esporne in altro modo una parte che conteneva una dimostrazione non del tutto rigorosa].

Marzo e aprile 1899. — *Ciani E.* Sopra la cfz. di Kummer (continuazione e fine). — *Scarpis U.* Una proprietà dei determinanti dedotta dal concetto di sostituzione. — *Marolli B.* Di una classe di funzioni finite e continue, non sviluppabili in serie di Fourier nel punto $x = 0$. [Trattasi di una categoria di funzioni che differiscono sostanzialmente da quelle, dotate della stessa proprietà enunciata nel titolo, trovate dal Du Bois-Reymond, e tali da potersene dedurre, sotto certe restrizioni, una funzione, avente la detta proprietà, portata quale esempio dallo Schwarz nelle sue Lezioni]. — *De Francesco D.* Sopra alcune formole elementari di Geometria non euclidea. [L'A. si serve di facili considerazioni di Statica per ottenere con metodo più semplice di altri proposti le note formole che nella geometria iperbolica legano gli elementi di un triangolo rettilineo e per stabilire l'equazione della retta nel piano di detta geometria, riferendola a due assi ortogonali]. — *Del Prete G.* Le omografie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. [Contiene, in forma sintetica, in parte una generalizzazione ed in parte un complemento dei risultati ottenuti, sull'argomento indicato dal titolo, dal Sannia, dal Reye, dallo Sturm, dal Segre. Il lavoro si chiuderà con un'applicazione della teoria dei gruppi continui del Lie]. — *Da Porto A.* Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni. [Nel presente fascicolo trovasi soltanto la prefazione e parte dell'introduzione].

FRANCESCO PALATINI.

The Mathematical Gazette. — Il n. 16 (febbr. 1899) contiene gli articoli: *Roberts H. A.* Moto uniformemente accelerato: dimostrazione vettoriale della formola dello spazio descritto. — *Mc. Vicker C. E.* Un teorema su due lacci isoperimetrici: se due ellissi si tagliano, sono di eguale perimetro i lacci chiusi formati da archi delle due ellissi insieme con due tangenti comuni, date speciali relazioni di lunghezza di queste tangenti. — Contiene le seguenti piccole note. *Palmer J. C.* In un quadrangolo sferico gli archi congiungenti i punti di mezzo delle tre coppie di lati opposti sono concorrenti. — *Durell C. V.* e *Beard W. F.* Metodo geometrico per trisecare un angolo con un'iperbole equilatera. — Problemi. — Soluzioni. — Nella copertina contiene una breve notizia delle adunanze generali tenute dalla *Mathematical Association* (di cui esso è organo) il 15 gennaio, 6 maggio e 23 settembre 1898, coll'elenco delle memorie che vi furono lette.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXIV, disp. 5-10. — *Volterra V.* Sopra una classe di moti permanenti stabili. — *Daniele E.* Alcune osservazioni preliminari sulla teoria del movimento delle superficie. — *Giudice F.* Angolo di due rette e di due piani; perpendicolarità e parallelismo in coordinate omogenee. — *Severini C.* Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabili reali. — *Segre C.* Sophus Lie: cenni. — *Volterra V.* Sul flusso di energia meccanica. — *Guidi C.* Sopra un problema di elasticità. — *Fano G.* Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono allo stesso spazio delle loro aggiunte. — *Id.* Sulle equazioni differenziali lineari del 5° e del 6° ordine le cui curve integrali sono contenute in una quadrica.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, anno XLVIII. — *Pieri M.* I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. — *Levi B.* Sulle varietà delle corde di una curva algebrica. — *Fano G.* I gruppi di Jonquiéry generalizzati.

R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie II, vol. XXXI fasc. 6-8. — *Vivanti G.* Sull'estensione del metodo di integrazione di Monge e Ampére. — *Veneroni E.* Sopra il complesso delle rette polari rispetto ad un fascio di superficie d'ordine qualunque. — *Vivanti G.* Sulle funzioni trascendenti intere. — *Tedone O.* Sulla teoria degli spazi a curvature costanti.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze. lettere ed arti, serie VII, vol. X. — *Cassani P.* Sui fondamenti della Geometria: considerazioni e proposte. — *Palatini F.* Alcune proprietà sul sistema di superficie di ordine r passanti per gli spigoli di un $(r+1)$*edro* completo, e alcuni teoremi sulle superficie algebriche in relazione colla teoria delle polari. — *Volterra V.* Sulle funzioni poliarmoniche. — *Lauricella G.* Integrazione della doppia equazione di Laplace in un campo a forma di corona circolare.

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova serie vol. III, fasc. 1-3. — *Ruffini F. P.* Ricerche intorno ai momenti d'inerzia di un sistema di punti privi di baricentro. — *Pincherle S.* A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie V, tomo VII, fasc. 3. — *Donati L.* Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali.

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della società Reale di Napoli) serie III, vol. V, anno XXXVIII, fasc. 2-4. — *Siacci F.* Sulla composizione delle forze nella statica e sui suoi postulati. — *Montesano D.* La superficie romana di Steiner.

Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Società Reale di Napoli) serie II, vol. IX. — *Brambilla A.* Sopra una particolare varietà del 27° ordine nello spazio a 4 dimensioni. — *Amodeo F.* Curve k ogonali di s^{esima} specie. — *Piètrocolo C.* Sull'uso dall'algoritmo isobarico nella risoluzione delle serie ricorrenti. — *Brambilla A.* I poligoni principali di una quartica gobba dotata di punto doppio. — *Cavalli C.* Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella simmetrica. — *Brambilla A.* Sopra una classe di superficie e di varietà razionali.

Annali di Matematica pura ed applicata (Milano) serie III, tomo II, fasc. 2-3. — *Bianchi.* Alcune ricerche di geometria non euclidee. — *Levi.* Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche. — *Cifarelli.* Le congruenze. — *Scorza.* Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4° ordine. — *Sabinina.* Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intregrale définie multiple sous la forme propre aux applications. — *Cazzaniga.* Appunti sulle moltiplicazioni dei determinanti normaloidi. — *Timerding.* Ueber ein quadratisches Nullsystem.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XIII, fasc. 1-2. — *De Franchis.* Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2. — *Daniele.* Sull'equilibrio delle reti. — *Vivanti.* Sugli aggregati perfetti. — *Pizzetti.* Nuova dimostrazione di taluni teoremi relativi alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del Prof. *Paci* (Da una lettera al Prof. *Paci*). — *Gegenbauer,* Generalizzazione di alcuni teoremi intorno alle funzioni sferiche contenuti in una nota del Prof. *Paci.* (Da una lettera al Prof. *Paci*). — *Enriques.* Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare. — *Alagna.* Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p e ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numero primo, ovvero il doppio di un numero primo

Il Pitagora, pubblicato dal Prof. *G. Fazzari*. Il numero 4 dell'anno V (1° semestre) contiene: Relazione sui lavori presentati pel concorso del 1898. — *Riboni*. Sulle serie ricorrenti (cont.) — *Bustelli*. La grandezza in generale e la grandezza matematica in particolare. (cont. e fine). — *Testi*. Sui problemi di massimo e minimo (cont.) — *Palatini*. La teoria detta dei segmenti proporzionali svolta indipendentemente dalle teorie delle proporzioni e dell'equivalenza mediante trattazione puramente planimetrica. — *Archimede*. Da arenae numero: trad. da A. Mancini (cont.) — Quistioni e soluzioni.

Il num. 5 contiene: *Testi*. Sui problemi di massimo o minimo (cont. e fine). — *Cardoso-Laynes*, Circonferenza, cerchio e circolo. — *Riboni*. Sulle serie ricorrenti (cont. e fine). — *Archimede*. De arenae numero: trad. da A. Mancini (cont.) — Quistioni e risoluzioni.

Il num. 6 contiene: *Bosi*. Dimostrazione di un teorema sui polinomi. — Alcune denominazioni di quadrangoli. — *Ciamberlini*. Quistioni di nomenclatura geometrica. — Esercizi. — Quistioni e soluzioni. — Temi per il concorso del 1899.

R. B.

NUOVI GIORNALI

El progreso matemático, revista de matematicas puras y aplicadas. — Dopo 4 anni di sosta il Prof. *Don Zoel G. de Galdeano* dell'Università di Saragozza ha iniziato la pubblicazione della seconda serie del suo giornale.

Riportiamo qui qualche brano del 1° articolo *Causas, objeto y programa de la actual publication*, per far conoscere ai nostri lettori lo scopo e l'indole del *Progreso*.

" Nella parte speculativa si pubblicheranno lavori di carattere generale entro " il dominio della critica scientifica che esprimano la generazione sia logica, sia " istorica della scienza, ed anche lavori sopra argomenti speciali di carattere pu- " ramente tecnico, che possano servire agli alumni delle facoltà e a quelli delle " carriere speciali come complementi dei loro studi; e infine si eserciterà la loro " attività con collezioni di problemi.

" Nell'ordine concreto sarà necessario pure discendere a trattare della orga- " nizzazione dell'insegnamento e dell'educazione scientifica, oggi eccessivamente " trascurata fra noi; e segnalare alcuni vizi o difetti della medesima e indicare " i mezzi di evitarli, sarà tanto utile quanto l'esporre le più interessanti teorie, " poichè equivarrà a facilitare il modo di impadronirsene coll'aiuto dei mezzi che, " come la sua etimologia indica, sono le vie della scienza.

" Si pubblicheranno le notizie più interessanti del movimento scientifico, sia " relative ad avvenimenti straordinari, sia concernenti individualità o corporazioni " scientifiche, invenzioni o modificazioni degne di essere menzionate nei progressi " della scienza o dell'insegnamento, ed a questo scopo il giornale destinerà una " sezione intitolata *Cronaca scientifica* ed un'altra di *Bibliografia matematica*.

" Riassumendo il nostro programma sarà: *Lo svolgimento matematico come* " *base dell'educazione scientifica* ".

Al valente matematico spagnuolo, che con tanta attività ed erudizione dà opera a diffondere nel suo paese la conoscenza di quanto si fa nel campo scientifico in tutto il mondo civile, ed in particolare anche in Italia, al forte campione della fusione della geometria piana colla solida in Spagna, il *Periodico* invia un fraterno saluto e un sincero augurio di prosperità per il suo giornale.

Lo stesso augurio invia ai Sigg. D.r O. Böklen e Dr. E. Wölffing, che hanno iniziato a Stuttgart la 2a serie delle *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen in Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg*, che era sospeso da sei anni.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 Luglio 1899.

I NUMERI IRRAZIONALI CON METODO SINTETICO (*)

PER LA SCUOLA

---

1. Se A e B sono due grandezze commensurabili fra loro e C un summultiplo comune contenuto m volte in A e n volte in B, il numero, intero o frazionario, $\frac{m}{n}$ dicesi rapporto di A a B.

Consideriamo quattro grandezze in proporzione, (**)

$$A : B = C : D;$$

cioè, tali che due equisummultipli qualisivogliano di B e di D sieno contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente in A e in C. Se A e B sono commensurabili lo sono pure C e D e i due rapporti sono eguali fra loro. Se A e B non sono commensurabili, non possono esserlo neppure C e D, tuttavia *ammetteremo,* anche in questo caso, che esista un rapporto fra la 1ª e la 2ª grandezza ed uno fra la 3ª e la 4ª e che questi rapporti sieno eguali fra loro.

Due rapporti eguali a uno stesso sono eguali fra loro.

Infatti, se hanno luogo le due proporzioni

$$A : B = C : D \qquad M : N = C : D$$

ha pur luogo l'altra $A : C = M : N$.

Due grandezze eguali hanno ad una medesima grandezza rapporti eguali e reciprocamente.

Infatti, supposto $A = B$, ha sempre luogo la proporzione

$$A : C = B : C;$$

reciprocamente, ammesso che abbia luogo questa proporzione se ne deduce $A = B$.

2. Se quattro grandezze A, B, C, D non formano proporzione, *diremo* che i rapporti di A a B e di C a D sono fra loro disuguali.

L'eguaglianza e la disuglianza di due rapporti s'escludono a vicenda evidentemente.

Se un certo summultiplo di B, ad es. l'n^{esima} parte è contenuto m volte in A, e l'n^{esima} parte di D è contenuta in C m' volte, *diremo* che il rapporto di A a B è maggiore o minore del rapporto di C a D secondochè sia $m \gtrless m'$.

(*) Nell'adunanza del 19 gennaio u. s. fra i soci di "Mathesis„ residenti in Torino, discutendosi sul modo di presentare nelle scuole secondarie la teoria dei numeri irrazionali, fu convenuto dalla maggioranza dei presenti, di dare la preferenza, anzichè a un metodo puramente aritmetico, a un metodo sintetico in cui si metta a profitto le cognizioni geometriche già acquistate dai giovani.

In favore d'un tal metodo parlarono il presidente prof. Bettazzi (per il primo) e i professori Burali-Forti, Nassò, Angeleri e Modigliano.

È in seguito a questo giudizio dell'autorevole consesso che mi sono deciso di pubblicare il presente *sunto* della Teoria dei numeri irrazionali, come la espongo da qualche anno nella scuola.

(**) Suppongo note la teoria delle proporzioni e quella dei segmenti proporzionali.

Il rapporto fra due date grandezze non può essere a un tempo maggiore e minore del rapporto fra due altre date grandezze.

Infatti, se nell'esempio ora considerato è $m > m'$, la grandezza A è minore di quella L che sodisfa alla proporzione

$$L : B = C : D$$

(giacchè L deve contenere l' n^{esima} parte di B soltanto m' volte): se in pari tempo esistessero due equisummultipli di B e di D, ad es. le q^{esime} parti, contenuti il 1° p volte in A e il 2° p' volte in C e fosse $p < p'$, dovrebbe essere A minore della stessa grandezza L. Non potendo essere A maggiore e minore di L, non è ammissibile che possano verificarsi contemporaneamente i due casi $m > m'$, $p < p'$.

Quando le quattro date grandezze A, B, C, D sono segmenti o poligoni, si può sempre *praticamente* giudicare se il rapporto fra la 1ª e la 2ª sia maggiore, minore o eguale a quello fra la 3ª e la 4ª, confrontando la A con L.

Se le grandezze date sono (almeno due) angoli o archi, quest'operazione grafica non può sempre farsi, perchè in generale non sappiamo costruire un angolo quarto proporzionale rispetto a tre angoli dati. Per la teoria basta sapere però che un tale angolo esiste, il che può dimostrarsi o col mezzo delle classi contigue o colla considerazione degli archi rettificati.

Corollari. — *Dati due rapporti, necessariamente, o essi sono eguali o il 1° è maggiore del 2° o il 2° è maggiore del 1° e ognuno di questi casi esclude gli altri due.*

Se di tre rapporti il 1° è maggiore o eguale al 2° e il 2° è maggiore del 3°, anche il 1° è maggiore del 3°.

Due grandezze disuguali hanno ad una medesima grandezza rapporti disuguali ed è maggiore quello corrispondente alla grandezza maggiore e reciprocamente.

Infatti, se $A > B$, un summultiplo qualsiasi di C che sia minore della differenza $A - B$ è contenuto più volte in A che in B, e perciò il rapporto di A a C è maggiore di quello di B a C; reciprocamente, se un certo summultiplo di C è contenuto più volte in A che in B è manifestamente $A > B$.

3. Il concetto di rapporto, fra grandezze incommensurabili, può dirsi così completamente definito; infatti, con un postulato se n'è ammessa l'esistenza e con appropriate definizioni si sono poi stabilite le condizioni d'eguaglianza e di disuglianza in modo tale da render sodisfatte le leggi fondamentali comuni a tutti gli altri enti aritmetici, geometrici e fisici che nella scienza si considerano.

I rapporti fra grandezze incommensurabili sono grandezze che appartengono alla classe dei numeri. (*)

(*) Bettazzi, *Teoria delle grandezze.*

Questi nuovi numeri diconsi *irrazionali* per distinguerli dagli altri, interi e frazionari (esprimenti rapporti fra grandezze commensurabili) i quali diconsi *razionali*. I numeri irrazionali non hanno un sistema speciale di numerazione, ma s'indicano mediante simboli particolari, che variano a seconda della categoria cui essi appartengano, come vedremo ai §§ 10-16.

Il rapporto d'una grandezza a quella della sua specie, assunta come unità, dicesi *misura*, o *valore* di quella grandezza, o numero ad essa *corrispondente*.

A ogni grandezza corrisponde un numero; a grandezze eguali, riferite a una medesima unità, corrispondono numeri eguali e reciprocamente; a grandezza maggiore corrisponde numero maggiore e reciprocamente.

4. *Addizione.* — Date due o più grandezze omogenee, la misura della loro somma *dicesi* somma delle loro misure.

Poichè l'addizione delle grandezze è un'operazione commutativa e associativa, lo stesso sarà dell'addizione dei numeri che le rappresentano.

Sottrazione. — Date due grandezze omogenee disuguali, la misura della loro differenza *dicesi* differenza delle loro misure.

Poichè la differenza fra due grandezze omogenee disuguali esiste sempre, altrettanto dovrà dirsi della differenza fra due dati numeri qualunque disuguali.

La differenza fra due numeri eguali s'indica con 0.

Aggiungendo alla differenza fra due numeri il sottraendo, si ottiene il minuendo.

5. *Moltiplicazione.* — Data una grandezza A e un numero b, *dicesi* prodotto di A per b quella grandezza P il cui rapporto ad A è eguale a b; essa deve dunque sodisfare alla proporzione

$$P:A=B:U\,,$$

ove B è la grandezza che ha alla sua unità U un rapporto indicato da b. Si suole scrivere $P=A\,.\,b$.

La grandezza prodotto è sempre omogenea al moltiplicando, in alcuni casi si sa geometricamente costruire, in altri no; però essa esiste sempre ed è unica.

Grandezze eguali moltiplicate per numeri eguali danno prodotti eguali e grandezze disuguali prodotti disuguali, ed è maggiore quello corrispondente alla grandezza maggiore.

Infatti, se $P=A\,.\,b$, $P'=A'\,.\,b$, dovendo aver luogo le due proporzioni $P:A=B:U$, $P':A'=B:U$ ha pur luogo l'altra $P:A=P':A'$ dalla quale ricavasi che se $A=A'$ anche $P=P'$, se $A>A'$ anche $P>P'$.

Grandezze eguali moltiplicate per numeri disuguali danno prodotti disuguali, ed è maggiore quello corrispondente al moltiplicatore maggiore.

Infatti, se $P = A . b$, $P' = A . b'$, dovendo aver luogo le due proporzioni $P : A = B : U$, $P' : A = B' : U$, ha pur luogo l'altra $P : P' = B : B'$, dalla quale ricavasi che se $B > B'$ (cioè $b > b'$) è anche $P > P'$.

Moltiplicando una grandezza successivamente per due numeri si ottiene un prodotto che non cambia invertendo l'ordine dei due moltiplicatori.

Sia A la grandezza moltiplicando, b e c i due moltiplicatori, misure rispettive delle due grandezze B e C rispetto alle loro unità U e V. Ponendo $P = A . b$ e $P' = A . c$, abbiamo

$$P : A = B : U \qquad P' : A = C : V ;$$

e ponendo

$$R = P . c = A . b . c \qquad R' = P' . b = A . c . b ,$$

abbiamo

$$R : P = C : V \qquad R' : P' = B : U.$$

Ora, dalle proporzioni 1ª e 4ª deducesi $P : A = R' : P'$, e dalla 2ª e 3ª $P' : A = R : P$, e da queste due $R = R'$, *c. v. d.*

Se i moltiplicatori sono più di due si può invertire l'ordine di due consecutivi qualunque, e in conseguenza disporli tutti quanti in ordine arbitrario.

La misura del prodotto d'una grandezza per un numero *dicesi* prodotto della misura di quella grandezza per questo numero.

Se uno dei due fattori d'un prodotto diviene eguale a zero anche il prodotto *si pone* eguale a zero.

Il prodotto di due dati numeri non cambia invertendo l'ordine dei fattori.

Sieno a e b i due dati numeri, misure rispettive delle grandezze A e B (omogenee o no) riferite alle unità U e V. Ponendo $P = A . b$ $R = B . a$, avremo

$$P : A = B : V, \qquad R : B = A : U ;$$

scrivendo i termini della 2ª in ordine inverso otteniamo una proporzione che ha i medi ordinatamente eguali a quelli della 1ª, e perciò dalle due proporzioni deducesi quest'altra

$$P : U = R : V ,$$

la quale appunto significa (essendo P omogeneo con A e R con B) che la misura di P, ossia $a . b$, è eguale alla misura di R, ossia a $b . a$, *c. v. d.*

Il prodotto di parecchi numeri è indipendente dall'ordine dei fattori.

Avendo già dimostrato che la grandezza prodotto $A . b . c . d \ldots$ non cambia mutando l'ordine dei moltiplicatori, si può intanto concludere che neppure la sua misura, cioè il numero $(a . b . c . d \ldots)$, cambia al cambiare dell'ordine dei fattori che vengono dopo il primo. Che esso poi rimanga inalterato anche scambiando fra loro i primi due fattori (e perciò anche scambiando il 1° con un altro qualunque) resulta dal teorema precedente relativo a un prodotto di due fattori.

Il prodotto della somma di più grandezze per un numero è eguale alla somma dei prodotti di quelle grandezze per questo numero.

Poniamo

$$P = (A + B + C + \ldots) m$$

e

$$P_1 = A . m \qquad P_2 = B . m \qquad P_3 = C . m \ldots$$

Indicando con M una grandezza (omogenea alle altre date) corrispondente ad m rispetto all'unità U, si ha

$$P_1 : A = M : U, \qquad P_2 : B = M : U, \qquad P_3 : C = M : U \ldots,$$

dalle quali, dopo aver scambiato di posto i medi, deducesi

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) : M = (A + B + C + \ldots) : U,$$

e da questa

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = (A + B + C + \ldots) . m, \qquad c. v. d.$$

Se con $a, b, c \ldots m$ indichiamo dei numeri qualsiensi, si ha dunque

$$(a + b + c + \ldots) . m = a . m + b . m + c . m + \ldots$$

6. *Divisione.* — Data una grandezza A e un numero b, *dicesi* quoziente di A per b quella grandezza Q che moltiplicata per b dà per prodotto A; essa deve dunque sodisfare alla proporzione

$$A : Q = B : U,$$

ove B è una grandezza il cui valore, rispetto a U, è uguale a b.

In alcuni casi, la grandezza quoziente la sappiamo geometricamente costruire, in altri no; però essa esiste sempre ed è unica.

La misura del quoziente d'una grandezza per un numero *chiamasi* quoziente della misura di quella grandezza per questo numero.

Se q è la misura della grandezza quoziente Q, a la misura del dividendo A e b il divisore, dall'eguaglianza

$$A = Q . b$$

si passa all'altra

$$a = q . b;$$

e perciò può anche, aritmeticamente, definirsi il quoziente di due numeri, quel terzo numero che moltiplicato per il divisore dà per prodotto il dividendo.

Da questa definizione (o proprietà) del quoziente e dai teoremi sulla moltiplicazione, collo stesso metodo che si usa in aritmetica pei numeri razionali, si possono estendere ai numeri irrazionali i teoremi relativi alla divisione d'un prodotto per un numero, d'un numero per un prodotto, d'una somma o d'una differenza per un numero, non che il teorema secondo il quale il quoziente di due numeri non cambia moltiplicando o dividendo l'uno e l'altro per un medesimo numero.

7. *Il rapporto fra due grandezze è uguale al quoziente delle loro misure.*

Infatti, se r è il rapporto fra due date grandezze A e B, ed a e b sono le respettive loro misure, essendo (§ 5) $A = B . r$ è pure $a = b . r = r . b$ e perciò $r = a : b$, *c. v. d.* . . .

8. Il quoziente di due numeri a e b suol indicarsi, in generale, colla scrittura $\frac{a}{b}$. Per *convenzione* ha dunque sempre luogo l'eguaglianza

$$\frac{a}{b} . b = a ,$$

e *per conseguenza*, le regole delle operazioni sulle frazioni a termini irrazionali sono le stesse di quelle relative alle frazioni a termini razionali.

9. Se A, B, C, D sono quattro grandezze in proporzione e a, b, c, d sono le respettive loro misure, si ha (§ 1, 7)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} .$$

Categorie notevoli di numeri irrazionali.

10. Se C e C' sono i segmenti equivalenti rispettivamente ai due circoli di raggi R e R', ha luogo, com'è noto, la proporzione

$$C : C' = R : R'$$

e perciò anche l'altra

$$C : 2R = C' : 2R',$$

la quale significa che il rapporto d'un cerchio (rettificato) al suo diametro è *costante*. Questo rapporto, che *Lambert* nel 1770 dimostrò essere un numero irrazionale, viene indicato colla lettera π.

11. Dato un numero qualunque a, razionale o irrazionale, esso esprimerà la misura d'un certo segmento A rispetto a un altro arbitrario U, preso come unità. Se immaginiamo di costruire con questi due segmenti il rettangolo e poi il quadrato equivalente, sarà il lato del quadrato un segmento B medio proporzionale fra A e U, e perciò se con b indichiamo la sua misura, avremo (§ 9)

$$a : b = b : 1$$

da cui,

$$b^2 = a.$$

Il numero b chiamasi la *radice quadrata* di a e s'indica col simbolo $\sqrt{a}$.

Questo simbolo serve dunque ad esprimere la misura del lato del quadrato equivalente al rettangolo costruito sul segmento rappresentato dal radicando e su quello unità. Non sarà inutile far vedere che la misura del lato d'un tal quadrato è indipendente dalla scelta del segmento unità. Se A è il segmento rappresentato dal numero a rispetto all'unità U e A' quello rappresentato dallo stesso numero rispetto ad U', abbiamo $A:U=A':U'$ e perciò i due rettangoli (A, U) (A', U') sono simili. Se L^2 e L'^2 sono i quadrati ad essi equivalenti abbiamo dunque

$$(A, U):(A', U') = U^2 : U'^2 = L^2 : L'^2$$

da cui deducesi

$$L : L' = U : U'$$

e infine

$$L : U = L' : U', \; c.v.d.$$

12. Un'altra categoria di numeri irrazionali ha origine dalla considerazione dei rapporti che hanno fra loro i lati d'un medesimo triangolo rettangolo.

Questi rapporti, che variano soltanto al variare degli angoli del triangolo, diconsi *funzioni goniometriche*. Qualche volta essi hanno valori razionali ma più spesso valori irrazionali. Se α indica la misura d'uno degli angoli (acuti) d'un triangolo rettangolo, queste funzioni si rappresentano colle notazioni: $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cotang}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, secondochè si vuol rappresentare il rapporto che ha il cateto opposto o il cateto adiacente (ad α) all'ipotenusa, o il rapporto dei due cateti, oppure i rapporti inversi dei primi due.

13. Vi sono poi altre importanti categorie di numeri irrazionali che hanno un'origine puramente aritmetica.

Per intendere come ciò possa avvenire, conviene anzitutto stabilire le proposizioni seguenti:

I numeri corrispondenti agli elementi di due classi contigue (di grandezze) *formano due classi che sono contigue.*

Ciò resulta immediatamente dalla nota definizione di classi contigue e dal concetto di numeri eguali e differenti (§ 3).

Date due classi contigue di numeri, esiste un numero ed uno solo maggiore di tutti gli elementi dell'una e minore di tutti quelli dell'altra.

Ciò discende dalle analoghe proposizioni (postulato e teorema) relative alle classi di grandezze.

Ogni numero irrazionale è compreso fra due classi contigue di numeri razionali.

Infatti, se a è un numero irrazionale e A la grandezza da esso rappresentata, incommensurabile coll'unità U, le due classi contigue $\frac{m}{n}U$, $\frac{m+1}{n}U$ (con n e per conseguenza anche m crescenti indefinitamente) comprendono A, e perciò le due classi $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ comprendono a.

14. Sia a un dato numero, razionale o irrazionale; se indichiamo con V, W, le due classi di numeri formate colle radici n^{esime} di a, approssimate per difetto e per eccesso, le due classi V, W sono contigue, e perciò comprendono un numero b razionale o irrazionale. Ma anche le due classi V^n, W^n sono contigue (*) e comprendono a e comprendono b^n, sarà dunque

$$b^n = a.$$

Il numero b si chiama radice n^{esima} di a, e si indica col simbolo $\sqrt[n]{a}$.

In questo modo resta stabilito che ogni numero ammette la radice (esatta) di qualsiasi ordine, la quale, se non è un numero intero o frazionario, è un numero irrazionale che esprime la misura della grandezza limite comune di quelle rappresentate dalle radici approssimate del radicando. (**)

15. Sieno dati un numero qualsiasi a (differente da 1) e uno irrazionale b; se indichiamo con V, W una di quelle coppie di classi contigue di numeri razionali che comprendono b, e consideriamo le due classi

$$a^v\ ,\ a^w\ ,$$

per le note proprietà delle funzioni esponenziali, se ne inferisce che anche queste due classi sono contigue e individuano per conseguenza un numero c. Questo numero non può essere eguale a una potenza di a ad esponente *razionale*, perchè un tal esponente, dovendo essere compreso fra V ed W, non esiste, e perciò si stabilisce per convenzione l'eguaglianza

$$c = a^b\ .$$

Il nuovo simbolo a^b chiamasi *potenza ad esponente irrazionale.* (***) Con a^b s'intende dunque di rappresentare la misura di quella grandezza limite comune delle grandezze rappresentate dagli elementi delle due classi contigue a^v , a^w .

16. Dopo aver dimostrato che la funzione a^b gode le stesse proprietà, ed è sottoposta alle stesse regole di calcolo, tanto che b vari per valori razionali che irrazionali, si dimostra che l'equazione

$$a^b = c,$$

nella quale a e c sono due *dati* numeri qualsiensi (a differente da 1), ammette sempre una ed una sola radice (reale).

Il valore di questa radice, che in certi casi può essere razionale ma più spesso è irrazionale, chiamasi logaritmo di c in base a, e si indica colla notazione $\log_a c$.

Altri numeri irrazionali notevoli s'incontrano nello studio della Matematica superiore.

Pistoia, Giugno 1899.

SILVIO SBRANA.

(*) Infatti, essendo

$$w_x^n - v_y^n = (w_x - v_y)(w_x^{n-1} + v_y w_x^{n-2} + \ldots + v_y^{n-1}) < (w_x - v_y)\,nw_x$$

la differenza $w_x^n - v_y^n$ decresce indefinitamente insieme alla differenza $w_x - v_y$.

(**) Giunti a questo punto, nella scuola, converrà svolgere la teoria dei radicali, quella delle potenze ad esponente frazionario e le proprietà della funzione esponenziale con esponente razionale.

(***) Se $a = 1$, le due classi a^v , a^w non sono contigue, perchè composte d'elementi tutti eguali a 1; per questo caso non vale la definizione generale ma l'altra particolare $a^b = 1$

SOPRA UN METODO

per formare alcune combinazioni di elementi a più indici dette combinazioni ad 1, 2, 3 .... dimensioni

Studiando le proprietà di alcuni enti algebrici, dei quali forse tratterò in altra nota, ho dovuto occuparmi di alcune combinazioni di elementi a più indici, delle quali sono caso particolare quelle studiate nell'ordinaria analisi combinatoria. In questa nota mi propongo di definire tali combinazioni, ed indicare un metodo per formarle tutte senza ripetizioni od omissioni.

Consideriamo mn elementi $a_{11} \ldots a_{1n}$, $a_{21} \ldots a_{2n} \ldots a_{m1} \ldots a_{mn}$ ed $m+n$ numeri positivi interi $\mu_1, \ldots \mu_m$, $\nu_1, \ldots \nu_n$, tali che $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n = N$; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m \leq n$; $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n \leq m$. Proponiamoci di formare tutti i possibili gruppi G, contenenti ciascuno N elementi, dei quali μ_i abbiano il 1° indice uguale ad i, e ν_j abbiano il 2° uguale ad j ($i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$). Per esempio se fosse $m = 3$, $n = 4$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 2$; $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$, $\nu_4 = 1$, fra i possibili gruppi di $N = 6$ elementi vi sarebbero i seguenti: $a_{14} a_{21} a_{22} a_{23} a_{32} a_{33}$, $a_{11} a_{22} a_{23} a_{24} a_{32} a_{33}$, $a_{12} a_{21} a_{22} a_{23} a_{33} a_{34}$, ecc.... Immaginiamo ora uno scacchiere rettangolare di dimensioni $\downarrow m$ ed $\rightarrow n$, e deponiamo l'elemento a_{ij} nella casella appartenente all'orizzonte i^{ma} ed alla verticale j^{ma}. Ad ogni gruppo G di elementi corrisponde un gruppo G' di caselle, scelte nello scacchiere per modo che se ne trovino $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ rispettivamente sulla 1ª, 2ª ... m^{ma} orizzontale, e $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ rispettivamente sulla 1ª, 2ª, ... n^{ma} verticale; è poi evidente che ad ogni gruppo G' corrisponde un gruppo G; pertanto i gruppi G' di caselle si possono assumere come gruppi rappresentativi dei gruppi G di elementi. Appunto per la possibilità di essere rappresentati mediante gruppi di caselle scelte in uno scacchiere rettangolare, i gruppi G si chiameranno combinazioni a due dimensioni, od anche rettangolari, degli mn elementi dati. I numeri m ed n si diranno prima e seconda dimensione di tali combinazioni; i numeri $\mu_1, \ldots \mu_m$, 1°, ... m^{mo} coefficiente relativo alla 1ª dimensione, i numeri $\nu_1, \ldots \nu_n$; 1°, ... n^{mo} coefficiente relativo alla 2ª. (*)

Risulta da quanto si è detto che per sapere formare i gruppi G basta saper formare i gruppi G' e viceversa.

(*) Poichè qui si parla di combinazioni a due dimensioni, è naturale il chiedersi che debba intendersi per combinazioni ad una dimensione. Supponiamo $m = 1$. Allora le combinazioni suddette non sono altro che le combinazioni μ_1 a μ_1 degli elementi $a_{11}, \ldots a_{1n}$; in tal caso evidentemente si ricade nelle usuali combinazioni, e poichè per gruppi rappresentativi di esse possono assumersi i gruppi di μ_1 caselle, scelte in tutti i modi possibili fra n assegnate disposte in fila, tali combinazioni possono chiamarsi ad una dimensione, od anche lineari. Il numero n è la loro dimensione, il numero μ_1 il coefficiente di essa.

Consideriamo la successione S dei numeri $\nu_1, \ldots \nu_n$; scegliamo in essa un gruppo di μ_1 numeri in tutti i modi possibili, e formiamo una seconda successione di numeri, deducendola dalla S col diminuire di un'unità i numeri appartenenti al gruppo considerato. Avremo così $\binom{n}{\mu_1}$ successioni che chiameremo successioni S_{μ_1}. In ciascuna di queste scegliamo in tutti i modi possibili μ_2 numeri fra quelli che non sono nulli, e deduciamo da essa una $S_{\mu_1\mu_2}$, diminuendo i numeri scelti di un'unità. Su ognuna delle $S_{\mu_1\mu_2}$ operiamo analogamente, ma relativamente al numero μ_3, e così via. Avremo così altre serie di successioni $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}, \ldots S_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$. Consideriamo ora le $S_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$; mostreremo che esse sono composte di tutti zero e che il loro numero è eguale a quello dei gruppi G'. Infatti una qualunque delle $S_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$ si ottiene diminuendo dapprima in S di un'unità μ_1 numeri aventi certi posti $\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu_1}$, poi diminuendo di un'unità nella successione ottenuta μ_2 numeri aventi i posti $\beta_1, \ldots \beta_{\mu_2}$ ecc. ecc.

Pertanto le unità complessivamente tolte dalla S per passare ad una $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ sono $\mu_1 + \cdots + \mu_m$, cioè tante quante ne contiene la somma dei numeri della S. Adunque la somma dei numeri di ogni $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ è zero vale a dire ogni $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ è formata da tutti zero.

Scegliamo ora nella 1ª orizzontale dello scacchiere le caselle aventi i posti $\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu_1}$, nella 2ª quelle aventi i posti $\beta_1 \ldots \beta_{\mu_2}$ ecc. ...; avremo uno dei gruppi di caselle precedentemente indicati con G'. In vero, se la $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ considerata contiene soli zero, vuol dire che in qualcheduna di quelle fra le $S_{\mu_1}, S_{\mu_1\mu_2}, \ldots S_{\mu_1\ldots\mu_{m-1}}$ dalle quali è stata dedotta, compariranno al posto i^{mo} $(i = 1, 2, \ldots n)$ i numeri $\nu_i - 1$, $\nu_i - 2, \ldots 1$, e quindi delle caselle del gruppo suddetto ce ne saranno appunto ν_i sulla i^{ma} verticale dello scacchiere. Viceversa si comprende facilmente che, in corrispondenza di ogni gruppo G', è possibile costrurre una serie di successioni, la 1ª appartenente alle S_{μ_1}, la 2ª alle $S_{\mu_1\mu_2}, \ldots$ l'ultima alle $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ dedotte, ciascuna dalla precedente, colla legge ora esposta; pertanto vi sono tanti gruppi G' quante $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$. Da quanto ho detto risulta subito come devesi procedere per formare tutti i gruppi G' senza ripetizione od ommissione; basta formare le $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ ad elementi tutti nulli ed in corrispondenza a ciascuna d'esse, formare il gruppo G' al quale dà luogo. La formazione delle $S_{\mu_1\ldots\mu_m}$ non offre difficoltà; giova anche osservare che da una $S_{\mu_1\ldots\mu_k}$ non si può passare ad una $S_{\mu_1\ldots\mu_k\mu_{k+1}}$, se quella non contiene almeno μ_{k+1} numeri diversi da zero. È poi evidente che invece di partire dalla successione $\nu_1 \ldots \nu_n$ ed ottenere le $S_{\mu_1}, \ldots S_{\mu_1\ldots\mu_m}$, si può partire dalla successione $\mu_1, \ldots \mu_m$, ed ottenere le $S_{\nu_1}, \ldots S_{\nu_1\ldots\nu_n}$; il numero delle $S_{\nu_1\ldots\nu_n}$ composte di tutti zeri è anch'esso uguale al numero dei gruppi G'.

Credo non inutile illustrare il metodo esposto con qualche esempio.

Sia $n = 5$; $m = 3$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 1$, $\nu_4 = 2$, $\nu_5 = 2$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 4$.

Si ha $\qquad S \equiv 2, 1, 1, 2, 2$

$$S_{\mu_1} \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & \mathbf{0} & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{1} \end{array} \right.$$

(per ciascuna delle S_{μ_1} sono segnati in carattere grande i numeri che si ottengono diminuendo di 1 quelli che occupano in S lo stesso posto).

Poichè ciascuna delle S_{μ_1} così ottenute contiene almeno $\mu_2 = 3$ elementi diversi da zero, si possono dedurre da essa delle $S_{\mu_1\mu_2}$; di quest'ultime quelle che servono devono contenere almeno $\mu_3 = 4$ elementi diversi da zero, e sono, come è facile verificare:

$$S_{\mu_1\mu_2} \equiv \left\{ \begin{array}{rl} 1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1},\ 1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1},\ \mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \text{dedotte dalla } 1^a \text{ delle } S_{\mu_1} \\ \mathbf{1}\,0\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \quad » \qquad 2^a \qquad » \\ \mathbf{1}\,1\,0\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \quad » \qquad 3^a \qquad » \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1},\ \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1},\ \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1} & \quad » \qquad 4^a \qquad » \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1}\,1,\ \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,1,\ \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{0} & \quad » \qquad 5^a \qquad » \end{array} \right.$$

(per ciascuna $S_{\mu_1\mu_2}$ sono segnati in carattere grande i numeri ottenuti diminuendo di 1 quelli che occupano lo stesso posto nella S_{μ_1} dalla quale derivano).

Da ciascuna delle $S_{\mu_1\mu_2}$ si può ottenere una sola $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$, e questa ha elementi tutti nulli, giacchè ogni $S_{\mu_1\mu_2}$ ha quattro elementi diversi da zero e tutti uguali ad 1.

Dunque le $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ad elementi tutti nulli sono in numero di 11, e quindi anche i gruppi G' sono 11. Scriviamo ciascuna delle $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ad elementi nulli e sovr'essa la $S_{\mu_1\mu_2}$ e la S_{μ_1} dalle quali proviene. Avremo i quadri

$$\left. \begin{array}{ccc} \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2 & \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2 & \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2 \\ 1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & 1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} & \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} & 0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{array} \right\} \text{provenienti dalla } \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2$$

$$\left. \begin{array}{c} 2\,\mathbf{0}\,1\,2\,2 \\ \mathbf{1}\,0\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{array} \right\} \quad » \qquad » \quad 2\,\mathbf{0}\,1\,2\,2$$

$$\left. \begin{array}{c} 2\,1\,\mathbf{0}\,2\,2 \\ \mathbf{1}\,1\,0\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{array} \right\} \quad » \qquad » \quad 2\,1\,\mathbf{0}\,2\,2$$

$$\left. \begin{array}{ccc} 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2 & 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2 & 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2 \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1} & \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1} & \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} & \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} & \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0} \end{array} \right\} \quad » \qquad » \quad 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2$$

$$\left. \begin{array}{ccc} 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1} & 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1} & 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1}\,1 & \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,1 & \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{0} \\ \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} & \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} & \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0 \end{array} \right\} \quad » \qquad » \quad 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1}$$

che diremo quadri rappresentativi dei gruppi G' e G. (Nella $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ad elementi tutti nulli di ciascuno dei quadri, sono segnati in carattere grande i numeri (zeri) che si ottengono diminuendo di un'unità quelli che nella $S_{\mu_1\mu_2}$ soprastante occupano lo stesso posto).

In corrispondenza di ciascun quadro si ottiene un gruppo G' scegliendo nello scacchiere di dimensioni $\downarrow$ 3 e $\rightarrow$ 5 le caselle aventi il posto che nei quadri è occupato dai numeri scritti in carattere grande, e si ottiene un gruppo G scegliendo otto delle $a_{11}, \ldots a_{15}, a_{21}, \ldots a_{25}, a_{31}, \ldots a_{35}$, in modo che ciascuna abbia per indice i numeri d'ordine dell'orizzontale e verticale del quadro che s'incontrano in uno degli otto numeri segnati in carattere grande.

Tutti i gruppi G sono adunque i seguenti:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{11} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{11} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{12} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{13} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{14} & a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{14} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{14} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\
a_{15} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{15} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{15} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}
\end{array}$$

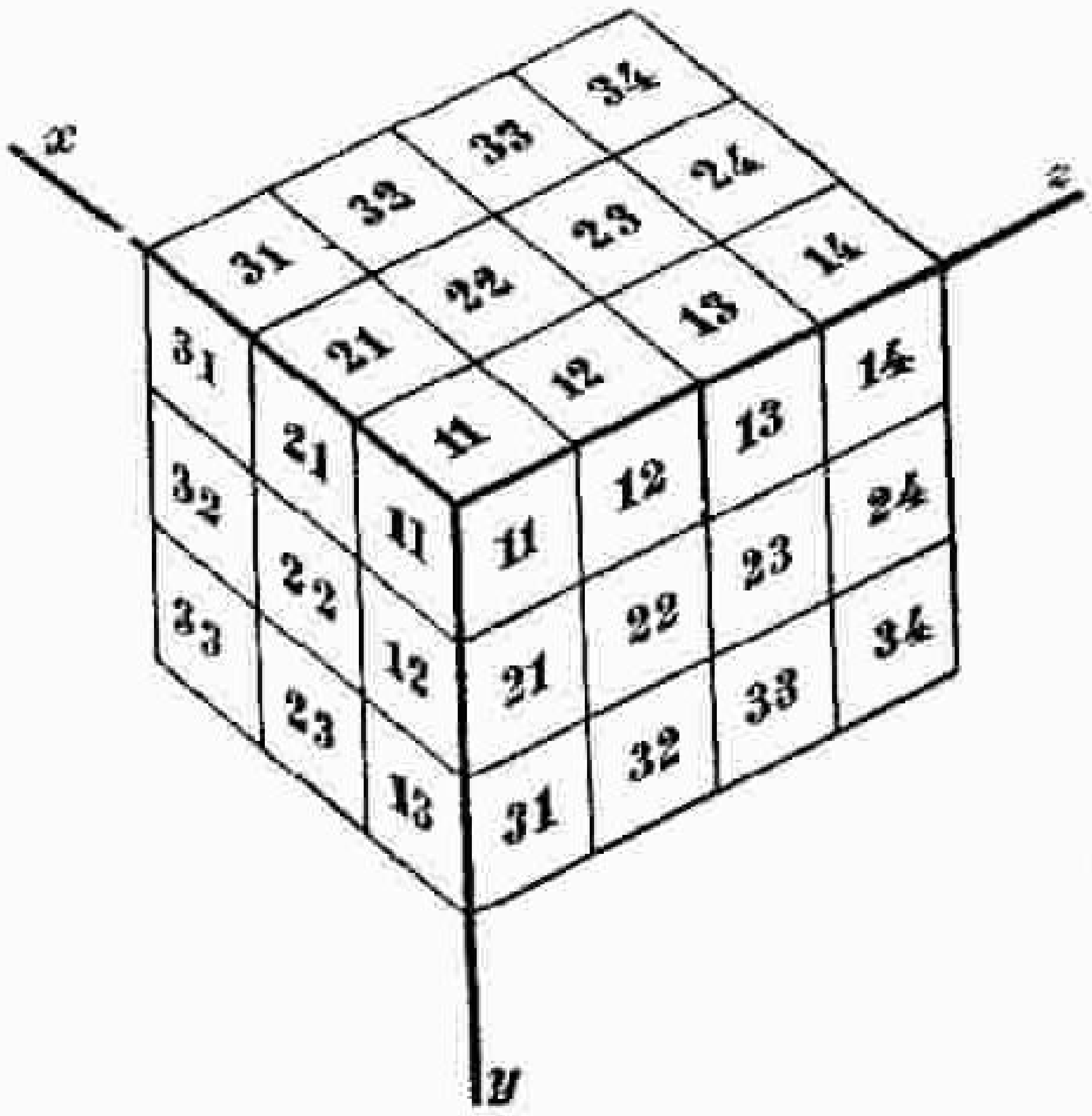
Estendendo oltre le due dimensioni il concetto di combinazione, noi incontriamo subito quelle a tre dimensioni. Per intender bene la definizione che ne daremo fra breve, consideriamo l'esempio seguente. Siano $3 \, . \, 3 \, . \, 4 = 36$ elementi a_{xyz} $(x = 1, 2, 3; y = 1, 2, 3; z = 1, 2, 3, 4)$.

Consideriamo il gruppo γ dei 22 elementi

$$\gamma \equiv \begin{cases} a_{113} & a_{122} & a_{123} & a_{124} & a_{131} & a_{132} & a_{134} & a_{211} & a_{212} & a_{214} & a_{222} \\ a_{231} & a_{233} & a_{234} & a_{311} & a_{314} & a_{321} & a_{323} & a_{324} & a_{332} & a_{333} & a_{334} \end{cases}$$

Esaminandolo, si vede che le coppie di indici 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, sono le coppie del 1° e 2° indice rispettivamente in 1, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3 elementi di esso; le coppie 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, sono le coppie del 1° e 3° indice rispettivamente in 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3 elementi, e le coppie 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24; 31, 32, 33, 34, sono le coppie del 2° e 3° indice rispettivamente in 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 elementi.

Consideriamo uno scacchiere romboidale le cui dimensioni secondo i tre assi x, y, z siano 3, 3, 4. Esso pertanto consta di tre strati che supporremo contati nel senso dell'asse x; ognuno di essi contiene tre orizzontali contate nel senso dell'asse y e quattro verticali contate nel senso dell'asse z. Noi possiamo immaginarlo costituito da $3 \, . \, 3 = 9$ file di caselle parallele all'asse z, contenenti ciascuna tre caselle. Individuiamo tali file colle nove coppie di indici 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Possiamo anche immaginare lo scacchiere costituito da 12 file di caselle parallele all'asse y ed individuate dalle coppie di indici 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, oppure da 12 file parallele all'asse x, contraddistinte colle coppie di indici 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34. Individuiamo poi ciascuna casella dello scacchiere con tre indici, dei quali il 1° indichi lo strato al quale appartiene, il 2° ed il 3° rispettivamente l'orizzontale e la verticale di tal strato che s'incrociano in essa. Per es. 213 indica la casella del 2° strato, appartenente alla 1ª orizzontale e 3ª verticale di esso.



Al gruppo di elementi indicato con γ possiamo ora far corrispondere un gruppo γ' di caselle, scegliendo quelle che sono rispettivamente individuate dai tre indici di ciascun elemento di γ. Il gruppo γ' gode della proprietà che delle caselle ad esso appartenenti, se ne trovano 1, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3 rispettivamente nelle file 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 dello scacchiere, parallele all'asse z; 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3 rispettivamente nelle file 11, 12, ..., 34, parallele all'asse y, ed 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 rispettivamente nelle file 11, ..., 34 parallele all'asse x. Al gruppo γ si è fatto corrispondere il gruppo γ' e viceversa a γ' si potrebbe far corrispondere γ; pertanto γ' è un gruppo di caselle rappresentativo del gruppo γ di elementi. Appunto per la proprietà di essere rappresentabile con un gruppo di caselle scelte in uno scacchiere romboidale, il gruppo γ si può chiamare una combinazione a tre dimensioni o romboidale dei 36 elementi dati; i numeri 3, 3, 4 ossia i massimi valori di x, y, z, sono la 1ª, 2ª, 3ª, dimensione di essa; i numeri 1, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3 sono i coefficienti della 3ª dimensione (riferendoci allo scacchiere il 1° di essi si può chiamare coefficiente della fila 11, il 2° della fila 12, ... l'ultimo della fila 33), i numeri 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3 i coefficienti della 2ª, ed i numeri 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 coefficienti della 1ª. Poichè quelle delle caselle di γ che appartengono ad uno stesso strato dello scacchiere, parallelo ad uno dei piani xy, xz, yz, costituiscono il gruppo rappresentativo di una combinazione rettangolare degli elementi corrispondenti alle caselle di quello strato, fra i coefficienti suddetti, quelli che si riferiscono a tutte le file parallele di caselle costituenti uno stesso strato, devono dare una somma costante (variabile però in generale da strato a strato). Infatti scrivendo le tre serie di coefficienti

$$1\,,\,3\,,\,3\,,\,3\,,\,1\,,\,3\,,\,2\,,\,3\,,\,3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1^a)$$
$$1\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,3 \quad \ldots\ldots\ldots (2^a)$$
$$2\,,\,1\,,\,1\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,3 \quad \ldots\ldots\ldots (3^a)$$

è facile verificare che le somme del 1° 2° 3°, 4° 5° 6°, 7° 8° 9° della 1ª serie, sono uguali rispettivamente alle somme del 1° 2° 3° 4°, 5° 6° 7° 8°, 9° 10° 11° 12° della 2ª; le somme del 1° 4° 7°, 2° 5° 8°, 3°, 6°, 9° della 1ª sono rispettivamente uguali alle somme del 1° 2° 3° 4°, 5° 6° 7° 8°, 9° 10° 11° 12° della terza; le somme del 1° 5° 9°, 2° 6° 10°, 3° 7° 11°, 4° 8° 12°, della seconda sono rispettivamente uguali alle somme del 1° 5° 9°, 2° 6° 10°, 3° 7° 11°, 4° 8° 12° della terza; infine la somma dei coefficienti di ciascuna serie è costante ed uguale a 22, numero degli elementi della combinazione γ.

Più generalmente siano r, m, n tre interi positivi ed a_{yzx} ($x = 1, 2, \ldots r$; $y = 1, 2, \ldots m$; $z = 1, 2, \ldots n$), rmn elementi dati. Consideriamo le successioni di numeri

$$1, 2, \ldots r\ ;\ 1, 2, \ldots m\ ;\ 1, 2, \ldots n$$

e formiamo le coppie di numeri $11, \ldots mn$, in numero di mn, contenenti un numero della 2ª successione ed uno della 3ª; le coppie $11, \ldots rn$, in numero di rn, contenenti un numero della 1ª ed uno della 3ª; infine le coppie $11, \ldots rm$, in numero di rm contenenti un numero della 1ª ed uno della 2ª. Avremo in tutto $mn + rn + rm$ coppie di numeri. In corrispondenza di ciascuna coppia sia dato un intero positivo, e siano $\rho_{11}, \ldots \rho_{mn}$ gli interi rispettivamente corrispondenti alle coppie $11, \ldots mn$; $\mu_{11}, \ldots \mu_{rn}$ quelli rispettivamente corrispondenti alle coppie $11, \ldots rn$; $\nu_{11}, \ldots \nu_{rm}$ quelli rispettivamente corrispondenti alle coppie $11, \ldots rm$.

Sia inoltre:

$$\rho_{11}, \ldots \rho_{mn} \leq r\ ;\ \mu_{11} \ldots \mu_{rn} \leq m\ ;\ \nu_{11}, \ldots \nu_{rm} \leq n$$

$$\begin{cases} \nu_{11} + \ldots + \nu_{1m} = \mu_{11} + \ldots + \mu_{1n} \\ \vdots \\ \nu_{r1} + \ldots + \nu_{1m} = \mu_{r1} + \ldots + \mu_{rm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{11} + \ldots + \mu_{1r} = \rho_{11} + \ldots + \rho_{1m} \\ \vdots \\ \mu_{n1} + \ldots = \mu_{nr} = \rho_{n1} + \ldots + \rho_{nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{11} + \ldots + \rho_{1n} = \nu_{11} + \ldots + \nu_{1r} \\ \vdots \\ \rho_{m1} + \ldots + \rho_{mn} = \nu_{m1} + \ldots + \nu_{mr} \end{cases}$$

e pertanto

$$\Sigma\nu = \Sigma\mu = \Sigma\rho = \sigma$$

dove $\Sigma\nu$, $\Sigma\mu$, $\Sigma\rho$ rappresentano rispettivamente la somma di tutti i ν, μ, ρ.

Se $a_{\xi_1\eta_1\theta_1} \dots a_{\xi_i\eta_i\theta_i} \dots a_{\xi_\sigma\eta_\sigma\theta_\sigma}$ è una successione di σ degli elementi dati, tali che gli indici ξ_i, η_i, $(i = 1, 2, \dots \sigma)$ si trovino 1° e 2° in $\nu_{\xi_i\eta_i}$ elementi di essa, gli indici ξ_i, θ_i, si trovino 1° e 3° in $\mu_{\xi_i\theta_i}$ elementi, gli indici η_i, θ_i, si trovino 2° e 3° in $\rho_{\eta_i\theta_i}$ elementi, e se inoltre tra le coppie $\xi_1\eta_1, \dots \xi_\sigma\eta_\sigma$ vi è almeno una volta ciascuna delle coppie $11, \dots mn$; tra le coppie $\xi_1\theta_1, \dots \xi_\sigma\theta_\sigma$ almeno una volta ciascuna delle coppie $11, \dots rn$ e tra le coppie $\eta_1\theta_1, \dots \eta_\sigma\theta_\sigma$ almeno una volta ciascuna delle coppie $11, \dots rm$, diremo allora che tal successione è una combinazione a tre dimensioni, o romboidale, degli rmn elementi dati.

I numeri r, m, n si diranno 1ª, 2ª, 3ª dimensione della combinazione; i numeri $\rho_{11} \dots \rho_{mn}$ coefficienti della 1ª dimensione; i numeri $\mu_{11}, \dots \mu_{rn}$ coefficienti della 2ª ed i numeri $\nu_{11}, \dots \nu_{rn}$ coefficienti della 3ª.

Consideriamo ora uno scacchiere romboidale di dimensioni r, m, n, vale a dire formato di r strati, ciascuno dei quali contenga m orizzontali ed n verticali. Se a ciascun elemento $a_{\xi_i\eta_i\theta_i}$ $(i = 1, 2, \dots \sigma)$ della combinazione suddetta si fa corrispondere la casella $\xi_i\, \eta_i\, \theta_i$ dello scacchiere, si ha un gruppo rappresentativo della combinazione stessa, contenente σ caselle tali che di esse se ne trovino $\nu_{\xi_i\eta_i}$ sulla fila $\xi_i\, \eta_i$ parallele all'asse z, $\mu_{\xi_i\theta_i}$ sulla fila $\xi_i\theta_i$ parallela all'asse y, $\rho_{\eta_i\theta_i}$ sulla fila $\eta_i\theta_i$ parallela all'asse x. Appunto perciò la combinazione si chiama a tre dimensioni o romboidale.

Con ragionamento analogo a quello fatto parlando delle combinazioni a due dimensioni, si dimostrerebbe che, per formare tutte le combinazioni a tre dimensioni degli rmn elementi dati, basta operare come segue.

Si formano r serie di quadri rappresentativi delle combinazioni rettangolari di dimensioni $\downarrow m$ ed $\rightarrow n$ degli elementi $a_{11} \dots a_{1m} \dots a_{m1} \dots a_{mn}$; per costrurre la 1ª serie si assumono per coefficienti della dimensione m i numeri $\nu_{11} \dots \nu_{1m}$, e per coefficienti della dimensione n i numeri $\mu_{11} \dots \mu_{1m}$; per la 2ª serie si assumono i coefficienti $\nu_{21} \dots \nu_{2m}$, $\mu_{21} \dots \mu_{2n}, \dots$; infine per la r^{ma}, i coefficienti $\nu_{r1} \dots \nu_{rm}$, $\mu_{r1} \dots \mu_{rn}$. (Si potrebbero anche formare m (od n) serie di quadri rappresentativi delle combinazioni di dimensioni r, n (od m, r) assumendo opportunamente i coefficienti.)

Si scelgono in tutti i modi possibili r quadri $q_1, q_2, \dots q_r$ prendendone uno in ciascuna serie, e precisamente prendendo q_p nella serie p^{ma}. Essi contengono complessivamente rmn numeri, dei quali alcuni, in numero di λ_{ij}, saranno scritti in carattere grande, ed apparterranno o nel 1°, o nel 2°, ... o nell'r^{mo}, alla i^{ma} orizzontale ed alla j^{ma} verticale $(i = 1, 2, \dots m;$ $j = 1, 2, \dots n)$. Nel quadro

$$Q \equiv \begin{cases} \rho_{11}\ \rho_{12} \cdots\cdots \rho_{1n} \\ \rho_{21}\ \rho_{22} \cdots\cdots \rho_{2n} \\ \vdots \\ \rho_{m1}\ \rho_{m2} \cdots\cdots \rho_{mn} \end{cases}$$

che contiene i coefficienti della 1ª dimensione (cioè la rimanente dopo le dimensioni m ed n) si diminuisca il numero ρ_{ij} di λ_{ij} unità, e supponiamo che dopo ciò si ottenga un quadro composto di tutti zero. Poniamo

$$\nu_{11} + \ldots + \nu_{1m} = \mu_{11} + \ldots + \mu_{1n} = \sigma_1 \; ;$$
$$\nu_{21} + \ldots + \nu_{2m} = \sigma_2 \; ; \; \ldots \; \nu_{r1} + \ldots + \nu_{rm} = \sigma_r \, .$$

Se

$$a_{b_1 c_1} \, a_{b_2 c_2} \ldots a_{b_{\sigma_1} c_{\sigma_1}} , \; a_{d_1 e_1} \, a_{d_2 e_2} \ldots a_{d_{\sigma_2} e_{\sigma_2}} \ldots , \; a_{h_1 k_1} \, a_{h_2 k_2} \ldots a_{h_{\sigma_r} k_{\sigma_r}}$$

sono le r combinazioni rettangolari corrispondenti ai quadri $q_1, q_2, \ldots q_r$, allora il gruppo di elementi

$$a_{1 b_1 c_1} \ldots a_{1 b_{\sigma_1} c_{\sigma_1}} , \; a_{2 d_1 e_1} \ldots a_{2 d_{\sigma_2} e_{\sigma_2}} \ldots a_{r h_1 k_1} \ldots a_{r h_{\sigma_r} k_{\sigma_r}}$$

è una combinazione romboidale degli rmn elementi dati. Se il quadro ottenuto da ρ col procedimento dianzi indicato non è formato di tutti zero, gli r quadri $q_1, \ldots q_r$, non sono tali da dedurre una combinazione romboidale, e si ripete la prova su altri r scelti nel modo detto.

Estendendo oltre le tre dimensioni il concetto di combinazione, noi troviamo quelle a $4, 5, \ldots$ in generale a k dimensioni. Delle combinazioni a k dimensioni si potrebbe dare una definizione comprendente come casi particolari quelle date per le combinazioni a tre e due dimensioni, e si potrebbe pure dimostrare ch'esse possono formarsi combinando opportunamente combinazioni a $k-1$ dimensioni.

Sarebbe anche molto interessante risolvere relativamente alle combinazioni a k dimensioni quei problemi che l'ordinaria analisi combinatoria elementare risolve relativamente alle comuni combinazioni o ad una dimensione; per es. poichè già sappiamo formare le combinazioni a più dimensioni, è naturale ricercare come si possa calcolare il loro numero, senza farle, dati i valori delle dimensioni ed i loro coefficienti. Non conosco alcuna formola semplice atta a ciò, nè credo cosa facile il trovarla.

Dott. Nicolò Traverso.

Siracusa, Giugno, 1899.

UNA GENERAZIONE DELLE CUBICHE RAZIONALI CIRCOLARI

Queste cubiche, specializzate dal punto di vista proiettivo per la presenza di un punto doppio e dal punto di vista metrico per la proprietà ch'esse hanno di contenere i punti ciclici del piano, si possono immaginare generate per punti con molte e svariate costruzioni. Di ciò mi occupai altra volta. (*)

(*) *Le cubiche piane razionali circolari.* Livorno, Belforte, 1897.

In questa breve nota, mi propongo di dimostrare che *ogni cubica piana razionale circolare può essere considerata come l'inviluppo dei circoli che passano per un punto dato, ed il cui centro giace sopra una data parabola.*

Infatti sia

$$(1) \qquad y = ax^2 + bx + c$$

l'equazione cartesiana di una parabola, supposta l'origine nel punto dato P e gli assi x, y rispettivamente paralleli all'asse della parabola e alla tangente nel vertice.

Facilmente si vede che se m, n sono le coordinate del vertice della parabola e p è il parametro principale, sussistono le relazioni:

$$(2) \qquad a = \frac{1}{2p}, \qquad b = -\frac{m}{p}, \qquad c = \frac{m^2 + 2pn}{2p}.$$

Posto ciò, osserviamo che un circolo avente il centro sulla (1) ha per equazione

$$(x-\lambda)^2 + [y - (a\lambda^2 + b\lambda + c)]^2 = r^2,$$

dove λ è un parametro arbitrario; e se il cerchio deve passare per l'origine P, la sua equazione diverrà

$$(3) \qquad f(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2y(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Resulterà perciò

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -2(x + by + 2a\lambda y)$$

e quindi l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

dà

$$(4) \qquad \lambda = -\frac{x + by}{2ay}.$$

Eliminando λ fra le (3), (4), si ha per l'equazione dell'inviluppo del circolo variabile (3)

$$2ay(x^2 + y^2) + x^2 + 2bxy + (b^2 - 4ac)y^2 = 0,$$

od anche, sostituendo in questa i valori dati dalle (2),

$$(5) \qquad y(x^2 + y^2) + px^2 - 2mxy - 2ny^2 = 0.$$

Questa rappresenta evidentemente una cubica razionale circolare ed è generale (giacchè in essa compariscono tre costanti indipendenti).

Il punto doppio è in P. Notiamo che P sarà un nodo, una cuspide od un punto isolato della cubica, secondo che

$$2np + m^2 \gtreqless 0.$$

Ora osserviamo, che indicando con

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'equazione della parabola data, quando siasi operata una traslazione degli assi trasportando l'origine nel vertice, e con Δ il discriminante della detta equazione, secondo che

$$\Delta . \varphi(-m, -n) \lesseqgtr 0,$$

il punto P sarà interno alla parabola, sulla parabola o esterno.

Poichè inoltre è $\Delta < 0$, come facilmente si verifica, ed è

$$\varphi(-m, -n) = m^2 + 2pn,$$

resulta che a seconda che è

$$2np + m^2 \gtreqless 0,$$

il punto P è esterno, sulla parabola o interno. Si conclude perciò che *la cubica* (5) *ha un nodo, un regresso o un punto isolato, secondo che* P *rispetto alla parabola data è esterno, o su di essa o interno.*

In particolare:

a) se P è sull'asse della parabola, cioè se

$$m = 0,$$

la (5) diviene

$$y(x^2 + y^2) + px^2 - 2ny^2 = 0$$

che rappresenta una Concoide Slusiana.

b) se P è sulla direttrice della parabola, cioè se

$$n = \frac{p}{2}$$

la (5) diviene

$$y(x^2 + y^2) - 2mxy + p(x^2 - y^2) = 0$$

che rappresenta una strofoide

c) se P coincide col punto d'incontro dell'asse con la direttrice per (*a*) (*b*) segue che la cubica è una strofoide retta.

d) se P coincide col vertice della parabola la cubica è una Cissoide di Diocle.

Infatti se $m = n = 0$ la (5) diviene

$$y(x^2 + y^2) + px^2 = 0$$

e) Finalmente se P coincide col fuoco, la cubica degenera.

La proposizione contenuta in questa noticina può generalizzarsi sotto due diversi punti di vista. Ciò sarà oggetto di altre mie note.

GIULIO CARDOSO-LAYNES.

Livorno, Agosto 1899.

UNA FORMOLA COMPRENSIVA DI GEOMETRIA METRICA

DI

AMEDEO GIACOMINI

Assumiamo in uno spazio a quattro dimensioni la piramide che ha per base il tetraedro ABCD e per vertice il punto V. Costruito il prisma, che ha la medesima base, e che ha per costola laterale per es. AV, dimostriamo facilmente che esso equivale a quattro volte quella piramide. Infatti, si stacchi dal prisma la data piramide mediante l'iperpiano passante pei vertici V, B, C, D; il solido rimanente γ è la piramide che ha per vertice V e per base il prisma triangolare BCDD'B'C'. Ora quest'ultimo, com'è noto, si può scomporre in tre tetraedri equivalenti di cui uno ha per base B'C'D'; onde il solido γ si scompone in tre piramidi equivalenti fra loro ed equivalenti alla data. (*) E ciò prova quanto si era asserito.

Osservando poi che ogni poliedro dello spazio ordinario si può scomporre in tetraedri, e che quindi ogni piramide dello spazio a quattro dimensioni si può scomporre in piramidi analoghe a quella considerata, ne concludiamo che la misura di una piramide dello spazio a quattro dimensioni equivale alla quarta parte della misura della base moltiplicata per la misura dell'altezza.

Col medesimo metodo ricorrente si dimostra che la misura di una piramide dello spazio ad n dimensioni equivale alla n-esima parte della misura della base moltiplicata per la misura dell'altezza.

Si abbia ora in generale, nello spazio ad n dimensioni ($n > 1$), una piramide tagliata da un iperpiano parallelo alla base. Siano B e b le misure delle due basi del tronco di piramide, h ed $h + d$ le misure delle altezze del tronco di piramide e della piramide data rispettivamente. Indichiamo ancora con $k = \dfrac{d}{d+h}$ il rapporto di similitudine delle due basi (le quali sono due poliedri simili ad $n - 1$ dimensioni).

La misura del tronco sarà

$$T = \frac{B}{n}(h + d) - \frac{b}{n}d.$$

E poichè (**)

$$d = -\frac{hk}{k-1} \quad ; \quad b = Bk^{n-1},$$

sarà, sostituendo,

$$T = \frac{Bh}{n}\left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right),$$

od anche

$$T = \frac{Bh}{n}(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}),$$

(*) Si suppone noto il teorema d'equivalenza delle piramidi, il quale si dimostra nello spazio a più di tre dimensioni con metodo analogo a quello che vale per le piramidi dello spazio ordinario.

(**) Dobbiamo supporre $k < 1$; ma la formola finale vale anche per il caso limite $k = 1$.

la quale formola dunque, attribuendo a k i valori 0 od 1 o i valori intermedi, si adatta ad esprimere la misura del triangolo, del parallelogrammo e del trapezio, del settore circolare, del cerchio, della corona circolare; della piramide, del cono, del prisma, del cilindro, del tronco di cono o di piramide, della sfera, ecc.; e dei solidi analoghi negli spazî a più di tre dimensioni.

Pedona, agosto 1899.

SULLA QUISTIONE 355

Se due cerchi eguali si segano sotto un angolo di 60°, il loro cerchio radicale è il luogo della projezione (ortogonale) di un punto dell'un cerchio sulla sua polare rispetto all'altro. V. Retali.

All'elegante dimostrazione analitica che della quistione 355 ha dato il professore *Cardoso-Laynes* (Anno XII, pag. 161) non mi sembra inopportuno aggiungere la seguente, che è molto elementare.

Indico con R il raggio di ciascun dei due circoli dati; D, E i loro centri; A, B i loro punti comuni. Il cerchio radicale dei dati cerchi è quello di diametro AB, il cui centro si indichi con O. Sieno M il punto del circolo O più vicino a D, Q il punto del circolo E più lontano da D. Si ha:

$$AB = R, \ DO = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \ DM = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2},$$

$$DQ = 2\,DO + R = R\sqrt{3} + R. \ \text{Quindi } DM\,.\,DQ = R^2,$$

la qualcosa mostra che la polare di Q rispetto al cerchio D passa per M; e siccome tale polare è perpendicolare alla retta QM, M è la proiezione ortogonale di Q sulla polare di Q rispetto al cerchio D. Reciprocamente; se $DM_1\,.\,DQ = R^2$, risulterà $M_1 \equiv M$.

Sia Q′ un altro punto del cerchio E, M′ il punto del cerchio O, situato su DQ′, più prossimo a D. Tirato il raggio EF nella stessa direzione di OA, si dimostra subito che F, A, D sono per diritto, e che quindi D è il centro di omotetia diretta dei cerchi O ed E, e perciò i punti M, Q, M′, Q′, che non sono tutti e quattro su una delle traversali DQ, DQ′ e sono anti-omologhi, saranno conciclici e si avrà

$$DM'\,.\,DQ' = DM\,.\,DQ = R^2,$$

e la polare di Q′, rispetto al cerchio D, passerà per M′, il quale sarà la proiezione ortogonale di Q′ sulla polare di Q′ rispetto al circolo D. Viceversa, se $DM'_1\,.\,DQ' = R^2$, risulterà $DM'_1 = DM'$, e quindi $M'_1 \equiv M$.

Prof. S. Catania.

LUOGHI ED INVILUPPI (*)

(ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA)

12. Se si proietta ortogonalmente sulle normali di una parabola un punto fisso O dell'asse, il luogo delle proiezioni è una *quartica circolare* con un punto triplo in O. (**)

13. Il luogo del vertice di un triangolo di cui è dato il lato opposto e l'altezza a questo relativa è uguale alla semi-differenza degli altri due lati, è una *kohlenspitzencurva equilatera* (inversa cartesiana di iperbole equilatera).

14. L'inviluppo dei cerchi che passano per un punto dato P ed hanno il centro sopra un dato cerchio C^2 è una *conchiglia di Pascal.*

Secondo che P è esterno a C^2, sopra C^2 o interno, la conchiglia è *crunodale, cuspidale* (cardioide) o *acnodale.*

15. Sia t una tangente fissa di un circolo C^2 ed m la tangente in un punto mobile M del circolo stesso;

1° Il luogo del simmetrico di $T \equiv (mt)$ rispetto ad M è una *trisettrice di Mac-Laurin* (oltre alla t)

2° Il luogo del simmetrico di M rispetto a T è una *cissoide di Diocle* (oltre alla t).

16. Sia C^2 un cerchio, O un suo punto fisso e d il diametro passante per O; il luogo del baricentro del triangolo variabile ABO, rettangolo in A e tale che A scorra su d e B su C^2, è una *ellisse.*

17. Se t è una tangente mobile di un'iperbole equilatera e P_1, P_2 sono le proiezioni ortogonali dei fuochi sopra t, il luogo del punto medio del segmento P_1P_2 è una *lemniscata di Bernoulli.*

18. Sieno Δ e Δ' due *kappa* eguali, col punto doppio O a comune e gli assi ortogonali ed r una semi-retta mobile uscente da O che incontra in M e M' rispettivamente le due curve.

Se, partendo da M, si riporta OM' nella direzione OM in MM'', il luogo di M'' è una *kreuzcurva equilatera.*

19. L'inviluppo delle parabole che hanno il fuoco sopra un circolo dato ed hanno per direttrice un diametro fisso di questo circolo è una *coppia di parabole.*

(*) Continuazione v. Vol. preced. a pag. 150.

(**) Questo es. è una generalizzazione dell'ultimo di pag. 151. Nel caso in cui O sia il fuoco, la quartica si scinde in una parabola passante per O ed in una coppia di rette isotrope incrociantesi in O. Vedi la nota 3ª a pag. 269 del fasc. scorso.

20. Sia O un punto fisso di un circolo C^2 e PQ un diametro mobile di questo circolo. La perpendicolare condotta da Q al diametro passante per O incontra la OP in un punto M che descrive una *cissoide di Diocle*.

21. Il luogo dei baricentri dei triangoli che una tangente mobile di un'iperbole fa con gli assi è una *kohlenspitzencurva*. (*)

22. Se r è una retta variabile perpendicolare al diametro AB di un circolo C^2 e se R, S sono le intersezioni di r con C^2, il luogo dei punti d'incontro delle rette BR ed AS è un'*iperbole equilatera*.

23. Data una parabola p^2 ed una retta r perpendicolare al suo asse, si conduca dal vertice di p un raggio mobile che seghi r in A e p^2 in B. Conducendo da A e B rispettivamente le parallele all'asse ed alla r, il luogo dei punti d'incontro di queste due rette è una *cubica iperbolica*.

24. È dato un cerchio C^2 di cui il centro è C ed un suo punto fisso P. Se M è un punto mobile su C^2, il luogo delle intersezioni I, I′ dei cerchi P(PM) e M(MC) è una *sestica tricircolare*, che ha tre punti doppi su CP.

L'inviluppo della retta II′ è una *parabola*.

25. Se un triangolo rettangolo variabile ha per ipotenusa una corda di un cerchio C^2, perpendicolare ad un raggio fisso OC di tale cerchio, ed uno dei cateti passa costantemente per O, il luogo del vertice dell'angolo retto è un *trifolium retto*. (**)

26. Sia OA un segmento dato ed r una retta perpendicolare a questo segmento. Si conduca per O una semi-retta mobile ρ e sia $T \equiv (r, \rho)$. Facendo centro in A, con un raggio AT, si descriva un cerchio che tagli ulteriormente ρ in M. Il luogo di M è una *concoide slusiana*.

Indicando con d la distanza di O da r e ponendo $OA = a$, se $d = 2a, a, \frac{a}{2}$, si ha rispettivamente una *cissoide di Diocle*, una *strofoide retta*, una *trisettrice di Mac-Laurin*. Se $d = 0$ la cubica si scinde.

27. Sia C^2 un cerchio di centro C, O un suo punto fisso ed M uno mobile. Sia T il punto d'incontro della tangente in M col diametro passante per O e Q la proiezione ortogonale di M sullo stesso diametro.

Se riportiamo, a partire da O e nei due sensi su OM, dei segmenti eguali a MT, CQ, CT, si hanno *rispettivamente* un *molino a vento*, un *rosone quadrifoglio* e una *kreuzcurva equilatera*.

28. Sia C^2 un circolo dato di centro C ed O un punto qualunque del suo piano: se da un punto mobile M di C^2 si conduce la perpendicolare m a CO e da O si conduce la parallela r al raggio CM, il luogo di $P \equiv (m, r)$ è una *concoide di Nicomede*.

Secondo che O è interno a C^2, su C^2 od esterno, la concoide ha in O un *nodo*, un *regresso* o un *punto isolato*. Se O coincide con C la curva degenera.

(continua)

G. Cardoso-Laynes.

(*) Cfr. n. 7.
(**) Segue da ciò una semplicissima costruzione per punti del *trifolium*.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

289, 350, 354, 401, 463, 464, 465, 468, 470, 471

289. *Dimostrare che il rapporto della potenza di un triangolo alla sua area è uguale al rapporto fra il quadruplo del raggio del circolo di Eulero e un cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del primo circolo di Lemoine e per altro cateto il raggio del circolo di Brocard del triangolo.*

BOZAL-OBOJERO.

Soluzione del prof. U. Ceretti di Cesena.

Sia dato un triangolo ABC; siano a, b, c, i suoi lati, S la sua superficie, O ed R il centro ed il raggio del circolo circoscritto, K il punto di Lemoine. Il raggio del circolo di Eulero è subito determinato, perchè si sa che è sempre uguale alla metà di R. Determiniamo il raggio R_L del primo circolo di Lemoine. Dalla teoria dei poligoni armonici si ha che il diametro di questo circolo è dato da R sec m, essendo m definito da una delle equazioni: $x = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} m, y = \frac{1}{2} b \operatorname{tang} m, \ldots\ldots,$ in cui $a, b, c, \ldots\ldots$ indicano i lati di un poligono ed $x, y, z, \ldots\ldots$ le perpendicolari condotte dal punto di Lemoine ai lati stessi. Nel caso nostro dalla prima di queste equazioni si ha: $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} m$; e per il teorema " le perpendicolari condotte da K ai lati di un triangolo sono proporzionali ai lati stessi " e cioè: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2\,S}{a^2 + b^2 + c^2}$, si ottiene: $\operatorname{tang} m = \frac{4\,S}{a^2 + b^2 + c^2}$. Dalla trigonometria si ricava: $\sec m = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 m} = \sqrt{1 + \frac{16\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$; quindi è: $R_L = \frac{R}{2}\sqrt{1 + \frac{16\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$.

Passiamo ora a determinare il raggio R_B del circolo di Brocard. Il diametro di tale circolo è il segmento $KO = d$. Dalla citata teoria dei poligoni armonici per il teorema " se d è la distanza dal centro delle simediane al centro del circolo circoscritto di raggio R, si ha: $\operatorname{tang} m = \operatorname{cotang} \frac{\pi}{n} \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}$, essendo n il numero dei lati del poligono armonico, " essendo ora $n = 3$, si ha: $\operatorname{cotang} \frac{\pi}{n} = \operatorname{cotang} 60^0 = 1 : \sqrt{3}$; e perciò si ottiene: $\frac{4\,S}{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}} \frac{1}{\sqrt{3}}$, da cui, risolvendo rispetto a d^2, si ha:

$$d^2 = R^2 \left\{1 - \frac{48\,S^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}\right\}$$

e quindi:

$$R^2{}_B = \frac{R^2}{4} \left\{1 - \frac{48\,S^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}\right\}.$$

Calcoliamo ora la differenza $R^2_L - R^2_B$. Si ha subito:

$$R^2_L - R^2_B = \frac{R^2}{4}\left\{1 + \frac{16\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right\} - \frac{R^2}{4}\left\{1 - \frac{48\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{R^2}{4}\,\frac{64\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{16\,R^2\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

E formando la proporzione voluta dalla questione, si ha:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} : S = 2R : \sqrt{\frac{16\,S^2\,R^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}},$$

ossia:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} : S = 2R : \frac{4\,SR}{a^2+b^2+c^2},$$ proporzione identicamente vera.

Altra risoluzione del prof. Merizzi di Ceva.

350. *Dati due punti* A, B *ambedue esterni e ambedue interni ad un circolo o ad una sfera, si trovi un punto del circolo o della sfera, tale che la somma delle sue distanze da* A *e* B *sia massima o minima.*

GAMBIOLI.

Risoluzione del prof. Barozzini di Treviso.

Siano in un piano un cerchio di centro O e raggio r, e due punti A e B tali che sia $OA = a$, $OB = b$, $\widehat{AOB} = \omega$.

Se P è sulla circonferenza e AP + PB è massimo o minimo, la ellisse passante per P e avente per fuochi A e B sarà tangente al cerchio dato. Conducendo invece un'iperbole coi fuochi A, B e tangente al cerchio dato, il punto di contatto P darebbe un massimo o un minimo per AP — PB. In entrambi i casi per nota proprietà delle coniche, AP, PB sono ugualmente inclinati ad OP normale alla conica tangente al cerchio.

Assumo allora OA, OB come assi coordinati Ox, Oy, esprimo che la AP, BP, dove $P = (xy)$, distano ugualmente da O.

$$\frac{ay}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2 + 2y(x-a)\cos\omega}} = \frac{bx}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2 + 2x(y-b)\cos\omega}}$$

Quadro, tolgo il fattore $ay + bx - ab$ ed ho per luogo di P

$$[x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega][bx - ay] = ab\,[x^2 - y^2]. \tag{1}$$

Tenendo conto che P si trova sul cerchio dato

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = r^2 \tag{2}$$

e ponendo

$$am = bn = r^2 \tag{3}$$

la (1) si riduce alla

$$mx - ny = x^2 - y^2 \tag{4}$$

Se M, N sono coniugati armonici di A, B rispetto al cerchio dato la (4) rappresenta un'iperbole equilatera con diametro MN, passante per O, e avente gli asintoti paralleli alle bisettrici di ω.

Con procedimento uguale si risolve il problema: Segnare il cammino che deve fare una palla in un bigliardo circolare affinchè partendo dal punto A dato, passi pel punto B dato, dopo aver toccata la sponda una sola volta.

Si potrà facilmente costruire e taglierà il cerchio dato in quattro punti (in generale); due daranno il massimo o minimo di $AP + PB$. Il ramo dell'iperbole che passa per O taglia sempre il cerchio dato: quindi due dei quattro punti P sono sempre reali. Gli altri due saranno reali o no, secondo che la minima distanza di O dai punti dell'altro ramo dell'iperbole è minore o maggiore di r.

Se, per esempio, i punti A e B sono entrambi fuori del cerchio, i punti cercati sono reali tutti quattro.

Se fosse data una sfera invece del cerchio, la si taglierebbe col piano ABO e si ricadrebbe nel problema precedente.

354. *Dati in un piano due cerchi, la conica K^2 avente per fuochi i loro centri, e inscritta nel quadrilatero delle tangenti nei punti al finito comuni, è bitangente al cerchio radicale dei centri dati: il luogo dei punti di mezzo delle corde che le tangenti di K^2 staccano nei due cerchi è il cerchio radicale.*

RETALI.

Risoluzione del prof. Barozzini di Treviso.

Prendo l'asse radicale dei due cerchi dati per asse delle y e la congiungente i centri per quello delle x: le equazioni dei cerchi saranno

$$f = x^2 + y^2 - 2ax - b^2 = 0 \qquad f' = x^2 + y^2 - 2a'x - b^2 = 0$$

dove $a\ a'$ sono le distanze dei centri A A' dall'asse radicale, b metà della corda che unisce i punti comuni B, B' supposti reali. Pongo inoltre

$$(1) \qquad a + a' = 2s \qquad a - a' = 2d$$

Una conica coi fuochi in A e A' ha per equazione:

$$(2) \qquad \frac{(x-s)^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 \qquad (3) \qquad \text{dove} \quad u^2 - v^2 = d^2$$

e sarà tangente alla tangente in B ($x = 0$ $y = b$) al cerchio f cioè a

$$(4) \qquad b(y - b) = ax \qquad \text{se} \quad (5) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 = (b^2 + as)^2.$$

Dalle (3) (4), tenendo conto delle (1), ottengo:

$$u^2 = b^2 + s^2, \qquad v^2 = b^2 + a\,a'$$

quantità che non variano mutando $+b$ in $-b$, od a in a', quindi valgono anche se prendiamo qualunque delle altre tangenti ai cerchi dati nei punti comuni invece della (4). La conica richiesta è allora:

$$(K^2) \qquad \frac{(x-s)^2}{b^2+s^2} + \frac{y^2}{b^2 + a\,a'} = 1.$$

Se ora scrivo l'equazione del cerchio radicale

$$f + f' = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2sx - b^2 = 0$$

vedo che esso ha per diametro l'asse maggiore della K^2, quindi è la curva podaria dei fuochi di essa conica: sarà perciò bitangente alla conica (come d. d.) e conterrà tutti i piedi delle perpendicolari condotte da A e A' alle tangenti di K^2.

Ma le perpendicolari suddette cadranno nei punti di mezzo delle corde che i cerchi f, f' staccano sulle tangenti alla conica, quindi resta dimostrato che i punti medi di tali corde stanno sul cerchio radicale.

Nell'ipotesi fatta che i cerchi si taglino, la curva K^2 sarà

ellisse se $b^2 + a a' > 0$ ossia $\widehat{ABA'} < 90°$

iperbole $b^2 + a a' < 0$ $\widehat{ABA} > 90°$.

Nel caso in cui $b^2 + a a' = 0$, i cerchi sono ortogonali fra loro e la conica si riduce alla retta doppia $y^2 = 0$ come luogo di punti, e ai punti A, A' come inviluppo di rette. Allora il cerchio radicale ha per diametro A A' ed è il luogo dei punti medî delle corde condotte da A, A' ai due cerchi

Altra risoluzione del prof. Merizzi di Ceva.

401. *Determinare l'inviluppo di un cerchio, di cui il centro percorre una curva piana* C *e che tocca una retta fissa* r *del suo piano; trovare il punto di contatto del cerchio mobile col suo inviluppo e dimostrare che quest'ultimo è pure l'inviluppo delle rette simmetriche di* r *rispetto alle tangenti di* C. *Esaminare il caso particolare, in cui* C *è una conica.*

RETALI.

Risoluzione del prof. U. Ceretti di Cesena.

Sia dato un sistema di assi coordinati S e sia anzi asse delle ascisse la data retta fissa r; una curva piana qualunque C, riferita al sistema S, sia definita dalle equazioni:

$$X = \varphi(t), \quad Y = \psi(t); \tag{1}$$

con centro in $P \equiv X, Y$, punto qualunque della curva C, si descriva una circonferenza C' tangente ad r nel punto Q, di cui le coordinate saranno X e O per le ipotesi fatte. L'equazione di C' è dunque:

$$(x - X)^2 + y^2 - 2y\,Y = 0; \tag{2}$$

differenziando rispetto a t si ottiene:

$$(x - X)\,dX + y\,dY = 0; \tag{3}$$

dalle (2) e (3) si ottengono uno ad uno i punti dell'inviluppo I cercato. Risolvendo infatti le (2) e (3) rispetto ad x e ad y si hanno le formole:

$$\left\{\begin{aligned} x &= X - 2Y\frac{dX\,dY}{dX^2 + dY^2}, \\ y &= 2Y\frac{dX^2}{dX^2 + dY^2}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

che danno le coordinate correnti x ed y dell'inviluppo I, il quale è così determinato.

Dalla (3) si ha inoltre:

$$x - X = -\frac{dY}{dX}y;$$

cioè la (3) rappresenta la perpendicolare alla tangente alla curva C nel punto P condotta per il punto Q, giacchè le coordinate X e O di Q la verificano; il punto M dell'inviluppo I è dunque il simmetrico di Q rispetto alla tangente TT' in P alla C; si ha quindi che la tangente in M alla circonferenza C' è la retta simmetrica di r rispetto alla tangente TT'. Inoltre la circonferenza C' e il suo inviluppo I si toccano nel punto M; e poichè la retta MR, essendo R il punto d'intersezione di r

con TT', nel suo variare si mantiene sempre tangente ad I, risulta evidente che il suo inviluppo è ancora l'inviluppo I.

Applicazioni. — 1ª. Se C è una conica qualunque, si può supporre:

$$X = \frac{at^2 + 2bt + c}{a''t^2 + 2b''t + c''} = \frac{a_1}{a_3}, \qquad Y = \frac{a't^2 + 2b't + c'}{a''t^2 + 2b''t + c''} = \frac{a_2}{a_3} \tag{5}$$

che definiscono appunto una conica qualunque; si ha così una discussione simultanea. Per applicare le (4) determiniamo $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{dY}{dt}$. Differenziando le (5) si ottiene:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{a_3 \frac{da_1}{dt} - a_1 \frac{da_3}{dt}}{a_3^2}, \qquad \frac{dY}{dt} = \frac{a_3 \frac{da_2}{dt} - a_2 \frac{da_3}{dt}}{a_3^2},$$

ossia anche:

$$a_3^2 \frac{dX}{dt} = a_3 \frac{da_1}{dt} - a_1 \frac{da_3}{dt}, \qquad a_3^2 \frac{dY}{dt} = a_3 \frac{da_2}{dt} - a_2 \frac{da_3}{dt};$$

e quindi eseguendo:

$$a_3^2 \frac{dX}{dt} = 2\left\{(ab'' - a''b)\, t^2 + (ac'' - a''c)\, t + (bc'' - b''c)\right\} = 2b_1,$$

$$a_3^2 \frac{dY}{dt} = 2\left\{(a'b'' - a''b')\, t^2 + (a'c'' - a''c')\, t + (b'c'' - b''c')\right\} = 2b_2;$$

sostituendo nelle (4) si ha:

$$x = X - 2Y \frac{b_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{a_1}{a_3} - \frac{2a_2 b_1 b_2}{a_3 (b_1^2 + b_2^2)} = \frac{a_1 (b_1^2 + b_2^2) - 2a_2 b_1 b_2}{a_3 (b_1^2 + b_2^2)},$$

$$y = 2Y \frac{b_1^2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{2a_2}{a_3} \frac{b_1^2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{2a_2 b_1^2}{a_3 (b_1^2 + b_2^2)},$$

equazioni che rappresentano una *sestica razionale*.

2ª. Supponiamo ora che la retta fissa r sia parallela ad una direttrice, si hanno per le coniche le tre forme seguenti:

Parabola	*Ellisse*	*Iperbole*
$Y + mX^2 = n$	$\begin{cases} X = a\cos t + c \\ Y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$	$\begin{cases} X = a \cosh t + c \\ Y = b \operatorname{senh} t, \end{cases}$

nelle quali m, n, a, b, c sono costanti qualunque, e senh e cosh sono seno e coseno iperbolico. Consideriamo separatamente ciascuna di queste tre forme.

Parabola. — Si ha subito: $dX = dX$, $dY = 2m\, X\, dX$; quindi dalle (4) si ottiene:

$$x = X - 2(mX^2 + n) \frac{2m\, X\, dX^2}{dX^2 + 4m^2 X^2 dX^2} = \frac{X(1 - 4mn)}{1 + 4m^2 X^2},$$

$$y = 2(mX^2 + n) \frac{dX^2}{dX^2 + 4m^2 X^2 dX^2} = \frac{2(mX^2 + n)}{1 + 4m^2 X^2},$$

cioè per qualunque valore reale di m e di n un'ellisse reale, che ha per assi gli assi coordinati e per centro l'origine, qualora si supponga $m = -\frac{1}{4n}$.

Ellisse. — Dalle formole che determinano l'ellisse si ha: $dX = -a \operatorname{sen} t$, $dY = b \cos t$; e quindi immediatamente dalle (4):

$$x = c + \frac{a \cos t \left\{ b^2 + (a^2 + b^2) \operatorname{sen}^2 t \right\}}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

$$y = \frac{2a^2 b \operatorname{sen}^3 t}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

che danno una sestica razionale.

Iperbole. — Procedendo in modo analogo per l'iperbole si ha:

$$dX = -a \cosh t, \qquad dY = b \operatorname{senh} t$$

e quindi anche:

$$x = ac + \frac{a \cosh t \left\{ b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{senh}^2 t \right\}}{a^2 \operatorname{senh}^2 t + b^2 \cosh^2 t},$$

$$y = \frac{2a^2 b \operatorname{senh}^3 t}{a^2 \operatorname{senh}^2 t + b^2 \cosh^2 t},$$

cioè ancora una *sestica razionale.*

463. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi e il terzo* P *descrive una retta* g *non passante per* V *nè per* O; *la perpendicolare a* |VP| *in* V *seghi* |OP| *in* P'; *dimostrare che*

1° *il luogo di* P' *è una conica* G^2 *passante per* O *e normale a* |OV| *nel punto* V; *costruire le tangenti in* O *e* P';

2° G^2 *è ellisse, parabola o iperbole secondochè il cerchio* G^2_∞ *descritto sul segmento* OV *come diametro sega* g *in due punti imaginari conjugati, reali e coincidenti, o reali e distinti;*

3° *se* g *passa pel punto medio* M *del segmento* |OV| *la* G^2 *è iperbole equilatera; il luogo dei centri delle iperboli equilatere corrispondenti ai raggi del fascio* M *è un cerchio;*

4° *il luogo dei fuochi delle parabole corrispondenti alle tangenti del cerchio* G^2_∞ *è una cissoide di Diocle.* (*)

RETALI.

Soluzione geometrica del prof. A. Droz-Farny di Porrentruy.

Quando P si muove sulla retta g, i raggi OP e VP costituiscono due fasci prospettivi VP e VP' essendo coppie in involuzione circolare, ne risulta che OP e VP' generano due fasci omografici. Il luogo dei punti P', o la trasformata della retta g è dunque una conica che passa per O e V. Se VP è perpendicolare in V su OV, VP' coincide con OV, OP è dunque tangente in O alla conica; ai raggi OP e VP coincidenti, e corrispondenti al punto P d'intersezione di g con OV, corrisponde un raggio VP' perpendicolare a OV e che sarà quindi tangente in quel punto. La conica è quindi normale in V a OV. Alla retta g_∞ corrisponde evidentemente il circolo descritto su OV come diametro, poichè i raggi omologhi OP e VP essendo paralleli, VP' è sempre perpendicolare ad OP. Se si fa girare la retta g intorno ad un punto fisso P, le coniche corrispondenti formano un fascio; passano tutte per O, e per il punto P' corrispondente a P e sono tangenti in V. I loro centri sono sulla conica dei nove punti del fascio. Se le rette g sono parallele, i quattro punti-base del fascio sono O, il punto V doppio ed un quarto

(*) Per 3° e 4° cfr. le mie risoluzioni delle quistioni 259 e 260 in *Progréso Matematico* di Zaragoza (Agosto 1899, pag. 120 e 125). V. R.

punto su G^2_∞ corrispondente al punto P_∞ delle rette g. In questo caso gli assi delle coniche sono paralleli.

Se g taglia g^2_∞ in due punti α' e α'', la conica corrispondente sarà una iperbole che ha $O\alpha'$ e $O\alpha''$ come direzioni asintotiche. Se α' e α'' coincidono in α, la conica è una parabola, il cui asse ha per direzione $O\alpha$. Se finalmente i punti α' e α'' sono imaginari coniugati, la conica è un'ellisse.

Se g è un diametro di g^2_∞, le direzioni $O\alpha'$ e $O\alpha''$ sono ortogonali, g^2 è dunque un'iperbole equilatera. Sia P' su G^2_∞ il punto corrispondente a P_∞ su g. Il triangolo $OP'V$ inscritto nell'iperbole equilatera è rettangolo in P'; dunque secondo un teorema conosciuto, la tangente di G^2 in P' sarà la perpendicolare abbassata da P' sull'ipotenusa OV. Le tangenti G^2 in P' e V sono dunque parallele; ne risulta che $P'V$ è un diametro della curva, che ha quindi il suo centro nel punto di mezzo di $P'V$. Il luogo geometrico dei centri delle iperboli equilatere corrispondenti ai varî raggi del fascio dei diametri M è la circonferenza descritta su MV come diametro.

Consideriamo finalmente una retta g tangente in P al circolo G^2_∞. La sua trasformata sarà una parabola il cui asse è parallelo a OP. La perpendicolare in V ad (OV) incontri g in S. La parabola è tangente in O a SO e in V a SV. Sieno B_1 il punto di mezzo di SO, B' quello di SV, B quello di B_1B'. Per una ben nota proprietà della parabola, B_1B' sarà altresì tangente della curva nel punto B e SBM sarà un diametro della parabola. BB' e $B'V$ essendo due tangenti ortogonali della parabola, B' è un punto della sua direttrice ed il piede F della perpendicolare abbassata da B' sulla sua polare BV sarà il fuoco della curva.

Tiriamo da B la perpendicolare BC su MV; C sarà il punto di mezzo di MV, quindi un punto fisso, e sia S il piede della perpendicolare abbassata da C su BV. Si ha evidentemente VS eguale ad FB: ora il luogo di S è la circonferenza descritta su CV come diametro. Il luogo di F è dunque una *cissoide di Diocle* avente VC per asse, CB per asintoto e V per punto di regresso.

La perpendicolare abbassata da B' sul diametro SM è la direttrice della parabola; ora CB' è parallela a SM, dunque: le direttrici di queste parabole inviluppano una parabola che ha C per fuoco e VS per tangente al vertice.

Si dimostrerebbe inoltre che i loro assi inviluppano un' *ipocicloide di Steiner.*

464. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi e il terzo* P *descrive nel suo piano una curva* C^n: *se* o *è la perpendicolare a* |OV| *in* V, *e* P' *la intersezione di* |OP| *con la perpendicolare a* |VP| *in* V, *dimostrare che le tangenti a* C^n *nel punto* P *e alla curva corrispondente* C^{2n} *in* P' *si segano sulla retta* o' *simmetrica di* o *rispetto a* |PV|.

Retali.

Soluzione geometrica del prof. A. Droz-Farny.

Ogni raggio OP incontra C^n in n punti P i cui corrispondenti P' sono su OP; la retta taglia C^n in n punti α i cui corrispondenti coincidono con O; la trasformata ha quindi in O un punto n-uplo, le tangenti in questo punto essendo le rette $O\alpha$; la trasformata è generalmente del $2n^{\text{esima}}$ grado. L'asse OV incontra C^n in n punti β i cui corrispondenti coincidono con V che è altresì n-uplo per la trasformata.

Supponiamo due segmenti rettilinei, PP' e P_1P_1' i cui estremi P, P_1 e P', P_1' sieno su due curve fisse C e C' e sieno visti da un punto fisso V sotto un angolo retto. Si domanda di determinare il punto di contatto di questi segmenti col loro inviluppo. Sia O il punto d'incontro di PP' e P_1P_1' e T quello delle corde PP_1 e P_1P_1'. Secondo un ben noto teorema, le rette PP_1, $P'P_1'$, PP' e P_1P_1' sono tangenti ad una conica avente V per fuoco.

Al limite le corde PP_1 e P_1P_1 divengono respettivamente tangenti in P e P' alle curve C e C' ed il punto limite di O diviene punto di contatto di PP' colla conica ed il suo inviluppo. Si costruirà dunque una conica avente un fuoco in V e tangente alle tre rette TP, TP' e PP'. Il punto O di contatto con PP' sarà il punto cercato. Utilizzando i teoremi di Poncelet, si vede facilmente che le rette VT e VO sono isogonali nell'angolo PVP'.

Se la retta PP' inviluppa un punto fisso O, come accade nella nostra trasformazione si ottiene il teorema seguente che coincide con quello del sig. *Retali*.

Le tangenti ai punti P di C^n e P' di C^{2n} s'intersecano sopra una retta o', isogonale dell'asse OV rapporto ai lati dell'angolo PVP'.

Si vede subito che VP e VP' sono bisettrici dell'angolo delle rette o e o'.

465. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi e il terzo* P *descrive un cerchio, passante per* O, *col centro sulla perpendicolare in* V *alla* |OV|; *se il raggio* |OP| *è segato in* P' *dalla perpendicolare a* |VP| *in* V, *il luogo di* P' *è una strofoide. Costruire la tangente in* P'. RETALI.

Soluzione del prof. A. Droz-Farny.

Ad ogni raggio OP corrisponde su questo raggio un punto P'. La perpendicolare ad OV in V taglia il circolo nei punti α e α'. A questi punti, come punto P corrisponde il punto O. La curva è dunque di terzo grado col punto doppio in O. Le tangenti $O\alpha$ e $O\alpha'$ in questo punto sono ortogonali. Se P coincide con uno degli ombelichi del piano, il suo corrispondente P' coincide con esso. La curva è quindi di terzo grado, circolare, con nodo a tangenti ortogonali, ciò che caratterizza una strofoide. La strofoide è retta allorchè il centro del circolo coincide con V. Secondo la quistione 464, se l'isogonale di OV rispetto all'angolo PVP' taglia in T la tangente al circolo nel punto P, la retta CP' sarà tangente in P' alla curva.

468. *Sul raggio vettore condotto dal fuoco* F *di un'ellisse a un punto variabile* P *della curva si prendono a partire da* P *ed* F *nelle direzioni* PF, FP *i segmenti* PA', FA *eguali al semi-grande asse: dimostrare che l'angolo* AOA' *è retto; trovare il luogo del punto* A. RETALI.

Soluzione del prof. A. Droz-Farny.

Facciamo $FP = r$, $OF = c$ e angolo $AFO = \varphi$. Si ha prima

$$AA' = a + a - r = 2a - r$$

$$\overline{OA}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi$$

$$\overline{OA_1}^2 = (a-r)^2 + c^2 + 2(a-r)\, c\cos\varphi$$

$$\overline{OA}^2 + \overline{OA_1}^2 = 2a^2 + c^2 - 2ar + (c^2 + r^2 - 2rc\cos\varphi)$$

$$= 2a^2 + c^2 - 2ar + \overline{OP}^2 + 2c^2.$$

Ora $r^2 + (2a-r)^2\, 2\,\overline{OP}^2 + 2c^2$, quindi:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OA_1}^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar = (2a-r)^2 = \overline{AA_1}^2 .$$

L'angolo AOA' è dunque retto.

Il luogo di A è la circonferenza descritta da F come centro con un raggio uguale ad a. Il luogo di A' è quindi una concoide d'ellissi, la *curva di Jerabek* (vedi quistione 466).

470. *Il luogo dei vertici dell'angolo retto i cui lati abbiano date direzioni ed intercettino in una data iperbola equilatera corde tali che la differenza dei loro quadrati sia costante, è un'iperbola equilatera concentrica alla data.*

Considerando poi il caso in cui le corde debbano essere eguali dedurne la seguente proprietà: Due rette ortogonali passanti per un fuoco di una iperbola equilatera intercettano in questa corde eguali: si può generalizzare quest'ultima proprietà?

CELESTRI.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Se $xy = \frac{a^2}{2}$ è la equazione della iperbola equilatera riferita agli assintoti, facendo rotare gli assi attorno all'origine di un angolo α fino a renderli paralleli alle direzioni date, la equazione diviene

$$(x^2 - y^2)\,\text{sen}\,2\alpha + 2xy\cos 2\alpha = a^2$$

e i quadrati delle corde condotte pel punto (ξ, η) parallelamente ai nuovi assi, sono i discriminanti delle equazioni

$$\begin{aligned} &x^2\,\text{sen}\,2\alpha + 2\eta\,.\cos 2\alpha\,.\,x - (\eta^2\,\text{sen}\,2\alpha + a^2) = 0 \\ &y^2\,\text{sen}\,2\alpha - 2\xi\,.\cos 2\alpha\,.\,y - (\xi^2\,\text{sen}\,2\alpha - a^2) = 0 \end{aligned}$$

divisi per $\text{sen}^2 2\alpha$, cioè

$$(1) \qquad \frac{4}{\text{sen}^2 2\alpha}(\eta^2 + a^2\,\text{sen}\,2\alpha), \qquad \frac{4}{\text{sen}^2 2\alpha}(\xi^2 - a^2\,\text{sen}\,2\alpha).$$

Scrivendo che la loro differenza costante è $4k^2$, abbiamo per equazione del luogo del punto (ξ, η)

$$\xi^2 - \eta^2 = 2a^2\,\text{sen}\,2\alpha + k^2\,\text{sen}^2 2\alpha\,.$$

Se prendiamo per (ξ, η) un fuoco, ponendo cioè

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha) \\ \eta &= a(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)\,, \end{aligned}$$

le espressioni (1) divengono entrambe eguali a $\left(\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2a}\right)^2$, ciò che dimostra la seconda parte dell'enunciato.

Altrimenti; Le equazioni polari dei due rami della iperbola sono

$$\rho = \frac{a}{1 + \sqrt{2}\,.\cos\omega}\,, \qquad \rho' = \frac{-a}{1 - \sqrt{2}\,.\cos\omega}$$

e per le lunghezze di due corde focali ortogonali troviamo:

$$\rho'_\omega - \rho_\omega = \frac{-a}{1 - \sqrt{2}\,.\cos\omega} - \frac{a}{1 + \sqrt{2}\,.\,\text{sen}\,\omega} = \frac{2a}{\cos\omega}$$

$$\rho_{\omega + \frac{\pi}{2}} + \rho_{\omega + \frac{3\pi}{2}} = \frac{a}{1 - \sqrt{2}\,.\,\text{sen}\,\omega} + \frac{a}{1 + \sqrt{2}\,.\,\text{sen}\,\omega} = \frac{2a}{\cos\omega}\,.$$

Il teorema più generale (noto) è il seguente: *una iperbola equilatera omofocale a un'ellisse, intercetta sui lati d'un angolo retto circoscritto all'ellisse due corde eguali.*

471. *Si consideri il parallelogrammo che ha per vertici gli estremi di due diametri coniugati di un'ellisse, e per un punto P di uno di questi diametri si conducano* *due parallele ai lati del parallelogrammo. Se A', A, B, B' sono i punti d'incontro di tali rette con l'ellisse, a e b i semiassi di questo si ha*

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

CELESTRI.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Basta dimostrare che se per un punto P (α, β) interno all'ellisse conduciamo due corde AA', BB' parallele a due diametri coniugati si ha la relazione proposta.

La equazione dell'ellisse riferita a due assi condotti per P (α, β) parallelamente a due diametri coniugati è

$$b'^2(x+\alpha)^2 + a'^2(y+\beta)^2 = a'^2 b'^2;$$

i segmenti PA, PA'; PB, PB' son le radici delle equazioni

$$b'^2 x^2 + 2\alpha b'^2 . x + (\alpha^2 b'^2 + a'^2\beta^2 - a'^2 b'^2) = 0$$
$$a'^2 y^2 + 2\beta a'^2 . x + (\beta^2 a'^2 + b'^2\alpha^2 - a'^2 b'^2) = 0$$

dunque,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 = 2a'^2\left(\frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{\beta^2}{b'^2} + 1\right)$$

$$\overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2b'^2\left(\frac{\beta^2}{b'^2} - \frac{\alpha^2}{a'^2} + 1\right)$$

e sommando membro a membro

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 \overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(a'^2 + b'^2) = 2(a^2 + b^2).$$

QUISTIONI PROPOSTE

472. Se un determinante $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ è tale che per ogni elemento si abbia

$$a_{rs} = r^s \ .$$

esso è uguale a

$$1!.2!.3!\ldots\ldots n!$$

473. Se da un punto P, $(n-2)$plo sopra una curva C^n d'ordine n, si conduce una retta mobile che seghi ulteriormente la curva nei punti P_1 e P_2, il luogo del punto medio del segmento (reale o ideale) P_1P_2 è in generale una curva C'^n, d'ordine n, di cui P è un punto $(n-1)$plo.

Dare la dimostrazione analitica e sintetica. Esaminare i casi particolari e generalizzare la questione.

G. CARDOSO-LAYNES.

474. Sono dati un triangolo ABC, il suo cerchio inscritto di centro O ed una tangente Σ in un punto S di quest'ultimo. Si fa rotare il fascio O(ABC) di un angolo φ in un senso determinato: sia O(A'B'C') la sua nuova posizione. Le rette OA', OB', OC' incontrano Σ respettivamente in A', B', C'. Dimostrare che AA', BB', CC' si segano in un punto P. Qual'è il luogo di P;

1° se il punto S è fisso e se φ è variabile;

2° se φ è costante ed S è variabile?

475. È dato l'ortocentro del triangolo ABC ed il punto di mezzo del lato BC. I vertici B e C si muovono su di una retta fissa.

1°. Si cerchi l'inviluppo dei lati AB e AC.

2°. I piedi delle altezze abbassati da B e C sono su di una strofoide obliqua.

3°. La retta che congiunge questi due piedi passa per un punto fisso.

4°. Si cerchi il luogo dei punti d'intersezione col circolo ABC del diametro che passa per il punto di mezzo di BC.

5°. Si cerchi il luogo del punto di Lemoine del triangolo.

A. Droz-Farny.

476. Se una curva piana del quart'ordine e della sesta classe, ha un solo punto doppio di inflessione Y, i punti di contatto della curva con le due tangenti uscenti da uno degli altri suoi due punti doppi, sono allineati con Y sulla retta separata armonicamente mediante le due tangenti stazionarie in Y, da quella che unisce Y al terzo punto doppio.

V. Retali.

477. Risolvere l'equazione:

$$z^8+2z^5-2az^4+z^2-2az+a^2=0.$$

F. Sibirani.

478. Date $2n$ variabili indipendenti

$$x_1 x_2 \ldots x_{2n}$$

dimostrare:

1°. Che il numero dei valori algebricamente diversi che può assumere la funzione

$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_{2n}) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \ldots (x_{2n-1} + x_{2n})$$

per tutte le possibili sostituzioni sulle x, è dato da:

$$\lambda_{2n} = 1 . 3 . 5 \ldots (2n-1).$$

2°. Che, indicando con $\Sigma\varphi(x_1 x_2 \ldots x_{2n})$ la somma dei predetti valori, e con $\Sigma\varphi(x_{i_1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_{2n-2}}) . \varphi(x_{i_{2n-1}}\, x_{i_{2n}})$ il prodotto della somma dei λ_{2n-2} valori della funzione

$$\varphi(x_{i_1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_{2n-2}}) = (x_{i_1} + x_{i_2}) \ldots (x_{i_{2n-3}} + x_{i_{2n-2}})$$

per la funzione

$$\varphi(x_{i_{2n-1}}\, x_{i_{2n}}) = (x_{i_{2n-1}} + x_{i_{2n}})$$

si ha

$$\Sigma\varphi(x_1x_2\ldots x_{2n}) = \varphi(x_1x_2)\,\Sigma\varphi(x_3x_4\ldots x_{2n}) + \varphi(x_1x_3)\,\Sigma\varphi(x_2x_4\ldots x_{2n})\ldots + \varphi(x_1x_{2n})\,\Sigma\,\varphi(x_2x_3\ldots x_{2n-1}).$$

U. SCARPIS.

QUESTIONI PROPOSTE NEL PERIODICO
rimaste senza risoluzione

Vol. V, pag. 90.

73. Dato un triangolo, non regolare, trovare il luogo geometrico dei punti tali che una delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi ai lati uguagli la somma o la differenza delle altre due.

A. BALDASSARRE.

Vol. VII, pag. 42.

116. Dimostrare che, se nella serie $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots.$ si cambia il segno ad ogni termine il cui denominatore ha la forma $4K + 1$ ed è composto di un numero dispari di fattori primi, uguali o disuguali, o ha la forma $4K - 1$ ed è composto d'un numero pari di tali fattori, la somma della serie che si ottiene è $\frac{\pi}{2}$. In altri termini.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

E. CESÀRO.

117. Dimostrare che, se si cambiano i segni dei termini nella serie

$$\varphi(1) + \frac{\varphi(3)}{9} + \frac{\varphi(5)}{25} + \frac{\varphi(7)}{49} + \ldots.$$

seguendo la legge indicata nella precedente questione, la somma della serie che si ottiene è uguale a

$$\frac{48}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \ldots\right).$$

E. CESÀRO.

Vol. VII, pag. 161.

136. Se due gruppi di n numeri tutti differenti fra loro e da zero si possono porre in corrispondenza univoca di proporzionalità al più in m modi ($m > 1$), m sarà un divisore di n, ed i numeri dei due gruppi potranno essere tutti reali soltanto per $m = 2$.

G. SFORZA.

Vol. VIII, anno 1893, pag. 78

158. Si ponga

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha s - \beta r)\mathrm{M} + (\gamma s - \delta r)\mathrm{N} \\ \beta' &= (\beta m - \alpha n)\mathrm{M} + (\delta m - \gamma n)\mathrm{N} \\ \gamma' &= (\alpha s - \beta r)\mathrm{R} + (\gamma s - \delta r)\mathrm{S} \\ \delta' &= (\beta m - \alpha n)\mathrm{R} + (\delta m - \gamma n)\mathrm{S} \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

ed inoltre

$$\mathrm{MS} - \mathrm{NR} = ms - nr = 1. \qquad \text{(B)}$$

Dalle (A), lineari e di determinante 1 per rispetto alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si deduce

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

È vera la reciproca? Se cioè $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sono espresse per mezzo delle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ da formole lineari di determinante 1, e se

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma$$

le $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ saranno sempre riducibili alla forma definita dalla (A) e dalle (B)?

G. FRATTINI.

Vol. VIII, pag. 132.

161. In un triangolo ABC, indicati con H l'ortocentro e con G il baricentro si conoscono le distanze $\mathrm{AH} = \alpha$, $\mathrm{GH} = l$, insieme all'angolo i di queste rette: esprimere le tangenti degli angoli A, B, C e le condizioni affinchè la GH sia parallela a ciascuno dei tre lati.

G. BELLACCHI.

211. Presi ad arbitrio due punti L, M su di una conica φ, si trovano le proiezioni ortogonali H, K del polo della corda LM sugli assi a, b di φ, ed il simmetrico M′ di M rispetto al centro C. si hanno le proprietà seguenti:

1° il simmetrico di M′ rispetto ad a (a b) è allineato con K (con H) e con L;

2° i quattro punti L, M′, HK . $\varphi \equiv$ P, Q sono su una circonferenza.

A. DEL RE.

Vol. IX, pag. 121.

212. La conica che passa per i vertici di un rettangolo, di cui due lati sono gli assi di una conica φ, e pel punto all'infinito di uno dei diametri coniugati eguali di φ, passa pure pel punto all'infinito dell'altro di questi due diametri, e taglia φ in quattro punti conciclici.

A. DEL RE.

Vol. IX, pag. 122.

216. Se aa', bb' sono due coppie di diametri coniugati di una conica φ, di centro C, tali che si abbia, in grandezza e verso $\widehat{aa'} = \widehat{bb'}$, e sono ML′ due punti arbitrari di φ, conducendo per M le parallele ad a', b' le quali seghino di nuovo φ, ordinatamente in M_1, M_2, e, ponendo $M_1L' . a' \equiv H$, $M_2L' . b' \equiv K$, si avranno le proprietà seguenti: 1° la retta HK taglierà φ in due punti che insieme ad M, C ed al simmetrico L di L′ rispetto a C, sono su di un'iperbole, che ha gli assintoti paralleli ad a', b'; 2° sostituendo a' con a, e b' con b, e, chiamando H′, K′ i punti che, dopo ciò, vengono a sostituire H, K, il punto $HK . H'K' \equiv S$ rimane fisso, quando $\widehat{aa'} = \widehat{bb'}$ varia.

Vol. IX. pag. 160. A. Del Re.

228. Per un punto S, ad un cerchio φ si conducano le secanti arbitrarie SBC, SMM′, e la secante SAD, perpendicolare al diametro che passa per B; si avrà

$$\tan\frac{BC}{2} . \tan\frac{BM}{2} . \tan\frac{BM'}{2} - \tan^2\frac{BA}{2}\left(\tan\frac{BM}{2} + \tan\frac{BM'}{2} - \tan\frac{BC}{2}\right) = 0.$$

(Continua) A. Del Re.

BIBLIOGRAFIA

Rebière. — *Mathématiques et Mathématiciens* (Pensées et Curiosités). — Parigi, Nony, 1898 (3ª edizione).

Questo libro, senza formule e senza figure, si legge con interesse e senza troppa applicazione dalla prima all'ultima pagina.

Può considerarsi composto di quattro parti: nella prima, che è certo la più importante, sono raccolti molti pensieri, sia sull'oggetto e sul carattere della Matematica, sia sui metodi, sia infine su questioni particolari; pensieri espressi tanto dai matematici stessi, quanto da filosofi, da storici ecc.

Descartes, Pascal, Newton, Eulero, Lagrange, Laplace, Jacobi, Chasles, per tacere di tanti e tanti altri fino a Bertrand, a Hermite e a Poincaré si susseguono e si alternano con Erodoto e Cicerone, con Napoleone I, Voltaire, Victor Hugo, ecc.

Da un lato Lamartine afferma che " l'enseignement mathématique fait l'homme " machine et degrade la pensée, " dall'altro Napoleone proclama che " l'avance- " ment, le perfectionnement des mathèmatiques sont liés à la prosperité de l'État " e Ed. Quinet è convinto " qu'il est tal problème de calcul... qui suppose autant " d'inspiration que la plus belle ode de Pyndare! ".

Voltaire osserva che " il faut bien distinguer entre la Géometrie utile et la " géometrie curieuse,... ", mentre Jacobi all'opposto pensa che lo scopo unico della Scienza è l'onore dello spirito umano, e a questo titolo una questione di teoria dei numeri vale quanto una riguardante il sistema del mondo.

Vorrei sopra ogni soggetto riportare alcuni brani, ma la ristrettezza dello spazio non me lo consente: mi limiterò perciò a riportare i titoli dei vari capitoli di questa prima parte.

Oggetto e carattere delle Matematiche. — Nozioni primitive. — Metodi. — Geometria e Analisi. — I numeri, i simboli e le funzioni. — Il limite, l'infinito e l'infinitesimo. — Matematiche applicate. — Sistema metrico. — Geometria descrittiva. — Meccanica. — Astronomia. — Probabilità. — Insegnamento. — Storia — Filosofia e Morale.

La 2ª parte contiene: Varietà e Aneddoti. L'autore dice nella prefazione: " nous nous sommes permis quand même, sur un sujet austère, quelques sourires " mesurés ". Questa dichiarazione riguarda evidentemente questa seconda parte, dove però mi sembra che l'autore abbia qualche volta sorpassati i limiti che si era imposto: in essa infatti si trovano riportate alcune cose affatto puerili e che stonano col resto del libro; per fortuna son poche, e si hanno in compenso degli interessanti e dilettevoli aneddoti della vita dei grandi matematici e una varietà straordinaria di scritti riguardanti più o meno da vicino la Matematica ed i Matematici, e che sono improntati ad un vero spirito di buona lega.

La 3ª parte contiene i paradossi e le singolarità: la materia è scelta assai bene. Nella 4ª infine si trovano moltissimi problemi ricreativi.

In conclusione il libro del Rebière, tolto quel piccolo difetto a cui sopra ho accennato, mi sembra che debba meritare l'attenzione dei matematici: nella prima parte infatti essi trovano dei pensieri che a lor volta fanno pensare (mi si conceda l'espressione): gli aneddoti e le varietà accrescono la cultura generale e alcuni possono fornire anche un certo contributo alla conoscenza della Storia della Matematica; infine un requisito, non del tutto trascurabile, di ogni parte del libro è che esso diverte. " La matières de géometrie sont si serieuses d'elles mêmes, qu'il est " avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour le rendre un peu divertissantes ". Così dice l'immortale Pascal.

G. C.-L.

E. Fourrey. — *Récréations arithmétiques.* — Parigi, Nony, 1899.

" .... il n'existe à l'heure actuelle, à notre connaissance, sur les Récréations " arithmétiques, que des ouvrages ou trop anciens ou trop savant pour être à " la portée de tout le monde. Le present volume a pour object de combler cette " lacune. Sans rien sacrifier à la rigueur, nous avons seulement supposé chez nos " lecteurs la connaissance des opérations et règles pratiques de l'Arithmétique. " Nous rappelons, d'ailleurs, dans une Introduction, les quelques noctions théo- " riques necessaires ".

Così nella prefazione l'A. espone l'indole del libro.

I vari problemi che vi sono trattati non sono naturalmente originali, almeno in gran maggioranza, ma la materia è ben disposta e si nota sempre assai chiarezza nell'esposizione.

L'avere intercalato le nozioni teoriche alle applicazioni ricreative fa sì che questo libro raggiunga il duplice scopo d'istruire divertendo.

G. C.-L.

Giuseppe Ingrami. — *Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori.* — Bologna, G. Cenerelli, 1899.

Questo libro si manifesta frutto di lunghe meditazioni e di uno studio accurato e intelligente dei più recenti lavori sui fondamenti della geometria. Noto anzitutto che vengono trattate (ciò che costituisce un pregio) le principali proprietà che si riferiscono alla generazione degli enti geometrici fondamentali (retta, piano, spazio, fascio di raggi e di piani, stella di raggi e di piani) ed alla intersecabilità di rette e piani fra loro, indipendentemente dal concetto di eguaglianza. La via scelta è la seguente. Preso come concetto primitivo, oltre al concetto di punto (la cui esistenza è ammessa dal post. I: *Esistono infiniti elementi che noi chiamiamo punti*), quello di segmento, ponendo il post. II: (1°. *Due punti qualunque non coincidenti determinano in modo unico una classe di infiniti punti, alla quale appartengono anche i due considerati: tale classe noi chiamiamo e comprendiamo colla parola segmento;* 2°. *Due punti qualunque di un segmento determinano un altro segmento appartenente al primo*), e chiesta l'esistenza dei prolungamenti di un segmento mediante il post. III: (1°. *Dato un segmento qualunque* $\overline{AB}$, *restano determinate altre due classi di infiniti punti: la prima classe è di punti* X *tali che per ognuno di essi riesca il punto* B *interno ad* $\overline{AX}$ *e si chiama il prolungamento di* $\overline{AB}$ *dalla parte di* B; *la seconda è la classe di punti* Y *tali che per ognuno di essi il punto* A *risulti interno a* $\overline{BY}$ *e nomasi il prolungamento di* $\overline{AB}$ *dalla parte di* A; 2°. *Se* M *sia un punto interno ad* $\overline{AB}$ *il prolungamento di questo dalla parte di* B *coincide coll'analogo di* $\overline{MB}$ *e quello dalla parte di* A *coll'analogo di* $\overline{MA}$: *il prolungamento di* $\overline{AM}$ *dalla parte di* M *si compone di* $\overline{MB}$ *e del suo prolungamento dalla parte di* B: *analogamente per* $\overline{BM}$), definisce la retta come la classe di infiniti punti formata da un segmento e da' suoi due prolungamenti, e ne stabilisce le principali proprietà di posizione fondandosi pure su altri due postulati, uno destinato ad escludere il caso della retta chiusa e l'altro destinato a chiedere l'esistenza di punti fuori di una retta data.

Quanto al piano ed allo spazio l'A. li genera (ammettendo, dopo aver parlato del piano, l'esistenza di punti fuori di un piano dato) proiettando i punti del contorno rispettivamente di un triangolo o di un tetraedro mediante raggi aventi l'origine nell'interno di questo triangolo o di questo tetraedro, e ne svolge le principali proprietà di posizione, muovendo dal post. VI: *Dati tre punti* A, B, C *non collineari, le tre classi di segmenti determinate la prima da* A *con ogni punto di* $\overline{BC}$, *la seconda da* B *con ognuno di* $\overline{AC}$, *la terza da* C *con ognuno di* $\overline{AB}$, *soddisfano alle seguenti proprietà:* 1° *ogni segmento dell'una classe ha un punto in comune con ciascun segmento delle altre due;* 2° *il raggio determinato da uno dei tre punti dati come origine e da un punto interno ad un segmento delle altre due classi, incontra il segmento individuato dagli altri due punti dati.* La genesi di piano e di spazio data dall'A. è notevole, perchè non ha bisogno di alcuna nozione sulle rette parallele. Oltre agli argomenti fin qui considerati vengono svolte nella prima parte le principali proprietà di posizione relative ai poligoni piani, agli angoloidi ed ai poliedri.

Riguardo a questa prima parte (cap. I-V) del libro osservo che il post. II ha bisogno di essere completato, aggiungendo che *se un punto* M *trovasi nel segmento* $\overline{AB}$, *questo si compone dei segmenti* $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ (cioè *ogni suo punto appartiene o all'uno o all'altro di questi segmenti*, mentre dal detto postulato si può dedurre soltanto che ogni punto di $\overline{AM}$ e di $\overline{BM}$ appartiene ad $\overline{AB}$). Di questa proprietà, che non può nemmeno dedursi dal postulato III, si fa uso (oltre che esplicitamente in più punti, come per es. nella dim. del cor. n. 16) implicitamente nella dimostrazione del teorema (pag. 10): *Una retta è determinata da due suoi punti qualunque.*

In vero la prima parte di quella dimostrazione più esplicitamente può esporsi così. Si vuol dimostrare che, se M è un punto di $\overline{AB}$ la retta AM coincide con la AB. Difatti se un punto X è nella AM, esso è o sul prolungamento MA (*) che coincide (post. III, 2°) col prolung. BA, o in $\overline{AM}$ che appartiene (post. II, 2°) ad $\overline{AB}$ o sul prolung. AM che si compone (post. III, 2°) di $\overline{MB}$ (il quale, post. II, 2°, appartiene ad $\overline{AB}$) e del prolung. AB; dunque in ogni caso è sulla AB. Sia ora Y un punto della AB. Esso appartiene o al prolung. BA che coincide (post. III, 2°) col prolung. MA (quindi appartiene alla AM), o al prolungamento AB il quale (post. III, 2°) coincide col prolung. MB, il quale appartiene (post. III, 2°, seconda parte) al prolung. AM (quindi Y appartiene alla AM), o ad $\overline{AB}$, e perciò *o nel segmento* $\overline{AM}$ (e quindi nella AM) *o nel segmento* $\overline{MB}$ che fa parte (post. III, 2°) del prolung. AM (e perciò nella AM).

Inoltre si fa uso ripetutamente (v. per es. la dim. del t. n. 15, la parte 3ª della dim. del t. n. 17 ecc.) della proprietà che dato un triangolo ABC, se F è interno a un segmento che projetta da C un punto M di $\overline{AB}$, *il prolungamento di* $\overline{FA}$ *dalla parte di* F incontra BC, mentre nel post. VI è detto soltanto che il raggio AF incontra $\overline{BC}$, senza escludere così che l'incontro cada in $\overline{AF}$. È vero che tale proprietà può dedursi, per es. ragionando per assurdo, dal post. VI, ma non è conforme al metodo rigoroso che l'A. intende seguire, il farne uso senza averla dimostrata.

Il cap. IV è seguito da una nota, la quale introducendo un postulato non necessario, può esser sostituita a una parte del capitolo stesso da quegli insegnanti che credessero opportuno rimandare ad altro tempo le nozioni sul tetraedro in esso contenute.

La seconda parte (cap. VI-XIII) è dedicata alla trattazione dei seguenti argomenti: confronto fra i segmenti; confronto fra gli angoli; relazioni fra gli elementi dei poligoni; rette perpendicolari e oblique; parallelismo di rette e piani; confronto fra i diedri, piani perpendicolari; relazioni fra gli elementi degli angoloidi e dei poliedri; parallelogrammi, prismi, parallelepipedi. In questa parte l'A., assunto, seguendo la via tracciata dal Veronese, come primitivo il concetto di eguaglianza di due segmenti, dà separatamente la definizione di eguaglianza (diversa da caso a caso) tra gli angoli, i poligoni, i diedri, gli angoloidi, i poliedri, le striscie e gli strati, riservandosi di dimostrare, in un'appendice che segue il cap. XIII, che tutte quelle definizioni si possono sostituire con una sola. In ciò non mi trovo affatto d'accordo con l'egregio Collega, giacchè mi pare che col metodo da lui seguito si complica di molto la teoria della eguaglianza per il solo fatto di voler evitare di dar subito la definizione generale che, per quanto mi risulta dalla esperienza che ne ho fatto in iscuola, non trova gravi difficoltà ad esser afferrata anche dalla mente di alunni mediocri, qualora si proceda nei primordi abbastanza lentamente e si facciano opportuni disegni ed esercizi.

Da questo punto in poi il libro non differisce gran che dai comuni, come afferma l'A. nella prefazione. Vi è una terza parte (cap. XIV-XIX) che tratta del circolo e della sfera, dei poligoni e poliedri regolari, del cilindro e del cono in relazione alla teoria dell'eguaglianza, e che si chiude con la risoluzione dei problemi fondamentali di planimetria e stereometria. Nella quarta parte si svolge la teoria dell'equivalenza delle grandezze di 2° genere (cap. XX), partendo dalla definizione della scomposizione in parti rispettivamente eguali, e di quella delle grandezze di 3° genere (cap. XXI). Viene poi (cap. XXII) la teoria delle proporzioni trattata col metodo degli equimultipli e seguita dalle applicazioni ai segmenti

---

(*) Dirò per brevità con l'A. prolungamento MA invece di prolungamento di $\overline{MA}$ dalla parte di A.

proporzionali e (cap. XXIII) alla teoria della similitudine fondata sulla definizione: Due figure si dicono simili se fra i punti loro si possa porre una corrispondenza univoca tale che i segmenti determinati dai punti dell'una figura due a due, siano proporzionali ai corrispondenti dell'altra. Infine si ha (cap. XXIV) la teoria della misura con alcune applicazioni dell'algebra alla geometria e alcune brevi nozioni di trigonometria piana. Chiude il lavoro una raccolta di 231 esercizi.

Come risulta da quanto si disse, gli argomenti di stereometria sono alternati con gli analoghi di planimetria, però questi ultimi possono essere svolti tutti in precedenza, purchè (come avverte l'A. nella Prefaz.) si modifichi la dimostrazione del teor. (§ 173) " Due rette parallele ad una terza lo sono fra loro, " e si premetta a quella del lemma (§ 282) " Esiste un angolo quinta parte di due rette " la nota che trovasi in fine del libro, nella quale è riportata la dimostrazione planimetrica che il Faifofer nella 11ª edizione dei suoi *Elementi di geometria* dà del teorema relativo a due triangoli omologici aventi due coppie di lati corrispondenti paralleli.

Concludo con l'affermare che il libro è fatto coscienziosamente, e che contiene rilevanti pregi sia dal lato scientifico che didattico, sì da meritare il favore di quegli insegnanti che non temono di affrontare qualche difficoltà pur di ottenere che il loro insegnamento sia fondato sui notevoli risultati ottenuti dalla critica moderna relativamente alle basi della geometria elementare.

Sondrio, 1 giugno 1899.

FRANCESCO PALATINI.

NECROLOGIA

Nella notte dal 12 al 13 ottobre cessava di vivere a soli 29 anni il

Dott. FERRUCCIO MARIANTONI

professore di matematica nella R. Scuola Normale di Forlì

noto ai lettori di questo Periodico per alcuni eleganti articoli quivi inseriti. La scomparsa del Mariantoni, mentre lascia un profondo dolore nell'animo di quanti ebbero la fortuna di conoscere da vicino le sue elevate doti di cuore e di mente, costituisce pure una perdita considerevole per le nostre scuole secondarie, dov'egli insegnava con santo entusiasmo e con non comune abilità.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 30 Ottobre 1899.

SULLE CONFIGURAZIONI NELLO SPAZIO

1. Sieno date n sfere $S_1, S_2 \dots S_n$. I loro $\binom{n}{2}$ piani radicali π_{ih}, i loro $\binom{n}{3}$ assi radicali r_{ihk}, i loro $\binom{n}{4}$ centri radicali P_{ihkl} (i, h, k, l essendo quattro degli indici $1, 2, 3 \dots n$) formano una figura che diremo $\Gamma_{n,4}$.

Ogni punto P_{ihkl} appartiene a

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ piani } \pi_{ih}, \pi_{ik}, \pi_{il}, \pi_{hk}, \pi_{hl}, \pi_{kl} \text{ e a}$$

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ rette } r_{hkl}, r_{kli}, r_{lih}, r_{ihk}.$$

Ogni retta r_{ihk} appartiene a tre piani $\pi_{hk}, \pi_{ki}, \pi_{ih}$ e contiene $n-3$ punti $P_{i,h,k,l}$, dove l è uno qualunque degli n indici dati, esclusi i, h, k.

Ogni piano π_{ih} contiene $(n-2)$ rette r_{ihk} e $\binom{n-2}{2}$ punti P_{ihkl} che formano una configurazione piana $C_{n-2,2}$ di ordine n e classe 2. (*)

Una tale figura $\Gamma_{n,4}$ si chiama *configurazione di ordine* n *e classe 4*.

2. Questo esempio fa nascere naturalmente l'idea di estendere tale definizione nel modo seguente.

Configurazione di ordine n *e classe* ν *è la figura* $\Gamma_{n,\nu}$ *formata da* $\binom{n}{\nu}$ *punti,* $\binom{n}{\nu-1}$ *rette e* $\binom{n}{\nu-2}$ *piani (che si possono rappresentare colle combinazioni a* ν *a* ν, *a* $\nu-1$ *a* $\nu-1$ *e a* $\nu-2$ *a* $\nu-2$ *rispettivamente di* n *indici* 1, 2, 3 ... n), *i quali verificano le condizioni seguenti.*

1°. *Ogni punto appartiene a tutte le* ν *rette i cui simboli si ottengono da quello del punto sopprimendo uno dei suoi indici.*

2°. *Ogni retta appartiene a tutti i* $\nu-1$ *piani i cui simboli si ottengono da quello della retta sopprimendo uno dei suoi indici.*

Se $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono gli n indici $1, 2, 3 \dots n$, scritti in un ordine qualunque, e poniamo per brevità (A_r) al posto di $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, è chiaro che (A_ν), $(A_{\nu-1})$, $(A_{\nu-2})$ sono rispettivamente i simboli di un punto, di una retta e di un piano della configurazione $\Gamma_{n,\nu}$. Dalle proprietà precedenti discendono quest'altre.

(*) Cfr. LAZZERI, *Le configurazioni piane di Caporali.* „ Periodico di Matematica „ Tomo XIII, Fasc. I, 1097.

3°. *Ogni piano* $(A_{\nu-2})$ *contiene* $(n-\nu+2)$ *rette* $(A_{\nu-2}\,\alpha_r)$ *e* $\binom{n-\nu+2}{2}$ *punti* $(A_{\nu-2}\,\alpha_r\,\alpha_s)$ $(r, s)=(\nu-1, \nu, \nu+1, \ldots n)$. *Questi punti e rette formano una* $C_{n-\nu+2,2}$.

4°. *Tutti i piani e rette che passano per un vertice di* $\Gamma_{n,\nu}$ *formano una* $\Gamma_{\nu,2}$.

Ammetteremo per ora l'esistenza di queste $\Gamma_{n,\nu}$, delle quali del resto abbiamo già dato un esempio, e ne studieremo alcune proprietà che ci permetteranno poi di costituirle effettivamente.

3. Notiamo intanto le seguenti proprietà evidenti.

1°. *Una* $\Gamma_{n,1}$ *è un gruppo di punti in linea retta.*

2°. *Una* $\Gamma_{n,2}$ *è formata dalle* n *rette e dagli* $\binom{n}{2}$ *vertici di un* n-*latero piano completo, e dal piano di questo.*

3°. *Una* $\Gamma_{n,3}$ *è un* n — *edro completo.*

4°. *Una* $\Gamma_{n,n}$ *è la figura formata da* n *piani concorrenti in un punto e dalle* $\binom{n}{2}$ *rette d' intersezione a due a due.*

5°. *Una* $\Gamma_{n,n-1}$ *è la figura formata da* n *punti nello spazio, dalle rette che li congiungono due a due e dai piani che gli congiungano tre a tre.*

4. *Se in una* $\Gamma_{n,\nu}$ *separiamo un indice dai rimanenti, tutti gli elementi che contengono questo indice formano una* $\Gamma_{n-1,\nu-1}$, *quelli che non lo contengono una* $\Gamma_{n-1,\nu}$, *ogni piano della quale passa per una ed una sola retta della* $\Gamma_{n-1,\nu-1}$.

Chiamando β_1 l'indice considerato e $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ i rimanenti, scritti in un ordine qualunque, gli elementi i cui simboli contengono β_1 sono i punti $(\beta_1 A_{\nu-1})$, le rette $(\beta_1 A_{\nu-2})$ e i piani $(\beta_1 A_{\nu-3})$ che formano una configurazione di ordine $n-1$ e classe $\nu-1$, perchè ogni punto appartiene a $\nu-1$ rette ed ogni retta a $\nu-2$ piani, e che chiameremo $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$.

Gli elementi che non contengono β_1, cioè i punti (A_ν), le rette $(A_{\nu-1})$ i piani $(A_{\nu-2})$ formano evidentemente una $\Gamma_{n-1,\nu}$. Ogni sua retta $(A_{\nu-1})$ contiene uno ed un solo punto $(A_{\nu-1}\,\beta_1)$ della $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$, ogni suo piano $(A_{\nu-2})$ contiene una ed una sola retta $(A_{\nu-2}\,\beta_1)$ della medesima.

Diremo che la $\Gamma_{n-1,\nu}$ *è ipercircoscritta alla* $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$, *ovvero che la* $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$ *è iperinscritta alla* $\Gamma_{n-1,\nu}$.

Una $\Gamma_{n,\nu}$ si può in n modi scomporre in una $\Gamma_{n-1,\nu-1}$ e in una $\Gamma_{n-1,\nu}$ ipercircoscritta ad essa.

5. *Una* $\Gamma_{n,\nu}$ *si può scomporre in una* $\Gamma_{n-2,\nu-2}$, *in due* $\Gamma_{n-2,\nu-1}$ *ipercircoscritte ad essa, in una* $\Gamma_{n-2,\nu}$ *ipercircoscritta a queste.*

Separiamo due indici β_1, β_2 dagli altri, che, scritti in un ordine qualunque, chiameremo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-2}$.

Tutti gli elementi i cui simboli contengono β_1, β_2, cioè i punti $(\beta_1\,\beta_2\,A_{\nu-2})$, le rette $(\beta_1\,\beta_2\,A_{\nu-3})$ i piani $(\beta_1\,\beta_2\,A_{\nu-4})$ formano una configurazione di ordine $n-2$ e di classe $\nu-2$, che indicheremo con $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$, perchè ogni punto appartiene a $\nu-2$, rette ed ogni retta a $\nu-3$ piani.

Tutti gli elementi i cui simboli contengono β_1 ma non β_2, cioè i punti $(\beta_1 A_{\nu-1})$, le rette $(\beta_1 A_{\nu-2})$, i piani $(\beta_1 A_{\nu-3})$ formano una $\Gamma^{(\beta_1)}_{n-2,\nu-1}$ ipercircoscritta alla $\Gamma^{(\beta_1\beta_2)}_{n-2,\nu-2}$.

Tutti gli elementi i cui simboli contengono β_2 e non contengono β_1 formano un'altra $\Gamma^{\beta_2}_{n-2,\nu-1}$ ipercircoscritta alla $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$.

Infine tutti gli elementi come (A_ν), $(A_{\nu-1})$, $(A_{\nu-2})$ che non contengono nè β_1 nè β_2, formano una $\Gamma_{n-2,\nu}$ ipercircoscritta alle $\Gamma^{(\beta_1)}_{n-2,\nu-1}$ $\Gamma^{\beta_2}_{n-2,\nu-1}$.

Ogni piano $(A_{\nu-2})$ di questa contiene uno ed un sol punto $(A_{\nu-2}\beta_1\beta_2)$ della $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$.

Diremo che la $\Gamma_{n-2,\nu}$ è circoscritta alla $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$, o che questa è inscritta alla $\Gamma_{n-2,\nu}$.

Una $\Gamma_{n,\nu}$ si può scomporre nella maniera indicata in $\binom{n}{2}$ modi.

6. *Se* k *è un numero minore di* ν *e di* $n-\nu$, *una* $\Gamma_{n,\nu}$, *si può in* $\binom{n}{k}$ *modi scomporre in*

$$
\begin{array}{rcl}
1=\binom{k}{0} & \textit{configurazioni} & \Gamma_{n-k,\nu-k} \\
\binom{k}{1} & \text{"} & \Gamma_{n-k,\nu-k+1} \\
\binom{k}{2} & \text{"} & \Gamma_{n-k,\nu-k+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{k}{h} & \text{"} & \Gamma_{n-k,\nu-k+h} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{k}{k-1} & \text{"} & \Gamma_{n-k,\nu-1} \\
1=\binom{k}{k} & \text{"} & \Gamma_{\nu-k,\nu}
\end{array}
$$

Scegliamo k indici arbitrari $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ e siano $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-k}$ i rimanenti, scritti in un ordine qualunque, e rappresentiamo con B_r il gruppo d'indici $\beta_1\beta_2\ldots\beta_r$ e con A_s il gruppo d'indici $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$.

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono tutti i k indici $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$, cioè i punti $(B_k A_{\nu-k})$, le rette $(B_k A_{\nu-k-1})$ e i piani $(B_k A_{\nu-k-2})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe $\nu-k$ che chiameremo $\Gamma^{(Bk)}_{n-k,\nu-k}$.

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono $k-1$ indici β, per es. $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{k-1}$, cioè i punti $(B_{k-1} A_{\nu-k+1})$, le rette $(B_{k-1} A_{\nu-k})$, i piani $(B_{k-1} A_{\nu-k-1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe

$\nu - k + 1$, che chiameremo $\Gamma^{(B_{k-1})}_{n-k,\nu-k+1}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{1}$ e sono tutte ipercircoscritte alla $\Gamma^{(B_k)}_{n-k,\nu-k}$, perchè ogni retta $(B_{k-1}A_{\nu-k})$ contiene un punto $(B_k A_{\nu-k})$ ed ogni piano $(B_{k-1}A_{\nu-k-1})$ contiene una retta $(B_k A_{\nu-k-1})$.

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono $k-2$ indici β, per es. $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{k-2}$, cioè i punti $(B_{k-2}A_{\nu-k+2})$, le rette $(B_{k-2}A_{\nu-k+1})$ e i piani $(B_{k-2}A_{\nu-k})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe $\nu-k+2$, che chiameremo $\Gamma^{(B_{k-2})}_{n-k,\nu-k+2}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{2}$, sono tutte circoscritte alla $\Gamma^{(B_k)}_{n-k,\nu-k}$, e ciascuna è ipercircoscritta a due $\Gamma^{(B_{k-1})}_{n-k,\nu-k+1}$.

. . . .

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono $k-h$ indici β, per es. $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{k-h}$, cioè i punti $(B_{k-h}A_{\nu-k+h})$, le rette $(A_{k-h}A_{\nu-k+h-1})$ e i piani $(B_{k-h,\nu-k+h-2})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe $\nu-k+h$, che chiameremo $\Gamma^{(B_{k-h})}_{n-k,n-k+h}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{h}$. Ognuna di esse è ipercircoscritta ad h configurazioni $\Gamma^{(B_{k-h+1})}_{n-k,n-k+h-1}$ (a quelle che si ottengono aggiungendo ai $k-h$ indici β uno qualunque dei rimanenti); ed è circoscritta ad $\binom{h}{2}$ configurazioni $\Gamma^{(B_{k-h+2})}_{n-k,n-k+h-2}$ (a quelle che si ottengono aggiungendo ai $k-h$ indici β due dei rimanenti).

. . . .

Finalmente gli elementi i cui simboli non contengono alcuno degl'indici β, cioè i punti (A_ν), le rette $(A_{\nu-1})$ e i piani $(A_{\nu-2})$ formano una configurazione $\Gamma_{n-k,\nu}$ di ordine $n-k$ e classe ν, che è ipercircoscritta alle $\binom{k}{k-1}$ configurazioni $\Gamma^{\beta_r}_{n-k,\nu-1}$ e circoscritta alle $\binom{k}{k-2}$ configurazioni $\Gamma^{\beta_i\beta_r}_{n-k,\nu-2}$.

6. *Se due configurazioni* $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+1}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu+1}$ *sono ipercircoscritte ad una stessa* $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu}$, *esse sono iperinscritte in una* $\Gamma_{n,\nu+2}$, *che è circoscritta alla* $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu}$.

Rappresentiamo con $(A_\nu)^{(12)}$, $(A_{\nu+1})^{(1)}$, $(A_{\nu+1})^{(2)}$ i punti, con $(A_{\nu-1})^{(12)}$, $(A_\nu)^{(1)}$, $(A_\nu)^{(2)}$ le rette, con $(A_{\nu-2})^{(12)}$, $(A_{\nu-1})^{(1)}$, $(A_{\nu-1})^{(2)}$ i piani delle $\Gamma^{(12)}_{n,\nu}$, $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+1}$, $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+1}$.

I due tetraedri, che hanno per piani corrispondenti $(A_{\nu-2}\alpha_r)^{(1)}$, $(A_{\nu-2}\alpha_r)^{(2)}$ $(r = \nu-1, \nu, \nu+1, \nu+2)$ sono omologici, perchè questi piani s'incontrano per ipotesi nelle rette $(A_{\nu-2}\alpha_r)^{(12)}$, appartenenti al piano $(A_{\nu-2})^{(1,2)}$. Ne segue che i piani $(A_{\nu-2}\alpha_r\alpha_s)$ che congiungono le coppie di spigoli corrispondenti $(A_{\nu-2}\alpha_r\alpha_s)^{(1)}$, $(A_{\nu-2}\alpha_r\alpha_s)^{(2)}$, e le rette $(A_{\nu-2}\alpha_r\alpha_r\alpha_s)$, che congiungono le coppie di vertici corrispondenti, concorrono in un punto $(A_{\nu+2})$.

Nella stessa guisa si dimostra che tutte le rette e piani, il cui simbolo si ottiene da $(A_{\nu+2})$ sopprimendo uno o due indici passano per il punto $(A_{\nu+2})$, e che tutti i piani, il cui simbolo si ottiene da $(A_{\nu+1})$ sopprimendo un indice, passano per la retta $(A_{\nu+1})$. Dunque i punti $(A_{\nu+2})$, le rette $(A_{\nu+1})$, i piani (A_ν) formano una $\Gamma_{n,\nu+2}$ ipercircoscritta a $\Gamma_{n,\nu+2}^{(1)}$, e a $\Gamma_{n,\nu+1}^{(2)}$ e circoscritta a $\Gamma_{n,\nu}^{(1,2)}$.

Le quattro configurazioni insieme formano un $\Gamma_{n+2,\nu}$. Infatti il numero complessivo di punti è

$$\binom{n}{\nu}+2\binom{n}{\nu+1}+\binom{n}{\nu+2}=\binom{2}{2}\binom{n}{\nu}+\binom{2}{1}\binom{n}{\nu+1}+\binom{2}{0}\binom{n}{\nu+2}=\binom{n+2}{\nu+2}.$$

In simil guisa si trova che il numero complessivo di rette è $\binom{n+2}{\nu}$, e quella dei piani $\binom{n+2}{\nu}$, ed è facile vedere che per ogni punto passano $\nu+2$ rette e per ogni retta $\nu+1$ piani,

7. *Se tre configurazioni $\Gamma_{n,\nu+1}^{(2,3)}$, $\Gamma_{n,\nu+1}^{(3,1)}$, $\Gamma_{n,\nu+1}^{(1,2)}$ sono ipercircoscritte ad una $\Gamma_{n,\nu}^{(1,2,3)}$, le tre configurazioni $\Gamma_{n,\nu+2}^{(1)}$, $\Gamma_{n,\nu+2}^{(2)}$, $\Gamma_{n,\nu+2}^{(3)}$ ipercircoscritte a due di esse e circoscritte alla $\Gamma_{n,\nu}^{(1,2,3)}$ sono iperinscritte ad una $\Gamma_{n,\nu+3}$.*

Indichiamo con $(A_\nu)^{(1,2,3)}$, $(A_{\nu+1})^{(2,3)}$, $(A_{\nu+1})^{(3,1)}$, $(A_{\nu+1})^{(1,2)}$, $(A_{\nu+2})^{(1)}$, $(A_{\nu+2})^{(2)}$, $(A_{\nu+2})^{(3)}$ i punti, con $(A_{\nu-1})^{(1,2,3)}$, $(A_\nu)^{(2,3)}$ $(A_\nu)^{(3,1)}$, $(A_\nu)^{(1,2)}$, $(A_{\nu+1})^{(1)}$, $(A_{\nu+1})^{(2)}$, $(A_{\nu+1})^{(3)}$ le rette, con $(A_{\nu-2})^{(1,2,3)}$ $(A_{\nu-1})^{(2,3)}$, $(A_{\nu-1})^{(3,1)}$, $(A_{\nu-1})^{(1,2)}$, $(A_\nu)^{(1)}$, $(A_\nu)^{(2)}$, $(A_\nu)^{(3)}$ i piani delle date configurazioni.

I due triedri che hanno per piani

$$\begin{array}{ccc}(A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(2)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(3)},\\ (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(2)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(3)},\end{array}$$

e per spigoli

$$\begin{array}{ccc}(A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(2,3)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(3,1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(1,2)},\\ (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(2,3)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(3,1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(1,2)},\end{array}$$

sono omologici, perchè i piani, che passano per gli spigoli corrispondenti, sono

$$(A_{\nu-1})^{(2,3)}, \qquad (A_{\nu-1})^{(3,1)}, \qquad (A_{\nu-1})^{(1,2)},$$

e passano per la retta $(A_{\nu-1})^{(1,2,3)}$. Perciò le rette d'incontro dei piani corrispondenti, cioè

$$(A_{\nu+1})^{(1)}, \qquad (A_{\nu+1})^{(2)}, \qquad (A_{\nu+1})^{(3)},$$

giacciono in un piano $(A_{\nu+1})$. Ciò prova che la $\Gamma_{n,\nu+3}$ ipercircoscritta a due delle $\Gamma_{n,\nu+2}^{(1)}$, $\Gamma_{n,\nu+2}^{(2)}$, $\Gamma_{n,\nu+2}^{(3)}$, è ipercircoscritta anche alla terza.

Le otto configurazioni insieme formano una $\Gamma_{n+3,\nu+3}$. Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu}+3\binom{n}{\nu+1}+3\binom{n}{\nu+2}+\binom{n}{\nu+3}=$$
$$=\binom{3}{3}\binom{n}{\nu}+\binom{3}{2}\binom{n}{\nu+1}+\binom{3}{1}\binom{n}{\nu+2}+\binom{3}{0}\binom{n}{\nu+3}=\binom{n+3}{\nu+3}.$$

In simil guisa si vede che il numero complessivo di rette è $\binom{n+3}{\nu+2}$, e quello dei piani è $\binom{n+3}{\nu+1}$. Ed è facile vedere che per ogni punto passano $\nu+3$ rette e per ogni retta $\nu+2$ piani.

8. *Se* k *configurazioni* $\Gamma_{n,\nu+1}$ *sono ipercircoscritte ad una* $\Gamma_{n,\nu}$, *prese due a due determinano* $\binom{k}{2}$ $\Gamma_{n,\nu+2}$ (*circoscritte a* $\Gamma_{n,\nu}$) *nelle quali sono iperinscritte: queste combinate convenientemente tre a tre determinano* $\binom{k}{3}$ $\Gamma_{n,\nu+3}$ *nelle quali sono iperinscritte:..... così proseguendo si giunge a* $\binom{k}{k-2}\Gamma_{n,\nu+k-2}$, *poi a* $\binom{k}{k-1}\Gamma_{n,\nu+k-1}$, *ciascuna delle quali è ipercircoscritta a* $k-1$ *delle precedenti e finalmente ad una* $\Gamma_{n,\nu+k}$ *ipercircoscritta a tutte le* $\Gamma_{n,\nu+k-1}$ *e circoscritta a tutte le* $\Gamma_{n,\nu+k-2}$.

Tutte queste configurazioni formano una $\Gamma_{n+k,\nu+k}$.

Supponiamo di aver dimostrato il teorema per un dato valore $k-1$, e facciamo vedere che esso è vero anche per il valore k.

Indichiamo la data configurazione con $\Gamma_{n,\nu}^{\beta_1,\beta_2..\beta_k}$ ovvero con $\Gamma_{n,\nu}^{B_k}$ (dove $\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_k$ sono k indici, scritti in un ordine qualunque), con $\Gamma_{n,\nu+1}^{(B_{k-1})}$ quelle ad essa ipercircoscritte con $\Gamma_{n,\nu+2}^{(B_{k-2})}$ quella ipercircoscritta a $\Gamma_{n,\nu+1}^{(B_{k-2}\beta_r)}$ $(r=k-1,k)$, ..., in generale con $\Gamma_{n,\nu+h}^{(B_{k-h})}$ quella ipercircoscritta alle $\Gamma_{n,\nu+h-1}^{(B_{k-h}\beta_r)}$ $(r=k-h+1,k-h+2,\ldots k)$.

I triedri che hanno per piani

$$\begin{array}{lll}(A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_1}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_2}. & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_3},\\ (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_1}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_2}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_3},\end{array}$$

e per spigoli

$$\begin{array}{lll}(A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_2\beta_3}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_3\beta_1}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_1\beta_2},\\ (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_2\beta_3}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_3\beta_1}, & (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_1\beta_2},\end{array}$$

sono omologici, perchè i piani che passano per questi spigoli, cioè

$$(A_{\nu+k-4})^{\beta_2\beta_3} \qquad (A_{\nu+k-4})^{\beta_3\beta_1} \qquad (A_{\nu+k-4})^{\beta_1\beta_2}$$

concorrono nella retta $(A_{\nu+k-4})^{\beta_1\beta_2\beta_3}$. Perciò le rette d'incontro dei piani, che (supposto $r=\nu+k-3$, $s=\nu+k-2$) sono

$$(A_{\nu+k-2})^{\beta_1}, \qquad (A_{\nu+k-2})^{\beta_2}, \qquad (A_{\nu+k-2})^{\beta_3},$$

sono situate in un piano, che chiameremo $(A_{\nu+k-2})$. Ciò prova che la $\Gamma_{n,\nu+k}$ ipercircoscritta a due della $\Gamma^{(\beta_r)}_{n,\nu+k-1}$ è ipercircoscritta anche alle altre.

Tutte queste configurazioni insieme formano una $\Gamma_{n+k,\nu+k}$.

Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu+1}\binom{k}{1}+\binom{n}{\nu+2}\binom{k}{2}+\ldots+\binom{n}{\nu+h}\binom{k}{h}+\ldots$$
$$+\binom{n}{\nu+k-1}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{\nu+k}=$$
$$\binom{n}{\nu}\binom{k}{k}+\binom{n}{\nu+1}\binom{k}{k-1}+\binom{n}{\nu+2}\binom{k}{k-2}+\ldots+\binom{n}{\nu+h}\binom{k}{k-h}+\ldots$$
$$+\binom{n}{\nu+k-1}\binom{k}{1}+\binom{n}{\nu+k}\binom{k}{0}=\binom{n+k}{\nu+k}.$$

In simil guisa si vede che il numero complessivo di rette è $\binom{n+k}{\nu+k-1}$, e quello dei piani $\binom{n+k}{\nu+k-2}$. Ed è facile vedere che per ogni punto passano $\nu+k$ rette e per ogni retta $\nu+k-1$ piani.

Si ottengono facilmente i simboli degli elementi di questa configurazione, dando agl'indici α i valori $1, 2 \ldots n$, agl'indici β i valori $n+1, n+2 \ldots n+k$ e facendo seguire gl'indici di ogni elemento di una $\Gamma_{n,\nu+h}$ dal gruppo d'indici B_{k-h} della configurazione medesima.

9. I teoremi esposti permettono di costruire una $\Gamma_{n,\nu}$ per mezzo di altre configurazioni di ordine e classe inferiori.

Infatti dal teorema del § precedente risulta che una $\Gamma_{n,\nu}$ è completamente determinata, quando si conosce una $\Gamma_{n-k,\nu-k}$ contenuta in essa e le k configurazioni $\Gamma_{n-k,\nu-k+1}$ ad essa ipercircoscritte.

Se si suppone $k=\nu-1$, la $\Gamma_{n-k,\nu-k}$ diventa una $\Gamma_{n-\nu+1,1}$ cioè un gruppo di $n-\nu+1$ punti in linea retta e le k $\Gamma_{n-k,\nu-k+1}$ diventano $(\nu-1)$ $\Gamma_{n-\nu+1,2}$, cioè $(n-\nu+1)$ — lateri, le cui rette passano per quei punti se ne deduce.

Una configurazione $\Gamma_{n,\nu}$ è determinata dai $(\nu-1)$ piani che passano per una sua retta e dai $(\nu-1)$ $(n-\nu+1)$ — lateri formati dalle rimanenti rette situati in questi piani.

Se invece si suppone $k=\nu-2$, la $\Gamma_{n-k,\nu-k}$ diventa una $\Gamma_{n-\nu+2,2}$ cioè un $(n-\nu+2)$ — latero, le k $\Gamma_{n-k,\nu-k+1}$ diventano $(\nu-2)$ $\Gamma_{n-\nu+2,3}$ cioè $(n-\nu+2)$ — edri, i cui piani passano per quelle rette. Se ne deduce:

Una configurazione $\Gamma_{n,\nu}$ è determinata da un suo piano e da tutti gli altri piani che passano per le rette contenute in esso.

10. *Il numero di condizioni necessarie a determinare una $\Gamma_{n,\nu}$ è*

$$n \,.\, \nu - (\nu + 1)(\nu - 3).$$

Infatti, se adottiamo il primo di metodi indicati nel § precedente per costruire la $\Gamma_{n,\nu}$, si vede che per determinare la retta scelta r occorrono 4 condizioni; per determinare $n - \nu + 1$ punti P sulla r occorrono $n - \nu + 1$ condizioni; per determinare $(\nu - 1)$ piani per la r occorrono $(\nu - 1)$ condizioni; per determinare in uno di questi piani $(n - \nu + 1)$ rette per i punti P occorrono $(n - \nu + 1)$ condizioni. Il numero complessivo di condizioni è dunque

$$4 + (n - \nu + 1) + (\nu - 1) + (n - \nu + 1)(\nu - 1) =$$
$$\nu(n - \nu + 1) + \nu + 3 = n\nu - (\nu^2 - 2\nu - 3) = n\nu - (\nu + 1)(\nu - 3).$$

Se poi adottiamo la seconda costruzione, si vede che per determinare un piano π della configurazione occorrono 3 condizioni; per determinare $(n - \nu + 2)$ sue rette occorrono $2(n - \nu + 2)$ condizioni; per determinare altri $\nu - 2$ piani che contengono una di queste rette occorrono $\nu - 2$ condizioni. Il numero complessivo di condizioni è dunque

$$3 + 2(n - \nu + 2) + (\nu - 2)(n - \nu + 2) = \nu(n - \nu + 2) + 3$$
$$= n \,.\, \nu - (\nu^2 - 2\nu - 3) = n \,.\, \nu - (\nu + 1)(\nu - 3),$$

come abbiamo già trovato.

11. *Se due $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-1}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu-1}$ sono iperinscritte in una $\Gamma_{n,\nu}$, esse sono ipercircoscritte ad una $\Gamma_{n,\nu-2}$.*

Tutte insieme queste configurazioni formano una $\Gamma_{n+2,\nu}$.

Indichiamo con (A_ν) i punti, con $(A_{\nu-1})$ le rette, con $(A_{\nu-2})$ i piani di una $C_{n,\nu}$, con $(A_{\nu-1})^{(1)}$, $(A_{\nu-2})^{(1)}$, $(A_{\nu-3})^{(1)}$ i punti, le rette e i piani di una $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-1}$ in essa iperinscritta, con $(A_{\nu-1})^{(2)}$, $(A_{\nu-2})^{(2)}$ $(A_{\nu-3})^{(2)}$ i punti, le rette e i piani di un'altra $C^{(2)}_{n,\nu-1}$ iperinscritta.

I triedri che hanno per piani corrispondenti $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(1)}$ $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(2)}$, dove ad r si devono dare quattro valori qualunque da $\nu - 3$ a n, per es. $\nu - 3$, $\nu - 2$, $\nu - 1$, ν, sono omologici, perchè le rette che ne congiungono i vertici $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s\,\alpha_t)^{(1)}$ $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s\,\alpha_t)^{(2)}$ sono situati sulle rette $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s\,\alpha_t)$. Perciò le coppie di piani si tagliano secondo quattro rette $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)$ situate in un piano $(A_{\nu-4})$.

Tenendo fisse tra delle coppie di piani considerate, e facendo variare la quarta, si vede che tutte le rette $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)$ $(r = \nu - 3, \nu - 2 \ldots n)$ stanno nel piano $(A_{\nu-4})$.

Se ora si considera una coppia di piani $(A_{\nu-3})^{(1)}$ $(A_{\nu-3})^{(2)}$ insieme a quelle che si ottengono sopprimendo un dato indice α_s $(s = 1, 2 \ldots \nu - 3)$

e sostituendo uno qualunque dei rimanenti, si dimostra nello stesso modo che tutti si tagliano secondo rette di un piano $(A_{\nu-r}\,\alpha_s)$, che passa per la retta $(A_{\nu-3})^{(1,2)}$. Così tutti i $(\nu-3)$ piani $(A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(1,2)}$ passano per la retta $(A_{\nu-3})^{(1,2)}$.

In modo simile si dimostra che le rette $(A_{\nu-2}\,\alpha_s)^{(1,2)}$ passa per $(A_{\nu-2})^{(1,2)}$.

Come caso particolare si ha:

Se due n — *edri* $(\Gamma_{n,3})$ *sono iperinscritti in una* $\Gamma_{n,4}$ *i piani corrispondenti si tagliano secondo* n *rette* $(\Gamma_{n,2})$ *situate in un piano.*

12. *Se tre* $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-1}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu-1}$, $\Gamma^{(3)}_{n,\nu-1}$ *sono iperinscritte in una* $\Gamma_{n,\nu}$ *le* $\Gamma^{(2,3)}_{n,\nu-2}$, $\Gamma^{(3,1)}_{n,\nu-2}$, $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, *alle quali esse sono ipercircoscritte a due a due sono ipercircoscritte ad una* $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$ *in esse inscritta. Tutte insieme queste configurazioni formano una* $\Gamma_{n+3,\nu}$.

Indichiamo con (A_ν), $(A_{\nu-1})$, $(A_{\nu-2})$ i punti, le rette i piani della $\Gamma_{n,\nu}$; con $(A_{\nu-1})^{(i)}$, $(A_{\nu-2})^{(i)}$, $(A_{\nu-3})^{(i)}$ i punti, le rette e i piani della $\Gamma^{(i)}_{n,\nu-1}$ $(i=1.2.3)$; con $(A_{\nu-2})^{(i,h)}$ $(A_{\nu-3})^{(i,h)}$ $(A_{\nu-4})^{(i,h)}$ i punti, le rette e i piani della $\Gamma^{(i,h)}_{n,\nu-2}$ $(i,h=1,2,3)$.

Le due configurazioni $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu-2}$ iperinscritte nella $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-2}$, sono ipercircoscritte ad una $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$. Voglio dimostrare che anche la $\Gamma^{(2,3)}_{n,\nu-2}$ è ipercircoscritta alla stessa $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$.

Infatti i due triedri che hanno per facce corrispondenti

$$\begin{array}{lll}(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(1)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(2)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(3)},\\ (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(1)}, & (A_{n-4}\,\alpha_s)^{(2)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(3)},\end{array}$$

e per spigoli

$$\begin{array}{lll}(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(2,3)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(3,1)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(1,2)},\\ (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(2,3)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(3,1)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(1,2)}.\end{array}$$

sono omologici, perchè le coppie di facce s'incontrano nelle rette

$$(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(1)},\quad (A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(3)},\quad (A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(3)},$$

del piano $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)$, e perciò i piani determinati dalle coppie di spigoli, cioè

$$(A_{\nu-4})^{(2,3)},\qquad (A_{\nu-4})^{(3,1)},\qquad (A_{\nu-4})^{(1,2)},$$

passano per una retta che è la $(A_{\nu-4})^{(1,2,3)}$.

Da quanto abbiamo detto nel § 7 risulta poi che le otto configurazioni insieme formano $\Gamma_{n+3,\nu}$.

Come casi particolari si ha:

Se tre n-*edri* $(\Gamma_{n,3})$ *sono iperinscritti in una* $\Gamma_{n,4}$, *i tre piani che contengono le rette d'intersezioni degli* n-*edri presi due a due concorrono in un punto.*

Se ne deduce:

Se k n-edri $(\Gamma_{n,3})$ sono iperinscritti in una $\Gamma_{n,4}$, i $\binom{k}{2}$ piani che contengono le rette d'intersezione dei piani degli n-edri, presi due a due formano un n-edro $(\Gamma_{n,3})$, che insieme agli n-edri dati e alla $\Gamma_{n,4}$ forma una $\Gamma_{n+k,4}$.

13. *Se k $(k<\nu)$ $\Gamma^{(\beta_1)}_{n,\nu-1}$ sono iperinscritte in una $\Gamma_{n,\nu}$, in esse sono iperinscritte $\binom{k}{2}$ $\Gamma^{(\beta_1\beta_2)}_{n,\nu-2}$: queste alla loro volta determinano $\binom{k}{3}$ $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\beta_3)}_{n,\nu-3}$ iperinscritte in tre di esse, ecc.*

Così proseguendo si giunge a $\binom{k}{k-2}$ configurazioni $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_{k-2})}_{n,\nu-k+2}$, poi a $\binom{k}{k-1}$ configurazioni $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_{k-1})}_{n,\nu-k+1}$, le prime delle quali sono tutte circoscritte, le seconde ipercircoscritte ad $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\dots\beta_k)}_{n,\nu-k}$.

Per $k=3$ il teorema è già dimostrato. Supponiamo che esso sia dimostrato per un dato valore di k, e dimostriamo che è vero per $k+1$.

Poniamo al solito $B_s=\beta_1\beta_2\dots\beta_s$, e consideriamo i due triedri che che hanno per piani.

$$(A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k)},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})},$$
$$(A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}.\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+2})},$$

e per spigoli

$$(A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k+1}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}$$
$$(A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}.$$

Essi sono analogici, perchè le coppie di piani s'incontrano nelle rette

$$(A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})};\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})}$$

del piano $(A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_k)}$: perciò i piani che congiungono gli spigoli corrispondenti, cioè

$$(A_{\nu-k-1})^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})},\ (A_{\nu-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k+2}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)}$$

concorrono in una retta $(A_{\nu-k-1})^{(B_{k+1})}$.

Così si vede che tutti i piani, il cui simbolo si ricava da $(A_{\nu-k-1})^{(B_{k+1})}$ sopprimendo un indice β, passano per una retta della $\Gamma^{(B_k)}_{n,\nu-k+1}$ iperinscritti a due $\Gamma_{n,\nu-k}$.

14. *Una $\Gamma_{n,\nu+1}$ ipercircoscritta ad una $\Gamma_{n,\nu}$ è individuata da $n-\nu+2$ piani condotti per altrettante rette situate sopra un piano della $\Gamma_{n,\nu}$.*

Infatti una $\Gamma_{n,\nu}$ ed una $\Gamma_{n,\nu+1}$ ad essa ipercircoscritta formano (§ 4) una $\Gamma_{n+1,\nu+1}$, per determininare la quale è necessario e sufficiente conoscere un suo piano e tutti i piani che passano per le $(n+1)-(\nu+1)+2=n-\nu+2$ rette, che giacciono in esso ($\nu-1$ per ciascuna retta). Ma il piano suddetto e $\nu-2$ altri piani per ciascuna delle rette individuano la $\Gamma_{n,\nu}$, dunque i rimanenti piani (uno per ciascuna retta) individuano la $\Gamma_{n,\nu+1}$.

G. LAZZERI.

I NUMERI TRIANGOLARI

E LA RISOLUZIONE DI UNA PARTICOLARE EQUAZIONE DI 3° GRADO

Si consideri la serie di numeri

$$1, 3, 6, 10, \ldots .$$

ove, indicando con a_n l'ennesimo termine, si ha

$$(1) \qquad a_n - a_{n-1} = n, \quad \text{e però} \qquad (2) \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

I numeri a_n considerati si dicono numeri triangolari.

Scopo della presente nota è di esporre parecchie proprietà dei numeri triangolari e di studiare una particolare equazione di 3° grado, di cui le radici sono tre numeri triangolari consecutivi.

I. *Fra due termini* a_{n+m} *e* a_{n-1} *della serie considerata si ha la relazione*

$$(3) \qquad a_{n+m} = a_{n-1} + \frac{(m+1)(2n+m)}{2}.$$

Intanto per $m=0$ si ha la formula (1), e per $m=1$ si trova

$$a_{n+1} = a_{n-1} + 2n + 1.$$

Supposta ora vera la (3) per $m=p$, dico che è vera per $m=p+1$. Infatti per la (1) si ha

$$a_{n+p+1} = a_{n+p} + n + p + 1;$$

ed essendo, per ipotesi

$$a_{n+p} = a_{n-1} + \frac{(p+1)(2n+p)}{2},$$

si ha

$$a_{n+p+1} = a_{n-1} + n + p + 1 + \frac{(p+1)(2n+p)}{2} = a_{n-1} + \frac{(p+2)(2n+p+1)}{2}.$$

c. v. d.

Perciò essendo la (3) vera per $m=1$, è pur vera per $m=2, 3, \ldots$

II. Su due numeri triangolari consecutivi, abbiamo i seguenti teoremi.

1°. *La somma di due triangolari successivi è un quadrato e la differenza dei loro quadrati è un cubo.*

Abbiamo infatti

$$a_{n-1} + a_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2,$$

$$a^2_n - a^2_{n-1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = n^3.$$

Corollario. — *Due numeri tali che la loro somma sia* K^2 *(essendo* K *un intero positivo qualunque) e la differenza dei loro quadrati sia* K^3, *sono due triangolari successivi.*

Ricordando che la somma dei quadrati dei primi m numeri interi, è data da

$$S_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

se indichiamo con Σ_1 la somma dei primi n numeri triangolari, tenendo presente la prima parte del teorema dimostrato, si trova

$$\Sigma_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

2°. *La somma dei quadrati di due numeri triangolari successivi è un triangolare.*

Si ha

$$a^2_{n-1} + a^2_n = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = a_{n^2}.$$

3°. *Il doppio prodotto di due triangolari successivi è un triangolare.*

Si ha infatti

$$2a_{n-1}\,a_n = 2\,\frac{(n-1)n}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = a_{n^2-1}.$$

Corollario. — *La quarta potenza di un numero* n *diminuita del triangolare* a_{n^2} *è il doppio prodotto di due triangolari consecutivi.*

Abbiamo infatti

$$n^4 - a_{n^2} = a_{n^2-1} = 2a_{n-1}\,a_n.$$

4°. *Il quadruplo prodotto di due triangolari consecutivi è il quoziente di due triangolari.*

Ed invero si ottiene

$$4a_{n-1}\,a_n = 4\,\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n^2-1) = \frac{(n^4-1)n^4}{2} : \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{a_{n^4-1}}{a_{n^2}}.$$

III. Notevoli sono, per l'applicazione che ne faremo, le seguenti proprietà di tre numeri triangolari successivi.

5°. *La differenza tra il quadrato di un numero triangolare e il triangolare stesso, è eguale al prodotto dei due triangolari che lo comprendono.*

Cioè, dico che si ha

$$a^2_n - a_n = a_{n-1}\,a_{n+1};$$

Infatti è

$$a^2_n - a_n = a_n\,(a_n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4} = a_{n-1}\,a_{n+1}.$$

6°. *La somma di tre triangolari consecutivi diminuita di un'unità, è tripla del triangolare medio.*

Abbiamo cioè

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - 1 = 3a_n.$$

Infatti, pel teorema 1°, si ha

$$a_{n-1} + a_n = n^2;$$

e per la formula (1)

$$a_{n+1} = a_n + n + 1;$$

quindi risulta

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - 1 = n^2 + a_n + n = 3a_n.$$

7°. *La somma dei prodotti due a due di tre triangolari consecutivi, è tripla del quadrato del medio.*

Risulta cioè

$$a_{n-1} a_n + a_{n-1} a_{n+1} + a_n a_{n+1} = 3a^2_n.$$

Infatti, pel teorema 5°, si ha

$$a_{n-1} a_{n+1} = a^2_n - a_n;$$

onde pel teorema precedente, abbiamo

$$a_{n-1} a_n + a_{n-1} a_{n+1} + a_n a_{n+1} = a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) + a^2_n - a_n =$$
$$= a_n(a_{n-1} + a_{n+1} + a_n - 1) = 3a^2_n.$$

IV. Consideriamo ora quattro triangolari successivi

$$a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}.$$

8°. *È costante la differenza tra la somma degli estremi e la somma dei medî.*

Abbiamo infatti

$$(a_{n-1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_n - a_{n-1}) = n + 2 - n = 2.$$

Corollario. — *Un quadrato perfetto aumentato di 2 è la somma di due triangolari.*

9°. *La somma dei quattro triangolari considerati, aumentata del numero* n — 1, *è un triangolare.*

Si ha pel teorema 1°

$$a_{n-1} + a_n = n^2, \qquad a_{n+1} + a_{n+2} = (n + 2)^2;$$

quindi

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + n - 1 = n^2 + (n + 2)^2 + n - 1 =$$
$$= \frac{(2n + 2)(2n + 3)}{2} = a_{2n+2}.$$

10°. *Esiste la relazione*

$$(a_{2(n+2)} - a_{2(n+1)}) - (a_{n+3} - a_{n-1}) = 1$$

Si dimostra mediante la formula (3), che

$$a_{2(n+2)} - a_{2(n+1)} = 4n + 7 \qquad \text{e} \qquad a_{n+3} - a_{n-1} = 4n + 6.$$

11°. *Dati quattro triangolari successivi* a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, *il prodotto della differenza dei due triangolari estremi per la differenza dei due triangolari medî, è il triplo di un quadrato.*

Si ottiene cioè

$$(a_{n+2} - a_{n-1})(a_{n+1} - a_n) = 3(n+1)^2.$$

Ed infatti, per la formula (3), essendo

$$a_{n+2} - a_{n-1} = 3(n+1) \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} - a_n = n + 1$$

si ricava immediatamente la formula voluta.

12°. *Similmente si ha*

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}) = (2n+1)(2n+3).$$

13°. *Il sestuplo della somma dei primi* n *numeri triangolari, è uguale alla differenza*

$$a_n a_{n+2} - a_{n-1} a_{n+1}.$$

Infatti pel teorema 5°, risulta

$$a_n a_{n+2} = a^2_{n+1} - a_{n+1} \qquad \text{e} \qquad a_{n-1} a_{n+1} = a^2_n - a_n.$$

Perciò

$$a_n a_{n+2} - a_{n-1} a_{n+1} = a^2_{n+1} - a_{n+1} - a^2_n + a_n.$$

Ed essendo pel teorema 1°

$$a^2_{n+1} - a^2_n = (n+1)^3, \qquad \text{ed inoltre} \qquad a_{n+1} - a_n = n + 1,$$

otteniamo (essendo Σ_1 la somma dei primi n triangolari)

$$a_n a_{n+2} - a_{n-1} a_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1) = n(n+1)(n+2) = 6\,\Sigma_1$$

14°. *Dati i quattro triangolari consecutivi* a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, *il quadrato della somma del prodotto degli estremi e del prodotto dei medî, è eguale alla somma del prodotto di due triangolari e del quadrato del sestuplo della somma dei primi* n *numeri triangolari.*

Infatti, ricordando l'identità

$$(r^2 + s^2)(r_1^2 + s_1^2) = (rr_1 - ss_1)^2 + (rs_1 + r_1 s)^2,$$

e posto

$$r = a_{n-1}, \quad s = a_n, \quad r_1 = a_{n+1}, \quad s_1 = a_{n+2},$$

si ha

$$(a^2_{n-1} + a^2_n)(a^2_{n+1} + a^2_{n+2}) = (a_{n-1} a_{n+1} - a_n a_{n+2})^2 + (a_{n-1} a_{n+2} + a_n a_{n+1})^2;$$

ed essendo, pel teorema 2°,

$$a^2_{n-1} + a^2_n = a_{n^2} \qquad \text{e} \qquad a^2_{n+1} + a^2_{n+2} = a_{(n+2)^2}$$

e, pel teorema precedente,

$$a_{n-1} a_{n+1} - a_n a_{n+2} = -6\Sigma_1,$$

abbiamo

$$(a_{n-1}\, a_{n+2} + a_n\, a_{n+1})^2 = a_{n^2}\, a_{(n+2)^2} - 36\,(\Sigma_1)^2.$$

V. — 1°. *Se* a *è somma di* n *triangolari, lo è pure (per* h *intero e positivo)*

$$(2h+1)^2\, a + n\,\frac{h\,(h+1)}{2}.$$

Infatti, se è

$$a = \frac{r_1\,(r_1+1)}{2} + \frac{r_2\,(r_2+1)}{2} + \ldots + \frac{r_n\,(r_n+1)}{2}$$

abbiamo

$$(2h+1)^2\, a + n\,\frac{h\,(h+1)}{2} = \sum_1^n{}_s\, \frac{(2h+1)^2\, r_s^2 + (2h+1)^2\, r_s + h\,(h+1)}{2} =$$

$$= \sum_1^n{}_s\, \frac{[(2h+1)\, r_s + h]\,[(2h+1)\, r_s + h + 1]}{2}$$

c. v. d.

Per $n=2$, si ha il noto teorema che: *se un numero* a *somma di* 2 *triangolari, lo è pure* $(2h+1)^2 a + h(h+1)$.

Per $h=1$, abbiamo un altro teorema noto: *se* a *è somma di* 2 *triangolari, lo è pure* 9a+n.

Per $n=1$, il teorema, che abbiamo dimostrato, si può enunciare in tal modo:

2°. *Se* a_m *è un numero triangolare, lo è pure* $(2h+1)^2 a_m + \dfrac{h(h+1)}{2}$, *(per* h *intero positiva).*

In tal caso è

$$(2h+1)^2 a_m + \frac{h(h+1)}{2} = \frac{[(2h+1)m+h][2h+1)m+h+1]}{2} = a_{(2h+1)m+h}$$

essendo

$$a_m = \frac{m\,(m+1)}{2}.$$

Nel caso di $h=1$, abbiamo il noto teorema

Se a_m *è un triangolare lo è pure* $9a_m + 1$.

In questo caso si ha:

$$= 9a_m + 1 = a_{3m+1}.$$

3°. « *L'ottuplo di un triangolare, aumento di uno, è la differenza di due triangolari* ».

Infatti dall'eguaglianza:

$$9a_m + 1 = a_{3m+1},$$

ove è a_m un triangolare, si deduce

$$8a_m + 1 = a_{3m+1} - a_m$$

4°. « *L'ottuplo di un triangolare aumentato di uno, è il quadrato di un numero impari* ».

Infatti essendo per la formula (3),

$$a_{3m+1} - a_m = (2m+1)^2$$

si deduce

$$8a_m + 1 = (2m+1)^2.$$

Questo teorema è di Diofanto.

Corollario. — *Se A è somma di tre triangolari consecutivi,* $24\,A - 15$ *è un quadrato perfetto.*

Infatti (pel teorema 6°, parte I), se è $A = a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$ abbiamo

$$A = 1 + 3a_n$$

e però

$$24\,A - 15 = 72\,a_n + 9 = 9(8a_n + 1)$$

e essendo, pel teorema di Diofanto:

$$8\,a_n + 1 = (2n+1)^2 \text{ è: } 24\,A - 15 = 9)2n+1)^2 = (3(2n+1))^2.$$

Osservazione. — Pel teorema di Diofanto, si può dire che ogni quadrato impari diminuito di un'unità è l'ottuplo di un triangolare, e però nessun triangolare può terminare con le cifre 2, 4, 9, 7 e quindi se un triangolare è un quadrato, dovrà terminare con una delle cifre 0, 1, 5, 6. (V. Lucas, *Théorie des Nombres,* pag. 53.)

5°. *Per l'identità*

$$a(2n+1)^2 = \frac{(2an+n+a)(2an+n+a+1)}{2} - \frac{(2an-n+a-1)(2an-n+a)}{2}$$

possiamo dire che ogni multiplo di un quadrato impari è la differenza di due triangolari.

Osservazione. — Facilmente si verifica che due triangolari della forma

$$\frac{4k^2(4k^2+1)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{4k(4k+1)}{2}$$

sono tali che la loro differenza è multipla del quadrato di un numero impari (k intero positivo maggiore dell'unità).

Così pure la differenza dei 2 triangolari

$$\frac{8k^2(8k^2+1)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{(8k+1)(8k+2)}{2},$$

e la differenza dei 2 triangolari

$$\frac{(4k^2+1)(4k^2+2)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{4k(4k+1)}{2}$$

è multipla del quadrato di un numero impari (k è intero positivo).

VI. Enuncio tre teoremi, il primo dovuto a Fermat, gli altri due a Legendre, dei quali, si può vedere la dimostrazione nel « *Essai sur la théorie des Nombres* » di Legendre:

1°. *Ogni numero intero è somma di tre triangolari.*

(La dimostrazione del teorema dipende da un importante lemma: che un numero della forma $8\,A + 3$ si può sempre scomporre nella somma di tre quadrati impari).

2°. *Nessun numero triangolare, eccetto l'unità, è uguale ad un biquadratico.*

3°. *Nessun numero triangolare, eccetto l'unità, è eguale ad un cubo.*

VII. 1°. Indicando con S_p in generale la somma delle *potenze* p^{esime} dei primi n numeri, e con Σ_p la somma delle potenze p^{esime} dei primi n numeri triangolari possiamo scrivere simbolicamente

$$\Sigma \frac{n^m(n+1)^m}{2^m} = \frac{1}{2^m}(S_2+S_1)^m$$

purchè si ponga per convenzione che dopo avere fatto lo sviluppo della potenza indicata nel secondo membro si ponga S_{2r+s} al posto di $S^r_2 S^s_1$. In particolare è

$$\Sigma_1 = \Sigma \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(S_2+S_1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

formola, che, come abbiamo già dimostrato, ci dà la somma dei primi n numeri triangolari.

Determiniamo la somma Σ_2 dei quadrati dei primi n numeri triangolari. Si ha

$$\Sigma_2 = \Sigma \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} = \frac{1}{4}(S_2+S_1)^2;$$

ossia, per la convenzione fatta

$$\Sigma_2 = \Sigma \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + \frac{1}{4}(S_4+2S_3+S_2).$$

Ora, per la nota relazione di Fermat, si ha $5S_4 = S_2(6S_1-1)$, ed essendo $S_3 = (S_1)^2$, abbiamo

$$\Sigma \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} = \frac{1}{10}[S_2(3S_1+2)+5(S_1)^2]$$

2°. La somma dei prodotti binarii dei primi n numeri triangolari è data, come facilmente si trova, dalla formola

$$\Sigma a_{n-1}a_n = \frac{3}{10}S_2(S_1-1)$$

3°. Se T_2 indica la somma dei quadrati dei primi m numeri pari e T_1 la somma dei primi m numeri impari, è noto che è

$$3T_2 = m(4m^2-1) \quad , \quad T_1 = m^2.$$

Se ora noi consideriamo la serie dei primi m numeri triangolari d'ordine impari

1, 6, 15, 28,

l'm^{esimo} termine è $\dfrac{(2m-1)^2+2m-1}{2}$; onde, indicando con Σ'_1 la somma dei primi m numeri triangolari d'ordine impari, si ha

$$\Sigma'_1 = \Sigma \frac{(2m-1)^2+2m-1}{2} = \frac{1}{2}(T_2+T_1) = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6}.$$

Poichè, se n è il numero dei numeri triangolari, su n triangolari, per n dispari, vi sono $\frac{n+1}{2}=m$ triangolari d'ordine impari, e per n pari, vi sono $\frac{n}{2}=m$ triangolari d'ordine impari, la Σ_1 assume per n impari la forma

(1) $$\Sigma'_1=\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24},$$

e per n pari

(2) $$\Sigma'_1=\frac{n(n+2)(2n-1)}{24}.$$

Esempio. — La somma dei triangolari d'ordine impari, che si trovano nei primi 30 triangolari, è per la (2)

$$\Sigma'_1=\frac{30\,.\,32\,.\,59}{24}=2360,$$

e la somma dei triangolari d'ordine impari, che si trovano nei primi 29 triangolari, è per la (1)

$$\Sigma'_1=\frac{30\,.\,32\,.\,59}{24}=2360$$

come si doveva prevedere facilmente.

4°. Indicando con Σ''_1 la somma dei triangolari d'ordine pari contenuti nei primi n triangolari, si trova immediatamente per n pari

$$\Sigma''_1=\frac{n(n+2)(2n+5)}{24},$$

per n dispari

$$\Sigma''_1=\frac{(n^2-1)(2n+3)}{24};$$

e perciò la somma dei primi m numeri triangolari d'ordine pari è data da

$$\Sigma''_1=\frac{m(m+1)(4m+5)}{6}$$

5°. Per n dispari si ha

$$1-3+6-10+15-21+\ldots-a_{n-1}+a_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Infatti possiamo scrivere la serie in tal modo:

$$1-(3-6)-(10-15)\ldots-(a_{n-1}-a_n)=$$
$$=1+3+5+\ldots+(n);$$

ed essendo il numero dei termini del secondo membro $\frac{n+1}{2}$, si ha

$$1-3+6\ldots-a_{n-1}+a_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

6°. Consideriamo la serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots$$

Poichè ciascun termine di detta serie non è maggiore del termine corrispondente della serie geometrica convergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots,$$

la serie sarà convergente, e però

$$\lim_{n=\infty}\Sigma\ \frac{2}{n(n+1)}=2.$$

La somma dei primi n termini della serie, per n finito, è $\frac{2n}{n+1}$.

7°. Indicando con T_2^{n+1} la somma dei quadrati dei primi $n+1$ numeri impari, si ha

$$T_2^{n+1}-8\,\Sigma_1=n+1.$$

Basta ricordare che è:

$$3T_2^{n+1}=(n+1)(4n^2+8n+3)\quad \text{e} \quad \Sigma_1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

VIII. Indichiamo in generale con Δm il numero triangolare che occupa l'm^{esimo} posto nella serie dei triangolari.

Dimostriamo allora il seguente teorema:

Se è

$$n=ab$$

ove a e b sono due numeri primi, si ha

$$\Delta n=\Delta a\,\Delta b+\frac{n}{4}\varphi(n)$$

essendo $\varphi(n)$ *il numero degli interi inferiori ad* n *e primi con* n.

Infatti abbiamo

$$\Delta n=\frac{n(n+1)}{2}\quad,\quad \Delta a=\frac{a(a+1)}{2}\quad,\quad \Delta b=\frac{b(b+1)}{2}.$$

Onde, essendo $n=ab$, è

$$\Delta n-\Delta a\,\Delta b=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{ab(a+1)(b+1)}{4}=\frac{n(a-1)(b-1)}{4}.$$

Ma per noti teoremi, è

$$\varphi(n)=\varphi(a)\varphi(b)\qquad \text{e} \qquad \varphi(a)=a-1\quad,\quad \varphi(b)=b-1\,;$$

quindi

$$\Delta n=\Delta a\,\Delta b+\frac{n}{4}\varphi(n)$$

IX. **Risoluzione di una particolare equazione di 3° grado.** — Consideriamo l'equazione completa di 3° grado

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

ove A, B, C, sono numeri interi positivi.

Vogliamo determinare la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione ammetta per radici tre numeri triangolari consecutivi. Indicando con x_1, x_2, x_3 le tre radici, si hanno le note relazioni

$$\Sigma x_1 = \mathrm{A}, \quad \Sigma x_1 x_2 = \mathrm{B}, \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 = \mathrm{C}.$$

Ora abbiamo dimostrato che la somma di tre triangolari successivi diminuita dell'unità, è tripla del triangolare medio e che la somma dei prodotti due a due di 3 triangolari successivi è tripla del quadrato del medio (v. Teoremi 6 e 7 del § III). Quindi, se x_1, x_2, x_3 sono tre numeri triangolari successivi, risulta

(1) $$\mathrm{A} - 1 = 3x_2 \quad , \qquad (2) \quad \mathrm{B} = 3x_2^2$$

e pel teorema 5) del § III,

(3) $$\mathrm{C} = x_1 x_2 x_3 = x_2^2(x_2 - 1).$$

Eliminando la x_2 nelle equazioni (1), (2), (3), risulta

(4) $$(\mathrm{A}-1)^2 = 3\mathrm{B} = \frac{27\,\mathrm{C}}{\mathrm{A}-4},$$

essendo inoltre $\mathrm{A} - 1$ il triplo di un triangolare.

Dico ora che la condizione (4) e la condizione che $\frac{\mathrm{A}-1}{3}$ sia un triangolare è anche sufficiente, affinchè l'equazione data di 3° grado ammetta tre radici reali che sieno tre numeri triangolari successivi.

Infatti si ha allora

$$\mathrm{B} = \frac{(\mathrm{A}-1)^2}{3} \quad , \quad \mathrm{C} = \frac{(\mathrm{A}-1)^2(\mathrm{A}-4)}{27}$$

onde l'equazione

$$x^3 - \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x - \mathrm{C} = 0$$

si può scrivere

$$x^3 - \mathrm{A}x^2 + \frac{(\mathrm{A}-1)^2}{3}x - \frac{(\mathrm{A}-1)^2(\mathrm{A}-4)}{27} = 0,$$

ovvero

$$\left(x - \frac{\mathrm{A}-1}{3}\right)\left(x^2 - \left(\frac{2\mathrm{A}+1}{3}x + \frac{(\mathrm{A}-1)(\mathrm{A}-4)}{9}\right)\right) = 0.$$

Si vede quindi che $\frac{\mathrm{A}-1}{3}$, numero triangolare, è una radice dell'equazione data. Sarà cioè $\frac{\mathrm{A}-1}{3} = x_2$.

Ora indicando con x_1 e x_3 le altre 2 radici, dovendo essere

$$x_1 + x_2 + x_3 = \mathrm{A},$$

avremo

$$x_1 + x_3 = \frac{2\mathrm{A}+1}{3};$$

e dovendo essere

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{(A-1)^2 (A-4)}{27},$$

sarà

$$x_1 x_3 = \frac{(A-1)(A-4)}{9}.$$

Pei teoremi già citati, si vede che x_1 e x_3 radici dell'equazione data, sono i due numeri triangolari che comprendono $x_2 = \frac{A-1}{3}$.

Allorchè sia soddisfatta la relazione (4), e sia x_2 un triangolare, le radici x_1 e x_3 dell'equazione sono necessariamente reali, giacchè il discriminante dell'Equazione di 2° grado

$$x^2 - \frac{2A+1}{3} x + \frac{(A-1)(A-4)}{9} = 0$$

è $24A - 15$, numero, che come si è dimostrato, è un quadrato perfetto.

Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione di 3° grado ammetta per radici tre numeri triangolari consecutivi è che sia*

$$(A-1)^2 = 3B = 27 \frac{C}{A-4},$$

e che $\frac{A-1}{3}$ *sia un triangolare.*

Per esempio sia l'equazione

$$x^3 - 199x^2 + 13068x - 283140 = 0.$$

Si ha $\frac{A-1}{3} = 66$, che è un numero triangolare. Inoltre i coefficienti soddisfano alla condizione (4). Quindi le radici dell'equazione sono 55, 66, 78.

ATTILIO CREPAS
Studente della R. Università di Pavia.

SULLE FORMULE CHE ESPRIMONO LA LUNGHEZZA DI UN ARCO
e l'area di un settore circolare

Negli ordinari trattati di Geometria elementare, allorchè si vogliono stabilire le formule che danno la lunghezza di un arco circolare e l'area di un settore di cerchio, si ammette tacitamente che il rapporto fra due archi di ugual raggio sia uguale a quello dei segmenti ad essi *equivalenti*. Ora, si avverta subito che, mentre è lecito chiamare *per definizione* rapporto fra due archi di raggi differenti quello fra i segmenti ad essi equivalenti, non è invece rigoroso uguagliare *a priori* il rapporto di due archi del medesimo raggio con quello dei rispettivi segmenti equivalenti; perchè ciascuno di tali rapporti ha già di per se stesso un valore pienamente determinato, e quindi la loro uguaglianza, se vera, non può stabilirsi che con un teorema. In altre parole, dovremo provare che due archi di ugual raggio sono proporzionali ai segmenti ad essi equivalenti.

Poichè la dimostrazione di tale proprietà può farsi facilmente, e deducendosene poi subito le formule che esprimono la lunghezza di un arco circolare e l'area di un settore di cerchio, ho creduto opportuno esporre la via che conduce in modo rigoroso a questi resultati.

***

Sappiamo chiamarsi segmento *equivalente* ad un dato arco di circolo quello che è maggiore del perimetro di ogni linea poligonale convessa inscritta nell'arco, e minore del perimetro di ogni poligonale convessa circoscritta. Tale segmento esiste ed è unico, perchè i perimetri di siffatte poligonali costituiscono, come si sa, due classi *contigue* di segmenti, la prima delle quali non ha segmento massimo e la seconda non ha segmento minimo. Si sa pure che per determinare tale segmento equivalente all'arco non occorre considerare le classi formate dai perimetri di *tutte le possibili* poligonali convesse inscritte e da quelli di tutte le circoscritte, ma basta una coppia di classi contigue che siano costituite dai perimetri di infinite linee dell'una e dell'altra specie rispettivamente.

Ciò premesso, è facile intendere che, essendo α, β due archi di ugual raggio, ed a, b i segmenti ad essi equivalenti, se è $\alpha = \beta$, sarà $a = b$. Infatti i segmenti che costituiscono le due classi contigue che sono separate da a risultano rispettivamente uguali a quelli che formano le classi contigue separate dal segmento b; e perciò sarà $a = b$.

Passiamo ora a dimostrare che, essendo α, β, γ tre archi di ugual raggio, i cui segmenti equivalenti siano a, b, c, se è $\alpha = \beta + \gamma$, sarà $a = b + c$.

Infatti, disponiamo gli archi β e γ sopra una stessa circonferenza, in guisa da risultare adiacenti, e sia $AB = \beta + \gamma$ l'arco limitato dai loro estremi non comuni e contenente l'estremo comune C. Allora se p è il perimetro di una qualsivoglia poligonale convessa inscritta, nell'arco $AC = \beta$ e p' è quello di una circoscritta, risulterà

$$p < b < p'.$$

Analogamente, se q e q' sono rispettivamente i perimetri di una qualsivoglia poligonale convessa inscritta nell'arco $CB = \gamma$ e di una circoscritta, sarà

$$q < c < q'.$$

Quindi avremo

$$p + q < b + c < p' + q'.$$

E poichè sono contigue le classi dei segmenti (p, p') come pure quelle di (q, q') risulteranno tali anche le classi costituite dai segmenti $(p+q, p'+q')$. (*) Ma la prima di queste ultime è formata dai perimetri di infinite linee poligonali convesse inscritte nell'arco AB, e l'altra da quelli di infinite poligonali circoscritte: e perciò il segmento $b+c$ che segna il loro confine di separazione sarà uguale a quello equivalente all'arco AB, ossia $a=b+c$.

Dunque la corrispondenza fra gli archi di ugual raggio ed i segmenti ad essi equivalenti è tale che ad archi uguali corrispondono segmenti uguali, e ad ogni arco, che sia uguale alla somma di due altri, corrisponde un segmento che è uguale alla somma di quelli corrispondenti a questi due archi.

Ne segue, come appunto volevamo dimostrare, che *gli archi di ugual raggio sono proporzionali ai segmenti ad essi equivalenti.*

Ora, chiamando *lunghezza* di un arco di circolo la misura del segmento ad esso equivalente, rispetto ad una unità lineare fissata ad arbitrio, se indichiamo con r la misura del raggio (riferito a quella medesima unità), con α la misura in gradi dell'arco (cioè il rapporto fra questo e l'arco di 1° grado dello stesso raggio) e con l la sua lunghezza, avremo

$$\frac{\alpha}{360}=\frac{l}{2\pi r}. \text{ (**)}$$

Da cui

$$l=\frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Passando infine a considerare un settore di circolo, ricorderemo che le classi dei settori poligonali inscritti e circoscritti ad esso sono contigue, e che tanto il settore circolare quanto il rettangolo contenuto dal segmento equivalente all'arco e dalla metà del raggio sono prevalenti ai settori poligonali della prima classe e suvvalenti a quelli della seconda. Perciò diremo che ogni settore circolare è *equivalente* al rettangolo del segmento equivalente all'arco e della metà del raggio.

Ora è facile concludere che *due settori circolari di ugual raggio risultano proporzionali ai rettangoli che sono loro equivalenti;* (***) perchè tali settori sono proporzionali ai rispettivi archi, perciò ai segmenti equivalenti ad essi, ed infine anche ai rettangoli contenuti da questi segmenti e dalla metà del raggio.

(*) Infatti risulta $p'+q'>p+q$. Ed essendo $(p'+q')-(p+q)=(p'-p)+(q'-q)$, siccome per ogni segmento arbitrario σ esiste un p ed un p' la cui differenza è minore di $\frac{\sigma}{2}$, come pure un segmento q ed uno q', ne segue che per quelle due coppie di segmenti si avrà:

$$(p'+q')-(p+q)<\sigma.$$

(**) In molti trattati (per es. in quelli di *Veronese* e di *Faifofer*) si stabilisce questa proporzione senza nemmeno *definire* la lunghezza di un arco.

(***) Si osservi che tale proporzionalità è della stessa natura di quella fra gli archi ed i segmenti ad essi equivalenti; giacchè la parola *equivalente* non sta qui a significare che i settori ed i corrispondenti rettangoli si possono riguardare come somme di parti uguali (il che non è) ma soltanto che risultano compresi nella medesima coppia di classi contigue di poligoni.

Se dunque chiamiamo *area* di un settore di cerchio la misura del rettangolo ad esso equivalente, indicando con S l'area del settore, con r la misura del suo raggio e con α la misura in gradi dell'arco, avremo

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{S}{\pi r^2}$$

e quindi

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \cdot (*)$$

Pavia, 3 novembre 1899.

M. Chini.

LA GEOMETRIA DEI TRIANGOLI

1. Riflessione generale. — Esaminando con qualche attenzione i progressi della geometria elementare si trova un particolare interesse ad osservare che non vi è soltanto una *geometria del triangolo* ma anche una *geometria dei triangoli*, la quale si fonda sullo studio dei *triangoli notevoli*.

Se noi indichiamo con a, b, c i 3 lati di un triangolo qualunque ABC, diremo che questo triangolo è *notevole*, se sussiste fra i 3 lati la relazione

$$f(a, b, c) = 0.$$

Questa relazione è necessariamente omogenea. Il caso più semplice è quello in cui essa sia di 1° grado, cioè della forma

$$(\lambda) \qquad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

ove α, β, γ sono *numeri* che si chiamano le *caratteristiche* del triangolo notevole proposto. Per esempio le caratteristiche del triangolo isoscele sono $0, 1, -1$.

Un triangolo può essere *semplicemente* o *doppiamente notevole* secondochè si dànno una o due relazioni fra i lati.

Il triangolo rettangolo è un triangolo semplicemente notevole, la relazione essendo $a^2 = b^2 + c^2$; il triangolo equilatero è doppiamente notevole, perchè si hanno le relazioni $a = b = c$.

Quando si considera un triangolo doppiamente notevole, tutti i triangoli che corrispondono al caso considerato sono triangoli simili.

Si deve anche considerare che per ottenere un triangolo notevole si può imporre agli elementi geometrici di questo triangolo la verificazione di una relazione data. Questa relazione non sarà necessariamente della forma $f(a, b, c) = 0$; essa può contenere le altezze, le mediane, gli angoli .... ma si può sempre, se si vuole, sostituire con una relazione fra i lati.

(*) Si può pervenire a questo resultato anche osservando che

$$S = \frac{\pi r \alpha}{180} \times \frac{r}{2}.$$

Per esempio; supponiamo che sia data la relazione

$$\text{ctg}\,\frac{B}{2} = \text{ctg}\,\frac{A}{2} + \text{ctg}\,\frac{C}{2}; \tag{1}$$

le formole note dànno

$$a - 3b + c = 0 \tag{2}$$

e il triangolo notevole proposto ha per caratteristiche 1, — 3, 1.

Reciprocamente ogni triangolo che soddisfa alla relazione (2) soddisfa pure alla (1).

Ogni triangolo notevole esige uno studio particolare; questo studio ha per iscopo di ricercare le proprietà che gli sono *individuali*, cioè quelle proprietà che sono verificate nel triangolo proposto, ma che non appartengono a un triangolo qualunque.

Lo studio di ogni triangolo notevole è illimitato, o per meglio dire esso non ha altro limite che quello che include le proprietà semplici e interessanti di questo triangolo.

Il numero dei triangoli notevoli essendo doppiamente infinito, il campo delle ricerche su questo argomento è doppiamente infinito. In queste ricerche si potrà distinguere le proprietà che appartengono ad una famiglia di triangoli notevoli (p. es. a quella corrispondente alla relazione (λ)) e quelle che convengono soltanto a uno dei membri di questa famiglia.

Mi si domanderà forse quale utilità attribuisco a tali ricerche, ed io risponderò francamente che questa utilità non è certo fra quelle che possono mettersi in prima linea, come del resto avviene dell'utilità di quella geometria del triangolo di cui in principio ho parlato.

Nella geometria del triangolo alcuni hanno proseguito lo studio degli elementi notevoli che appartengono a un triangolo qualunque. Dopo aver considerato i punti, i cerchi. . . ., essi hanno cercato dei nuovi elementi notevoli. Questa estensione era inevitabile, e l'utilità di questa geometria è per me del medesimo ordine di quella che si può attribuire alla *geometria dei triangoli.* Non può trattarsi evidentemente che d'un interesse speculativo, come del resto succede sovente nelle ricerche matematiche: bisogna però tener conto che quest'interesse è d'ordine puramente elementare. Ma, ricusarsi, *a priori,* di ricercare quelle proprietà che derivano dallo studio di un triangolo notevole, sotto pretesto che il triangolo non notevole è il solo che presenta un vero interesse, è ragionare all'incirca come colui che nella geometria classica intendesse di non voler conoscere i teoremi particolari sul triangolo rettangolo.

Vi è dunque, concludendo, una geometria dei triangoli, ed essa ha un interesse di ordine speculativo, con questa considerazione vantaggiosa che essa può essere coltivata come complemento di quella *Euclidea,* e può fornire un vastissimo numero di esercizi elementari.

2. Darò qui, nella speranza che questa geometria incontri qualche cultore, un esempio dello studio che si può fare di un triangolo notevole.

Sia T il triangolo di cui le caratteristiche sono 1, — 3, 1, (intendendo sempre che le caratteristiche siano enunciate nell'ordine a, b, c, cioè la 1ª sia il coefficiente di a, la 2ª il coefficiente di b, la 3ª il coefficiente di c nella relazione $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$) quello cioè i cui lati soddisfano la relazione

$$3b = a + c$$

e proponiamoci di cercare qualcuna delle proprietà di questo triangolo T. Ma a proposito di questo studio qualche riflessione generale deve esser aggiunta a quelle precedenti.

Per fare in una maniera generale lo studio d'un triangolo notevole, conviene dapprima ricercare l'espressione dei suoi differenti elementi geometrici in funzione di due parametri λ e μ, se è semplicemente notevole: in funzione d'un parametro t se è doppiamente notevole. Quando il formulario è stabilito, le conseguenze che se ne possono dedurre si trovano con facilità.

Si osserverà a questo proposito che

1°. *In un triangolo semplicemente notevole vi è sempre una proprietà corrispondente a tre elementi di questo triangolo.*

2°. *In un triangolo doppiamente notevole vi è sempre una proprietà corrispondente a due elementi di questo triangolo.*

Nell'ultimo caso, siccome tutti i triangoli di una medesima famiglia sono simili, la proprietà corrispondente a due elementi del triangolo considerato non può riguardare che il rapporto di questi due elementi.

Per es. si voglia considerare il triangolo doppiamente notevole che è così definito:

1° è rettangolo,

2° i suoi lati sono in progressione aritmetica.

Tutti i triangoli di questa famiglia sono simili al triangolo rettangolo di cui i lati sono $3t, 4t, 5t$. Fra due elementi qualunque di questo triangolo vi è una relazione, ma *questa non può basarsi che sul rapporto di due di questi elementi.* Si può, per citare una proprietà che si verifica immediatamente, riconoscere cioè che il raggio del cerchio ex-iscritto corrispondente all'ipotenusa è il triplo del diametro del cerchio iscritto.

Ma tutte le *relazioni metriche* fra gli elementi di questo triangolo sono, lo ripetiamo, delle relazioni di rapporto fra due elementi.

Lo studio di un triangolo notevole deve basarsi su due punti. Si può cercare: 1° le *relazioni metriche* come quella che abbiamo citato; 2° le *relazioni descrittive.* Le prime sono in numero indefinito, e ne abbiamo dato la ragione, le altre sono al contrario assai rare e non possono risultare che da proprietà sempre difficili ad osservarsi.

Poichè tutti gli elementi di un triangolo semplicemente notevole si esprimono in funzione di due parametri λ e μ, tre elementi qualunque, lo ripetiamo, sono legati da una certa uguaglianza; vi è dunque un'infinità di proprietà metriche in un tale triangolo, proprietà che gli sono individuali, adottando la parola adoprata precedentemente. Scegliendo quelle proprietà che sono abbastanza semplici, si sarà fatto lo studio del triangolo considerato dal primo punto di vista.

Il secondo modo di studiare i triangoli notevoli dà origine a delle ricerche di un ordine più delicato. Bisogna, per seguire questa seconda via, cercare nel triangolo studiato dei punti che siano in linea retta, delle rette concorrenti etc. Queste proprietà sono individuali al triangolo considerato, vale a dire non appartengono ad un triangolo qualunque.

Diamo un esempio di una proprietà descrittiva enunciando il teorema seguente:

Nel triangolo rettangolo, i cui lati sono in progressione aritmetica se si considera il cerchio iscritto Γ, *il punto di contatto della tangente parallela alla ipotenusa* BC *e il punto di contatto di una delle tangenti perpendicolari a* BC *sono in linea retta con uno dei punti* B *o* C.

Infatti il perimetro di ABC è uguale a $12t$, secondo la notazione adottata sopra, e la sua area è uguale a $6t^2$; il diametro dal cerchio iscritto è $2t$ e la tangente CD è pure uguale a $2t$. Il triangolo CDE è dunque rettangolo e isoscele e l'angolo DEC è uguale a 45°. Il punto F è dunque l'estremità del raggio condotto per il centro O perpendicolarmente a DE. Da questa osservazione resulta la proprietà enunciata; proprietà che non è verificata per un triangolo qualunque.

In conclusione, come si verifica nell'esempio precedente, le proprietà descrittive sono conseguenza della proprietà metriche e si deve dunque avanti tutto mettere in luce quest'ultime e ricercare poi con cura tutte le conseguenze che possono derivare da esse.

3. Formulario del triangolo notevole. — T(1, - 3, 1).

Lasciamo adesso le considerazioni generali che era indispensabile fare in principio, e applichiamo qualcuna di esse al triangolo T sopra definito. Dobbiamo prima ricercare le formole che gli sono particolari, e che, come abbiamo osservato, debbono esprimere tutti gli elementi di T in funzione di due parametri λ e μ

Poichè abbiamo

$$3b = a + c$$

possiamo porre

$$a = \lambda + \mu, \quad b = \lambda, \quad c = 2\lambda - \mu$$

ove λ e μ stanno a rappresentare due parametri variabili.

Ad ogni valore attribuito a questi parametri corrisponde un triangolo T; bisogna però che si possa affermare l'esistenza del triangolo corrispondente.

Per stabilire questa esistenza bisogna osservare che si ha

$$p = 2\lambda, \quad p - a = \lambda - \mu, \quad p - b = \lambda, \quad p - c = \mu;$$

le condizioni di possibilità sono dunque

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda > \mu.$$

Quindi essendo dati dei valori positivi arbitrari di λ e μ, purchè sia però $\lambda > \mu$, corrisponde sempre a questi valori un triangolo ABC.

Si può facilmente costruire il triangolo nel modo seguente.

Prendiamo una circonferenza Γ arbitraria e sopra una tangente a partire dal punto di contatto D portiamo una lunghezza $2\lambda = DA$; per A e pel punto medio, C di DA conduciamo delle tangenti a Γ che si taglino in B e siano D' e K i punti di contatto rispettivi. Il triangolo così formato è un triangolo T. Poniamo infatti $BD' = \mu$, si ha

$$AC = \frac{AD}{2} = \lambda, \quad CB = CK + KB = \lambda + \mu, \quad AB = AD' - BD' = 2\lambda - \mu.$$

Adotteremo le notazioni seguenti: *r raggio del circolo iscritto,* r_a, r_b, r_c *raggi dei circoli ex-iscritti,* R *raggio del circolo circoscritto,* S *area del triangolo,* m_a, m_b, m_c *le mediane* h_a, h_b, h_c *le altezze.*

Relazione fra gli angoli. — Si hanno dapprima le relazioni

$$r_a = 2\lambda \tan\frac{A}{2}, \quad r_a = \lambda \cot\frac{C}{2}, \quad r_a = \mu \cot\frac{B}{2},$$

che danno

(1) $$2 \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = 1.$$

Quindi: *nel triangolo notevole* T, *il doppio prodotto delle tangenti dei semiangoli* A *e* C *è uguale all'unità.*

In un triangolo ABC questi elementi sono sempre disposti in un ordine invariabile; gli angoli si chiamano A, B, C, i lati a, b, c; le mediane m_a, m_b, m_c etc. Esistono dunque per gli elementi di un gruppo determinato due elementi estremi e un elemento medio. Questa denominazione permette di dare agli enunciati una forma più rapida in molti casi; noi l'utilizzeremo in seguito.

La nota relazione trigonometrica

$$\Sigma \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1,$$

combinata con la (1) dà

$$\frac{1}{2} = \tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2}\right),$$

ovvero

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2}\right),$$

ed infine

$$\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} \tag{2}$$

dunque: *Nel triangolo notevole* T *la cotangente del semiangolo medio è uguale alla somma delle cotangenti dei semiangoli estremi.*

In un triangolo notevole, come quello T definito, esiste una relazione fra due qualunque dei suoi angoli. Combinando le relazioni (1) e (2), si ottengono le altre

$$\begin{cases} 2\tan^2\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + 1 = 0 \\ 2\tan^2\frac{C}{2} - \tan\frac{C}{2}\cot\frac{B}{2} + 1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Le uguaglianze (1), (2), (3) si verificano pure per mezzo delle formole

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2(\lambda-\mu)}},\quad \tan\frac{B}{2} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu(\lambda-\mu)}{2}},\quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{2\mu}}\,. \tag{4}$$

Esiste in un triangolo notevole qualunque un'infinità di relazioni fra gli angoli di esso, ma queste relazioni appartengono esclusivamente al triangolo considerato e non ad un triangolo qualunque. Per citarne una, riferendoci al precedente caso, si può osservare che le uguaglianze

$$\cos A = \frac{2\lambda - 3\mu}{2\lambda - \mu} \quad , \quad \cos C = \frac{3\mu - \lambda}{\lambda + \mu}$$

dànno la relazione

$$3(1 + \cos A \cos C) = 5(\cos A + \cos C).$$

Calcolo di r, r_a, r_b, r_c.

$$S = \lambda\sqrt{2\mu(\lambda-\mu)} \tag{5}$$

e successivamente.

$$r = \sqrt{\frac{\mu(\lambda-\mu)}{2}} \tag{6}$$

$$r_a = \lambda\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda-\mu}} \tag{7}$$

(8) $$r_b = \sqrt{2\mu(\lambda - \mu)}$$

(9) $$r_c = \lambda \sqrt{2\frac{\lambda - \mu}{\mu}}.$$

Da queste formole si ricava

(10) $$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}.$$

Dunque: *Nel triangolo notevole* T, *l'inversa del raggio del circolo ex-inscritto medio è uguale alla somma delle inverse dei raggi dei due altri circoli ex-iscritti.*

Queste stesse formole dànno

(11) $$r_b = 2r$$

dunque: *Nel triangolo notevole* T *il raggio del circolo ex-iscritto medio è uguale al diametro del circolo iscritto.*

Questa proprietà può così esser considerata come la conseguenza dell'uguaglianza (10) o della relazione

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

che appartiene a un triangolo qualunque.

Si può proseguire questo studio, che noi abbiamo appena accennato, essendo il nostro unico fine quello di richiamare l'attenzione dei lettori di questo giornale sopra un campo di ricerche assai semplice, e che non potrà mancare di un certo interesse. Così, calcolando le bisettrici l_a, l_b, l_c si trova che la bisettrice l_b è data dalla formola

$$l_b^2 = \frac{8}{9}ac;$$

e così pure che fra le altezze sussiste la relazione

$$\frac{3}{h_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} \text{ ecc.}$$

Ma senza insistere sulle proprietà del triangolo T, aggiungerò per terminare questa nota un'osservazione che potrà essere messa a profitto di coloro che avranno la curiosità di cercare qualche triangolo notevole.

Sopra una famiglia di triangoli notevoli.

Il triangolo notevole T, del quale abbiamo indicato alcune proprietà, appartiene a una famiglia di triangoli caratterizzata dall'uguaglianza

(A) $$mb = a + c,$$

essendo m un numero intero o frazionario > 1. Si possono costruire tutti questi triangoli mediante la seguente osservazione.

Riferendoci alla costruzione fatta per costruire precedentemente il triangolo T (1, — 3, 1) prendiamo sopra AD un punto C tale che si abbia AC $= \lambda$, CD $= k\lambda$.

Allora i triangoli ABC sono dati dalle formole

(F) $$\begin{cases} a = k\lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = (k+1)\lambda - \mu. \end{cases}$$

Da queste si ricava

(B) $$a + c = (2k + 1)\, b$$

e ponendo $m = 2k + 1$, da cui $k = \frac{m - 1}{2}$, l'uguaglianza (A) sarà verificata, qualunque sia m intero o frazionario purchè > 1, come avevamo osservato in principio.

Il caso più semplice corrisponde all'ipotesi $m = 2$, e se prendiamo soltanto valori interi viene poi il caso $m = 3$ che è quello che noi abbiamo scelto, ma si troveranno certamente in questa serie dei casi ben più interessanti.

Per trovare dei triangoli doppiamente notevoli nella serie considerata bisogna assoggettare i lati a una seconda relazione o imporre, ciò che fa lo stesso, una certa proprietà al triangolo notevole.

Per esempio si può domandare quali sono i triangoli rettangoli della famiglia considerata.

Bisogna allora che, variando λ e μ, si abbia per es.,

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

si troverà allora, applicando le formole (F),

$$a = \lambda \frac{2k^2 + 2k + 1}{2k + 1} \quad , \quad b = \lambda \quad , \quad c = \lambda \frac{2k(k + 1)}{2k + 1}.$$

Supponendo $k = 1$, si ha il triangolo rettangolo che corrisponde al triangolo notevole T che noi abbiamo considerato sopra. Questo triangolo è il triangolo θ, i cui lati sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5. Si ha infatti $3^2 + 4^2 = 5^2$; $3 . 3 = 4 + 5$. Il triangolo θ è un esempio d'un triangolo doppiamente notevole.

Facendo $k = 2$ si trova il triangolo θ', che è rettangolo, e che è tale che il quintuplo del minor lato è uguale alla somma dei due altri; esso è il triangolo i cui lati sono proporzionali ai numeri 5, 12, 13. Infatti

$$13^2 = 12^2 + 5^2 \; ; \; 5 . 5 = 12 + 13.$$

Dando a k successivamente tutti i valori interi 1, 2, 3... , si ottiene una serie di triangoli rettangoli

$$\begin{array}{ccc} 3, & 4, & 5 \\ 5, & 12, & 13 \\ 7, & 24, & 25 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

e si apprende di qui (così si vede come in matematiche le cose più disparate in apparenza hanno talvolta fra loro intimi legami) a risolvere l'equazione indeterminata di 2° grado

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

mediante le formole

$$x = 1 + 2k(k + 1)$$
$$y = 2k + 1$$
$$z = 2k(k + 1),$$

che dànno tutte le soluzioni di questa equazione nel caso particolare che y sia dispari: le due altre incognite sono allora due numeri interi consecutivi.

Inoltre il quadrato del lato medio è sempre uguale alla somma degli altri due lati. Infatti, avendosi

$$y^2 = (x - z)(x + z).$$

e

$$x - z = 1.$$

si ha subito

$$y^2 = x + z.$$

G. De Longchamps.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

73, 252, 253, 386, 387, 459, 472, 473, 475, 478

73. *Dato un triangolo, non regolare, trovare il luogo geometrico dei punti tali che una delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi ai lati uguagli la somma o la differenza delle altre due.*

A. Baldassarre.

Risoluzione del generale H. Brocard di Bar-le-Duc.

Indicando con x, y, z le distanze di un punto dai tre lati del triangolo, l'equazione del luogo, in coordinate trilineari è $x = y \pm z$. Ma l'ipotesi $x = y + z$ dà $z = x - y$ e poichè x, y, z sono l'una all'altra sostituibili, si vede che il luogo domandato è lo stesso nelle due ipotesi e si compone delle *interbisettrici*, cioè delle rette che congiungono i piedi delle bisettrici (interne ed esterne).

Altre risoluzioni dei proff. V. Retali di Milano, A. Borio di Torino e G. Cardoso-Laynes di Livorno.

252. *Si dimostri, senza ricorrere alla teoria delle differenze, che se la relazione*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \ldots + \binom{n}{n} x_n = \underline{|n}$$

è soddisfatta qualunque sia l'intero positivo n, *si avrà*

$$x_n = \underline{|n} \left(1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{\underline{|n}}\right).$$

G. Nonni.

Risoluzione dei sigg. F. Celestri e Z. Giambelli, studenti nella R. Università di Pisa.

Verificata la relazione per $n = 1, = 2, = 3, \ldots$ supponiamola vera per $n = m$; essa sarà dimostrata in generale, quando si provi che, fatta tale ipotesi, si verifica ugualmente per $n = m + 1$.

Si ricava intanto

$$x_r = r \underline{|r-1} \left(1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \ldots + (-1)^{r-1} \frac{1}{\underline{|r-1}}\right) + (-1)^r$$

onde

$$(1) \qquad x_r = r x_{r-1} + (-1)^r$$

che supporremo anche valevole per $r = 1$ interpretando l'unità come x_0.

Per brevità usando i simboli sommatorii, la relazione data, per $n = m + 1$, può scriversi

$$\sum_r^{m+1} \binom{m+1}{r} x_r$$

che per la (1) si trasforma

$$\sum_{0}^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r}[rx_{r-1}+(-1)^r]=$$

$$=\sum_{0}^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} rx_{r-1}+\sum_{0}^{m+1}{}_r (-1)^r \binom{m+1}{r}=\sum_{0}^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} rx_{r-1};$$

essendo $\sum_{0}^{m+1}{}_r (-1)^r \binom{m+1}{r}=(1-1)_{m-1}=0$.

Si ha poi evidentemente

$$\sum_{0}^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} rx_{r-1}=\sum_{0}^{m-1}{}_r \binom{m+1}{m-r+1} rx_{r-1}=$$

$$=(m+1)\,.\sum_{0}^{m}{}_r \binom{m}{m-r} x_r=(m+1)\,.\sum_{0}^{m}{}_r \binom{m}{r} x_r$$

ma per quello che si è detto a principio, si ha

$$\sum_{0}^{m}{}_r \binom{m}{r} x_r=\underline{|m}\,,\quad \text{onde}\quad \sum_{0}^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} x_r=\underline{|m+1}.$$

c. d. d.

253. *Valendosi del resultato della quistione precedente si determini il numero delle permutazioni degli elementi* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *nelle quali nessun elemento occupi il posto rappresentato dal proprio indice.*

G. Nonni.

Risoluzione dei sigg. Z. Giambelli e F. Celestri, studenti nella R. Università di Pisa.

Tutte le permutazioni che si possono formare cogli n elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono $\underline{|n}$. Fra queste ve ne sono di quelle in cui gli elementi occupano il posto rappresentato dal proprio indice o tutti indistintamente meno uno, (*) o meno due, ecc., fino a quelli in cui nessun elemento occupa il posto rappresentato dal proprio indice. Consideriamo ora in generale le permutazioni in cui r elementi non occupano il posto rappresentato dal proprio indice. È evidente prima di tutto che questi r elementi si possono scegliere in $\binom{n}{r}$ modi diversi e inoltre da ciascuna di queste combinazioni si possono avere un certo numero di permutazioni tali che nessun elemento occupi il posto rappresentato dal proprio indice. Se si indica ora con X_r questo numero di permutazioni, si avrà che il numero che indica quante permutazioni si possono fare con n elementi, in modo che r di essi non occupino il posto rappresentato dal proprio indice, sarà

$$\binom{r}{n} x_r$$

(*) Veramente non si ha nessuna permutazione in cui un solo elemento non occupa il posto rappresentato dal proprio indice, noi per avere uniformità nelle formole l'ammetteremo pure e, per quanto è detto in seguito, il numero di queste permutazioni lo indicheremo con $\binom{n}{1} x_1$, ponendo allora $x_1=0$.

e ponendo successivamente $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ avremo, per quanto fu detto in principio:

$$\underline{|n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \ldots + \binom{n}{n} x_n$$

e quindi per la questione precedente

$$x_n = \underline{|n} \left[1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots + (-1)^n \right]$$

che è la formula richiesta.

386. *Date in uno stesso piano tre punteggiate simili, il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo formato da tre punti omologhi, è una cubica razionale.*

V. Retali.

Risoluzione del prof. C. Merizzi di Ceva.

Siano u, v, w, le tre punteggiate ed U_0, V_0, W_0 i loro punti-origine. Sia $1 : m$ il rapporto di similitudine tra la u e la v, ed $1 : n$ tra la u e la w.

Saranno allora omologhi tre punti U, V, W, quando sussistano le uguaglianze

$$\frac{U_0 U}{1} = \frac{V_0 V}{m} = \frac{W_0 W}{n} = \lambda$$

essendo il parametro λ, il comune valore dei tre rapporti.

Rispetto ad una coppia di assi ortogonali, di cui l'asse delle x coincida colla retta u e l'origine sia in U_0, indichiamo con x_0', y_0' e x_0'', y_0'' le coordinate di V e W e con ϑ' e ϑ'' gli angoli che u, v, fanno coll'asse delle x. Avremo allora

$$\begin{cases} U \equiv (\lambda\,, 0) \\ V \equiv (x_0' + \lambda m \cos\vartheta'\,,\ y_0' + \lambda m \operatorname{sen}\vartheta') \\ W \equiv (x_0'' + \lambda n \cos\vartheta''\,,\ y_0'' + \lambda n \operatorname{sen}\vartheta''). \end{cases}$$

Le coordinate x, y, del centro del cerchio passante per U, V, W, soddisfano alle equazioni

$$(1) \qquad \begin{aligned} (x - \lambda)^2 + y^2 &= (x - x_0' - \lambda m \cos\vartheta')^2 + (y - y_0' - \lambda m \operatorname{sen}\vartheta')^2 = \\ &= (x - x_0' - \lambda n \cos\vartheta'')^2 + (y - y_0'' - \lambda n \operatorname{sen}\vartheta'')^2 \end{aligned}$$

dalle quali, colle debite riduzioni, si ricavano altre due equazioni della forma:

$$(2) \qquad \lambda^2 (1 - m^2) + \lambda f_1(x\,, y) = f_2(x\,, y),$$

$$(3) \qquad \lambda^2 (1 - n^2) + \lambda f_3(x\,, y) = f_4(x\,, y),$$

essendo ciascuna delle $f(x\,, y)$ una funzione lineare delle x, y.

Eliminando dalle (2), (3) il parametro λ, si ottiene la equazione del luogo: a tal uopo, sottraendo dai due membri della (2), moltiplicati per $(1 - n)^2$, i due membri della (3), moltiplicati per $(1 - m^2)$ si ricava λ come rapporto di due funzioni lineari di x, y cioè $\dfrac{f_5(x, y)}{f_6(x, y)}$, il qual valore sostituito nella (2), dà

$$(1 - m^2) \left[f_5(x\,, y) \right]^2 + f_1(x\,, y) . f_6(x\,, y) = f_2(x\,, y) \left[f_6(x\,, y) \right]^2,$$

che è una equazione di terzo grado. Dunque il luogo cercato è una cubica.

Osserviamo poi che le (2), (3), ponendo in evidenza x, y, si possono scrivere

$$x \varphi_1(\lambda) + y \varphi_2(\lambda) = \varphi_3(\lambda)\,, \qquad x \varphi_4(\lambda) + y \varphi_5(\lambda) = \varphi_6(\lambda)\,,$$

dove $\varphi_3(\lambda)$ e $\varphi_6(\lambda)$ sono funzioni quadratiche di λ e le altre $\varphi(\lambda)$ funzioni lineari. Si ricava

$$x = \frac{\varphi_3(\lambda)\,\varphi_5(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\,\varphi_6(\lambda)}{\varphi_1(\lambda)\,\varphi_5(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\,\varphi_4(\lambda)} \qquad y = \frac{\varphi_1(\lambda)\,\varphi_6(\lambda) - \varphi_3(\lambda)\,\varphi_4(\lambda)}{\varphi_1(\lambda)\,\varphi_5(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\,\varphi_4(\lambda)}.$$

Dunque la cubica trovata è tale che le coordinate di un suo punto qualunque sono esprimibili mediante funzioni algebriche e razionali di uno stesso parametro λ, variabile da $-\infty$ a $+\infty$: essa cioè è *unicursale*, e quindi *razionale*.

387. *Date in un piano tre punteggiate uguali, trovare il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo avente per vertice i tre punti omologhi.*

RETALI.

Risoluzione del prof. C. Merizzi di Ceva.

Questa quistione è un caso particolare della precedente: quando si fa $m = n = 1$, le tre punteggiate diventano uguali e le precedenti equazioni (2) e (3), annullandosi i coefficienti di λ^2, diventano

$$\lambda f_1(x, y) = f_2(x, y)$$
$$\lambda f_3(x, y) = f_4(x, y)$$

donde, eliminando λ, si ricava

$$f_2(x, y)\; f_3(x, y) - f_1(x, y)\; f_4(x, y) = 0$$

la quale equazione, essendo ciascuna delle $f(x, y)$ lineare, è di secondo grado. Dunque il luogo cercato è una conica.

459. *La conica polare rispetto a una cubica generale (non circolare) del punto di Lemoine del triangolo formato dagli asintoti, è un cerchio.*

RETALI.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

L'equazione della cubica riferita al triangolo degli asintoti è

(1) $$\Delta^2 R + 6kxyz = 0\,,$$

dove $\Delta = ax + by + cz = 0$ è l'equazione della retta all'infinito, ed $R = mx + ny + pz = 0$ l'equazione della retta passante pei punti a distanza finita in cui gli asintoti tagliano la cubica.

L'equazione della conica polare di $P \equiv (X, Y, Z)$ rispetto alla (1) è

(2) $$(mX + nY + pz)\Delta^2 + 2(aX + bY + cZ)\Delta R + 6k(Xyz + Yzx + Zxy) = 0.$$

Tale conica ha i medesimi punti all'∞ della

$$Xyz + Yzx + Xxy = 0\,,$$

e questa passa poi punti ciclici, se $\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c}$, cioè se P è il punto di Lemoine del triangolo degli asintoti. La conica polare allora è il circolo circoscritto al triangolo medesimo.

In modo analogo si dimostra che la (2) è un'*iperbole equilatera*, se P sta sulla retta $X\cos A + Y\cos B + Z\cos C = 0$, coniugata dell'ortocentro nel triangolo degli asintoti.

E la (2) è una *parabola*, se P sta sulla conica

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 - 2bcYZ - 2caZX - 2abXY = 0$$

tangente ai lati del triangolo degli asintoti nei loro punti medi.

472. *Se un determinante* $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ *è tale che per ogni elemento si abbia*

$$a_{rs} = r^s,$$

esso è uguale a

$$1!\,.\,2!\,.\,3!\,\ldots\ldots n!$$

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzioni analoghe del sig. Sibirani, studente nella R. Università di Bologna e del prof. V. Retali di Milano.

Essendo $a_{rs} = r^s$ si ha

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \ldots 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 \ldots 3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n^2 & n^3 \ldots n^n \end{vmatrix} = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \ldots 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 \ldots 3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & n^2 \ldots n^{n-1} \end{vmatrix}$$

L'ultimo determinante è un determinante di Vandermonde e perciò è eguale a

$$\begin{aligned} &(n-(n-1))\,(n-(n-2)\ldots\ldots(n-1)\,) \\ &\qquad ((n-1)(n-2))\ldots((n-1)-1) \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad (2-1) \end{aligned}$$

Ne segue

$$D = n!\,.\,(n-1)!\ldots 2!\,.\,1!$$

Altra risoluzione del sig. G. Marletta, studente della R. Università di Catania.

473. *Se da un punto* P, $(n-2)$*-plo sopra una curva* C^n *d'ordine* n, *si conduce una retta mobile che seghi ulteriormente la curva nei punti* P_1 *e* P_2, *il luogo del punto medio del segmento (reale o ideale)* P_1P_2 *è, in generale, una curva* C^n *d'ordine* n, *di cui* P *è un punto* $(n-1)$*-plo.*

Dare la dimostrazione analitica e sintetica. Esaminare i casi particolari e generalizzare la questione.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Se, nel piano di C^n, facciamo corrispondere a un punto A il suo coniugato armonico rispetto alle due intersezioni di C^n, non cadenti in P, con la retta |PA, abbiamo la *trasformazione arguesiana generalizzata*. Cerchiamo la trasformata di una retta: ogni raggio del fascio P è diviso armonicamente da C^n e dalla prima polare di P (rispetto a C^n); ciò è evidente geometricamente e si dimostra analiticamente così: Se $U = 0$ è la equazione di C^n, dette (x_1, y_1, z_1) le coordinate omogenee di P e (x_2, y_2, z_2) quelle di un punto variabile Q della prima polare di P, le coordinate d'un punto generico della retta |PQ| sono $x_1 + \lambda x_2$, $y_1 + \lambda y_2$, $z_1 + \lambda z_2$ e il parametro λ è determinato dalla equazione

$$U_1 + \lambda\,.\,\Delta U_1 + \ldots + \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\,.\,\Delta^{n-2}U_1 + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\,\Delta^{n-1}U_1 + \lambda^n U_2 = 0,$$

ma $U_1, \Delta U_1, \ldots \Delta^{n-3}U_1$ sono nulli perchè P $(x_1 y_1 z_1)$ è punto $(n-2)$*-plo* e il coefficiente di λ^{n-1} è pure nullo perchè Q è sulla prima polare di P, la equazione in λ si riduce dunque a

$$\Delta^{n-2}U_1 + (n-2)!\;\lambda^2\,.\,U_2 = 0$$

che, avendo due radici eguali e di segno contrario, dimostra il teorema. Ciò posto, per avere la trasformata di una retta r basta osservare che r sega la prima polare in $(n-1)$ punti e perciò P sulla trasformata è $(n-1)$-*plo*; siccome poi ogni raggio del fascio P sega r in un sol punto, la trasformata ha su quel raggio un sol punto diverso da P; essa è dunque d'ordine n ed ha un punto $(n-1)$-*plo* in P. Se prendiamo per r la retta all'infinito, abbiamo il teorema del sig. *Cardoso*; assumendo per C^n una cubica generale e per P un punto di essa, abbiamo la trasformazione *Arguesiana* del sig. *Saltel* ecc. ecc.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

1. L'equazione cartesiana d'una curva d'ordine n sia

$$(C^n) \qquad f_n + f_{n-1} + \ldots\ldots + f_1 + f_0 = 0$$

dove f_r rappresenta il complesso dei termini di grado r nelle coordinate: in particolare sia

$$f_n = a_0 x^n \quad + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n ,$$
$$f_{n-1} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} y + \ldots + b_{n-2} x y^{n-2} + b_{n-1} y^{n-1} .$$

Per determinare le coordinate delle intersezioni $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}, P_n$ della curva C^n colla retta

$$(\mathrm{R}) \qquad y = \lambda x + \beta ,$$

elimino y fra le equazioni delle due linee, ed ho per le ascisse

$$(1) \qquad \mathrm{A}x^n + \left[\beta \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \lambda} + \mathrm{B}\right] x^{n-1} + \ldots = 0$$

dove

$$\mathrm{A} = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n , \ \mathrm{B} = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-2}\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda^{n-1} .$$

Il centro delle medie distanze dei punti $P_1, P_2 \ldots P_{n-1}. P_n$ ha le coordinate date dalle equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} n\mathrm{A}x + \beta \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \lambda} + \mathrm{B} = 0 \\ y = \lambda x + \beta . \end{cases}$$

2. Se ora suppongo che la retta R descriva un fascio il cui centro sia P, origine delle coordinate, si ha per ogni posizione della retta, $\beta = 0$ e le (2) si riducono alle

$$n\mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0 \quad , \quad y = \lambda x .$$

Eliminando λ fra queste due equazioni, ho

$$(C'^n) \qquad n f_n + f_{n-1} = 0$$

luogo del centro delle medie distanze dei punti $P_1 \ldots P_n$, quando la R passi per un punto fisso a distanza finita.

La curva C'^n ha un punto $(n-1)$-*plo* in P; le $n-1$ tangenti corrispondenti sono rette che tagliano C^n in punti il cui il baricentro è P.

Le due curve C', C'^n hanno i medesimi punti all'∞, gli asintoti formano due multilateri omotetici col centro di omotetia P e il rapporto n.

Inoltre l'equazione della C'^n è indipendente dai termini di C^n di grado inferiore ad $n-1$, quindi il luogo C'^n è identico per tutte le curve d'ordine n che hanno gli stessi asintoti della data.

3. L'equazione del luogo C'^n rimane la medesima se r punti della curva data coincidono in P, purchè a P si attribuisca il peso r nel calcolare il baricentro dei punti $P_1, \ldots P_n$.

Ma se, coincidendo r punti della C^n in P, si cerca il luogo del centro delle medie distanze dei rimanenti $n-r$ punti della curva data posti su R (passante per P), si ha

$$(n-r)\,f_n + f_{n-1} = 0.$$

Se poi in questa si pone $r = n-2$, si ha pel luogo richiesto dalla questione 473, l'equazione

$$2f_n + f_{n-1} = 0.$$

4. Considero ora il caso in cui la retta R si mantenga parallela ad una direzione data: sarà allora λ costante e β variabile. Eliminando β fra le (2) ho pel centro delle medie distanze il luogo

$$A_1 x + A_2 y + B = 0 \tag{4}$$

dove

$$A_1 = na_0 + (n-1)\,a_1\lambda + \ldots\ldots + 2a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-1}$$
$$A_2 = a_1 + 2a_2\lambda + \ldots\ldots\ldots + (n-1)\,a_{n-1}\lambda^{n-2} + na_n\lambda^n.$$

Quindi un fascio di rette parallele taglia una curva algebrica razionale in gruppi di punti, il cui baricentro descrive una retta (diametro). L'inviluppo dei diametri è una curva della $(n+1)^a$ classe.

Infatti il primo membro della (4) è di grado $(n-1)^\circ$ nella indeterminata λ.

5. Ulteriori generalizzazioni della questione 473 si possono ottenere sostituendo alla intersezione della curva C^n con una retta, quelle della stessa curva con una conica. Si hanno ad esempio i due teoremi seguenti, il secondo dei quali è un corollario del primo:

I. Se coniche simili tagliano una curva d'ordine n, il baricentro di uno dei gruppi di $2n$ punti determinati e il centro della conica corrispondente sono elementi corrispondenti d'una *affinità*.

II. Coniche ometetiche tagliano una curva d'ordine n, in gruppi di punti isobaricentrici.

475. *È dato l'ortocentro del triangolo* ABC *ed il punto di mezzo del lato* BC. *I vertici* B *e* C *si muovono su di una retta fissa.*

1°. *Si cerchi l'inviluppo dei lati* AB *e* AC.

2°. *I piedi delle altezze abbassate da* B *e* C *sono su di una strofoide obliqua.*

3°. *La retta che unisce questi due piedi passa per un punto fisso.*

4°. *Si cerchi il luogo dei punti d'intersezione col circolo* ABC *del diametro che passa pel punto medio di* BC. (*)

5°. *Si cerchi il luogo del punto di Lemoine del triangolo.*

A. Droz-Farny.

Risoluzione del prof. V. Retali.

I vertici B e C segnano sulla retta fissa s una involuzione, i cui punti doppi sono il punto di mezzo M e il punto all'infinito: il fascio H (C...) è proiettivo alla punteggiata (B) e le punteggiate segnate dai raggi |HC| e |BA| sulla retta all'infinito sono pure proiettive (in involuzione, coi punti ciclici per punti doppi): l'inviluppo dei lati AB e AC è dunque una parabola P^2 tangente ad s.

Se H è l'ortocentro, i cerchi ABC passano pel punto K simmetrico di H rispetto ad s e, avendo i centri sulla mediatrice di $\overline{BC}$, formano un fascio i cui punti base al finito sono K e il punto F simmetrico di H rispetto ad M. Ne segue,

(*) Poichè i circoli ABC formano un fascio, questo enunciato 4° deve essere modificato. (V. R.)

pel teorema di Lambert, che F è il fuoco di P^2; |AK|, isogonale di |AF| rispetto all'angolo BAC, è un diametro; |BC| è la tangente al vertice ed H è sulla direttrice.

2°. Il luogo dei piedi β e γ delle altezze calate da B e C. è la pedale della parabola P^2 rispetto al punto H della direttrice: dunque, per un teorema ben noto, è una strofoide obliqua (*focale à noeud* del Quetelet) avente in H il punto doppio, passante per M e per la proiezione P di H su |BC|. L'assintoto reale è la retta simmetrica di s rispetto ad H; le tangenti nel punto doppio sono le tangenti a P^2 uscenti da H ecc.

3°. I raggi |Hβ|, |Hγ| uscenti dal punto doppio H, sono in involuzione: i due punti β e γ segnano dunque sulla cubica una *involuzione centrale* e perciò la retta |$\beta\gamma$| passa per un punto fisso μ della cubica, cioè pel tangenziale di M che è pure il punto al finito della cubica sopra l'assintoto reale. Questo punto μ si costruisce subito osservando che giace sulla perpendicolare calata da P sulla retta che unisce H col vertice V di P^2.

4°. Se A' è la ulteriore intersezione di |AM| col cerchio ABC, abbiamo $\widehat{MA'F} = \widehat{FA'A} = 90^0$ e il luogo di A' è il cerchio descritto sopra $\overline{MF}$ come diametro.

5°. Il punto di Lemoine del triangolo ABC è comune alla retta che unisce M col punto medio ϖ dell'altezza $\overline{AP}$, e a quella che unisce A col polo α di |BC| rispetto al cerchio ABC. Presi per assi coordinati la retta dei centri OM e la |FK|, che unisce i punti-base del fascio di cerchi, ponendo $\overline{FK} = 2 . \overline{OK} = 2 . \overline{MP} = 2m$, $\overline{PH} = n$, $\overline{KA} = 2\lambda$, l'equazione del cerchio ABC è

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - m^2 = 0;$$

le coordinate di ϖ, punto medio dell'altezza $\overline{AP}$, sono (m, λ), e quelle del polo α di |BC|, rispetto al cerchio, $\left(0, \frac{m^2}{n-\lambda}\right)$: le rette |A$\alpha$|, |M$\varpi$| hanno dunque respettivamente per equazione

$$(m^2 + 2\lambda^2 - 2n\lambda)\, x + m\,(n - \lambda)\, y = m^3$$
$$(n - \lambda)\, x + my = mn$$

fra le quali eliminando λ si trova

$$mx\,(x - m) + (n - y)\,[my - 2nx + 2m\,(n - y)] = 0;$$

trasportando ora gli assi parallelamente in M abbiamo per equazione del luogo cercato

$$mx^2 - 2nxy + my^2 + m\,(ny - mx) = 0;$$

una conica circoscritta al parallelogrammo MHPO, tangente in M alla coniugata isogonale di |MH| rispetto all'angolo PMO. Secondochè $m \gtrless n$ il luogo è ellisse o iperbole; per $m = n$ si spezza in due rette parallele ecc. Il diametro $\overline{MP}$ biseca l'angolo degli assi e le lunghezze di questi sono

$$2a = m\sqrt{m : (m - n)}, \qquad 2b = m\sqrt{m : (m + n)}.$$

478. *Date* 2n *variabili indipendenti*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{2n},$$

dimostrare:

1°. *Che il numero dei valori algebricamente diversi che può assumere la funzione*

$$\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = (x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4) \ldots (x_{2n-1} + x_{2n}),$$

per tutte le possibili sostituzioni sulle x, *è dato da*

$$\lambda_{2n} = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots . (2n-1).$$

2°. *Che, indicando con* $\Sigma\varphi\,(x_1, x_2, \ldots . x_{2n})$ *la somma dei predetti valori e con* $\Sigma\varphi\,(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots . x_{i_{2n-2}}) \,.\, \varphi\,(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}})$ *il prodotto della somma dei* λ_{2n-2} *valori della funzione*

$$\varphi\,(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots . x_{i_{2n-2}}) = (x_{i_1} + x_{i_2}) + \ldots . + (x_{i_{2n-3}} + x_{i_{2n-2}})$$

per la funzione

$$\varphi\,(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}) = (x_{i_{2n-1}} + x_{i_{2n}}),$$

si ha

$$\Sigma\varphi\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n}) = \varphi\,(x_1 x_2)\,\Sigma\varphi\,(x_3 x_4 \ldots . x_{2n}) + \varphi\,(x_1 x_3)\,\Sigma\varphi\,(x_2 x_4 \ldots . x_{2n}) + \\ + \ldots \ldots . + \varphi\,(x_1 x_{2n})\,\Sigma\varphi\,(x_2 x_3 \ldots . x_{2n-1}).$$

U. Scarpis.

Risoluzione del prof. G. Cardoso-Laynes di Livorno.

Indicando con $\varphi_0\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$ uno qualunque dei valori che assume la funzione $\varphi\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$, per la natura stessa di questa funzione, è chiaro che $\varphi_0\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$ deve ammettere un fattore $\varphi\,(x_{k_1}, x_{i_1})$, essendo k_1 un numero qualunque *determinato* da noi scelto fra i numeri k che soddisfano la relazione mista

(1) $$1 \leq k \leq 2n$$

ed i_1 un numero *indeterminato* che può variare entro gli stessi limiti di k ed è inoltre diverso da k_1. (Perciò i_1 può assumere $2n-1$ valori diversi).

Posto ciò, indicando con φ_1 il quoziente di $\varphi_0\,(x_1 x_2 \ldots x_{2n})$ per $\varphi\,(x_{k_1}, x_{i_1})$, si ha:

(2) $$\varphi_0\,(x_1, x_2 \ldots . x_{2n}) = \varphi\,(x_{k_1}, x_{i_1}) \,.\, \varphi_1 \,.$$

Si può osservare ora che φ_1 ammetterà certo un fattore $\varphi\,(x_{k_2}, x_{i_2})$, essendo k_2 un numero qualunque *determinato* da noi scelto, purchè soddisfi la (1) e sia inoltre diverso da k_1 e dal valore particolare i'_1 di i_1 che si sceglie, e i_2 un numero *indeterminato* che varia entro gli stessi limiti di k ed è inoltre diverso da k_1, i'_1, k_2. (Perciò i valori differenti che può assumere i_2 sono $2n-3$).

Indicando con φ_2 il quoziente di φ_1 per $\varphi\,(x_{k_2}, x_{i_2})$, si ha

$$\varphi_0\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n}) = \varphi\,(x_{k_1}, x_{i_1}) \,.\, \varphi\,(x_{k_2}, x_{i_2}) \,.\, \varphi_2 \,.$$

Così seguitando, con ragionamenti analoghi, si perviene a scomporre $\varphi_0\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$ nei suoi n fattori

$$\varphi\,(x_{k_1}, x_{i_1}),\ \varphi\,(x_{k_2}, x_{i_2}),\ \varphi\,(x_{k_3}, x_{i_3}), \ldots . \varphi\,(x_{k_{n-1}}, x_{i_{n-1}}),\ \varphi\,(x_{k_n}, x_{i_n}),$$

il primo dei quali, come si è visto, può assumere $2n-1$ valori diversi ed il secondo ne può assumere $2n-3$; analogamente si perviene a stabilire che il 3° può assumere $2n-5$ valori diversi, ecc. .... l' $(n-1)^0$ può assumere soltanto *tre* diversi valori e l' n^0 è determinato.

Segue da ciò che i valori differenti che può avere φ_0 sono $1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots . (2n-5) \,.\, (2n-3) \,.\, (2n-1) = \lambda_{2n}$. c. d. d.

Per ciò che si è premesso, anche la seconda parte della questione resulta evidente: infatti, facendo nella (2) $k_1 = 1$ e attribuendo ad i_1 successivamente i valori di i che soddisfano alla relazione

$$1 < i \leq 2n$$

e sommando quindi i valori ottenuti, si ha:

$$\Sigma\varphi\,(x_1 x_2 \ldots . x_{2n}) = \sum_{i_1=2}^{i_1=2n} \left[\varphi\,(x_1, x_{i_1}) \,.\, \Sigma\varphi\,(x_2, x_3, \ldots . x_{i_1-1}, x_{i_1+1} \ldots . x_{2n})\right]$$

c. d. d.

QUISTIONI PROPOSTE

479. L'inviluppo di un cerchio tangente a una retta fissa del suo piano e il di cui centro percorre una conica fissa è una curva del sest'ordine, circolare, della quarta classe, con tre tangenti doppie, sei cuspidi e zero flessi. Costruire le tre bitangenti coi rispettivi punti di contatto; le sei cuspidi (di prima specie) con le corrispondenti tangenti cuspidali; le intersezioni della sestica con una retta; le tangenti che le arrivano da un punto del suo piano.

480. Trovare l'inviluppo delle parabole che hanno il fuoco sopra una curva data e per direttrice una retta data. Studiare il caso in cui la curva data è una conica.

481. Determinare la pedale della sviluppata di una conica centrale, rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.

482. Pedale della sviluppata della parabola rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.

V. Retali.

483. Se le linee $\varphi = \text{cost.}^e$ sono geodetiche di una superficie il cui elemento lineare è $\sqrt{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2}$, si ha:

$$\Delta_2\varphi + \frac{1}{\Delta}\left(\mathrm{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} + \frac{1}{\Delta}\left(\mathrm{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} = 0$$

dove $\Delta = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ e Δ_1. Δ_2 sono rispettivamente i parametri differenziali primo e secondo.

Supponendo che le φ sieno geodeticamente parallele, si deduce $\Delta_2\varphi = 0$.

G. Cardoso-Laynes.

484. Sopra i lati del quadrilatero piano ABCD si prendano ordinatamente i punti A', B', C'. D' tali che

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{A'B}} = \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{B'C}} = \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{C'D}} = \frac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{D'A}} = p,$$

e sia P il punto d'incontro delle A'C', B'D':

I. Al variare del parametro p, il punto P corrispondente descrive in generale una cubica avente un punto doppio.

II. Tre punti di tale cubica stanno sopra una retta se il prodotto dei loro parametri è l'unità negativa, sei punti su una conica, se il prodotto dei loro parametri è l'unità positiva.

III. Come deve essere il quadrilatero ABCD affinchè la cubica sia una *strofoide retta?*

Dimostrare che, in tale caso, la parte del piano limitato dalla parte finita di curva i cui estremi coincidono nel nodo più quella compresa fra la curva rimanente e l'assintoto, sono equivalenti al quadrato del segmento congiungente i punti medi delle diagonali di ABCD.

A. BAROZZINI.

QUISTIONI PROPOSTE NEL PERIODICO
rimaste senza risoluzione

(Continuazione v. fasc. prec.)

Anno IX, pag. 160.

229. La somma dei quozienti incompleti di tutte le frazioni continue che si ottengono sviluppando $(2^{p-1}-1)$ frazioni irriducibili della serie di Brocot d'indice p (comprese fra 0 e 1) è uguale a $(p-1)2^{p-1}$.

G. MUSSO.

Anno IX, pag. 193.

232. Una punteggiata (u) ed un fascio di raggi (U'), proiettivi, non sono in uno stesso piano; si vuole, con un piano σ, segare (U') per modo che la sezione (u') abbia con (u) un asse di proiettività inclinato ad u sotto un angolo assegnato θ. Costruire σ e discutere il problema.

A. DEL RE.

Anno X, pag. 73.

257. Il processo di eliminazione delle quantità λ, λ' fra le equazioni:

$$a-\lambda b=0 \qquad a'-\lambda' b'=0$$
$$\alpha\lambda\lambda'+\beta\lambda+\gamma\lambda'+\delta=0$$

ove $a=a_1x_1+a_2$, $b=b_1x_1+b_2$, $a'=a'_1x'+a'_2$, $b'=b'_1x'+b'_2$ ed a_i, a'_i, b_i, b'_i $(i=1, 2)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti date, vale il processo di composizione successiva di tre proiettività. Dedurne, senza ulteriori calcoli, che il determinante della equazione bilineare

$$\alpha aa'+\beta ab'+\gamma a'b+\delta bb'=0$$

è dato dal prodotto

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}.$$

A. DEL RE.

Anno XI, pag. 186.

290. Un triangolo si deforma conservando un angolo fisso in grandezza e posizione e costante la sua potenza (semisomma dei quadrati dei lati). Trovare l'inviluppo del lato mobile.

JUAN. J. DURÀN LORIGA.

Anno X, pag. 41.

303. Risolvere il sistema

$$a(1+x)=(y+z)^2$$
$$b(1+y)=(z+x)^2$$
$$c(1+z)=(x+y)^2.$$

Anno XI, pag. 73.

310. È noto che il problema analogo a quello di Malfatti nello spazio è più che determinato, e però generalmente impossibile. Trovare le (due) relazioni che devono passare fra i sei spigoli di un tetraedro, affinchè esistano quattro sfere ognuna delle quali tocchi le altre tre e tre delle facce del tetraedro.

G. LORIA.

Anno XI, pag. 73.

314. Mostrare che l'equazione cubica in ρ

$$\begin{vmatrix} \rho-(\beta^2+\gamma^2) & \alpha\beta+2\gamma' & \gamma\alpha-2\beta' \\ \alpha\beta-2\gamma' & \rho-(\gamma^2+\alpha^2) & \beta\gamma+2\alpha' \\ \gamma\alpha+2\beta' & \beta\gamma-2\alpha' & \rho-(\alpha^2+\beta^2) \end{vmatrix}=0.$$

quando si ponga

$$\omega^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \quad . \quad \omega'^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,$$
$$\omega\omega'\cos\theta=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma',$$

si riduce all'altra

$$\rho^3-2\omega^2\rho^2+(\omega^4+4\omega'^2)\rho-4\omega^2\omega'^2\operatorname{sen}^2\theta=0$$

ed ha una sola radice reale inferiore ad $\omega^2\operatorname{sen}^2\theta$.

A. DEL RE.

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

ERNESTO PASCAL. — *Repertorio di Matematiche Superiori.* (PARTE II - *Geometria*). — Milano, Hoepli, 1900.

Quando nel 1898 venne alla luce il primo volume di quest'opera, dedicato all'Analisi, tutti i cultori della Matematica ne riconobbero l'immensa utilità; nè solo in Italia, ma altresì all'estero, come dimostra anche il fatto che sono ora in corso di stampa due traduzioni, l'una tedesca a Lipsia, l'altra polacca a Varsavia. Era perciò universalmente desiderato che presto uscisse il secondo volume relativo alla Geometria.

Con gli stessi intendimenti coi quali è stata compilata la prima parte, è ora stata condotta a termine la seconda. Così nell'una come nell'altra son tracciate delle singole teorie le linee generali; sono cioè enunciate le definizioni ed i teoremi principali (senza dimostrazione), riportate le formule più comuni ed intercalati anche assai copiosi dati bibliografici.

Nessuno studioso può esimersi dell'avere nella propria biblioteca, per quanto modesta essa sia, questo pregevolissimo manuale, a cui dovrà ricorrere, non dirò per *studiare* una speciale teoria, ma per *stabilire il piano* delle sue ricerche in questo od in quel ramo speciale della matematica od anche per richiamare alla memoria e coordinare gli studi già fatti.

Il 2° volume, di cui più specialmente ora dobbiamo occuparci, è riuscito più del primo ricco di argomenti; esso consta di circa 1000 pagine ed è diviso in ventidue capitoli, al contenuto dei quali accenniamo brevemente:

Nel I°, che ha per titolo *Geometria delle forme continue fondamentali* fondendo, per così dire, l'ordinaria Geometria proiettiva con l'Analitica, sono studiate successivamente le forme di 1ª, 2ª e 3ª specie (per quella di 4ª specie v. il cap. XIV).

Nel cap. II sono invece studiate le *forme discontinue*, il III contiene la *teoria invariantiva delle forme algebriche*.

I cap. IV e V contengono rispettivamente l'esposizione delle principali proprietà projettive e metriche delle *coniche* e delle *quadriche;* il VI riguarda la *teoria generale delle curve piane algebriche;* nei due capitoli seguenti poi sono studiate in particolare le *cubiche* e le *quartiche* piane.

I cap. IX-XIII son dedicati rispettivamente alla *teoria delle superficie e curve gobbe algebriche*, alle *curve storte dei vari ordini*, alle *superficie degli ordini 3° e 4°* ed a quelle di ordine superiore.

Nel XIV è esposta la *Geometria della retta nello spazio* e la *Geometria della sfera*. Il XV è dedicato alla *Geometria numerativa*.

Nel capitolo XVI, in cui è trattata la *Geometria infinitesimale delle curve e delle superficie*, è mirabilmente condensata in circa 100 pagine l'ordinaria Geometria differenziale ed integrale.

Il XVII riguarda le principali *trasformazioni* metricamente specializzate e le più notevoli *curve particolari*, algebriche o trascendenti, piane o gobbe; il XVIII contiene vari argomenti speciali; i due seguenti son dedicati agli *iperspazi* (studiati projettivamente nell'uno e col metodo infinitesimale nell'altro).

Finalmente il XVI è dedicato alla *Geometria assoluta* e l'ultimo alla *Geometria del triangolo*.

L'A. nota nella prefazione che quest'ultimo capitolo è fuori di posto e dice che ciò è avvenuto perchè egli si decise a compilarlo quando già era avviata la pubblicazione del libro; del resto ci sembra che quel capitolo, in qualunque parte dell'opera si trovi, sia sempre fuori di posto in un repertorio di Matematiche superiori. Altrettanto dicasi delle nozioni di trigonometria poste alla fine del II capitolo.

Concludendo, certi d'interpetrare i sentimenti di molti, ringraziamo il chiarissimo prof. Pascal per l'opera utilissima che ci ha data, mentre ammiriamo il suo ingegno e la vasta sua cultura che gli hanno permesso di trattare con egual competenza le parti più disparate della scienza matematica.

Una parola di lode infine merita ancora il solerte editore Comm. U. Hoepli per l'iniziativa della pubblicazione e per l'accurata ed elegante veste che ha saputo darle.

G. C.-L.

E. Cercignani. — *XX Lezioni di Aritmetica.* — Firenze, Ramella, 1899.

Di questo libro è uscito il 1° fascicolo (Lez. I-X) che tratta dei numeri interi. Come riconosce l'A. stesso nella prefazione, queste lezioni non si discostano molto dagli altri trattati di aritmetica: è una compilazione fatta assai diligentemente sulla guida di altri trattati ben noti come quelli del Gazzaniga, del Martini-Zuccagni ecc. L'A. però, a dire il vero, cita scrupolosamente le fonti a cui ha attinto.

Come già fece il mio egregio amico prof. Martini nelle sue pregevoli *Lezioni di Aritmetica teorica*, l'A. divide le operazioni fondamentali in dirette ed inverse e le une e le altre in operazioni di 1ª, 2ª e 3ª specie; questa distinzione è elegante ed offre anche assai utilità pratica quando si riavvicinino, trattandole contemporaneamente, le operazioni dirette o inverse di 1ª e 2ª specie, mostrandone le notevoli analogie, come già fece per il primo il Martini e come recentemente ha fatto il prof. Conti nel suo pregevole trattato, ma l'A. invece rende sterile questa distinzione perchè ciò non ha fatto.

Per la teoria della divisibilità dei numeri è posto a fondamento il teorema generale di Pascal e da questo sono dedotti, oltre a quelli che si trovano in tutti i trattati, molti altri particolari criterî di divisibilità. La stessa teoria è poi svolta in paragrafo a parte, anche coi metodi più comunemente usati.

Mi piace notare, già che mi si presenta l'occasione, la tendenza che si è accentuata, specie in questi ultimi tempi, a riconoscere più razionale il metodo di Pascal per la teoria della divisibilità dei numeri, come quello che riavvicina tutti i criterî particolari deducendoli da un principio unico. (Si veda a questo proposito le varie note pubblicate in questo *Periodico* e nel *Supplemento.*)

Nelle altre parti del libro del Cercignani non mi sembra che vi sia nulla da notare particolarmente, per le ragioni già dette; ripeto solo che, *in generale,* l'A. nell'esporre queste sue lezioni, ha saputo congiungere assai bene la chiarezza al rigore scientifico; ciò è sufficiente per un lavoro che, come dice modestamente l'A. nella prefazione, è stato scritto per solo uso dei suoi scolari del Collegio Nazionale di Firenze.

Un pregio del libro del Cercignani è anche la notevole quantità di note storiche che trovansi disseminate nel corso dell'opera ed alcune note assai interessanti e ben redatte che son poste come appendici, fra le quali cito la 3ª. che contiene un cenno sui varî sistemi di numerazione, la 5ª che si occupa dei metodi abbreviati per eseguire la moltiplicazione e la 8ª che contiene una breve biografia di Biagio Pascal.

G. C.-L.

PER UNA POLEMICA

L'opuscolo del Comm. A. M. Bustelli *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche,* e la critica che di esso fece il Prof. G. B. Marangoni hanno dato origine ad una lunga e noiosa polemica di una violenza, crediamo, senza precedenti nel campo sereno della scienza matematica.

Il *Periodico,* che pubblicò un articolo del Prof. De Amicis favorevole al citato opuscolo, perchè scritto in forma cortese e corretta, e non avrebbe avuto difficoltà a pubblicarne uno contrario, se lo avesse ricevuto, purchè scritto con eguale temperanza e moderazione, è stato e intende rimanere estraneo alla polemica, ma sembrandogli che la violenza delle varie pubblicazioni specialmente dell'ultimo articolo del Bustelli, al quale l'alta posizione avrebbe dovuto consigliare una maggior moderazione di linguaggio, non sia un *fenomeno naturale,* segue l'esempio del giornale *La scuola educatrice,* e si rivolge ai due campi contendenti invocando *pace, pace, pace!!*

Il citato giornale aggiunge: " Ella *(La scuola educatrice)* deplora sinceramente " che fra persone benemerite della scienza e dell'insegnamento vi possano acca- " dere simili screzii; tanto più che, *leggendo tra le righe* negli scritti del Marangoni " e del Bustelli, le è parso di capire che quei due si stimano ancora tanto quanto " basterebbe loro per intendersi colla minima delle spese; quella di un francobollo. " Si scrivano dunque, e lascino andar la stampa, che oltre al costar molto, non " riesce, in certi casi, che ad arruffare sempre più la matassa ".

Il *Periodico* si associa di gran cuore a questa esortazione alla calma e alla concordia, e si augura che i due professori, ambedue benemeriti dell'istruzione, invece di sciupare le forze del loro ingegno nello scagliarsi l'un l'altro parole amare e spiacevoli, le consacrino più utilmente al progresso della scienza.

Intanto però dalla breve *protesta* inviataci dal Prof. Marangoni in seguito all'ultimo articolo del Bustelli e pubblicata nella *Scuola secondaria,* num. 8, anno IV, stralciamo ben volentieri le seguenti parole di chiusa che contengano la conferma di una dichiarazione dei Proff. Veronese e Gazzaniga comparsa nel num. 7, anno IV, della *Scuola secondaria*. " Se dopo ciò scrivo queste poche righe non è già per " rispondere al Bustelli, ma per protestare che, con me, siano state offese persone " che io stimo fortemente per il loro valore e che assolutamente non hanno avuto " nessuna parte e nessuna influenza sui miei giudizi intorno al primo discorso del " Bustelli, e dei quali tutta la responsabilità spetta a me solo ".

E con questo il *Periodico* dichiara che non parlerà mai più della incresciosa quistione.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Nouvelles Annales de math. T. XVIII$_3$. 1899. (Paris, Gauthier-Villars).

Fasc. IV (aprile). *G. Tarry*, Le linee aritmetiche. — *G. Tarry*, Curiosità matematica. — *Godrefoy*, Nuova dim. della regola di convergenza di Gauss. — *Lecornu*, Sul moto d'un punto sollecitato da una forza centrale costante. — *G. Candido*, Sopra un teorema noto. (*) — *Tikhomandritzky*, Sul secondo teorema della media (L'A. dimostra che, nel caso in cui il fattore della funzione da integrarsi, il quale varia nelle stesso senso fra i limiti dell'integrazione, ammette una derivata, il secondo teorema della media è un semplice corollario del primo). — Certificati di studj superiori delle Fac. delle scienze (Lyon, Marseille, Nancy, Toulouse). — Soluzioni di quistioni proposte: 1732 *(Audibert)*; 1734 o 1735 *(Dulimbert)*. — Bibliografia (Calcul de généralisation, par G. Oltramare). — Quistioni 1819-1821.

Fasc. V (maggio). *R. Bricard*, Secondo concorso dei " Nouvelles Annales ". Memoria premiata (nel § I è dim. che sei punti d'una conica possono essere in involuzione in 1, 2, 3, 4 o 6 modi differenti, e sono definite geometricamente le posizioni corrispondenti dei 6 punti; nei cinque successivi §§ sono dim., senza appoggiarsi sulla teoria delle funzioni o degli integrali iperellittici, nè sulle proprietà della sup. di Kummer, alcune proprietà del tetraedroide relative a'suoi sedici punti doppi). — *Vittorio Nobile*, Nota di Geometria cinematica. (Studio del moto di un solido di rivoluzione che ha un punto fisso sull'asse e rotola senza strisciare sopra una retta fissa. Notiamo il teorema " Se una quadrica di rivoluzione mobile attorno al suo centro fisso, rotola senza strisciare sopra una retta fissa, l'asse di rivoluzione genera un cono quadrico "). — Corrispondenza. (*Issaly*, Sulla quistione 1727; *A. de Saint-Germain*, Sulla quistione 1727). — Quistioni 525, 528, 546, 549, (**) 1822-1823.

Fasc. VI (giugno). Secondo concorso delle " Nouvelles Annales " pel 1899. — *F. Caspary*, Applicazioni dei metodi di Grassmann; vettori nel piano; definizioni, proprietà. — *Genese*, Sopra alcuni integrali (l'A. calcola con processi diretti semplicissimi quattro integrali che Hermite nel *Cours d'Analyse*, 1873, pag. 260, aveva segnalato come non ottenibili direttamente). — *Stuyvaert*, Punto notevole nel piano

(*) Il teorema attribuito dall'A.: al sig. *Goffart* (Nouv. Ann., 1834, p. 397) [" le rette di Simson relative a due punti diametralmente opposti del cerchio circoscritto a un tr. dato sono rettangolari "] che è poi la proprietà iniziale delle tangenti alla ipocicloide di Steiner, era conosciuta molto prima del 1884. È anche immediata la dim. del teorema più generale " le rette di Simson relative a due punti qualunque del cerchio circoscritto a un tr. dato, formano un angolo eguale a quello alla circonferenza che insiste sull'arco terminato ai due punti ". (V. R.)

(**) La quistione 549, ora nuovamente proposta perchè creduta insoluta, fu risoluta magistralmente dal Prof. *Cremona* (Nouv. Ann., 1861, p. 21) e non è il caso di tornarci sopra. (V. R.)

d'una cubica, (Studio dei punti del piano d'una cubica le cui coniche polari sono cerchi). (*) — *Duporcq*, Soluz. della quistione di mat. speciali (Aggregazione delle Sc. Mat.; Concorso del 1898). — *H. Vogt*, Bibliografia (Traité de Géom. par C. Guichard).

Fasc VII (luglio). *E. Lecour*, Sull'equazione d'Eulero. (Valendosi di considerazioni geometriche, l'A. ritrova elegantemente l'integrale generale della equazione differenziale $dx : \sqrt{\psi(x)} = dx_1 : \sqrt{\psi(x_1)}$, nella forma data da Stieltjes e lo esprime mediante invarianti e covarianti del polinomio di quarto grado $\psi(x)$). — *A. Pleskot*, Limiti delle radici d'una equazione non avente che radici reali. (L'A. risolve la quistione indicata valendosi della teoria dei massimi e minimi. — *L. Ripert*, Sull'omografia e la dualità applicata alle proprietà metriche dello spazio. — Concorso generale. — Amm. alla Sc. Politecnica. — Amm. alla S. Normale Sup. — Soluzioni di quistioni: 1739 *(Duporcq* e *Boulanger)*; 1740 *(Boulanger)*; 1741 *(Boulanger)*; 1748 *(Gilbert)*; 1766 *(Dulimbert)*. — Quistioni 1824-1825.

Fasc. VIII (agosto). *L. Autonne*, Sul rapporto anarmonico (L'A. riprende la teoria del rapporto anarmonico ponendo in evidenza i legami di essa con quella dei gruppi di sostituzioni fra quattro lettere). — *Combebiac*, Nozioni elementari sui gruppi di trasformazioni (esposizione elementare di alcune nozioni principali concernenti la teoria dei gruppi di trasformazioni finiti e continui, secondo i lavori di Lie e dei suoi continuatori). — *O. Böcklen*, Nota sopra una superficie studiata da Painvin. (L'A. dim. il teorema: " Havvi un'infinità di ellissoidi aventi la stessa sezione centrale e la lunghezza del grande asse costante; i fuochi dei piccoli assi di questi ellissoidi sono sulla superficie, di ottavo grado, luogo dei fuochi delle sezioni centrali ". I fuochi del grande asse di questi ellissoidi son situati sopra una superficie d'onda). — *De Longchamps*, Le curve imagini e le curve simmetriche. (Sopra una curva C il punto A è fisso e sulla normale nel punto mobile M si staccano, a partire da M nei due sensi, i segmenti $MB = MB' = n$. arco AM: L'A. dim. che costruita la tangente a una delle curve luogo di B o B' può tracciarsi la tangente all'altra; poi risolve il problema delle tangenti per una delle due curve). — Aggregazione delle Sc. M. 1899, Sc. centrale delle Arti e Manifatture. (Concorso 1899, 1ª sessione). — Risoluzioni di quistioni proposte: 1768 *(Audibert)*; 1769 *(Audibert)*; 1771 *(Barisien)*. — Quistioni proposte 1826-1829.

Fasc. IX (settembre). *Ch. Zahradnik*, Contributo alla teoria delle cubiche cuspidali. (Se nel piano d'una cubica della terza classe C^3_3 facciamo corrispondere a una retta variabile P la sua retta satellite R_1, si ottiene una corrispondenza univoca e reciproca; analogamente se R_m e R_n sono respettivamente la m-esima e la n-esima retta satellite di P, i sistemi (R_m) (R_n) sono in corrispondenza omografica: l'A. studia queste corrispondenze ed altre quistioni analoghe relative a C^3_3). — *G. Fontené*, Sopra angoli risultanti. — *Laisant*, Nota del Redattore (dimostrazione vettoriale del teorema col quale il sig. Fontené, ha, nell'articolo precedente, esteso allo spazio il teorema di Bellavitis concernente il quadrangolo piano). — Composiz. Mat. d'ammissione alla Scuola Politec. nel 1899. (Risoluz. del sig. *Philbert Du Plessis*). — Risoluz. di quistioni proposte: 1772 *(Audibert)*. — Quistioni 554 (1860; 464, nuovamente proposta).

Fasc. X (ottobre). *G. Fontené* e *R. Bricard*, Sui sistemi di tre relazioni doppiamente quadratiche fra tre variabili. — *E. Piccioli*, Una quistione di geometria differenziale. — *G. Fontené*, Sull'Hessiano d'una forma cubica binaria. — Certificati

(*) Cfr. *Periodico di Matematica* (marzo-aprile 1899). Quistione 459. (V. R.)

di studj superiori. (Sessione di luglio 1898. Parigi e Montpellier; risoluzioni del sig. *Audibert*). — Certificati di studj super. (luglio 1899, Dijon, Montpellier). — *D'Ocagne* (Recensione dei " Premiers principes de Géom. moderne ", par E. Duporcq). — Corrispond. (*Retali*, Sulla quistione 1716; *Hilaire*, Sulla quistione 549). — Risoluzioni di quistioni proposte: 1740 (nota del sig. *A. de Saint-Germain*); 1739 (*Mannheim*); 1769 (*Mannheim*); 1773 (nota d'un abbonato); 1774 (*D'Ocagne*); 1778 (*Leinekugel*); 1786 (*Dulimbert*) (*); 1787 (*Tzitzéica*).

(V. R.)

Bulletin de sciences mathèmatiques et physiques.

Fasc XI (1 marzo 1899). — *G. Lehr*. Una relazione metrica utile (dimostra la formula $(p-b)(p-c)=rr'$ essendo b, c le misure dei lati d'un triangolo, p il semiperimetro, rr' le misure dei raggi dei circoli inscritto ed ex iscritto, tangenti al terzo lato). — *Piet*, Dimostrazione di note formule trigonometriche. — Reciproco del teorema di Legendre nel quadrilatero. — Preparazioni agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XII (15 marzo 1899). — Preparazioni agli esami. — Quistioni proposte. — Quistioni risolute.

Fasc. XIII (1 aprile 1899). — *Bonnefoy*, Su una trasformazione punto per punto. (Con questa trasformazione, ad una retta corrisponde un circolo, e ad una conica pure un circolo. — Può essere utile per costruire le tangenti da un punto ad una conica, per iscrivere in una conica un poligono, i cui lati passino per punti dati ecc.) — *E. Rebuffel*, Note (1° Riprende il problema del N. 7 sulla risultante di due equazioni di 2° grado e giunge allo stesso resultato senza servirsi degl'immaginarii. 2° Propone in certi casi una costruzione geometrica d'un problema, quando l'equazione è della forma $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=a$) — *Wolkow*, Nuova (?) dimostrazione che un angolo esterno d'un triangolo è maggiore d'un angolo interno non adiacente. — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XIV (15 aprile 1899). — *E. Rebuffel*, Sulla frazione di secondo grado $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (si serve della trasformazione $x=X+h$, determinando convenientemente h, per trovare il massimo, il minimo della frazione data). — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

Fasc. XV (1 maggio 1899). — *E. Rebuffel*, Prospettiva d'un circolo. (Partendo dal fatto che un *pgr.* può esser sempre considerato come la proiezione ortogonale d'un quadrato, trova l'inviluppo d'una retta MM' che stacchi su due rette parallele due segmenti OM, O'M', essendo O e O' punti fissi dati, in modo che il prodotto delle misure di questi segmenti sia eguale a una costante data positiva o negativa. Ne deduce che la prospettiva d'un circolo è una conica). — *Droz-Farny*, Nota di trigonometria (semplice dimostrazione geometrica delle formule $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$ e $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$). — Preparazioni agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XVI (15 maggio 1899). — *N. Plakhowo*, Sulla divisibilità (Espone elementarmente il metodo di Bougaïeff, con cui si prova la divisibilità mediante le congruenze). — Risoluzione d'un triangolo dati a, B-C, e il prodotto bc. — Preparazione agli esami. (Nella risoluzione d'un problema c'è una dimostrazione della formula di Mac-Laurin sul volume del segmento sferico a due basi). — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

(*) Un'altra risoluzione di questa quistione fu già data dal sig. *Sollertinsky* nel T. IV (1894) p. 274 del " *Progreso Matematico* ". (V. R.)

Fasc. XVII (1 giugno 1899). — *Collardeau*, Nota sul V libro di Geometria. (È uno schema dell'ordine in cui devono seguirsi le proporzioni per svolgere contemporaneamente la Planimetria colla Stereometria; una *fusione* insomma, che non ha certo il merito della precedenza sui lavori dei geometri italiani, i quali non sono mai citati). — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XVIII (15 giugno 1899). — *L. Gerard*, Sul rigore nelle dimostrazioni. (Importanti osservazioni su errori ed omissioni che si commettono spesso in dimostrazioni di geometria elementare). — Ancora sulla risoluzione del triangolo nel caso considerato al N. 16. — Preparazioni agli esami. — Quistioni risolute. — Bibliografia. — Quistioni proposte.

Fasc. XIX (1 luglio 1899). — Risoluzione del problema di Geometria descrittiva dato a Saint-Cyr. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XX (15 luglio 1899). — Risoluzioni del problema proposto nel concorso d'ammissione a Saint-Cloud. — *Collardeau*, Nota del V libro di Geometria (Cont. *v. n.* 17). (In questa parte della Nota c'è una buona dimostrazione del teorema: Due triedri del medesimo verso sono eguali se hanno le faccie eguali). — *Bonnefoy*, Trasformazione proiettiva (Nota che la trasformazione del N. 13, seguita da un'inversione, diventa una trasformazione proiettiva. Ottien questa con costruzioni semplicissime). — *Roptin*, Dimostrazione geometrica d'una formula di trigonometria. — *Mayon*, Sulla retta di Simson. — *Rebuffel*, Un problema sul prisma. — Bibliografia. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte. — Indice metodico dell'intera annata.

Anno V. Fasc. I (1 ottobre 1899). — X**, Dimostrazione geometrica d'una formula di Trigonometria (v. Anno IV, N. 2). — Problema del concorso generale della 3ª classe moderna. — Preparazione agli esami. — Quistioni proposte. — Quistioni risolute.

Journal de mathématiques élémentaires di H. Vuibert.

Fasc. XI (1 marzo 1899). — *G. Fontené*, Sulla divisione aritmetica (definizione del quoziente, conversione d'una frazione ordinaria in decimale, estrazione della radice quadrata).

Fasc. XV (1 maggio 1899). — *Arnould*, Nota sulle direttrici di Monge dei cilindri di rivoluzione e determinazione degli assi delle sezioni ellittiche (determina gli assi d'un'ellisse data per mezzo di due diametri coniugati).

Fasc. XVI (15 maggio 1899). — *I. Girod*, Sul teorema di Ceva. (Dà una dimostrazione indipendente dal teorema di Menelao). — *Moreau*, Sulle medie aritmetica, geometrica e armonica di due segmenti. (Dimostra che la differenza delle prime due è maggiore della differenza tra la seconda e la terza).

Fasc. XVII (1 giugno 1899). — *Vogt*, Reciproci dei teoremi di Dandelin. (Dimostra gl'inversi di questi noti teoremi, anche nel caso in cui le sfere tangenti alla superficie conica siano tagliate dal piano secante; nel qual caso, come si sa è costante la somma o la differenza delle tangenti condotte da un punto della sezione conica ai due circoli comuni del piano e delle sfere).

Fasc. XVIII (15 giugno 1899). — *C. Bioche*, Sull'equazione biquadratica. Nei numeri precedenti e in quelli non citati, numerosi e svariati problemi.

E. Nannei.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 9 Decembre 1899.

TEORIA GEOMETRICA DELL'INVERSIONE

La teoria delle figure inverse viene sempre esposta, almeno per quanto è a mia cognizione, basandosi sopra una relazione di misura ($OA \cdot OA' = K$).

In questa breve nota mi propongo di far vedere come tale teoria si possa svolgere molto semplicemente per mezzo di considerazioni puramente geometriche, e di dedurre la proprietà, che ordinariamente si prende per definizione, come conseguenza, che potrebbe anche essere omessa (§ 13).

Questa nota fornisce un nuovo esempio dell'utilità che si ha dall'uso di considerazioni stereometriche per la dimostrazione di proprietà planimetriche.

1. Definizione. — Due coppie di rette a_1, a_2 e b_1, b_2 si dicono *antiparallele l'una rispetto all'altra*, se le bisettrici dei loro angoli sono parallele.

Teorema. — *Se due coppie di rette* a_1, a_2 *e* b_1, b_2 *sono antiparallele, gli angoli della* a_1 *con* b_1 *e* b_2 *sono rispettivamente eguali a quelli di* a_2 *con* b_2 *e* b_1.

Inversamente: se gli angoli di una retta a_1 *con due rette* b_1, b_2 *sono eguali a quelli d'un'altra retta* a_2 *con* b_2 *e* b_1 *le due coppie di rette* a_1, a_2 *e* b_1, b_2 *sono antiparallele.*

Infatti, supposto che le quattro rette sieno in un piano, si tengano fisse tre di esse, per es. a_1, a_2, b_1, e si faccia rotare di un diedro piatto la quarta b_2 attorno ad una delle bisettrici degli angoli delle a_1, a_2. Essa prende allora una posizione b'_2 parallela a b_1. Ne segue che gli angoli di b_2 con a_1 o con a_2 sono eguali a quelli di b'_2 con a_2 o con a_1, e quindi anche a quelli di b_1 con a_2 e con a_1.

Se le due coppie di rette a_1, a_2 e b_1, b_2 non sono in uno stesso piano, in forza della definizione esse giacciono in piani paralleli. Condotte allora nel piano b_1, b_2 le a'_1, a'_2 parallele alle a_1, a_2 il teorema sussisterà per le b_1, b_2, a'_1, a'_2, e quindi anche per le b_1, b_2, a_1, a_2.

Corollari. — 1°. *Se due rette* a_1, a_2 *sono antiparallele rispetto a due rette* b_1, b_2, *ogni retta parallela ad* a_1 *è antiparallela ad* a_2 *rispetto alle stesse due rette.*

2°. *Due rette antiparallele ad una terza rispetto alla stessa coppia di rette sono parallele.*

2. Teorema. — *I quattro punti d'incontro di due coppie di rette antiparallele sono conciclici.*

Poniamo $P_{rs} = a_r\, b_s$, $A = a_1\, a_2$, $B = b_1\, b_2$.

1°. Se il quadrilatero $P_{11} P_{21} P_{22} P_{12}$ non è intrecciato, si ha

$$A\widehat{P_{22}}P_{12} = A\widehat{P_{11}}P_{21},$$

e quindi due angoli opposti del quadrilatero sono supplementari, ed il quadrilatero è inscrittibile.

2°. Se il quadrilatero $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$ è intrecciato, perchè per es. i lati $P_{11} P_{21}$, $P_{12} P_{22}$ hanno comune un punto B, i vertici P_{11}, P_{22} sono da una stessa parte della retta $P_{12}P_{21}$ e gli angoli $P_{12}\widehat{P_{11}}P_{21}$, $P_{12}\widehat{P_{22}}P_{21}$ sono eguali, perciò sono inscritti in uno stesso arco di circolo limitato dai due punti P_{12}, P_{21}.

COROLLARI. — 1°. *Se due coppie di rette opposte di un quadrangolo completo sono antiparallele, anche le rimanenti rette del quadrangolo sono antiparallele rispetto a ciascuna delle due coppie suddette.*

2°. *Se le bisettrici degli angoli di due coppie di rette opposte di un quadrangolo completo sono parallele, sono pure parallele ad esse le bisettrici degli angoli delle altre due rette del quadrangolo.*

Inversione.

3. TEOREMA. — *Se due triangoli si corrispondono in modo che le tre rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano antiparalleli ai corrispondenti lati dell'altro rispetto alle rette che ne congiungono gli estremi, anche i due lati rimanenti sono antiparalleli rispetto alle rette che ne congiungono gli estremi.*

Abbiansi due triangoli ABC, A'B'C' tali che le rette $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$ concorrano in un punto O, e che AB, A'B' siano antiparallele rispetto alle rette a, b e AC, A'C' siano antiparallele rispetto ad a, c. Si deve dimostrare che BC, B'C' sono antiparallele rispetto alle due rette b, c.

Infatti ABB'A', ACC'A' sono inscritti in due circoli C_C, C_B. Se i due triangoli non sono in un piano per i due circoli C_C, C_B passa una sfera che è tagliata dal piano OBC secondo un circolo C_A circoscritto al quadrangolo BCC'B', e per conseguenza BC, B'C' sono antiparallele rispetto alle rette b, c.

Se poi i due triangoli sono in un piano, si conduca per O una retta d fuori di questo piano, e si conducono per A e A' due segmenti AD, A'D' antiparalleli rispetto alle rette a, d. Per la dimostrazione precedente risulta che BD, B'D' sono antiparallele rispetto alle rette b, d, e CD, C'D' sono antiparallele rispetto alle c, d, e per conseguenza, sempre per il caso precedente, anche BD e B'D' sono antiparallele rispetto alle b, d.

4. Essendo data una figura Σ qualunque nello spazio ed un punto O, si può costruire una figura Σ', i punti della quale corrispondano univocamente a quelli di Σ nel modo seguente.

Ad un punto A di Σ si faccia corrispondere un punto A′ della retta OA. Ad un altro punto B di Σ si faccia corrispondere il punto d'incontro della OB colla antiparallela di AB, rispetto alle rette OA, OB, condotta per A′. In altre parole condotto per A, A′, B un circolo si fa corrispondere a B l'altro punto d'incontro di OB con tale circolo. La corrispondenza è univoca ed involutoria, perchè ad ogni punto B corrisponde un solo punto B′ e a B′ (considerato come appartenente a Σ) corrisponde B in Σ'.

Fa eccezione il punto O, al quale, colla costruzione precedente, corrispondono infiniti punti, tutti quelli del piano all'infinito. Per il teorema precedente le due figure Σ, Σ' si corrispondono in modo che la retta congiungente due punti corrispondenti passa per O, e le rette BC, B′C′, individuate da due coppie di punti corrispondenti, sono antiparallele rispetto alle rette OB, OB′.

Si osservi anche che, se O è interno (o esterno) ad un segmento AA′, è anche interno (o esterno) al segmento BB′ limitato da due punti corrispondenti B, B′ qualunque.

5. Definizioni. — I. Due figure si dicono *inverse* rispetto ad un punto O (detto *centro d'inversione*) a distanza finita o infinita, quando i loro punti si corrispondono univocamente (escluso O) in modo che le rette congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti passino per O e che le rette BC, B′C′ individuate da due coppie di punti corrispondenti sieno antiparallele rispetto alle OB, OC. Tale corrispondenza si chiama un'*inversione*.

II. Un'inversione si dice *positiva* o *negativa*, secondo che il centro O è esterno o interno al segmento individuato da due punti corrispondenti.

III. — Una figura inversa di se stessa si chiama *anallagmatica*.

Dalle definizioni esposte e da quanto abbiamo detto nei §§ precedenti discendono i seguenti

Corollari. — 1°. *Un'inversione col centro all'infinito è sempre positiva, e si riduce ad una simmetria rispetto al piano che è perpendicolare al segmento che unisce due punti corrispondenti e lo divide per metà.*

2°. *Un'inversione è individuata quando si conosce il centro ed una coppia qualsiasi di punti corrispondenti.*

3°. *Un'inversione è individuata quando si conoscono due coppie di punti corrispondenti.*

Infatti se A, A′; B, B′ sono due coppie di punti corrispondenti, non situati sopra una retta, devono esser situati su di un circolo, ed il centro O d'inversione è il punto comune alle rette AA′, BB′.

Se poi A, A′, B, B′ sono sopra una stessa retta r e C è un punto qualunque fuori di r, il suo omologo deve essere il punto comune ai due circoli circoscritti ai triangoli AA′C, BB′C ed O è il punto comune alle rette r, CC′. L'inversione, come è facile vedere, è positiva o negativa, secondo che le due coppie si separano o no.

4°. *In una inversione ogni retta (o piano) che passa per il centro O ha per corrispondente la retta (o piano) medesima.*

5°. *In una inversione col centro a distanza finita un circolo (o sfera) che passa per il centro d'inversione O ha per corrispondente una retta (o piano) perpendicolare al diametro che passa per O. Inversamente ogni retta (o piano) che non passa per O ha per corrispondente un circolo (o sfera) che passa per O.*

Sia c un circolo condotto per O, A il punto opposto ad O sul circolo medesimo ed A' il punto corrispondente ad A nell'inversione. Se B è un punto arbitrario di c il suo corrispondente è il punto d'incontro di OB colla antiparallela ad AB condotta per A', la quale è perpendicolare ad OA', essendo AB perpendicolare ad OB. Dunque tutti i punti corrispondenti ai punti di c si trovano sulla retta c' perpendicolare ad OA' in A'. In simil guisa si vede che ogni punto di c' ha per corrispondente un punto di c.

6°. *Ogni circolo (o sfera) che passi per due punti corrispondenti di una inversione ha per corrispondente il circolo (o sfera) medesimo, ossia è una figura anallagmatica.*

Infatti ogni punto B di un circolo c, che passi per due punti corrispondenti A, A', ha per corrispondente un altro punto B' del circolo medesimo.

7°. *Tutti i circoli, situati in un piano che contengono una coppia qualsiasi di punti corrispondenti, e quindi ne contengono infiniti, formano un connesso* (*) *che ha per centro il centro d'inversione.*

Tutte le sfere, ciascuna delle quali contiene una e quindi infinite coppie di punti corrispondenti, formano un complesso che ha per centro il centro d'inversione.

8°. *Ogni circolo (o sfera) che non passa pel centro d'inversione ha per corrispondente un circolo (o una sfera).*

Sia c un circolo, il cui piano non passa per O, ed A un suo punto. Esso è l'intersezione delle due sfere P_1, P_2, individuate, da c e da O l'una, da c e da A' (corrispondente ad A) l'altra, la prima delle quali ha per corrispondente un piano P'_1, passante per A' la seconda se stessa. Perciò la curva c' corrispondente a c è il circolo comune a P'_1, P_2.

Sia ora c un circolo il cui piano passi per O (od una sfera non passante per O), ed A', B' i punti corrispondenti a due suoi punti A, B. Se A_1, B_1 sono gli ulteriori punti d'incontro di OA ed OB con c, si vede che essendo A'B' e A_1B_1 antiparallele ad AB rispetto a OA, OB sono parallele fra loro, e per conseguenza la figura inversa di c è la figura ad essa omotetica rispetto al centro O, essendo A_1, A' punti corrispondenti, ossia è un circolo (od una sfera). L'omotetia è diretta o inversa, secondo che l'inversione è positiva o negativa.

6. La proprietà enunciata nel cor. 6° del § precedente dà origine ad una nuova costruzione di una inversione.

(*) Per le nozioni di piani, assi o centri radicali, di fasci, connessi, complessi di sfere, stabilite indipendentemente dalla teoria della misura, veggasi LAZZERI e BASSANI, *Elementi di Geometria*, 1ª edizione, pag. 187 e seguenti.

Si consideri un fascio di sfere e sia O un punto del piano radicale comune. Per ogni punto A dello spazio passa una ed una sola sfera del fascio che è tagliata dalla retta OA in un altro punto A'. Le coppie di punti A, A' si corrispondono in un'inversione.

7. Teorema. — *La figura inversa di un complesso di sfere rispetto ad un centro O è un altro complesso. I centri radicali di due complessi e il punto O sono in linea retta.*

Sieno γ_i le sfere del dato complesso di centro P; π_{ih} il piano radicale delle sfere γ_i, γ_h ed r_{ihk} l'asse radicale delle sfere $\gamma_i, \gamma_h, \gamma_k$.

Le sfere del complesso che passano per O formano un connesso, il cui asse radicale passa per P, ossia tali sfere hanno in comune un altro punto P_1 della OP. Queste sfere corrispondono nella inversione di centro O ai piani radicali delle sfere γ'_i corrispondenti alle γ_i. Dunque tutti questi piani radicali passano per il punto P'_1 omologo di P_1, ossia le sfere γ'_i costituiscono un complesso. I punti O, P, P_1, P'_1 sono evidentemente in linea retta.

Corollari. — 1°. *Se Σ_1, Σ_2 sono due figure inverse rispetto ad un centro P, e Σ_1', Σ_2' sono le figure corrispondenti a Σ_1, Σ_2 in una invasione di centro O, anche le figure Σ_1', Σ_2' sono inverse rispetto ad un centro P_1'. I punti O, P, P_1' sono in linea retta.*

2°. *Due figure inverse si possono trasformare in due figure simmetriche rispetto ad un piano per mezzo di una inversione.*

Se infatti si prende per centro d'inversione O il punto di contatto di una delle sfere che passano per due punti corrispondenti con una delle tangenti ad essa condotte da P, il punto P_1 coincide con O ed il suo omologo P_1' va all'infinito. Per conseguenza le due figure Σ_1', Σ_2' omologhe delle figure date Σ_1, Σ_2 si corrispondono in un'inversione col centro all'infinito, ossia sono simmetriche rispetto ad un piano.

3°. *L'inversa rispetto ad un'inversione qualsiasi di una figura anallagmatica è un'altra figura anallagmatica.*

4°. *Una figura anallagmatica si può trasformare per mezzo di un'inversione in una figura simmetrica rispetto ad un piano.*

8. Teorema. — *In un'inversione positiva esistono infiniti punti uniti, il luogo dei quali è una sfera di centro* O. (Sfera d'inversione.)

In una inversione negativa non esistono punti uniti.

Sia data una inversione positiva di centro O, nella quale siano A, A' e B, B' due coppie di punti corrispondenti, e consideriamo il fascio di sfere che passano per il circolo dei quattro punti A, A', B, B'. Se l'inversione è positiva, O è esterno a tutte le sfere del fascio ed è chiaro (§4) che sono uniti tutti e soli i punti di contatto di una qualunque di queste sfere con le tangenti condotte da O. Il luogo di tali punti è una sfera di centro O.

Se l'inversione è negativa, O è interno a tutte le sfere suddette, e non si posson da essa condurre tangenti alle sfere, perciò non esistono punti uniti.

Corollario. — *La sfera d'inversione di una inversione positiva taglia ortogonalmente qualsiasi sfera che passa per due punti corrispondenti.*

9. Teorema. — *Due figure inverse di una terza rispetto ad un medesimo centro sono omotetiche rispetto al medesimo centro.*

Sieno Σ_1, Σ_2 due figure inverse di una terza Σ_3 rispetto ad un centro O e siano A_1, B_1 e A_2, B_2 i loro punti corrispondenti ad A_3, B_3 di Σ_3. Le rette A_1B_1 e A_2B_2 sono antiparallele di A_3B_3 rispetto alle OA_3, OB_3 e perciò sono parallele; ne segue che le due figure Σ_1, Σ_2 sono omotetiche direttamente o inversamente, secondo che le due inversioni sono o no della stessa specie.

10. Teorema. — *Due circoli in un piano (o due sfere) si corrispondono in due inversioni una positiva e l'altra negativa, aventi per centri i due centri di similitudine.*

Sia O il centro di omotetia di due circoli (o sfere) c, c'. Presi due punti ad arbitrio A_1, B_1 su c, siano A', B' i loro omologhi su c' in tale omotetia, e A, B i punti d'incontro (non coincidenti con A_1, B_1) delle OA_1, OB_1 con c. Le rette A_1B_1 e $A'B'$ sono parallele e le B_1A_1, AB sono antiparallele rispetto alle OA, OB, e quindi anche $A'B'$ e AB sono antiparallele rispetto ad OA, OB. Ne segue che i due circoli (o sfere) sono inversi rispetto al centro O.

11. Teorema. — *Se r_1, r_2 sono due rette che s'incontrano, i loro angoli sono eguali a quelli dei due circoli c'_1, c'_2 ad essi corrispondenti in una inversione.*

Se le due rette r_1, r_2 s'incontrano in un punto P, i due circoli c'_1, c'_2 si devono tagliare in O e nel punto P' della OP corrispondente a P. Le tangenti in O a questi circoli sono parallele alle r_1, r_2, e perciò gli angoli di queste due coppie di rette sono eguali.

12. Teorema. — *I diedri formati da due piani σ_1, σ_2 sono eguali a quelli delle superficie sferiche σ'_1, σ'_2 ad essi corrispondenti in una inversione.*

Le due sfere σ'_1, σ'_2 passano pel centro d'inversione O ed i piani π'_1, π'_2 ad esse tangenti sono paralleli a σ_1, σ_2, perciò i diedri di queste due coppie di piani sono rispettivamente eguali.

13. Teorema. — *Il prodotto delle distanze del centro d'inversione da due punti corrispondenti è eguale ad una costante positiva o negativa, secondo che è positiva o negativa l'inversione.*

Infatti se A, A' e B, B' son due coppie di punti corrispondenti, essi sono sopra un circolo e si ha

$$OA \, . \, OA' = OB \, . \, OB' = K$$

indicando con K la potenza di O rispetto al suddetto circolo. La costante K è positiva o negativa, secondo che O è esterno o interno al detto circolo.

Corollario. — *La costante K di un'inversione positiva è eguale ad R^2, essendo R il raggio della sfera d'inversione.*

Proiezione stereografica.

14. Definizione. — La proiezione di una superficie sferica fatta da uno dei suoi punti sopra un piano perpendicolare al diametro che passa per quel punto dicesi *proiezione stereografica*.

Sia O il centro e π il piano di proiezione perpendicolare al diametro OA, A' il punto d'incontro della retta OA con π.

È evidente che la superficie sferica σ e la sua proiezione son figure che si corrispondono nell'inversione che ha O per centro ed A, A' per punti corrispondenti.

Risultano da ciò le seguenti notevoli proprietà della proiezione stereografica, che si posson dedurre immediatamente dalle proprietà delle figure inverse.

1°. *I punti della superficie sferica e della sua proiezione si corrispondono univocamente, eccettuato il punto O.*

2°. *La proiezione di un circolo della superficie sferica è un altro circolo.*

Sia infatti c un circolo della sfera σ, B un suo punto, B' la proiezione di B su A. Il circolo c si può riguardare come l'intersezione della sfera σ con una sfera σ_1 condotta per c e per B': Nell'inversione a σ e σ_1 corrispondono π e σ_1 (§ 5, Cor. 5° e 6°), dunque a c corrisponde il circolo comune a π e σ_1.

3°. *L'angolo di due rette tangenti alla superficie sferica in un punto è eguale alla sua proiezione sul piano π.*

Ciò è conseguenza immediata del teorema del § 11.

4°. *Se due figure sulla superficie sferica sono prospettive rispetto ad un centro* P, *le loro proiezioni sono figure omologhe in una inversione, il cui centro è la proiezione di* P; *e viceversa* (§ 7, Cor. 1°).

5°. *La proiezione di una figura anallagmatica situata sulla superficie sferica è una figura anallagmatica. Inversamente una figura anallagmatica piana è la proiezione stereografica dell'intersezione di una sfera con un cono* (§ 7, Cor. 3°).

G. Lazzeri.

NOTE. — 1ª. Dal teorema del § 10 resulta che i centri di due sfere inverse sono punti corrispondenti nella omotetia, ma non già nella inversione.

È noto che l'*omologo d'inversione del centro di una delle sfere è il coniugato armonico di* O *rispetto al diametro dell'altra sfera la cui retta passa per* O.

Di questo teorema del quale si danno di solito dimostrazioni metriche, si può dare la seguente semplicissima dimostrazione geometrica.

Sia C' l'inverso del centro C della sfera c, e sia E'F' il diametro di c' la cui retta passa per O. Si imagini una sfera r' passante per O e per C'; ad essa corrisponderà un piano r passante per C. Il piano (diametrale) r taglia ortogonalmente la sfera c, quindi le sfere r', c' si taglieranno pure ortogonalmente.

Dal noto teorema di *Poncelet* sulle sfere ortogonali (*) si deduce quindi che O, C' separano armonicamente il diametro E' F' della sfera c'.

È da notare che il teorema di *Poncelet* si può dimostrare ben facilmente

(*) Cremona. *Geometria projettiva*, pag. 39. Reye. *Geometria di posiz.*, pag. 44.

senza ricorrere al concetto di misura. Basta perciò ricordare che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio sia armonico è che le parallele ad uno dei raggi del fascio siano bisecate dagli altri tre, proprietà che può dedursi senza far uso di considerazioni metriche.

Corollario. — *Se c, c_1 sono due sfere concentriche di centro O, i* piani polari *di* O *rispetto alle sfere inverse c', c'_1, coincideranno e reciprocamente.*

2ª. Del teorema precedente si può far uso per dimostrare assai brevemente il seguente teorema di *Chasles* sulla proiezione stereografica:

Il centro della proiezione stereografica $(A'B')$ *di un circolo* (AB) *della sfera* σ, *il cui piano non passa per* O, *è la proiezione* D′ *del vertice* P *del cono tangente alla sfera lungo il circolo* (AB). (*)

Per (AB) si faccia passare una sfera λ di centro P, la quale taglierà ortogonalmente la sfera σ. Il diametro EF di λ passante per O incontri in D la sfera σ e in D′ il piano π.

I punti O, D, separano armonicamente E, F. Dal precedente teorema segue dunque che D′, è appunto il centro della sfera λ', inversa di λ, la quale interseca π secondo il circolo massimo $(A'B')$ proiezione stereografica di (AB). Il centro D′ di $(A'B')$ è dunque la proiezione di P sul piano π. Con questo metodo si dimostra che la projezione di un circolo della sfera σ è un altro circolo, e contemporaneamente si determina il centro di quest'ultimo.

P. Aussant-Carà.

SULLE POLARITÀ PIANE

1. Sia ABC un triangolo autoconiugato in una data polarità π. Sieno I_a, I_b le involuzioni di punti reciproci esistenti sui lati a e b. Con i dati la polarità π è individuata.

Si determini l'involuzione I_c di punti reciproci esistente nel lato c, e si determinino ancora la J_a congiunta delle I_b, I_c; J_b congiunta delle I_a, I_c; e la J_c congiunta delle I_a, I_b.

2. Teorema. — *Le* J_a, J_b, J_c *sono fra di loro congiunte.* (**)

Si abbia: $I_a \equiv \frac{CM}{BM'}$, $I_b \equiv \frac{CN}{AN'}$, $I_c \equiv \frac{AZ\,Z'}{BZ_1Z'_1}$, $J_a \equiv \frac{CM}{BM_1}$, $J_b \equiv \frac{CN}{AN_1}$, $J_c \equiv \frac{AZ}{BZ_1}$, dove è $Z \equiv c\,.\,MN$, e gli altri punti Z', Z_1, Z'_1, M_1, N_1 sono ottenuti con le note costruzioni.

Dalla identità $I_c\,J_c \equiv AB\frac{Z\,Z_1}{Z'_1Z'}$, si deduce che ABZ_1Z' è un gruppo armonico, e quindi Z_1 appartiene alla polare di Z' rispetto all'angolo B(C)A. Adunque siccome Z' è allineato con M' ed N', così anche M_1 ed N_1, sono allineati con Z'.

Da ciò si deduce che la J_c è la congiunta delle J_a, J_b. c. v. d.

(*) Veggasi per es. Baltzer-Cremona, *Stereometria*, § 5, 20.

(**) Sebbene questo teorema ed il seguente siano notevoli casi particolari di teoremi più generali. (V. Sannia, *Geom. Proiett.*, Napoli, Pellerano, 1895, pag. 715-234, *a)*) nondimeno mi piace darne queste dimostrazioni perchè molto semplici.

3. Delle sei involuzioni I_a, I_b, I_c, J_a, J_b, J_c, tre sempre sono ellittiche e tre iperboliche, e sopra ciascuno dei lati del triangolo $ABC \equiv abc$, non ve ne sono due della stessa specie.

4. Teorema. — *Scegliendo delle sopra dette 6 involuzioni, tre ad arbitrio, ma su lati distinti e tali che sieno o tutte e tre ellittiche, oppure due iperboliche e la rimanente ellittica, esse possono considerarsi come le involuzioni di punti reciproci rispetto ad una determinata polarità, che ha* $ABC \equiv abc$ *per triangolo autoconiugato.*

Le J_a, J_b, I_c sieno o tutte e tre ellittiche, ovvero sieno due iperboliche e la rimanente ellittica. Consideriamo la polarità determinata dalle J_a, J_b, e in cui a e b sono rette reciproche. Allora è evidente che A e B sono reciproci in detta polarità. Il polo di MN è $M_1A \,.\, N_1B \equiv P$, e siccome M_1 ed N_1 sono allineati con Z', così i punti C, P e Z_1 sono allineati, e quindi Z e Z_1 sono reciproci. c. v. d.

5. Com'è facile vedere, si hanno così 4 polarità, delle quali una è sempre della 2ª specie, e le altre 3 sono della 1ª specie. Da una qualunque di esse, considerando il triangolo autoconiugato $ABC \equiv abc$, e procedendo, come si è fatto partendo dalla data, si ottengono le altre 3. Chiameremo rispettivamente π_1, π_2, π_3, π_4 le polarità determinate come segue:

I_a	J_a	J_a	I_a
I_b	J_b	I_b	J_b
I_c	I_c	J_c	J_c

Due qualunque di queste 4 polarità hanno in comune il triangolo autoconiugato $ABC \equiv abc$, l'involuzione di punti reciproci su uno dei lati di $ABC \equiv abc$, e le involuzioni sui due lati rimanenti di questo triangolo, rispettivamente armoniche.

6. Teorema. — *Il prodotto di due qualunque di queste 4 polarità è un'omologia armonica, il cui asse è quel lato di* $ABC \equiv abc$ *che contiene l'involuzione comune, e il cui centro è il vertice opposto.*

Infatti si osservi che se per es. consideriamo le due polarità π_1, π_2, si ha $I_a\, J_a \equiv CB$, $I_b\, J_b \equiv CA$ e $I_c\, I_c \equiv 1$.

7. Corollario 1°. — *Prese delle 4 polarità due ad arbitrio, ciascuna è la polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra.*

Cioè: Ciascuna polarità trasforma in sè stessa una qualunque delle rimanenti.

Corollario 2°. — *Se* hkrs *è una permutazione qualunque dei numeri* 1, 2, 3, 4, *si ha* $\pi_h\, \pi_k \equiv \pi_r\, \pi_s \equiv$ *ad una omologia armonica, e quindi è anche* $\pi_h\, \pi_k\, \pi_r\, \pi_s \equiv 1$.

Corollario 3°. — *Il prodotto di due delle polarità è eguale al prodotto delle due omologie armoniche corrispondenti alle due involuzioni non comuni.*

Per es. $\pi_1\pi_2 \equiv \pi_3\pi_4 \equiv [C, c] \equiv [A, a] \,.\, [B, b]$.

Corollario 4°. — *Si ha:* $\pi_h\, \pi_k\, \pi_r \equiv \pi_s$.

Corollario 5°. — *Ponendo* $\pi_k \pi_r \equiv \Omega$ (*omologia armonica*), *abbiamo* $\pi_s \equiv \pi_h \Omega$, *e quindi, se per es. i punti* A *e* B *sono all'infinito,* $\pi_1\pi_2$, $\pi_3\pi_4$ *sono due coppie di polarità coniugate, e se* π_3 π_4 *sono due iperboli, ne segue che ciascuna di esse è il luogo degli estremi dei diametri ideali dell'altra.*

8. Due qualunque delle quattro polarità sono bitangenti: la corda di contatto è il lato di *abc* che ne contiene l'involuzione comune, ed il vertice opposto ne è il polo del contatto.

Per fissare le idee supponiamo che I_a e I_b sieno iperboliche, allora se consideriamo due delle polarità della 1ª specie, per es. la 1ª e la 4ª, esse, come sappiamo, sono corrispondenti in una omologia di centro A^* ed asse AA^*_1, come in un'altra di centro A^*_1 e di asse AA^*. (Con A^* e A^*_1 indichiamo i punti doppi della I_a; abbiano analogo significato B^*, B^*_1, per la I_b; e C, C_1, per la J_c). Ora è facile vedere che le omologie di cui si parla sono le armoniche, perchè, per es., B^*_1 e C^*_1 sono corrispondenti nella omologia armonica $[A^*_1, A^*A]$. (Si noti che A^*_1, B^*_1 e C^*_1 sono per diritto.)

Dal corollario 5° del numero precedente si deduce, che se il lato c è all'infinito, le quattro coppie di polarità, che hanno in comune o l'involuzione in a, o quella in b, sono quattro coppie di polarità supplementari rispetto alla direzione di b, o di a.

9. Teorema. — *Data una polarità* π_1, *è unica e determinata la polarità che si può dedurre da* π_1 (*considerando un certo triangolo autoconiugato....*), *e che abbia sopra una retta qualunque* c, *la stessa involuzione di punti reciproci che la data* π_1.

Primieramente si osservi che per ottenere una polarità che abbia comune con π_1 la I_c, si deve considerare un triangolo autoconiugato in cui c e il suo polo C in π_1 sieno lato e vertice opposto.

Infatti le polarità, che si deducono da π_1 nel modo sopra detto, sono bitangenti con π_1, e quindi se nel triangolo autoconiugato generatore non è c come lato, essendo gli elementi del contatto un certo lato e il vertice opposto del triangolo generatore, le dette polarità non possono avere in comune con π_1 la I_c.

Detto ciò se π_2, π'_2 sono due polarità dedotte da π_1, considerando due triangoli generatori distinti, ma aventi in comune il vertice C e il lato opposto c, si ha $\pi_2\pi_1 \equiv [C, c]$, $\pi_1\pi'_2 \equiv [C, c]$, da cui si deduce $\pi_2\pi'_2 \equiv 1$, cioè $\pi_2 \equiv \pi'_2$.

c. v. d.

Corollario. — *Se* π_1 *è un cerchio, è unica e determinata la polarità dedotta da* π_1, *che sia una polarità circolare.*

10. Teorema. — *Rispetto alle* π_1, π_2, π_3, π_4, *le polari di uno stesso punto formano un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è* abc; *ed i poli di una stessa retta, formano un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale è* ABC.

Corollario 1°. — *I centri* O_1, O_2, O_3, O_4 *delle 4 polarità, sono i vertici di un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale è* ABC.

Corollario 2°. — *Siccome i 4 poli di una stessa retta* r, *formano un quadrangolo completo il cui triangolo diagonale è* ABC, *così le polari dei detti 4 poli in* π_h $(h = 1, 2, 3, 4)$, *formeranno un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è* abc; *ma questo quadrilatero è già individuato da* r *e da* abc, *e quindi se costruiamo le polari dei sopradetti 4 poli rispetto ad un'altra delle 3 rimanenti polarità, rispetto a* π_k, *per es., otteniamo lo stesso quadrilatero che abbiamo ottenuto considerando* π_h.

Corollario 3°. — *Dato un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale sia* ABC, *o un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale sia* abc, *i vertici del quadrangolo si possono considerare come i poli di una stessa retta rispetto alle 4 polarità* $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, *e i lati del quadrilatero si possono considerare come le polari di uno stesso punto rispetto alle dette quattro polarità.*

Corollario 4°. — *Gli otto poli di due rette, sono in una stessa conica.*

11. Teorema. — *La conica, determinata dagli 8 poli di due date rette* r, r′, *degenera in due rette passanti per un determinato vertice di* ABC, *se* r′ *passa per il punto comune ad* r *ed al lato opposto al detto vertice, o se passa per il coniugato armonico di questo punto rispetto agli altri due vertici del triangolo* $ABC \equiv abc$.

Sieno R_s e R'_s i poli rispettivi di r e di r' in π_s $(s = 1, 2, 3, 4)$. La conica determinata dagli 8 poli di r, r', può degenerare in due rette passanti per A, o per B, o per C. Degenererà in due rette passanti per A, per es., se R'_1 è in AR_1, cioè se r' passa per il punto ar. Inoltre osserviamo che, se è $\pi_1 \equiv \dfrac{X}{(AR_2)}$ e $\pi_2 \equiv \dfrac{(AR_2)}{(ar)}$, si ha $\pi_1\pi_2 \equiv [C, c] \equiv \dfrac{X}{(ar)}$, adunque X è il coniugato armonico di ar rispetto a C e a B. Ora, se r' passa per X, R'_1 sarà in AR_2, e la conica degenera. Osservando che il ragionamento è generale, ossia vale per R'_h e AR_h, o per R'_h e AR_k, concludiamo. c. v. d.

Si noti che se r' passa, per es., pel coniugato armonico di ar rispetto a B e C, e pel coniugato armonico di rb rispetto ad A e C, le rr' sono corrispondenti in [C, c] e quindi gli otto poli si riducono a 4 soli punti distinti.

Avviene lo stesso se r' passa per ra e pel coniugato armonico di rb rispetto ad A e C, perchè in questo caso r' passa anche pel coniugato armonico di rc rispetto ad A e B.

12. Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè i quattro poli di una retta mobile sieno nella conica determinata dagli 8 poli di due rette fisse* r, r′, *è che la retta mobile inviluppi la conica determinata da* rr′, *e dal trilatero* abc *come trilatero autoconiugato.*

Infatti la polare reciproca di questa conica rispetto a π_h, è la conica determinata da R_h, R'_h, e da ABC come triangolo autoconiugato, cioè è la conica $R_hR'_hR_kR'_kR_rR'_rR_sR'_s$; adunque la condizione è sufficiente. Se poi uno dei 4 poli della retta mobile, e quindi anche gli altri 3, è nella conica $R_hR'_hR_kR'_kR_rR'_rR_sR'_s$, la retta mobile è tangente alla polare reciproca di questa conica rispetto ad una qualunque delle 4 polarità, e questa polare reciproca è evidentemente la conica determinata da r, r', e dal trilatero abc, come trilatero autoconiugato.

13. Data una retta r, indichiamone con R_1, R_2, R_3, R_4 i poli rispetto a $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$; con $R_aR'_a$ i coniugati del punto ar in I_a, J_a; indichino punti analoghi R_b, R'_b; R_c, R'_c. Dalle relazioni che passano tra le I e le J, si deduce che $R_aR'_a$, $R_bR'_b$, $R_cR'_c$, sono le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è abc. Si noti che R'_a, R'_b, R'_c sono allineati. Dalla costruzione di R_1, R_2, R_3, R_4, si deduce che R_1, R_2 sono nella CR_c polare di R'_c rispetto all'angolo B(C)A; $R_3 R_4$ sono nella CR'_c polare di R_c rispetto allo stesso angolo B(C)A; e così via.

14. Teorema. — *I poli di una retta* r *rispetto a due qualunque delle polarità, e i coniugati, nelle involuzioni che non sono comuni alle due polarità, dei punti ove la data retta* r *sega i due lati di* $ABC \equiv abc$ *che contengono le involuzioni ad esse polarità non comuni, sono in una stessa conica.*

Dimostriamo che $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$, per es., sono in una stessa conica. Infatti essendo $\pi_1\pi_4 \equiv [A, a]$, ed essendo corrispondenti in $[A, a]$, i punti R_1R_4, $R_bR'_b$, $R_cR'_c$, si ha: $R_1(R_bR'_bR_cR'_c) \barwedge R_4(R'_bR_bR'_cR_c) \barwedge R_4(R_bR'_bR_cR'_c)$.

c. v. d.

Si hanno in questo modo le seguenti $\binom{4}{2} = 6$ coniche reali:

π_1	e	π_2	generano	$R_1R_2R_aR'_aR_bR'_b$
π_1	»	π_3	»	$R_1R_3R_aR'_aR_cR'_c$
π_1	»	π_4	»	$R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$
π_2	»	π_3	»	$R_2R_3R_bR'_bR_cR'_c$
π_2	»	π_4	»	$R_2R_4R_aR'_aR_cR'_c$
π_3	»	π_4	»	$R_3R_4R_aR'_aR_bR'_b$.

15. Teorema. — *Rispetto a ciascuno di queste sei coniche;*

1° *le tangenti ad essa nei due poli della data retta* r, *concorrono del coniugato del punto comune alla* r *ed al lato di* abc *che contiene l'involuzione comune alle due polarità che hanno generato la conica, nell' involuzione armonica* (*) *all' involuzione comune alle dette due polarità.*

2° *le tangenti nei coniugati del punto comune alla* r *e ad uno dei lati* abc, *concorrono in un determinato punto del lato di* abc, *che contiene l' involuzione comune alle due polarità che hanno generato la conica.*

Si consideri, per es., la conica $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$.

(*) Quando si parla d'involuzioni, s'intende parlare delle $I_aI_bI_cJ_aJ_bJ_c$.

1°. Dal quadrangolo ad essa iscritto $R_cR_bR'_cR'_b$, si deduce che R_1R_4 è la polare di R'_a, e quindi le tangenti alla conica in R_1R_4, concorrono in R'_a.

2°. Si osservi ora che rispetto alla detta conica A e a sono polo e polare, e quindi il punto di concorso W delle tangenti in $R_bR'_b$, per es., giace in a. Il quadrangolo $R_cR_1R'_cR_4$ ci dice anzi che questo punto W è il punto $a \cdot R_cR_4 \equiv a \cdot R_1R'_c$. c. v. d.

16. Alla formazione di due qualunque delle sei coniche o possono concorrere due coppie distinte delle quattro polarità, ovvero tra le due polarità che generano la prima conica vi è una di quelle che generano la seconda.

Nel primo caso le due coniche hanno in comune quattro punti reali e distinti che sono facili ad essere determinati, e si corrispondono nelle due omologie armoniche, i cui assi sono i lati di abc, che contengono le involuzioni non comuni alla prima coppia di polarità, e quindi anche quelle non comuni alla seconda coppia, e i cui centri sono i vertici opposti. Per es., le due coniche $R_1R_4R_aR'_bR_cR'_c$, $R_2R_3R_bR'_bR_cR'_c$ si corrispondono nelle due omologie armoniche [C, c] e [B, b].

17. Teorema. — *Se si considerano due delle sei coniche, tali che fra le due polarità, che generano la prima, vi sia una di quelle che generano la seconda, le due coniche hanno un contatto bipunto nel coniugato del punto comune alla retta data* r *ed al lato di* abc *che contiene l'involuzione comune alle altre due polarità, in tale involuzione.*

Dimostro, per es., che le due coniche $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$ e $R_2R_4R_aR'_aR_bR'_b$ hanno un contatto bipunto in R_b. Infatti si osservi primieramente che dai due quadrangoli $CR'_aR'_bR_4$, $CR_aR_bR_3$ si deduce che le rette $R_4R'_a$, R_aR_3 segano la c in uno stesso punto X, che è il coniugato armonico di A rispetto a B, e R'_c. Per la seconda parte del teorema precedente, e osservando il quadrangolo $R'_aR_aR_3R_4$, deduciamo che la tangente alla seconda conica in R_b è XR_b. Ora $R_aWR_1R_b$ è un quadrangolo costruttore del gruppo armonico $XABR'_c$, e quindi WR_b, che è la tangente in R_b alla prima conica, passa per X, cioè $WR_b \equiv XR_b$. c. v. d.

Del resto basta solamente osservare che le due coniche che si considerano sono corrispondenti nell'omologia armonica di centro R_b e di asse $R_4R'_b$.

18. Consideriamo la conica $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$.

Sia U il punto di concorso delle tangenti ad essa in $R_cR'_c$, cioè sia $U \equiv R_1R'_b \cdot a \equiv R_bR_4 \cdot a$.

I seguenti gruppi CR_aBU, BR_aCW, $CBR_aR'_a$ sono armonici, e quindi essendo $CR_aBU \barwedge BR_aCW$, U e W sono coniugati nell' involuzione $\left|R_a\frac{B}{C}\right|$, di cui l'altro punto doppio è R'_a, e quindi il gruppo $R_aR'_aUW$ è armonico.

Ragionando analogamente per le altre 5 coniche, ed osservando che

$R_aR'_a$, $R_bR'_b$, R_cR_c sono le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è *abc*, possiamo enunciare il seguente

TEOREMA. — *I punti di concorso delle tangenti alle sei coniche nei punti* $R_aR'_a$, $R_bR'_b$, $R_cR'_c$, *sono sei coppie di punti coniugati delle tre involuzioni* $J^0_a \equiv R_aR'_a$, $J^0_b \equiv R_bR'_b$, $J^0_c \equiv R_cR'_c$.

Catania, Dicembre 1898.

GIUSEPPE MARLETTA.
Studente in Matematica.

Sull'integrale $\int \operatorname{tang}^n \varphi \,.\, d\varphi$

Il metodo ordinario d'integrazione di questa funzione consiste nel porre $\tan\varphi = u$. Si è allora ricondotti all'integrale $\int \frac{u^n\,du}{1+u^2}$.

Ecco un altro procedimento che è unicamente basato sull'identità

$$1+\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

e sulla conoscenza dei due integrali

$$\int \tan\varphi\, d\varphi = -\mathrm{L}\cos\varphi + C \tag{1}$$

$$\int \tan^2\varphi\, d\varphi = \tan\varphi - \varphi + C. \tag{2}$$

L'integrale (1) servirà per i valori impari di n e l'integrale (2) per i valori pari di n. Ecco degli esempi.

1°. CALCOLO DI $\int \tan^3\varphi\, d\varphi$. — Si ha l'identità

$$\tan\varphi\,(1+\tan^2\varphi) = \frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^3\varphi},$$

$$(\tan\varphi + \tan^3\varphi) = -\frac{d\cos\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Integrando i due membri si ha

$$\int \tan\varphi\, d\varphi + \int \tan^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + C.$$

Dunque, tenendo conto della (1),

$$\int \tan^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \mathrm{L}\cos\varphi + C. \tag{3}$$

4°. CALCOLO DI $\int \tan^4\varphi\, d\varphi$. — Elevando a quadrato l'identità $1+\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, si ha

$$1 + 2\tan^2\varphi + \tan^4\varphi = \frac{1}{\cos^4\varphi}.$$

Da cui integrando

$$\varphi + 2\int \tan^2\varphi\, d\varphi + \int \tan^4\varphi \,.\, d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{2}{3}\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{3}\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos^3\varphi} + C,$$

e per conseguenza

$$\int \tan^4\varphi\, d\varphi = \varphi - \frac{4}{3}\tan\varphi + \frac{1}{3}\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos^3\varphi} = \varphi - \tan\varphi + \frac{\tan^3\varphi}{3} + C.$$

E. Barisien.

SULLA CURVA LUOGO DEI PUNTI CHE HANNO PER COORDINATE

$x = a\,.\cos^n\varphi,\ y = b\,.\,\text{sen}^n\varphi$

Per studiare tutti i casi possibili di questa curva conviene fare sul-l'esponente n le diverse ipotesi seguenti.

I. n intero, positivo e pari.
II. n " " dispari.
III. n " negativo e pari.
IV. n " " dispari.
V. n frazionario e positivo.
VI. n " negativo.

L'equazione cartesiana di questa curva è in generale

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{n}} = 1.$$

Esaminiamo successivamente i casi sopra indicati.

I. Si può porre $n = 2m$. Ecco alcuni casi interessanti.

1°. $n = 0$. La curva è allora il punto

$$(x = a,\ y = b).$$

2°. $n = 2$. Allora si ha

$$x = a\,.\cos^2\varphi \quad , \quad y = b\,.\,\text{sen}^2\varphi,$$

e la linea diventa la retta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

L'area compresa fra la retta e gli assi coordinati è $U = \frac{a\,.\,b}{2}$.

3°. $n = 4$. Si ha

$$x = a\,.\cos^4\varphi \quad ; \quad y = b\,.\,\text{sen}^4\varphi.$$

La curva è la parabola

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$$

tangente agli assi coordinati. Si sa che l'area compresa fra questa parabola e le sue tangenti Ox, Oy è

$$\mathrm{U}=\frac{a\,.\,b}{6}.$$

Si può, più generalmente, trovare l'area compresa fra la curva e gli assi coordinati che le sono tangenti, per il caso di $n=2m$.

Le coordinate di un punto della curva sono

$$x=a\,.\cos^{2n}\varphi \quad , \quad y=b\,.\,\mathrm{sen}^{2n}\varphi.$$

Ora la derivata dell'area è

$$2\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi}=x\frac{dy}{d\varphi}-y\frac{dx}{d\varphi},$$

e siccome

$$\frac{dx}{d\varphi}=-2ma\,.\cos^{2m-1}\varphi\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \frac{dy}{d\varphi}=2mb\,.\,\mathrm{sen}^{2m-1}\varphi\,.\cos\varphi,$$

ne risulta

$$2\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi}=2mab\left\{\mathrm{sen}^{2m-1}\varphi\cos^{2m-1}\varphi+\cos^{2m+1}\varphi\,.\,\mathrm{sen}^{2m+1}\varphi\right\},$$

ovvero

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi}=mab\,.\,\mathrm{sen}^{2m-1}\varphi\,.\cos^{2m-1}\varphi$$
$$=\frac{mab}{2^{2m-1}}(\mathrm{sen}\,2\varphi)^{2m-1}.$$

Dunque l'area cercata è, ponendo $2\varphi=\theta$,

$$\mathrm{U}=\frac{mab}{2^{2m-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{sen}\,2\varphi)^{2m-1}d\varphi=\frac{mab}{2^{2m}}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^{2m-1}\theta\,.\,d\theta.$$

Ora

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^{2m-1}\theta\,.\,d\theta=2\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2m-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2m-1)}.$$

Dunque finalmente

$$\mathrm{U}=\frac{mab}{2^{2m-1}}\cdot\frac{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(2m-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2m-1)}.$$

II. In questo caso $n=2m+1$.

Casi particolari. — 1°. Per $n=1$ si ha

$$x=a\,.\cos\varphi \quad , \quad y=b\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

La curva è l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

di cui l'area è

$$U = \pi ab.$$

2°. Per $n = 3$ si ha

$$x = a \, . \cos^3 \varphi \quad , \quad y = b \, . \operatorname{sen}^3 \varphi.$$

L'equazione cartesiana della curva è allora

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

che è quella della sviluppata dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

e ha per area

$$U = \frac{3}{8} \pi ab.$$

Nel caso generale, le coordinate d'un punto della curva sono

$$x = a \, . \cos^{2m+1} \varphi \quad , \quad y = b \, . \operatorname{sen}^{2m+1} \varphi.$$

L'area di questa curva è, ponendo $2\varphi = \theta$, per un calcolo analogo ai precedente,

$$U = \frac{ab}{2^{2m-1}} (2m + 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m} \theta \, d\theta.$$

Ed essendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m} \theta \, . \, d\theta = \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, . \, . \, (2m - 1)}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, . \, . \, 2m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

si deduce

$$U = \frac{\pi ab}{2^{2m}} \quad \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, . \, . \, (2m - 1)}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, . \, . \, 2m}.$$

III. In questo caso $n = -2m$.

Casi particolari. — 1°. Per $n = -2$ si ha

$$x = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \quad , \quad y = \frac{b}{\operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

La curva è dunque l'iperbole equilatera

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1.$$

2°. Per $n = -4$, si ha

$$x = \frac{a}{\cos^4 \varphi} \quad , \quad y = \frac{b}{\operatorname{sen}^4 \varphi}.$$

Il luogo dei punti (x, y) è la curva

$$\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{b}{y}}=1$$

ossia

$$(xy-bx-ay)^2=4ab\,xy.$$

IV. In questo caso $n=-(2m+1)$.

Casi particolari. — 1°. $n=-1$. Si ha

$$x=\frac{a}{\cos\varphi} \quad , \quad y=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

La curva è allora la *Kreuzcurve*

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1.$$

Si trova che l'area compresa fra questa curva ed i suoi asintoti è eguale a $4ab$. Infatti, se si riferisce la curva a due dei suoi asintoti, le nuove coordinate sono

$$X=x-a=\frac{a}{\cos\varphi}-a \quad , \quad Y=y-b=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}-b.$$

Ora

$$dU=Y\,.\,dX=\frac{b\,(1-\operatorname{sen}\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\cdot\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot d\varphi=$$

$$=\frac{ab\,(1-\operatorname{sen}\varphi)}{\cos^2\varphi}d\varphi=ab\left[\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{d\cos\varphi}{\cos^2\varphi}\right],$$

e integrando

$$U=4ab\left[\tan\varphi-\frac{1}{\cos\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$U=4ab\left[\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$U=4ab.$$

L'area è dunque $4ab$.

2°. $n=-3$. Si ha

$$x=\frac{a}{\cos^3\varphi} \quad , \quad y=\frac{b}{\operatorname{sen}^3\varphi}.$$

L'equazione cartesiana è

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{y}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

ossia

$$(x^2y^2-b^2x^2-a^2y^2)^3=27\,a^2b^2\,.\,x^4y^4.$$

Essa è del genere della Kreuzcurve. Sarebbe interessante di calcolare l'area compresa fra questa curva e i suoi asintoti, e più generalmente l'area relativa alla curva avente per coordinate

$$x = \frac{a}{\cos^{2m+1}\varphi} \quad , \quad y = \frac{b}{\operatorname{sen}^{2m+1}\varphi}.$$

V, VI. Questi casi hanno luogo per $n = \frac{p}{q}$, $n = -\frac{p}{q}$, e si riducono tutti al caso unico di n frazionario, maggiore o minore dell'unità. Non offrono niente di particolare da segnalare.

E. Barisien.

SULL' IDENTITÀ DI CERTI INTEGRALI DEFINITI

Quando si calcola in due o più modi diversi l'area limitata da una curva chiusa, si ottengono due o più integrali definiti che sono identici. Si possono trovare così delle identità che sarebbe difficile di ottenere direttamente, specialmente se non si conosce il valore comune di questi integrali. Si possono variare gli esempi all'infinito; ci contentiamo di darne qualcuno.

1°. *Area della curva*

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1.$$

Si ha

$$y = \frac{b}{a}\sqrt[4]{a^4 - x^4}.$$

Per conseguenza l'area racchiusa dalla curva è

$$\text{(1)} \qquad U = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt[4]{a^4 - x^4}\,dx.$$

D'altra parte le coordinate di un punto variabile della curva si possono scrivere in funzione di un parametro φ nel modo seguente

$$x = a\sqrt{\cos\varphi}, \qquad y = b\sqrt{\operatorname{sen}\varphi};$$

da cui

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{2\sqrt{\cos\varphi}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{b\cos\varphi}{2\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}.$$

Per U si hanno anche i due valori

$$\mathrm{U}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{dy}{d\varphi}\, d\varphi, \qquad \mathrm{U}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\frac{dy}{d\varphi}-\frac{dx}{d\varphi}\right) d\varphi,$$

dai quali si ricava

$$(2) \qquad \mathrm{U}=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}}$$

$$(3) \qquad \mathrm{U}=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}}\varphi\,.\,d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Egnagliando i valori (1), (2), (3) di U si trova

$$\frac{4}{a^2}\int_0^a \sqrt[4]{a^4-x^4}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}x\cos x}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{\frac{3}{2}}x.dx}{\operatorname{sen}x}.$$

Se si cerca l'area limitata dalla curva

$$(4) \qquad \frac{x^{\mathrm{m}}}{a^{\mathrm{m}}}+\frac{y^{\mathrm{m}}}{b^{\mathrm{m}}}=1,$$

che è la generalizzazione della precedente, si ottiene l'identità

$$(5) \quad \frac{m}{a^2}\int_0^a \sqrt[\mathrm{m}]{a^{\mathrm{m}}-x^{\mathrm{m}}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x\cos x)^{\frac{2}{\mathrm{m}}-1}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{\frac{2}{\mathrm{m}}-1}x\cos^{\frac{2}{\mathrm{m}}+1}x\,.\,dx.$$

2°. *Area della Kreuzcurve*

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1.$$

Si ricade nel caso della curva (4) ponendo $m=-2$. Sembrerebbe così che si avesse

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\operatorname{sen}^2x\,.\,\cos^2x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{0\,dx}{\operatorname{sen}^3x}.$$

La ragione di questo paradosso apparente è che l'area della *Kreuzcurve* considerata non è finita, mentre la formula (5) non si può applicare altro che quando l'area determinata dalla curva (4) sia finita.

Si possono tuttavia trarre dalla *Kreuzcurve* delle identità esprimendo l'area compresa fra la curva ed i suoi asintoti, la quale è eguale a $4ab$.

3°. Si potranno pure ottenere delle identità d'integrali definiti, esprimendo l'area di una curva in coordinate cartesiane e in coordinate polari.

E. N. Barisien.

SOPRA DUE TEOREMI FONDAMENTALI DI MASSIMI E MINIMI

È nota la somma importanza che nella Teoria elementare dei massimi e minimi assoluti ha il teorema sul massimo di un prodotto i cui fattori hanno una somma costante. È parimenti noto che la dimostrazione comune di questo teorema, che si trova in molti Trattati anche moderni ed ottimi, è priva di rigore. Lo scopo precipuo di questo articoletto è appunto quello di porgere una dimostrazione del detto teorema, che sia rigorosa e nello stesso tempo elementare. Ciò potrebbe sembrare inutile dopo la dimostrazione perfettamente rigorosa che ne ha dato il Darboux; e chi scrive sarebbe dello stesso parere, se il metodo di dimostrazione, sostanzialmente diverso da quello seguito dall'Illustre Geometra, e lo sviluppo che esso può avere in una dimostrazione diretta dell'altro non meno importante teorema sul massimo d'un prodotto di potenze di quantità, la cui somma sia costante, non gli sembrassero degni di nota. (*)

Le proposizioni elementarissime sui massimi e minimi assoluti, sulle quali si fondano le dimostrazioni esposte sono le seguenti:

a) Il massimo od il minimo di una espressione non si altera quando essa venga moltiplicata per una costante positiva.

b) Il prodotto di due quantità positive, la cui somma è costante, è massimo quando esse sono uguali fra loro. Se invece è costante il prodotto, la somma, per valori uguali, è minima.

c) La differenza $a-y$, con a costante, è massima quando y è minima.

d) Se u e v sono due funzioni di x (s'intende anche nel senso più elementare), che mentre x varia da a a b sono massime per uno stesso valore di x, anche il loro prodotto in quell'intervallo è massimo per lo stesso valore.

I. TEOREMA. — *Se* a *è un numero positivo, l'espressione* $\omega=(a-x)x^{m-1}$, *dove* m *è un numero intero positivo qualunque, mentre* x *varia da* 0 *ad* a, *prende il massimo valore per* $x=\frac{m-1}{m}a$. (**)

Si osserva che la $\omega=(a-x)x^{m-1}=ax^{m-1}-x^m$ è contenuta come caso particolare per $k=m$ nella

$$\omega_k=\frac{m-1}{k-1}\,ax^{k-1}-\frac{m}{k}\,x^k \,. \tag{1}$$

(*) Dimostrazioni rigorose di questi teoremi furono date dal chiar. prof. D. BESSO, nella sua bella Memoria "Teoremi elementari sui massimi e minimi". *Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma,* 1889.

(**) Per preziose notizie storiche intorno a questo teorema ed ai seguenti. vedi: D. BESSO, "Sopra un opuscolo di Michelangiolo Ricci". *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario,* 1892.

Per $m = 2$ si ha

$$\omega_2 = (m-1)\,ax - \frac{m}{2}\,x^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2(m-1)\,a}{m} - x\right)x,$$

che evidentemente è massima per $x = \frac{m-1}{m}\,a$, mentre x varia da 0 a $\frac{2(m-1)\,a}{m}$, e quindi a maggior ragione quando varia da 0 ad a.

Si dimostrerà qui in generale che, mentre x va da 0 ad a, ω_k assume il suo massimo valore per $x = \frac{m-1}{m}\,a$, qualunque sia k intero e positivo $\leq m$.

Si supponga che ciò valga per ω_k, allora si vedrà che deve valere anche per ω_{k+1}. A tal uopo si ponga

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = u, \text{ donde } \omega_{k+1} = u \,.\, \omega_k.$$

È chiaro (d) che qualora si riesca a mostrare che u è massima per $x = \frac{m-1}{m}\,a$, per l'ipotesi fatta su ω_k, si può subito concludere che anche ω_{k+1} è massima per lo stesso valore di x. Ciò è appunto quanto avviene, come può risultare dal seguente procedimento.

Sostituendo alle ω i loro valori dati dalla (1), si ottiene

$$u = \frac{\dfrac{(m-1)\,a}{k}\,x - \dfrac{m}{k+1}\,x^2}{\dfrac{(m-1)\,a}{k-1} - \dfrac{m}{k}\,x} = \frac{\alpha x - \beta x^2}{\gamma - \delta x} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma - \alpha\delta}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\beta(\gamma - \delta x) + \frac{\beta\gamma\,(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\beta(\gamma - \delta x)}\right) = \lambda - \frac{1}{\delta^2}\left(z - \frac{\mu}{z}\right) = \lambda - \varphi,$$

dove evidentemente si è posto

$$\alpha = \frac{(m-1)\,a}{k}, \qquad \beta = \frac{m}{k+1}, \qquad \gamma = \frac{(m-1)\,a}{k-1}, \qquad \delta = \frac{m}{k},$$

$$\lambda = \frac{2\beta\gamma - \alpha\delta}{\delta^2} \quad \mu = \beta\gamma(\beta\gamma - \alpha\delta) \quad z = \beta(\gamma - \delta x) \quad \varphi = \frac{1}{\delta^2}\left(z + \frac{\mu}{z}\right).$$

L'espressione $z + \frac{\mu}{z}$ è la somma di due quantità il cui prodotto $\mu = \beta\gamma\,(\beta\gamma - \alpha\delta) = \frac{m^2\,(m-1)^2\,a^2}{k^2\,(k^2-1)^2}$ è costante e positivo.

Dunque (b), mentre z varia da 0 a $+\infty$, la somma è minima per $z = \frac{\mu}{z}$ ossia $z = +\sqrt{\mu}$ (esclusa la soluzione $z = -\sqrt{\mu}$ per la condizione che z sia positivo).

Si ha poi $z = \beta(\gamma - \delta x)$. Ora affinchè z sia positivo occorre e basta che sia $\beta(\gamma - \delta x) \geq 0$, donde facilmente (per essere β e δ positivi) $x \leq \frac{\gamma}{\delta} = \frac{k(m-1)}{(k-1)m} a = p$; in altre parole che x sia compreso fra p e $-\infty$. Siccome poi per ogni valore di z fra 0 e $+\infty$ si può sempre trovare un valore di x (compreso naturalmente fra p e $-\infty$) che faccia assumere a z il prefissato valore, si conclude che mentre x va da p a $-\infty$, z prende tutti i possibili valori da 0 a $+\infty$ e quindi che l'espressione $z + \frac{\mu}{z}$, mentre x varia da p a $-\infty$, è minima per quel valore di x che rende $z = \beta(\gamma - \delta x) = +\sqrt{\mu}$, il qual valore fin da ora si può dire dover essere compreso fra p e $-\infty$.

Tale valore è subito dato dall'equazione

$$\beta(\gamma - \delta x) = +\sqrt{\mu}$$

che, fatte le opportune sostituzioni, offre $x = \frac{m-1}{m} a$.

Osservando poi che $\frac{m-1}{m} a$ è compreso fra 0 ed a, e che è

$$p - a = \frac{k(m-1)}{(k-1)m} a - a = \frac{m-k}{(k-1)m} a \geq 0 \quad \text{per} \quad m \geq k,$$

si conclude che l'intervallo da 0 ad a comprende il valore $\frac{m-1}{m} a$ mentre è compreso entro l'intervallo da p a $-\infty$, e quindi che a maggior ragione l'espressione $z + \frac{\mu}{z}$ assume il suo valore massimo per $x = \frac{m-1}{m} a$, mentre x va da 0 ad a.

Essendo poi $\varphi = \frac{1}{\delta^2}\left(z + \frac{\mu}{z}\right)$, con δ^2 eminentemente positivo, si conclude la stessa cosa per φ e da ultimo si ricava subito che la differenza

$$u = \lambda - \varphi$$

è massima per $x = \frac{m-1}{m} a$, al variare di x da 0 ad a. (c).

A questo punto, visto che l'ipotesi fatta in principio su ω_k vale per $k = 2$, per induzione si conclude che essa vale per ogni valore di $k \leq m$ e quindi per $k = m$.

Nella formula $\omega = (a - x) x^{m-1}$ si ponga $a - x = y$, e si avrà

$$\omega = y(a - y)^{m-1};$$

e siccome al variare di x da 0 ad a, y varia da a a 0 e per

$$x = \frac{m-1}{m} a \quad \text{si ha} \quad y = \frac{a}{m},$$

si conclude che mentre y va da 0 ad a, essendo a un numero positivo qualunque, l'espressione $y\,(a-y)^{m-1}$ assume il massimo valore per $y = \frac{a}{m}$. Sotto quest'ultima forma il teorema dimostrato può servire direttamente a dimostrare il

2. Teorema. — *Il prodotto di più grandezze che non assumono mai valori negativi ed hanno una somma costante è massimo quando esse sono uguali tra loro.*

Siano $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ m grandezze vincolate alle sole condizioni di non poter assumere valori negativi e di avere una somma costante a. Si vuol provare che per $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m = \frac{a}{m}$ il prodotto $P = x_1 . x_2 \ldots . x_m$ assume un valore che è maggiore di ogni altro valore che possa assumere.

È a tutti noto che per $m = 2$ (ed anche per $m = 3, 4$) la dimostrazione è facilissima, ed anzi che essa può stabilirsi in parecchi modi diversi e sempre con tutto rigore. Ammettiamo che il teorema valga per un dato valore $m - 1$ e vediamo che cosa occorre dimostrare per concludere che esso vale anche per il valore m.

Si dia un valore fisso x ad una qualunque delle m variabili $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}, x_m$ per es. ad x_m. Allora si ha

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{m-1} = a - x = \text{costante}$$

e dall'ipotesi fatta risulta che il prodotto

$$P_{m-1} = x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_{m-1}$$

assume un valore massimo per $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = \frac{a-x}{m-1}$, il quale valore è dato da

$$P'_{m-1} = \left(\frac{a-x}{m-1}\right)^{m-1},$$

mentre il prodotto $P = x_1 . x_2 \ldots x_{m-1} . x_m$ per questi valori speciali prende il valore

$$P' = x\left(\frac{a-x}{m-1}\right)^{m-1} = \frac{1}{(m-1)^{m-1}}\, x\,(a-x)^{m-1}.$$

Questo prodotto dà il valore massimo del prodotto delle m quantità $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ ad ogni valore prefissato x della m^{a}. È quindi chiaro che, se mentre x_m varia nel suo campo di variabilità, da 0 ad a, per un dato valore α fa assumere all'espressione $\frac{1}{(m-1)^{m-1}}\, x\,(a-x)^{m-1}$, o ciò che è lo stesso ad $x\,(a-x)^{m-1}$, un valore massimo, il prodotto

$$P = x_1, x_2 \ldots . x_m$$

deve prendere effettivamente un valore massimo per

$$x_m = \alpha \quad \text{ed} \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = \frac{a-\alpha}{m-1}.$$

Se poi è $\alpha = \frac{a}{m}$ si ha

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{m-1} = x_m = \frac{a}{m}.$$

La questione si riduce dunque a provare che mentre x varia da zero ad a, $x(a-x)^{m-1}$ assume un valore massimo per $x = \frac{a}{m}$.

Ciò è appunto quando s'è stabilito col precedente teorema.

È noto dai trattati d'Algebra come dall'ultimo teorema si tragga con somma facilità l'altro importantissimo che *il prodotto* $x^m \cdot y^n$ *è massimo quando* $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$, *se* m *ed* n *sono interi positivi, ed* xy *vincolati alla sola condizione di non esser negativi e di avere una somma costante.* Esporremo qui una dimostrazione di questo teorema con un metodo che è la continuazione di quello usato pel teor. 1), e che non presuppone il teor. 2).

Si consideri l'espressione $\omega = x^m(a-x)^n$ dove m ed n sono due numeri qualunque interi e positivi ed x è una variabile che può assumere tutti i valori da 0 ad a. Dimostreremo che in tali ipotesi ω prende un valore massimo per $\frac{x}{m} = \frac{a-x}{n}$ ossia per $x = \frac{am}{m+n}$. La ω è compresa come caso speciale per $k = m$ nella espressione $\omega_k = x^k\left(\frac{am}{k} - x\right)^{n+m-k}$.

Per $k = 1$ si ha $\omega_1 = x(am-x)^{n+m-1}$ che pel teor. 1) è massima per $x = \frac{am}{m+n}$, mentre x varia da 0 ad am, e quindi a maggior ragione da 0 ad a. Col solito metodo d'induzione dimostreremo che il teorema vale qualunque sia k da 1 ad m (incluso). Supponiamo vero il teorema per ω_{k-1} e mostriamo che vale anche per ω_k.

Si ponga $\omega_k = u\omega_{k-1}$ donde

$$u = \frac{x^k\left(\frac{am}{k} - x\right)^{m+n-k}}{x^{k-1}\left(\frac{am}{k-1} - x\right)^{m+n-k+1}} =$$

$$= \left(\frac{k-1}{k}\right)^{m+n-k}(k-1)\frac{x}{am-(k-1)x}\left(1 - \frac{x}{am-(k-1)x}\right)^{m+n-k}.$$

Sotto questa forma è facile vedere che, mentre x varia da 0 ad a, la u assume un valore massimo per $x = \frac{am}{m+n}$, e quindi concludere che lo stesso avviene per ω_k.

Difatti si ponga $z = \frac{x}{am-(k-1)x}$, e, prescindendo dal fattore costante positivo che sta innanzi, si consideri l'espressione $z(1-z)^{m+n-k}$.

In forza del teor. 1), mentre z varia da 0 ad 1, essa prende un valore massimo per $z = \frac{1}{m+n-k+1}$, e quindi per

$$\frac{x}{am-(k-1)x} = \frac{1}{m+n-k+1},$$

ossia per

$$x = \frac{am}{m+n}.$$

Inoltre si ha $x=0$ per $z=0$; $x = a\frac{m}{k} \geq a$ per $z=1$ ed $m \geq k$; e di più, mentre x varia da 0 ad $a\frac{m}{k}$, z varia da 0 ad 1, giacchè per $0 \leq z \leq 1$ si ha $0 \leq \frac{x}{am-(k-1)x} \leq 1$, donde facilmente $0 \leq x \leq a\frac{m}{k}$, e viceversa, per un conveniente valore di x compreso fra questi limiti, si può sempre avere per z un qualunque prefissato valore fra 0 ed 1. Si conclude pertanto che, mentre x varia da 0 ad $a\frac{m}{k}$, la u è massima per $x = \frac{am}{m+n}$; e per essere questo valore compreso evidentemente fra 0 ed a, e per essere l'intervallo da 0 ad a contenuto in quello da 0 ad $a\frac{m}{k}$, si trae da ultimo che la ω_k è anche massima per $x = \frac{am}{m+n}$, mentre x varia da 0 ad a, qualunque sia $k \geq m$, e quindi in particolare per $k = m$. (*)

Modena, 16 agosto 1899.

ROBERTO VOLPI.

PICCOLE NOTE

Sulle quistioni 354 e 355. — Il teorema dalla quistione 354, dimostrato analiticamente dal Prof. *Barozzini* nel fasc. II (Anno XV, pag. 73-74) e quello della quistione 355, risoluta analiticamente dal Prof. *Cardoso* (Anno XII, pag. 161) e geometricamente dal Prof. *Catania* (Anno XV, pag. 68), sono suscettibili di una dimostrazione sintetica molto semplice. La conica K^2 della quist. 354 essendo lo inviluppo delle rette che segano i due cerchi dati in quattro punti armonici, ogni sua tangente staccando cioè nei cerchi dati due corde che si separano armonicamente, il punto medio di ognuna di esse ha potenza eguali e di segno contrario

(*) Notiamo che questo metodo d'induzione è suscettibile di uno sviluppo maggiore. Il lettore può facilmente applicarlo alla dimostrazione del teorema più generale sul massimo del prodotto $x^m y^n z^p \ldots$ con $x+y+z+\ldots = \text{cost}$.

rispetto ai due cerchi e cade dunque sul cerchio radicale. Se ora osserviamo che K^2 è la polare reciproca di uno dei due cerchi rispetto all'altro (cfr. la quistione 323) si ha il teorema della quist. 354.

V. Retali.

Sulle quistioni 380, 381, 382, 401 e 406. — La elegante risoluzione analitica del Prof. *Ceretti* (pag. 74-76 del fasc. II) non mi pare esaurisca la quistione 401. Se la curva piana C è generale della classe m e non ha relazioni particolari di posizione con la retta fissa r nè con la retta all'infinito, lo inviluppo cercato *è della classe* $2m$ *e dell'ordine* $m(m+1)$; *i punti ciclici ne sono punti* m—pli; *la retta fissa* r *è tangente* m—pla *e tocca l'inviluppo nei punti ch'essa ha comuni con le tangenti a* C *perpendicolari ad* r. Non sarebbe facile ricavare queste ed altre, meno semplici, proprietà dell'inviluppo dalle formole (4) date dal Prof. *Ceretti.* Pel caso della conica sono trovate le equazioni parametriche della sestica inviluppo ma non sarebbe agevole stabilire, mercè loro, che la sestica è della quarta classe e ha tre tangenti doppie; e tanto meno determinare queste bitangenti coi loro punti di contatto, le sei cuspidi della sestica con le relative tangenti cuspidali, le quattro tangenti che arrivano alla curva da un punto del suo piano ecc. ecc. Nel caso particolare in cui C è una parabola con la direttrice parallela ad r, l'A. trova (pag. 75) per l'inviluppo una ellisse reale ecc : questa ellisse è più propriamente „ *il cerchio avente per centro il fuoco della parabola e per raggio la distanza fra la direttrice e la retta fissa* r „ cioè il cerchio considerato nelle quistioni 380, 381, 382, risolute elegantemente mediante considerazioni elementari, la prima dal Prof. *Barozzini* e le altre due dal Prof. *Cardoso* (Anno XIII, pag. 75 e 84).

La risoluzione della quistione 401, della 406, ad essa equivalente e delle altre tre precedentemente indicate, dipende essenzialmente da una trasformazione piana doppia quadratica tangenziale che non credo fin'ora sia stata studiata. Ad una retta g del piano (rigato) doppio, corrispondono le bisettrici g_1 e g_2 degli angoli (rg); ad una retta g_1 del piano semplice corrisponde la g simmetrica di r rispetto a g_1. Delle due trasformazioni quadratiche che insieme formano la trasformazione doppia, la seconda, cioè quella cui si riferiscono le quistioni 380, 381, 382, 401 e 406 è razionale; la trasformazione *congiunta* è quella *ortotangenziale* del Prof. *Cesàro*;(*) la *conica doppia* e la *conica limite* sono degeneri e formate entrambe dai punti ciclici. Nella trasformazione non razionale, a un punto P corrisponde la parabola avente P per fuoco e r per direttrice, nella trasformazione inversa (razionale) a un punto P corrisponde il cerchio di centro P e tangente ad r. Ne segue subito che se g_1 inviluppa una curva C, lo inviluppo della retta corrispondente g è pure *lo inviluppo dei cerchi coi centri su* C *e tangenti ad* r, e al tempo stesso *il luogo dei fuochi delle parabole che toccano* C *ed hanno* r *per direttrice.* Quando g inviluppa una curva C', lo inviluppo delle due rette corrispondenti g_1, g_2 è pure *inviluppo delle parabole aventi* r *per direttrice e coi loro fuochi sopra* C', ma è anche il *luogo dei centri dei cerchi tangenti ad* r *e alla curva data* C'. Si vede così il nesso delle due quistioni 356 e 357 con le altre cinque sopra indicate, la identità della quistione 330 con la 382 e della 401 con la 406.

(*) V. la nota a pag. 272 (*Periodico*, Anno XIV, maggio 1899).

Anche il caso particolare in cui C è un cerchio, conduce a risultati assai interessanti: se la distanza del centro del cerchio dalla retta fissa r è $\frac{3}{2}$ del raggio, la sestica corrispondente (mediante la trasformazione razionale) è la prima pedale di una cardioide rispetto alla cuspide reale; (*) quando r passa pel centro del cerchio la sestica è una ipocicloide bicuspide. Lo studio di quest'ultimo caso fu proposto dal *Catalan* nella quistione 667 delle *Nouvelles Annales* (2ª Serie, T. II, 1863, pag. 272) la quale, a quanto io ne sò, contiene il primo accenno agli inviluppi di cui ora ci occupiamo. Due risoluzioni della quistione 667 furono date poco dopo (ibid. T. III, pag. 261-264) da due illustri geometri, il Generale *de Marsilly* e il Prof. *Mansion*, ma in quella del primo mi pare si trovi una non lieve inesattezza e precisamente ove è detto " si AB cesse d'être un diamétre mais coupe le cercle C l'enveloppe..... aura des points de rebroussement en A et B ,: in generale i punti ove $|AB| \equiv r$ sega il cerchio C sono per lo inviluppo punti semplici; le cuspidi dello inviluppo sono invece i fuochi delle parabole osculatrici al cerchio e aventi r per direttrice (cfr. quistione 357, (**) la soluzione del Prof. *Barozzini*, Anno XIII, pag. 161-162 e la mia nota a pag. 193 dello stesso volume).

Milano, 15 novembre 1899.

V. Retali.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 254, 273*, 274*, 313, 314, 362*, 477, 481, 482

254. *Si hanno due urne, in ognuna delle quali sono contenuti i numeri* 1, 2, 3, . . ., n. *Si estraggono contemporaneamente due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; poi, senza rimettere nelle urne i numeri sortiti, si estraggono di nuovo due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; e così si continua finchè tutti i numeri siano stati estratti. — Determinare la probabilità che non sortano mai in una stessa estrazione due numeri eguali; e dimostrare che tale probabilità vale* $\frac{1}{e}$ *a meno di* $\frac{1}{n\underline{|n}}$.

G. Nonni.

Risoluzione dei Sigg. F. Celestri e Z. Giambelli studenti nella R. Università di Pisa.

L'ordine con cui vengano estratte le n palle dalla prima urna sia rappresentato dalla permutazione $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$.

Affinchè nessuna delle n palle della seconda urna venga estratta nello stesso ordine di quello con cui la sua eguale fu estratta dalla prima urna, bisogna che nella permutazione rappresentante l'ordine delle palle sortite dalla seconda urna, gli elementi abbiano ordini differenti da quelli della prima. Sicchè, indicando con x_n

(*) Cfr. la mia "Note sur une courbe du sixième ordre „ nel *Journal de Math. spéciales*, T. XXI, pag. 32-35 (février, 1897).

(**) A pag. 161 e 193 (loc. cit.) a quistione 357 per errore di stampa, porta il numero 356.

il numero di tutte le permutazioni che si possono fare cogli n elementi dati e in modo che il loro ordine sia differente da quello che hanno i loro uguali in una data permutazione, segue evidentemente che la probabilità richiesta è $\frac{x_n}{\underline{|n}}$ ossia, per la quistione 253 (v. pag. 120).

$$1-\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\underline{|n}},$$

Questa somma non è altro che la somma dei primi $n+1$ termini della serie $\Sigma(-1)^n\frac{1}{\underline{|n}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ e dà per conseguenza (essendo i termini della serie alternativamente positivi e negativi) un valore approssimato di $\frac{1}{e}$ con un errore minore in valore assoluto del primo termine trascurato cioè di $\frac{1}{\underline{|n+1}}$, e quindi anche di $\frac{1}{n\underline{|n}}$.

273*. *Un cerchio di centro* O *è segato da un altro cerchio* M *in due punti opposti* A, B. *Dimostrare che ogni cerchio avente per diametro, una corda di* M *passante per* O *sega il primo cerchio nei due termini di un diametro perpendicolare alla corda.*

RETALI.

Risoluzione del Prof. C. Merizzi

Essendo AB un diametro del cerchio C dato, il suo centro O sarà soprà AB. Sia DE la corda di M passante per O, sulla quale, come diametro si costruisce il cerchio N. Siano finalmente H, K i punti in cui il cerchio N sega il cerchio C. La retta HK sarà perpendicolare alla DE, che contiene i centri dei due cerchi C,N. D'altra parte il punto O comune alle due rette DE, AB, che sono gli assi radicali dei cerchi M, N e C, M rispettivamente, è il centro radicale dei tre cerchi C, M, N e per esso dovrà passare HK, che è l'asse radicale dei cerchi C, N; dunque HK è un diametro del cerchio C, ed è perpendicolare alla corda DE.

274*. *Due cerchi posti in uno stesso piano si segano normalmente in due punti* A, B. *Da un punto* P, *preso comunque sopra un cerchio* O, *si conducono le rette* PA, PB, *a segare ulteriormente l'altro cerchio* M *in* A', B'. *Dimostrare che* A'B' *è un diametro di* M, *perpendicolare al diametro* PP' *di* O.

RETALI.

Risoluzione del Prof. C. Merizzi.

Condotte infatti le secanti PAA', PBB' ed il diametro PP', si congiunga il centro C del cerchio O coi punti A, B, e il centro D del cerchio M con A, B, A', B'.

Essendo per ipotesi l'angolo CAD retto, e quindi gli angoli CAP, DAA' complementari, saranno pure complementari gli angoli P'PA, DA'A, ossia PP' è normale al raggio DA'. Analogamente si dimostra che PP' è normale pure al raggio DB'.

Dunque i due raggi DA', DB' sono per diritto, ossia A'B' è un diametro di M ed è normale al diametro PP' di O.

Altra risoluzione del Sig. Celestri, studente della R. U. di Pisa.

313. *Se* ABC $\equiv$ abc *è un triangolo in un piano* σ, *e sono* e, f, *due rette condotte ordinatamente per* A, B, *in* σ; *per ogni punto di* σ, *posto*

$$P(A, B, C) \equiv p, q, r, \qquad (cbep) = u \qquad (cafq) = v \qquad r(e, f) = EF,$$

si ha, essendo ϑ *l'argomento del numero complesso* $u + iv$

$$\vartheta = \textit{arco tang}(CcEF).$$

Del Re.

Risoluzione del prof. C. Merizzi di Ceva.

Chiamando H il punto d'incontro delle due rette c, EF, colla notazione (CcEF) intendiamo il rapporto anarmonico (CHEF). Abbiamo dunque

$$u = (cbep) = (HCEP) = \frac{HE}{CE} : \frac{HP}{CP}$$

$$v = (cafq) = (HCFP) = \frac{HF}{CF} : \frac{HP}{CP}$$

donde

$$\frac{v}{u} = \frac{HF}{CF} : \frac{HE}{CE} = (HCFE) = (CHEF)$$

Ma abbiamo pure

$$\vartheta = \text{arco tang}\,\frac{v}{u} = \text{arco tang}\,(CHEF)$$

il che dimostra il teorema.

314. *Mostrare che l'equazione cubica in* ρ:

$$\begin{vmatrix} \rho - (\beta^2 + \gamma^2) & \alpha\beta + 2\gamma' & \gamma\alpha - 2\beta' \\ \alpha\beta - 2\gamma' & \rho - (\gamma^2 + \alpha^2) & \beta\gamma + 2\alpha' \\ \gamma\alpha + 2\beta' & \beta\gamma - 2\alpha' & \rho - (\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = 0$$

quando si ponga:

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \omega'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$
$$\omega\omega' \cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

si riduce all'altra

$$\rho^3 - 2\omega^2\rho^2 + (\omega^4 + 4\omega'^2)\,\rho - 4\omega^2\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta = 0$$

ed ha una sola radice reale inferiore ad $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$.

Del Re.

Risoluzione del prof. F. Castellano di Torino.

1°. Basta sviluppare il determinante ed ordinare rispetto a ρ. Per semplificare le riduzioni, si può seguire quest'ordine:

$$f(\rho) = f(0) + \rho f'(0) + \frac{1}{2}\rho^2 f''(0) + \rho^3$$

$$f(0) = \begin{vmatrix} -(\beta^2 + \gamma^2) & \alpha\beta + 2\gamma' & \gamma\alpha - \alpha\beta' \\ \alpha\beta - 2\gamma' & " & " \\ \gamma\alpha + 2\beta' & " & " \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2 = -4\omega^2\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$f'(0) = \Sigma\begin{vmatrix} -(\gamma^2 + \alpha^2) & \beta\gamma + 2\alpha' \\ \beta\gamma - 2\alpha' & -(\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = \Sigma\,(\alpha^2\omega^2 + 4\alpha'^2) = \omega^4 + 4\omega'^2$$

$$f''(0) = -\Sigma\,(\alpha^2 + \beta^2) - \Sigma\,(\gamma^2 + \alpha^2) = -4\omega^2$$

quindi

$$(1) \qquad f(\rho) = \rho^3 - 2\omega^2\rho^2 + (\omega^4 + 4\omega'^2)\rho - 4\omega^2\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

2°. Le radici della (1) sono positive ed inferiori ad $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$. Infatti la (1) si può scrivere:

$$\rho(\rho - \omega^2)^2 + 4\omega'^2(\rho - \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

e si vede che il limite superiore delle radici reali è $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$, mentre il limite inferiore è zero.

3°. *Non è vero che l'equazione abbia una sola radice reale, ma può avere anche tutte e tre le radici reali, dipendentemente dai valori di* θ *e di* $\frac{\omega'}{\omega^2}$.

Infatti, posto nella (1)

$$\rho = \frac{1}{3}\omega^2(x+2), \qquad \frac{\omega'^2}{\omega^4} = K^2,$$

avremo

$$(2) \qquad x^3 - 3(1 - 12K^2)x + 2[1 + 18(2 - 3\operatorname{sen}^2\theta)K^2] = 0.$$

Il discriminante di questa cubica è

$$[1 + 18(2 - 3\operatorname{sen}^2\theta)K^2]^2 - (1 - 12K^2)^3,$$

che si può scrivere

$$108K^2[16K^4 + (27\operatorname{sen}^4\theta - 36\operatorname{sen}^2\theta + 8)K^2 + \cos^2\theta].$$

Dimostrerò che può diventare negativo. Infatti il primo fattore $108K^2$ è positivo; il secondo fattore che chiamerò $f(K)$ è funzione di secondo grado in K^2, il suo discriminante è

$$\operatorname{sen}^2\theta(9\operatorname{sen}^2\theta - 8)^3,$$

e sarà positivo quando

$$\operatorname{sen}^2\theta > \frac{8}{9}.$$

In questa ipotesi il trinomio $27\operatorname{sen}^4\theta - 36\operatorname{sen}^2\theta + 8$, coefficiente di K^2, è negativo, perchè le sue radici sono $\frac{6 - \sqrt{12}}{9}$ e $\frac{6 + \sqrt{12}}{9}$, ed i valori di $\operatorname{sen}^2\theta$ compresi tra $\frac{8}{9}$ ed 1 sono compresi tra queste radici. Ne segue che, quando sia

$$\frac{8}{9} < \operatorname{sen}^2\theta \leq 1,$$

le radici del trinomio che abbiamo chiamato $f(K)$ saranno reali e positive, e per ogni valore di K^2 compreso tra queste radici, il trinomio stesso assumerà valori negativi. A discriminante negativo corrispondono nella cubica terne di radici reali, quindi la (1) può avere anche tutte e tre le radici reali.

Osservazione 1ª. — È condizione necessaria per la realtà di tutte e tre le radici che $12K^2 - 1 < 0$ cioè che $\frac{\omega'^2}{\omega^4} < \frac{1}{12}$.

Osservazione 2ª. — Questa equazione si presenta nella ricerca degli assi delle accelerazioni di un sistema rigido. Si trova con qualche differenza di notazione nelle mie *Lezioni di Meccanica Razionale*, pag. 90 ed in una mia nota *Il complesso delle accelerazioni* ecc. pubblicata negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino il 28 gennaio 1894.

362*. *Determinare tre numeri in progressione geometrica conoscendo la loro somma* S *e quella dei loro cubi* P^3.

Supposto che S *e* P *siano reali e positivi, quali condizioni si richiedono perchè siano reali e positivi anche i tre numeri domandati?*

L. Bosi.

Risoluzione del prof. Barozzini.

Se i numeri cercati sono $\div x : y : z$, verificheranno le equazioni

$$\left.\begin{aligned} &xz = y^2, &(1)\\ &x + y + z = S, &(2)\\ &x^3 + y^3 + z^3 = P^3. &(3)\end{aligned}\right\}$$

Dalle (1), (2) ho somma e prodotto di x, z in funzione di S ed y, quindi ho

$$\left.\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{S - y \pm \sqrt{(S+y)(S-3y)}}{2} \tag{4}$$

Inoltre

$$x^3 + z^3 = (x+z)^3 - 3xz(x+z) = (S-y)(S^2 - 2Sy - 2y^2)$$

e la (3) si riduce allora alla

$$f(y) = y^3 - S^2 y + \frac{S^3 - P^3}{3} = 0. \tag{5}$$

Questa dà i valori del medio dei numeri cercati: sostituiti ad uno ad uno nelle (4) forniranno tre coppie dei numeri rimanenti.

Siano ora S, P reali positivi; lo saranno pure x, z se $y \leqq \frac{S}{3}$, perchè allora la (4) dà valori reali, e le (1), (2) danno per x e z somma e prodotto positivi. Inoltre y è positivo per dato, quindi

$$0 \leqq y \leqq \frac{S}{3}.$$

Se $f\left(\frac{S}{3}\right) = \frac{S^3 - 9P^3}{27}$ e $f(0) = \frac{S^3 - P^3}{3}$ hanno segni diversi, la (5) avrà fra 0 e $\frac{S}{3}$ un numero impari di radici: cioè una o tre. Ma tre non possono essere, perchè una radice della (5) è fra $+\infty$ e $\frac{2S}{3}$ giacchè $f(+\infty) = +\infty$, $f\left(\frac{2S}{3}\right) = -\frac{S^3 + 3P^3}{9}$. Allora vi sarà una radice reale fra 0 e $\frac{S}{3}$, se

$$P \leqq S \leqq P\sqrt[3]{9}.$$

Queste sono le condizioni richieste.

La terza radice reale della (5) è compresa fra $-\frac{S}{\sqrt{3}}$ e $-\infty$, come è facile verificare.

Se $P = S$ la (5) dà le radici $y = \pm S$, da scartare, e $y = 0$, quindi i numeri

$$\div 0 : 0 : S$$

Se $S = P\sqrt[3]{9}$ si hanno le $y = \frac{S}{6}\left[-1 \pm \sqrt{33}\right]$, da scartare, e $y = \frac{S}{3}$, quindi

$$\div \frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3}.$$

Come esempio numerico se $S = 3$, $P^3 = \frac{89}{9}$ i numeri sono

$$y = \frac{2}{3} \qquad \frac{x}{z} = \frac{7 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

477. *Risolvere l'equazione:* $z^8 + 2z^5 - 2z^4 a + z^2 - 2za + a^2 = 0$.

F. Sibirani.

Risoluzione del prof. Guglielmo Santorelli di Napoli.

L'equazione data può scriversi: $(z^4 + z - a)^2 = 0$. Si tratta quindi di risolvere la

$$z^4 + z - a = 0. \tag{1}$$

Aggiungendo ad ambo i membri il trinomio $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$, essendo α, β, γ, indeterminati, per ora, si ha

$$z^4 + \alpha z^2 + (\beta + 1) z + (\gamma - a) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma, \tag{2}$$

equazione che può scriversi sotto la forma:

$$(z^2 + \lambda z + \mu)^2 = (\sqrt{\alpha}\, z + \sqrt{\gamma})^2 \tag{3}$$

essendo λ e μ indeterminati.

Dovendo essere nella (2) e (3) uguali i coefficienti delle potenze omonime, si hanno le relazioni

$$2\lambda = 0 \quad , \quad 2\mu = \alpha \quad , \quad 2\lambda\mu = \beta + 1 = 0 \quad , \quad \mu^2 = \gamma - a$$

che conducono alla risolvente di Ferrari

$$1 - 8\mu(\mu^2 + a) = 0, \quad \text{ossia} \quad \mu^3 + a\mu - \frac{1}{8} = 0,$$

da cui basta ricavare un sol valore:

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} + \frac{a^3}{27}}}$$

Essendo noto μ, sarà noto $\alpha = 2\mu$, e dovendo essere ancora $2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma} = \beta = -1$, sarà $\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}}$.

Sostituendo nella (2) ad α, β, γ i valori cercati in funzione di μ, ed estraendo da ambo i membri la radice quadrata, avremo le equazioni

$$z^2 - \sqrt{2\mu}\, z + \mu + \frac{1}{3\sqrt{2\mu}} = 0,$$

$$z^2 + \sqrt{2\mu}\, z + \mu - \frac{1}{2\sqrt{2\mu}} = 0;$$

donde

$$z = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \pm \sqrt{-\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\mu}}} \quad , \quad z = -\sqrt{\frac{\mu}{2}} \pm \sqrt{-\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\mu}}}.$$

Queste formole, in cui a μ si sostituisce il valore già trovato, danno le quattro radici della equazione (1), ossia le otto radici della data.

481. *Determinare la pedale della sviluppata di una conica centrale rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.*

V. Retali.

Risoluzione del prof. G. Cardoso-Laynes.

Se risolviamo la questione cogli ordinari metodi, oppure se la riconduciamo a cercare il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate sulle normali della conica da un punto fisso del piano, in entrambi i casi si va incontro a calcoli assai laboriosi; perciò tratteremo la questione sotto un altro punto di vista, ricordando che “*la podaria di una curva è l'inversa della sua polare reciproca* ecc.„

L'equazione della sviluppata di una conica centrale è

$$(1) \qquad (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \qquad \text{(dove è } c = a^2 \mp b^2\text{)}$$

Rendendo omogenea la (1) col porre $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ in luogo di x, y si ha

$$(1') \qquad \mathrm{F} = (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Il cerchio di raggio 1 col centro in un punto (m, n) ha per equazione

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - 1 = 0,$$

o, resa omogenea,

$$(2') \qquad f = x^2 + y^2 - 2mxz - 2nyz + z^2(m^2 + n^2 - 1) = 0.$$

Per trovare la polare reciproca della (1) rispetto al cerchio (2) dobbiamo stabilire le equazioni

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=y_1} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} : \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=z_1}$$

essendo x_1, y_1, z_1, le coordinate correnti omogenee, relative alla curva che cerchiamo.

Eseguendo le derivazioni indicate, e ponendo dipoi $z = z_1 = 1$, si ha:

$$a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}} : (x_1 - m) = \pm b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} : (y_1 - n) = c^{\frac{4}{3}} : (mx_1 + ny_1 - m^2 - n^2 + 1)$$

da cui, ricavando $x^{-\frac{1}{3}}$ e $y^{\frac{1}{3}}$ e sostituendo nella (1), si ha l'equazione della polare reciproca:

$$(3) \quad (mx_1 + ny_1 - m^2 - n^2 + 1)\left\{a^2(y_1 - n)^2 + b^2(x_1 - m)^2\right\} = c^4(x_1 - m)^2(y_1 - n)^2,$$

o, trasportando l'origine con una traslazione, in (m, n):

$$(3') \qquad (m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + 1)^2\left\{a^2\mathrm{Y}^2 \pm b^2\mathrm{X}^2\right\} = c^4\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2.$$

L'inversa della (3'), cioè la podaria che ricerchiamo, sarà rappresentata dall'equazione che si ottiene ponendo nella (3'):

$$\mathrm{X} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \mathrm{Y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Quindi si ha:

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 + mx + ny)^2\left\{ay^2 \pm b^2x^2\right\} = c^4x^2y^2$$

che rappresenta una *sestica bicircolare* con un punto quadruplo con tangenti doppie ortogonali nell'origine ed avente due direzioni assintotiche eguali a quelle della conica data.

Osservazione. — Supponendo nella (1) $a=b$ e c INDIPENDENTE da a e b e considerando il segno superiore, essa viene a rappresentare un *astroide*, quindi con lo stesso procedimento si trova per la podaria di un astroide l'equazione

$$(x^2+y^2+mx+ny)^2(x^2+y^2)=c^4x^2y^2$$

ed in particolare, se per polo si prende l'origine, si ha il *rosone quadrifoglio*

$$(x^2+y^2)^3-c^4x^2y^2=0,$$

resultato questo assai noto.

482. *Pedale della sviluppata della parabola rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.*

V. RETALI.

Risoluzione del prof. G. Cardoso-Laynes.

Con metodo analogo a quello tenuto per la precedente quistione, poichè si ha, per l'equazione omogenea della sviluppata di parabola *(parabola semi-cubica)*

$$F=y^3-ax^2z=0 \tag{1}$$

le equazioni (α) della quistione precedente dànno (per $z=z_1=1$)

$$-ax:(x_1-m)=3y^2:2(y_1-n)=ax^2:2(mx_1+ny_1-m^2-n^2+1)$$

da cui, ricavando x, y e sostituendo nella (1), si ha per la polare reciproca

$$2a^{\frac{1}{2}}(y_1-n)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}(x_1-m)(mx_1+ny_1-m^2-n^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Trasportando l'origine in (m,n) con una traslazione e rendendo l'equazione razionale, si ha

$$4aY^3=27X^2(mX+nY+1)$$

la cui inversa

$$4ay^3=27x^2(x^2+y^2+mx+ny)$$

rappresenta la podaria richiesta: essa è dunque una *quartica circolare.*

QUISTIONI PROPOSTE

485. Se lungo le tangenti ad un'elica circolare si riporta, a partire dai rispettivi punti di contatto, un segmento costante l, il luogo degli estremi di questo è una nuova elica circolare, giacente in un cilindro parallelo a quello della prima; la quale taglia le tangenti di essa sotto l'angolo costante $\theta=\operatorname{arctang}\frac{l}{\rho}$, dove ρ è il raggio di prima curvatura della data elica. Inoltre fra gli angoli γ e γ_1 sotto cui l'elica considerata e quella resultante tagliano le generatrici dei rispettivi cilindri, passa la relazione: $\cos\gamma_1=\cos\gamma\,.\cos\theta$.

M. CHINI.

486. Trovare l'inviluppo del sistema d'iperbole

$$y^2(1+4a^4)+4a^2xy-4a^2x-8a^4y+4a^4=0.$$

487. Trovare l'inviluppo del sistema d'ellissi

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}=(1-y)^2.$$

G. Pesci.

488. Di un triangolo ABC non rettangolo è data la base BC; qual'è il luogo geometrico del vertice A, sapendo che la distanza dell'ortocentro al centro del cerchio circoscritto è uguale alla metà di BC?

A. Droz-Farny.

489. Essendo dato due coniche S e S', il luogo dei punti M tali che le tangenti condotte da M a S sieno coniugate armoniche delle tangenti condotte da M a S', è una conica S''.

490. Da un punto I della tangente nel vertice di una parabola si conduca una corda PQ, che incontri l'asse in A. Sia A' il simmetrico di A rispetto a I; i quattro punti A, A', P, Q formano un gruppo armonico.

491. Trovare il luogo dei baricentri dei triangoli rettangoli, d'area costante, iscritti in un triangolo rettangolo dato.

Trovare inoltre l'inviluppo dei lati di questi triangoli.

492. Sia F un fuoco di una ellisse, e M un punto variabile di questa curva. Si descrive il cerchio di centro M e di raggio MF. Il luogo delle estremità del diametro di questo cerchio, perpendicolare ad MF è una curva la cui area è doppia di quella dell'ellisse.

493. Dimostrare le identità:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\operatorname{sen}^3x-\cos^3x)\,dx}{\operatorname{sen}^2x\cos^2x}=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x+2)\,dx}{(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

494. Si considerino le due curve razionali, le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x=\dfrac{A\cos\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi} \\ y=\dfrac{A'\operatorname{sen}\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{B\cos^3\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi} \\ y=\dfrac{B'\operatorname{sen}^3\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi} \end{cases}.$$

Il rapporto delle aree di queste due curve è

$$\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{3a^2b^2}.$$

495. Si considerano i triangoli simili ad un triangolo dato ed iscritti in un dato triangolo. Trovare:

1° il luogo dei baricentri

2° il luogo degli ortocentri.

3° il luogo dei centri dei cerchi circoscritti

4° l'inviluppo dei lati.

Considerare il caso in cui questi triangoli sieno equilateri.

496. Sia M un punto variabile di un'ellisse di centro O; MP la corda perpendicolare a MO; MQ la corda supplementare della corda MP e MR la corda isotomica (*) della MQ rispetto agli assi dell'ellisse. Dimostrare che ciascuna delle corde MQ e MR è normale ad un'ellisse fissa.

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Giovanni Garbieri (prof. all'Università di Genova). — *Elementi di aritmetica razionale* secondo i programmi dei ginnasi superiori. Prima edizione colla collaborazione del prof. Enrico De Amicis. Milano, Trevisini, 1898. L. 1,80 (pag. 186).

Comincia da qualche anno a diffondersi a beneficio delle nostre scuole quella poderosa corrente di nuove idee sulla logica e sui principi fondamentali della matematica che ebbe origine precipua fra noi dalle opere del prof. Peano e specialmente dalla sua *Rivista di matematica* (1891-95). Già il Burali-Forti, Sadun e Soschino e il Ramorino diedero saggi pregevoli del modo di applicare tali idee nei primi gradi dell'insegnamento; seguì poi il Gazzaniga col suo *Libro di aritmetica e di algebra elementare* per i Licei, il quale, inspirandosi direttamente alle fonti, tentò con molta originalità e dottrina una esposizione rigorosa dell'aritmetica e dell'algebra elementare; e sebbene l'opera sua (come ogni cosa nuova) non sia forse scevra di imperfezioni, essa ha sempre il merito inestimabile di aver diffuso fra maestri e scolari lo spirito e il gusto delle nuove dottrine e acceso in loro il desiderio di approfondirle. Ultimi, se non m'inganno, in questo indirizzo analitico giungono i proff. Garbieri e De Amicis con questi loro *Elementi di aritmetica razionale*, che confrontati col precedente *Trattato di aritmetica razionale* del prof. Garbieri (coadiuvato dal prof. De Amicis) rivelano una radicale evoluzione nel pensiero dei nostri Autori dal 1894 al 1898.

Noto subito che detti *Elementi* non sono rigorosamente razionali, perchè vi ha largo campo l'uso del concetto complicato (per quanto intuitivo) di numero *cardinale finito* (numero di volte) e di *ordine;* mentre vi si trova evitato l'uso del principio d'induzione matematica. (**) Questi mal certi fondamenti sarebbero ancora didatticamente accettabili se conducessero soltanto ad assumere come assiomatici certi principi dimostrabili, oppure a dimostrare teoremi riferentesi a numeri indeterminati, considerando soltanto particolari valori di tali numeri; ma fanno sentire il bisogno di essere migliorati quando si osserva che per loro cagione menti acute

(*) In altri termini la corda MQ e MR sono egualmente inclinate sugli assi dell'ellisse.

(**) Questo principio è soltanto citato in nota a pag. 8 ed applicato come utile esercizio a dimostrare la formula $(a+b)+c = a+(b+c)$.

come quelle dei nostri A. restano talora illuse da *petizioni di principio*. Un esempio di ciò si ha nella dimostrazione che leggesi a pag. 6 della proposizione: *Se* a $>$ b *esiste un* c *ed uno solo pel quale* a $=$ b $+$ c, (*) che consiste nell'ammettere che con un numero finito di passaggi da un numero al successivo si può partendo dal dato numero b giungere al dato numero maggiore a, cioè consiste nell'ammettere la proposizione da dimostrare. (**) Un altro esempio di dimostrazione apparente troviamo a pag. 31 per stabilire che " *Se* a $>$ b, *se non è* a *multiplo di* b, *sarà* a $=$ bq $+$ r *con* r $<$ b " ivi infatti si desume l'esistenza di q e di r dal solo fatto che a non è fra i multipli di b. (***)

Ma se il libro ha comuni colla maggior parte dei trattati di aritmetica elementare alcuni pochi errori, è poi in generale superiore ad essi per la trattazione esclusivamente analitica, per la cura dell'esposizione e per molte osservazioni originali. Per darne un'idea passerò in rassegna il § della sottrazione, che è sostanzialmente concepito nella seguente forma: Se $a > b$ ed $a = b + c$, si dice che c è la differenza fra a e b; se invece $a \geqq b$ e si ha $a = c + b$ (qui può essere $c = 0$ perchè nell'addizione si è definito lo zero colla $0 + a = a$) si dice che c è il resto della sottrazione di b da a e si scrive $a - b = c$. Finchè $a > b$ si ha $b + c = c + b$, epperò differenza e resto coincidono; ma se $a = b$, allora esiste il resto 0 ma non la differenza, perchè $b + 0$ non ha significato e d'altronde non potrebbe esistere differenza fra due numeri non differenti. Questa distinzione fra differenza e resto è ben fatta; soltanto io avrei bramato che, obbedendo all'uso dei matematici e alle convenienze del calcolo formale, si fosse dato significato al simbolo $a + 0$ e si fosse considerata la differenza nulla, non ostante che essa intervenga fra numeri non differenti. E forse era poi anche più opportuno dedurre che 0 è il precedente di 1 non dalla considerazione che $a - a = 0$, ma dalla definizione stessa: $0 + a = a$ col farvi $a = 1$.

La divisione è qui considerata sotto due aspetti, cioè o come ricerca di quoziente e di resto (divisione *impropria* raffigurata col simbolo molto opportuno $\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$ che si legge: a *diviso* b *dà per quoziente* q *e per resto* r) ovvero come ricerca di *quoto*, cioè di quel numero q (se esiste) tale che $a = b \times q$ (divisione *propria* che si rappresenta col simbolo ordinario $a : b = q$). La divisione propria viene considerata soltanto nell'ultimo § della parte I che riguarda i numeri interi; gli 8 §§ precedenti trattano ordinatamente della divisione impropria, delle proprietà dei

(*) Questa proprietà dei numeri potrebbe dirsi *connessione* (della classe dei numeri).

(**) Accettando la definizione di minore e di maggiore data dai nostri A. e fondata sulla posizione rispettiva dei due numeri nella serie naturale degli interi, mi sembra che la connessione si possa rigorosamente dimostrare coll'aiuto dell'induzione matematica, del principio che $a + b > a$ e infine della proprietà $a + b = b + a$, procedendo nel seguente modo: Se $a = b + 1$, la proposizione è vera per $c = 1$. Se poi $a > b + 1$ allora la $b + x < a$ è sodisfatta almeno da $x = 1$; se dunque tutte le volte che si ha $b + x < a$ si avesse anche $b + (x + 1) < a$ allora per ogni numero N si avrebbe $b + N < a$; ma ciò non può essere perchè, essendo $b + a = a + b$ ed $a + b > a$, si ha $b + a > a$. Esiste dunque un tale c' pel quale si ha $b + c' < a$ e $b + (c' + 1) \geqq a$; posto allora $b + c' = a'$, avremo $a' < a \leqq a' + 1$: d'altronde non può essere $a' < a < a' + 1$ perchè fra a' ed $a' + 1$ non cade alcun numero, dunque deve essere $a = a' + 1$, ovvero (ponendo $c = c' + 1$) $a = b + c$. L'unicità di c risulta poi dalla così detta *dipendenza* della somma cioè dalla proposizione: *Secondochè* a $\gtreqless$ b *anche risp.* a $+$ c $\gtreqless$ b $+$ c *e viceversa*.

(***) Mi pare che il teorema in discorso possa dimostrarsi nel seguente modo: Poichè a non è multiplo di b, sarà $b > 1$: ora siccome $b \times 1 = b$, avremo $b \times 1 < a$; se dunque per ogni x pel quale $bx < a$ fosse anche $b(x + 1) < a$, per ogni intero N sarebbe $bN < a$; ma ciò non è, perchè, essendo $ba = ab$ e (per essere $b > 1$) $ab > a$, è $ba > a$; dunque deve esistere qualche intero q pel quale si abbia $bq < a$ e $b(q + 1) \geqq a$; ora per l'ipotesi fatta non può essere $b(q + 1) = a$, dunque si deve avere $bq < a < b(q + 1)$. Di qui si ricava $b(q + 1) - bq > a - bq$, ossia (ponendo $r = a - bq$), $b > r$; è così provata l'esistenza di q e di r in modo che $a = bq + r$ e $r < b$. Facilmente si prova l'unicità di q e quindi di r.

prodotti e quozienti, delle potenze (considerando anche l'esponente 0), dei teoremi sulla divisibilità, dei criteri di divisibilità (la divisibilità per 9 è trattata con molta semplicità), del m. c. d., del m. c. m., dei numeri primi e delle applicazioni della decomposizione dei numeri nei loro fattori primi ai divisori e ai multipli; e tutto ciò evitando ingegnosamente il segno della divisione propria, di cui non è cenno fino al § 14, che prepara coi casi di impossibilità della *quotazione* l'introduzione delle frazioni. Noto ottimi esercizi alla fine di molti paragrafi, specialmente a proposito del m. c. d. e dei numeri primi. Mi permetto di osservare che alcuni teoremi che sono dimostrati dagli A. col sussidio dei numeri primi potevano dimostrarsi semplicemente colla teoria del m. c. d.; uno di questi è: *Un numero che sia primo con ciascuno dei fattori di un prodotto è primo col prodotto* (la cui dimostrazione mi è parsa anche scorretta); e tali sono pure i suoi corollari (eccettuati quelli riferentesi a numeri primi (204, 205)) fra i quali intendo incluso anche il seguente: *Un numero che sia divisibile pel prodotto di due o più numeri primi fra loro due a due è divisibile pel loro prodotto.* (Cfr. *Rivista di Matemat.*, vol. I: Sommario dei libri VII, VIII e IX di Euclide; Peano; v. pag. 11 le Prop. 23, 24, 25, 26.)

La parte migliore di questi Elementi è certamente la II. " Numeri razionali " (in gran parte opera esclusivamente del De Amicis, come è avvertito a pag. 93) nella quale sono esposti (certo per coincidenza fortuita) con somma chiarezza ed esattezza ad uso della scuola gli stessi concetti naturali e semplici introdotti dal Peano nella trattazione analitica delle frazioni (*Rivista di Mat.*, vol. I, " Sul concetto di numero ". Nota II, p. 256 e seg.; v. p. 261). Ma questa trattazione, come del resto tutto il libro in generale, ha poi anche molti altri pregi di originalità per la cura nel rilevare le proprietà delle relazioni di uguaglianza e disugnaglianza, (*) per il carattere di opportunità che hanno le non poche nozioni di logica che vi si trovano qua e là, per la discussione delle definizioni scelte, per il modo di presentare teoremi e dimostrazioni e per la felice scelta di nuovi vocaboli (come *equimoltiplicare* ed *equidividere* riferito al moltiplicare e dividere ambi i termini di una frazione per uno stesso numero). Soltanto mi è parso di notare una discordanza fra i titoli dei §§, ove si parla di numeri *razionali*, e il testo ove non si parla che di frazioni senza mai accennare a numeri razionali; se anche tale discordanza non esistesse e fosse effetto di una mia svista, è certo che è ingiustificato il nome di numero razionale laddove basterebbe quello di frazione, poichè secondo la teoria anche gli interi sono frazioni.

Infine troviamo la ricerca della generatrice di un numero decimale periodico fatta con molta esattezza escludendo ogni concetto di limite. Ma questa esclusione, che non permette di eguagliare il numero periodico alla sua generatrice (quando esiste) nè di eguagliare all'unità il numero periodico decimale di periodo 9, lascia all'ente decimale periodico il semplice carattere di figura numerica senza attribuirgli mai il valore di *numero*; il che nè giustifica il suo nome di *numero*, nè soddisfa la nostra mente che lo intuisce come un numero. In tale teoria il *Trattato* (già citato) è più completo degli *Elementi*, perchè ivi il De Amicis svolge in modo accurato e originale le delicate nozioni sui limiti, tanto utili anche come introduzione alla teoria degli irrazionali.

G. SFORZA.

(*) Vedasi la bella Memoria del DE AMICIS (citata favorevolmente in molte riviste italiane, francesi e tedesche) *Dipendenza fra alcune notevoli proprietà delle relazioni fra enti di un medesimo sistema*, *Rivista di Mat.*, vol. II, pag. 113 (1892).

CONTI A. — *Elementi di Aritmetica razionale ad uso degli allievi delle scuole normali.* — Bologna, Zanichelli, 1900.

Il Zanichelli che già ci aveva dato con gli *Elementi d'Aritmetica* del prof. Pincherle, uno dei testi migliori per le scuole secondarie inferiori e, con quello d'*Aritmetica razionale* dei prof.i Arzelà ed Ingrami, il trattato che forse più risponde alle condizioni di questo insegnamento negli Istituti tecnici, ci offre ora il libro del Conti, nel quale viene esposta quella parte di aritmetica razionale che i programmi assegnano per le scuole normali. E questo del Conti ci sembra che tenga degnamente il posto che gli verrebbe assegnato insieme a quei due. Esso è stato salutato con piacere da noi, sebbene appaia dopo altri trattati per le scuole normali così pregevoli, quali quelli del Garbieri e del Testi, giacchè per ragioni che qui sarebbe fuor di luogo esporre, crediamo preferibili testi speciali a quelli ove è fatta un'esposizione completa delle varie parti della matematica che si studiano in una data scuola, *secondo l'ordinamento imposto dai programmi.*

A chi sono note le condizioni in cui si deve svolgere l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole normali — ove è quanto di meno razionale potesse pensarci l'ordinamento stesso che assegnano i programmi per le diverse discipline scientifiche —, si fanno subito innanzi le difficoltà di compilare un testo informato ai principî più rigorosi della scienza, e pure adeguato all'intelligenza degli alunni di queste scuole e che si adatti alle altre esigenze cui in esse deve sottostare specialmente l'insegnamento dell'aritmetica razionale. Nel libro del Conti si vede la mira costante che l'autore ha avuto di raggiungere il duplice intento; e si deve riconoscere che le difficoltà sono state quasi sempre superate molto felicemente: il libro potrà essere adottato con soddisfazione tanto da chi attende sopra tutto all'esattezza ed al rigore del metodo, quanto da chi, nel testo che propone agli alunni, ricerca in particolar modo i pregi di un'esposizione facile e chiara.

L'aritmetica del Conti comincia molto opportunamente con le nozioni intorno alla *grandezza*, a cui vien dato uno sviluppo assai largo, ma necessario per potere stabilire con chiarezza il concetto generale di *numero* e passar quindi all'esposizione completa della *numerazione* dei numeri razionali. L'analisi delle operazioni viene condotta con molta cura. Per ognuna di esse sono poste in speciale rilievo le *proprietà formali*, da cui logicamente deriva la *regola* per eseguirla; poi ne vengon date le altre proprietà più notevoli. Il Conti poi pone in luce particolare quali sieno le norme di ciascuna regola da cui dipende essenzialmente l'esecuzione dell'operazione, e le altre che è utile ma non necessario il seguire. (Così viene mostrata anche la possibilità di eseguire la divisione incominciando dalle unità di un ordine qualunque). Per avere insistito sopra questa osservazione, negli altri trattati trascurata, noi facciamo al Conti ampia lode; ciò serve non solo a fare intendere debitamente quelle proprietà formali su cui è fondata la regola speciale, ma gioverà anche a liberare gli alunni da quel convenzionalismo col quale vengono teoricamente addestrati ad un'esecuzione rapida dei calcoli, ma che non dà ad essi veramente quell'agilità che si richiede per poter eseguire rapidamente i calcoli nelle condizioni offerte da molti casi pratici. L'importanza di questo s'intende specialmente per un libro dedicato ai futuri maestri. — Viene fatta, come negli altri migliori trattati recenti, la distinzione delle operazioni in *dirette* ed *inverse* di 1a e 2a specie: quelle di ciascuna specie, trattate separatamente da prima, vengono poi ravvicinate in modo assai elegante per considerarne le proprietà *correlative*. Lo sviluppo che l'A. dà a questa parte è assai ampio; forse la ristrettezza del tempo non permetterà di accoglier tutto nell'esposizione del corso, ma si potrà omettere qualche cosa senza alcun danno; la forma e l'ordinamento dati ne indurrà molti alunni allo studio, e ciò costituirà per essi un utilissimo esercizio.

Molto succintamente viene esposta la teoria dei rapporti e delle proporzioni. Ciò perchè le proprietà principali, che ordinariamente vengono svolte in questa teoria, ma che si riferiscono a frazioni o a relazioni tra frazioni, l'A. le ha già esposte trattando di queste. La cosa è forse logica, ma, dal punto di vista didattico, noi non la sappiamo approvare completamente; perchè il trattare quelle proprietà, secondo il modo solito, nella teoria delle proporzioni permette di porle in rilievo maggiore, e di richiamar meglio l'attenzione su di esse, poste in relazione con le applicazioni che se ne devono fare.

Il Conti non ha, secondo l'esempio degli altri trattati per le scuole normali, raccolto in una parte speciale del libro lo svolgimento di quella parte del programma che si riferisce alle *norme per l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole elementari*. Ed egli ha fatto molto bene: io credo che nessun insegnante segua in ciò alla lettera il programma, destinando a quello svolgimento una parte speciale del suo corso; chè tali norme, per essere efficaci, devono esser date frequentemente, ripetutamente e *occasionalmente*. Così ho fatto sempre io con le mie alunne di 2ª e 3ª classe normale. Le numerose osservazioni che si trovano nel libro del Conti contengono i concetti fondamentali che devono servir di guida al futuro maestro; all'insegnante offriranno la migliore occasione per sviluppare i precetti che ne conseguono per l'insegnamento dell'aritmetica pratica. Ci pare specialmente che, richiamando l'attenzione degli alunni sopra le serie graduate di problemi che il Conti propone, sopra il loro svolgimento e la loro razionale concatenazione, si avrà agio di far intendere ad essi nel miglior modo l'ordine e le norme secondo cui deve esser condotto l'insegnamento dell'aritmetica nella scuola elementare.

G. Del Prete.

Sadun e Soschino. — *Lezioni di Aritmetica*, G. B. Paravia, 1900. Seconda edizione.

Anche per questo libro il nome degli AA. basterebbe per raccomandarlo; si aggiunga poi che la 1ª edizione ha avuto luogo già di essere giustamente apprezzata e per comune consenso è ritenuta come uno dei migliori testi di Aritmetica teorica. Non sto a notare particolarmente le varie aggiunte e modificazioni introdotte dagli AA. in questa seconda edizione; dirò solo che certo la rinomanza che l'opera già si era acquistata non può con questa edizione che aumentare.

G. C.-L.

Bortolotti E. — *Aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori*. Roma, Società editrice "Dante Alighieri," 1899.

Dal solo nome dell'A. si arguisce, anche se non lo notassimo esplicitamente, che questo libro è compilato col massimo rigore scientifico, cosa, del resto, che s'incontra assai raramente fra le immense valanghe di trattati di Aritmetica pratica che cadono giù in Italia ogni anno e da ogni parte; quello però che mi preme soprattutto di notare, specialmente facendo il confronto con altre operette consimili, talune delle quali assai recenti, è che l'A. ha saputo dimostrare col fatto che esser rigorosi non significa esser pedanti e che nello scrivere il libro l'A. ha sempre tenuto presente a chi esso fosse destinato.

La materia è disposta nel modo seguente: *Parte I.* Quantità, numeri interi. — Le operazioni fondamentali sui numeri interi. — Le proprietà elementari dei numeri interi. — Le frazioni ordinarie. *Parte II.* Le frazioni decimali ed i numeri decimali. — Sistema metrico decimale. — Estrazione di radice quadrata e cubica. *Parte III.* Numeri complessi (noto ed approvo l'omissione del metodo delle parti aliquote). — Rapporti e proporzioni. *Appendice.* Tavola dei numeri primi. — Tavola sinottica delle antiche note numeriche principalmente usate in Italia.

Questa pregevole operetta del Bortolotti può essere con profitto adottata sia nel Ginnasio inferiore, sia nelle Scuole Tecniche, sia nelle Classi complementari femminili. G. C.-L.

H. Poincaré. — *Cinématique et mécanismes; potentiel et mécanique des fluides.* — Paris, G. Carré, 1899.

Il volume contiene il corso professato alla Sorbona e non fu redatto dall'A.

Il primo capitolo è dedicato allo studio del moto rettilineo, curvilineo, ellittico ed elicoidale. Il moto di una figura piana nel suo piano è studiato nel secondo capitolo con una certa larghezza, in particolar modo riguardo al moto epicicloidale. Il movimento di un corpo solido invariabile comprende i capitoli III e IV, e nel successivo è succintamente studiato il moto relativo di un punto.

La trasformazione dei movimenti e lo studio dei meccanismi che vi hanno riguardo termina la prima parte dell'opera. Vi si studiano i differenti ingranaggi, epicicloidali, elicoidali, conici, iperbolici, la congiunzione di Cardano, la cremagliera, e da ultimo il complesso di biella e manovella (il così detto manovellismo di spinta rotativa), il settore di Stephenson con abbastanza dettagli, il parallelogrammo di Watt, e l'invertitore di Peaucelier, per quanto non adoperato nella pratica.

Nella seconda parte, dopo uno sguardo abbastanza rapido alla teoria del potenziale, sul quale l'autore pubblicò però un libro a parte, ed alla sua applicazione ad alcuni problemi di elettrostatica, si studia nelle sue linee generali, il problema dell'attrazione di un ellissoide. Segue quanto è necessario a conoscere intorno alla meccanica dei fluidi, terminando con un cenno sul moto vorticoso e sulle sfere pulsanti del Bjerknes, le ricerche del quale (notiamo di passaggio) sono state ora raccolte per cura del figlio in un volume.

La suprema chiarezza e l'eleganza del Poincaré si riscontrano in questa, come nelle altre sue opere d'insegnamento e di propaganda scientifica. R. Pitoni.

Emilio Cercignani. — *Il tempo e la sua misura.* — Firenze, tip. pei minori corrigendi, 1899.

È un trattatello sul calendario scritto con chiarezza e con precisione. Si passa, dai metodi preistoriani per la misura del tempo, ai fusi orari, al meridiano di Gerusalemme divenuto scopo di propaganda del Tondini da Quarenghi. Dodici pagine che riguardano la costruzione di un orologio solare, esposta in modo semplice e piano, chiudono il volumetto. R. P.

NUOVA PUBBLICAZIONE

Il dott. Alberto Conti, prof. di matematica nella R. Scuola Normale *Anna Morandi Manzolini* in Bologna, ha iniziato fino dal 1° decembre scorso, coi tipi dell'editore Zanichelli, un periodico quindicinale che ha per titolo Il Bollettino di Matematiche e di Scienze fisiche e naturali.

Questa pubblicazione, destinata ai maestri delle scuole elementari e agli alunni delle scuole normali, realizza un voto espresso dal 1° Congresso di "*Mathesis*", tenuto in Torino nel '98. (V. il verbale della seduta terza, *Periodico di Matematica*, Anno XIV, Fasc. I-III.) I primi due fascicoli pubblicati, danno affidamento che il *Bollettino* riuscirà nel suo scopo principale, che è quello di estendere e migliorare la cultura scientifica dei maestri elementari e di quei giovani che a questa professione s' indirizzano.

Auguriamo al *Bollettino* prosperità e lunga vita.

*DUBBI

Gli *Elementi di Geometria* del VERONESE, anche nella loro 2a edizione, troveranno difficoltà non piccola per entrare nelle nostre scuole; e questo, secondo un maligno amico, perchè bisogna leggerli prima di insegnarli, come avviene del resto d'ogni libro che abbia novità. Comunque sia, la difficoltà cresce quando chi legge si trova avvolto da dubbi che non sa risolvere. Esporre dunque tali dubbi non è, credo, mancare di rispetto all'autore, nè screditare il libro, ma giovargli, poichè: od hanno i dubbi lor ragione nel libro, e l'autore può chiarirli con una *errata-corrige;* o provengono, come temo per me, da scarso comprendonio, ed allora qualche buon'anima di collega può venire in aiuto. Così intendo giustificare le seguenti osservazioni sulla Parte I dei predetti *Elementi*.

1°. Nel n. 7 la definizione I di *segmenti eguali* non è preceduta che da osservazioni pratiche: non si doveva preporre in qualche modo la esistenza e conoscenza del *segmento?* Il postulato II che segue riguarda la retta, la cui nozione mi sembra basata su quella di segmento.

2°. La sostanza della definizione I mi par questa "si dice $a = b$ . . . quando ogni proposizione che si può enunciare di a o d'una sua parte, considerati l'uno e l'altra separatamente, si può ripetere per b o per la parte corrispondente . . . . " Possono queste parole fornire a chi non l'avesse il concetto di segmenti uguali? Parmi di no. E d'altra parte quali proposizioni a questo punto possono enunciarsi per i segmenti? Mi sembra miglior partito porre il concetto di segmenti eguali fra i primitivi come nella prima edizione

3°. Concessa pure la definizione I, perchè volerne dedurre $a = a$, che ha sempre fatto ridere gli alunni? Non so poi trarne una buona dimostrazione della proprietà *transitiva*, cioè dalle due $a = b$, $b = c$ dedurre $a = c$.

4°. Nel postulato II dei segmenti si pone $AB = BA$. Ecco: o il segmento è un gruppo di punti determinato dai due A e B ed allora con AB o BA si nomina diversamente lo stesso segmento; o questo invece si considera come serie di punti e male si concede $AB = BA$ perchè di senso opposto. Di più dovrebbe allora aversi $a + AB = a + BA$, secondo il teorema III del n. 8, il che non è in armonia colla definizione di somma; nè poi si comprende come sia $AB + BA$ nullo come all'esercizio 5°. Qualcuna anzi delle osservazioni che precedono la definizione I farebbe credere che nel concetto di eguaglianza non ci entri l'ordine. Se no, in modo analogo si può domandare se sieno eguali i sei triangoli determinati da tre punti nei

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal comitato di relazione dell'Associazione MATHESIS.

loro diversi ordini. L'aver voluto con questo postulato tradurre diversamente la doppia sovrapponibilità di *due* segmenti eguali, mi sembra un omaggio al movimento, che poco si comprende.

5°. Nel n. 8 la definizione di somma sembra data per i segmenti d'una stessa retta, tanto più che si tien conto in essa del verso. Ed allora come costruire il perimetro di un poligono? Il postulato IV del n. 15 non mi sembra sufficiente, perchè non dice se e come si debba tener conto del verso.

6°. La dimostrazione del teorema I, n. 8 non è convincente, perchè basata sulla *visione* della figura. Posto AC = CA, la dimostrazione del teorema II mi sembra egualmente rigorosa e più semplice così come era nella prima edizione. L'osservazione che estende il teorema II è troppo breve perchè non dice se e come si possono commutare due addendi vicini. Nella dimostrazione del teorema III era meglio considerare BB_3 come somma dei segmenti *b*, poi concluderlo eguale ad AA_3, somma dei segmenti *a*.

7°. Come la definizione di somma di due segmenti dà un modo per costruirla, così mi sembra dovrebbe essere per la definizione di *resto*, il che si ottiene definendo i segmenti *sovrapposti*, come per la somma i *consecutivi*.

8°. Il triangolo come è definito al n. 13 non sembra una *figura rettilinea*, secondo la definizione I precedente; nè allora vi sarebbe distinzione fra triangolo e suo *contorno* (meglio che *perimetro*) come è detto alla definizione 11 del n. 22.

9°. Nel n. 14, definendo le figure eguali, si dice: " .... ai segmenti dell'una corrispondono segmenti eguali dell'altra .... " Come intendere? La prima interpretazione fu per me questa: se ad A, B corrispondono A', B' è AB = A'B' senza nulla presupporre degli altri punti dei segmenti. Ma non la trovai sufficiente pel teorema I, non sapendo con essa concludere B' *interno* ad A'C'. Pensando allora che si parlava di figure rettilinee interpretai: non solo essere AB = A'B', ma i segmenti *appartenere* alle figure ed i punti, *corrispondenti nei segmenti*, riuscir tali anche nelle figure. Tale interpretazione è sufficiente per la dimostrazione del teorema I, ma ci obbliga a non pensare per es. archi di cerchio eguali senza ritenerli appartenenti a figure rettilinee. Perchè poi nella dimostrazione del teorema I si intenda bene come B' debba appartenere ad A'C' converrebbe completare così: la retta è *figura rettilinea*, così deve essere ogni figura F' ad essa eguale (perchè la eguaglianza è definita fra due figure rettilinee o tra due non rettilinee), quindi A'C' appartiene ad F' ed al punto (*) B di AC (e di F) deve corrispondere un punto B' di A'C' (ed anche di F'), quindi non un altro B'' per la corrispondenza univoca, ecc.

10°. La figura del n. 16 ed una frase del postulato V farebbero credere che a determinare la *coppia di rette* ci entrasse anche il loro *verso*, il che non appare dalla definizione e sembra escluso da tutto il contesto. Se no, che succederebbe di una coppia di rette mutando senso ad una o ad entrambe? — Nella dichiarazione poi è detto: " ....la coppia *ba* si chiama inversa della *ab* .... " Qui il pensiero dell'autore è completamente nascosto, se non si voglia ricorrere al movimento. Che AB e BA sieno *due* segmenti si può comprendere, considerandoli come *serie di punti*, ma io non me ne capacito per le *coppie di rette*, perchè non sono serie di punti, nè ancora si possono considerare come serie di raggi. Così il postulato V rimane senza preciso significato; ed applicato poi agli angoli come serie di raggi dà luogo agli stessi inconvenienti notati per i segmenti.

11°. E se non ho male compreso, nelle dimostrazioni del corollario al n. 16, del teorema al n. 17 e del teorema III al n. 18 si applica il seguente principio:

(*) B di AC (e di F) deve corrispondere un punto.

in due coppie eguali di rette sono corrispondenti le rette che le determinano. Come scende questo dalla definizione di eguaglianza? Non mi riesce la risposta.

12°. La dimostrazione del lemma posto al n. 20 nella sua prima parte sembra valere solo per gli angoli convessi, perchè i concavi (ab), $(a'b')$ non sono figure appartenenti alle coppie di raggi ab, $a'b'$. Bisognerebbe dimostrare che, se le coppie di raggi ab, $a'b'$ sono eguali, così risultano anche le coppie di rette; e non saprei in che modo.

13°. Nella dimostrazione del teorema I del n. 23 si concludono eguali due angoli come figure opposte rispetto ad un punto, perchè tali sono i lati: a me non sembra sufficiente; così dicasi per una parte del teorema III al n. 28.

14°. Nella dimostrazione del teorema al n. 24 si concludono le uguaglianze A (M) P = B (M) P, A (P) M = B (P) M ricorrendo, mi pare, al teorema II del n. 14 sulle figure corrispondenti in figure eguali. Se ho ben capito, questo teorema richiede che i punti *tutti* delle figure corrispondenti appartengano alle figure uguali. Ciò avviene per gli angoli A (P) M e B (P) M, ma non per gli altri due. Analoga osservazione si può fare per il teorema I del n. 26 e del n. 27.

15°. Nel corollario del n. 26 è detto " .... l'ipotesi dei due triangoli eguali ABC, A'B'C' come corrispondenti trae seco l'eguaglianza di due angoli.... ". Se il dire " il triangolo ABC corrisponde all'altro A'B'C' " significa che si corrispondono i vertici, bisognava chiarire un po' di più come ne consegua l'eguaglianza dei due triangoli, perchè non la si creda una anticipata applicazione del teorema V al n. 27. E questo schiarimento si può dare accettando la seconda interpretazione di cui alla nona delle presenti osservazioni. Se poi invece significa *essere eguali i due triangoli corrispondenti*, non vedo come si possano concludere corrispondenti i vertici, perchè la eguaglianza di due figure non specifica la corrispondenza fra i loro punti. In questo secondo caso, come anche al teorema del n. 29 si applica tacitamente un principio, che sarebbe all'ingrosso questo: *se alcuni punti determinano in modo unico una figura, in due di tali figure eguali essi sono punti corrispondenti.* (*)

In ogni modo poi sulla conclusione per gli angoli si può ripetere la osservazione precedente. Con questo si infirma anche una parte della dimostrazione data pel teorema II del n. 27.

16°. La definizione I del n. 28 chiama *poligono piano* la figura determinata da n punti e dai lati ecc. Che figura? *Rettilinea* non sembra perchè ne sarebbero esclusi i concavi e gli intrecciati; il *contorno* nemmeno, perchè.... cosa vorrebbe dire che un poligono convesso si può scomporre in triangoli?...

Si chiama anche perimetro l'*insieme* dei lati: insieme *somma* ovvero insieme *contorno?*

17°. Sono di minor conto le seguenti osservazioni: il postulato I non dice nulla su *quanti* punti si ammettono; — dal n. 6 non si comprende bene se c'entri l'*ordine* o no a formare un *sistema lineare;* — è fuori posto l'accenno alle *curve* nella osservazione pratica II del n. 7; — la definizione VI del *raggio* di retta non è ben chiara, perchè la parola *limitato* si usa in un senso diverso da quello assegnatole nella introduzione; — il corollario III del n. 10 si ha più semplicemente dal teorema III del n. 8; — nella dimostrazione del teorema I del n. 25 le prime due righe dell'ultimo periodo stanno meglio al principio della dimostrazione per determinare il raggio AB; — la definizione III e l'osservazione I del n. 28 si ba-

(*) La omissione di tale principio si nota anche nel mio libro di Geometria; però tutta l'appendice sulla eguaglianza lo fa presentire.

sano sulla intuizione; — certe corrispondenze di eguaglianza sono troppo semplicemente affermate, come nel teorema V del n. 25 e nel III del n. 30.

Degli altri libri non posso dir nulla perchè li ho sfogliati in fretta cercandovi inutilmente i postulati sul movimento, che pur si usa nella ricerca dell'area e del volume della sfera.

Rovigo, dicembre 1899.

GIUSEPPE INGRAMI.

*DA GIORNALI E RIVISTE

The Mathematical Gazette.

Il n. 17 (giugno 1899) contiene: *F. Morley*, Nota sulla sfero-conica: dimostrazione diretta della proprietà della sfero conica (o curva intersezione di una sfera e di un cono avente per vertice il centro della sfera e per direttrice una conica in uno dei fuochi della quale cade la perpendicolare dal vertice) che le somme delle distanze sferiche dei suoi punti da due punti fissi della sfera è costante. — *S. A. Saunder*, Sull'espressione " moto in un istante ": esame critico di questa espressione, presa in senso assoluto. — *R. F. Davis*, Equazioni porismatiche: osservazioni ed esempi sui sistemi di n equazioni con n incognite che sono incompatibili, a meno che non si verifichi una relazione fra i loro coefficienti, nel qual caso il sistema diviene indeterminato. — Contiene le seguenti piccole note: *R. F. Davis*, Dimostrazione geometrica di un teorema sul triangolo, applicabile agli angoli del parallelogrammo delle forze. — *C. E. M. 'Vicker*, Teorema sul contatto di un certo circolo variabile in un triangolo col circolo inscritto e uno degli ex inscritti. — Problemi. — Soluzioni. — Recensioni.

Il n. 18 (ottobre 1899) contiene: *R. F. Davis*, Equazioni prismatiche (continuazione, dal numero precedente). — *E. M. Langley*. Alcune curiosità nella divisione: esempi (continuazione, dal numero 15). — *C. E. M. 'Vicker*, Teoremi connessi coll'inversione: sono alcune relazioni, fra tangenti da punti a circoli, e diametri dei circoli. — Contiene le seguenti piccole note: *E. N. Barisien*. Valore dei raggi dei circoli tangenti a tre circoli dati. — *H. T. Gerrans*, Equazione degli assintoti alle curve espresse in coordinate polari da $\frac{1}{r}=f(\theta)$. — Problemi. — Soluzioni. — Recensioni.

Atti della R. Accademia della scienze di Torino.

Vol. XXXIV, disp. 11-14. *Mittag-Leffler*, Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione omogenea. — *V. Volterra*, Sopra alcune applicazioni della rappresentazione delle funzioni del prof. Mittag-Leffler. — *T. Cazzaniga*, Intorno ai reciproci dei determinanti normali. — *E. Daniele*, A proposito della mia nota: Alcune osservazioni preliminari sulla teoria del movimento delle superficie. — *C. Severini*, Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale. — *A. Bemporad*, Complessi di 2° grado costituiti dalle normali ad una serie di curve piane. — *G. Chisholm Young*. Sulla varietà razionale di M^4_3 di S_6 rappresentante della trigonometria sferica. — *V. H. Young*, Sulle sizigie che legano le relazioni quadratiche fra le coordinate di rette in S_4. — *B. Levi*, Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi. — *V. Volterra*, Sopra alcune applicazioni delle leggi del flusso di energia meccanica nel moto di corpi che si attraggono colla legge di Newton.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, Vol. XXXII, Fasc. 9-15. — *L. Carazzoni,* Sulle curve trigonali. — *G. Bardelli,* Sui momenti d'inerzia dei solidi di rotazione. — *G. Fano,* Sulle equazioni differenziali lineari del 5° ordine le cui curve integrali sono contenute in varietà algebriche. — *E. Veneroni,* Sopra i complessi del 3° grado costituiti da fasci di rette. — *V. Retali,* Sopra una corrispondenza $[m, n]$.

Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti.

Tomo LVIII, Serie VIII, disp. 2-3. — *F. D'Arcais,* Un problema sulle funzioni biarmoniche e sua risoluzione per un campo circolare.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena.

Serie III, Vol. I. — *A. Del Re.* Sopra una congruenza omaloide del 3° grado. — *P. Riccardi,* Alcune lettere di *Lagrange,* di *Laplace* e di *Lacroix* dirette al matematico Pietro Paoli e sette lettere del Paoli al prof. Paolo Ruffini.

Atti della Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania.

Anno LXXVI (1899). Serie IV, Vol. XII. — *G. Lauricella,* Sulla convergenza delle serie degli spostamenti e delle velocità di un punto di un solido elastico-isotropo vibrante.

Annuario della R. Scuola Navale superiore di Genova per l'anno scolast. 1898-99.

G. Pinelli, Sul modo di ricercare il valore numerico di una quantità analitica relativa ad una nuova data graficamente. — *C. Spelta.* Un teorema relativo all'equazione $\frac{du}{ar} + M_1 U_2 + M_2 U + M_3 = 0$.

Annali di Matematica pura ed applicata di Milano.

Serie III, Tomo II, Fasc. 4°. — *Timerding,* Ueber ein quadratisches Nullsystem. — *Bagnera,* Sopra i gruppi astratti di grado 32. — *Bottari,* Sulle razionalità dei piani multipli $\left\{ x, y, \sqrt[n]{F(x, y)} \right\}$. — *Dini,* Studi sulle equazioni differenziali lineari.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Tomo XIII. Il Fasc. 3-4, contiene: *Alagna,* Della congruenza binomia rispetto ad un modulo primo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numero primo, ovvero il doppio di un numero primo. (Continuazione e fine). — *De Franchis,* Riduzione dei sistemi lineari ∞^k di curve piane di genere 3, per $k > 1$. — *Gerbaldi,* Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. — *De Franchis,* Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2, — *Bourlet,* Sur la détermination de la surface d'une piste de vélodrome. — *Lovett,* Note on the contact Transformations of developable Surfaces.

Il Fasc. 5° contiene: *Almansi,* Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno. — *Viranti,* Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche. — *Morale,* Involuzione di grado n e specie 1 in uno spazio ad $(n-1)$ dimensioni. — *Poincaré,* Complément à l'Analysis situs.

Il Pitagora diretto da *G. Fazzari.*

Il II semestre num. I del 1899 contiene: *F. Ferrari,* Alcune congruenze relative a somme di potenze ordinarie e fattoriali simili. — *C. Ciamberlini.* Questioni di nomenclatura geometrica. — *G. Del Prete,* Sulla formula che dà il volume del tronco di piramide. — *A. M. Bustelli*, Corrispondenza. — *Archimede*, " De arenae numero, „ versione di *A. Mancini* (Continuazione).

Il Fasc. 2-3 contiene: *F. Ferrari*, Continuazione del precedente articolo. — *L. Bosi*, Sulla condizione perchè due equazioni di 2° grado abbiano una radice comune. — *E. Sadun*, Intorno alla dimostrazione di un teorema sui polinomi. — *C. Ciamberlini*, Continuazione e fine del precedente articolo. — *U. Ceretti*, Una formola araba sull'approssimazione delle radici quadrate. — *G. Cardoso-Laynes*, Alcuni teoremi di geometria del triangolo. — *Archimede*, " De arenae numero, „ versione di *A. Mancini* (Continuazione).

Il Fasc. 4-5 contiene: *R. Dedekind*, Continuità e numeri irrazionali, traduzione di *L. Certo*. — Sull'approssimazione delle radici quadrate. — *C. Ciamberlini*, Generalizzazione di alcune definizioni date in geometria elementare (Continuazione). — *G. M. Testi*, Sui problemi di massimo e minimo. (Nota seconda). — *F. Palatini*, Teoria della misura (Continuazione). — *F. Ferrari*, Continuazione e fine dell'articolo del numero precedente.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

G. Lazzeri, Manuale di Trigonometria. Livorno, Giusti 1899.

G. Valle, Funzioni ad una variabile e loro limiti; un capitolo di algebra elementare. Noto, tip. Zammit 1899.

Can. B. Raganti, Aritmetica pratica per il ginnasio inferiore, compilata in conformità dell'ultimo programma ministeriale. Sarzana, Tellarini 1898. L. 1,50.

E. Tronci, Formulario di aritmetica e geometria. Lucca, Landi 1899.

G. Bellacchi, Lezioni ed esempi di algebra complementare. Fasc. 2, Firenze, Barbèra 1899. L. 2.

L. Gosetti, Corso di aritmetica ed algebra. Parte I. Venezia, Ferrari 1899. L. 2.

S. Stromillo, Lezioni elementari di aritmetica per le scuole secondarie inferiori. Parte II. Napoli, Muca 1899. L. 0,50.

E Barilli, Elementi di aritmetica pratica per il ginnasio inferiore, con numerosi esercizi. Vol. I. Mantova, tip. Mondovì 1899. L. 0,50.

O. Leonardi, Elementi di algebra. Foligno, Salvati 1899.

M. Sasso, Formole dei quadrati e cubi dei polinomi; loro applicazioni per fare il quadrato e cubo dei numeri. Avellino, Pergola 1899. L. 1.

I. Ghersi, Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare. Milano, Manuali Hoepli 1899.

A. Socci e *G. Tolomei*, Elementi di matematica; libro di testo per le scuole complementari, conforme ai programmi governativi. Vol. I, II, III. Firenze, Le Monnier 1899. L. 1,50 ciascuno.

A. Socci e *G. Tolomei*, Elementi di matematica; libro di testo per le scuole normali conforme ai programmi governativi. Vol. I, II. Firenze, Le Monnier 1899. L. 1,50 ciascuno.

S. Ortu-Carboni, Sull'insegnamento dell'aritmetica teorica nelle scuole secondarie. Piacenza, Pennelli e Perinetti 1899.

C. Alasia, Geometria e Trigonometria della sfera. Milano, Manuali Hoepli 1899.

C. Alasia, Calcolo grafico ed applicazioni alla statica grafica. Città di Castello, Lapi 1899. L. 4.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 25 Gennaio 1900.

EUGENIO BELTRAMI

Da un semplice sguardo all'elenco dei lavori pubblicati da **Eugenio Beltrami,** l'opera scientifica di questo grande italiano ci apparisce come un mare iridescente di matematica luce, in quanto le investigazioni di analisi e di geometria pura si alternano con le più svariate ricerche fisico-matematiche: merito insigne oggidì che il genio italiano, degenere dalle tradizioni di Galileo e di Leonardo, miete i maggiori allori ne' campi delle astratte speculazioni, e nella stessa geometria, scienza a base sperimentale, si affatica per assottigliare e secernere il seme dell'esperienza, quasi da grano odiosa misura di loglio. Tornando ai lavori del **Beltrami,** io penso che un mio giudizio intorno ad essi, per quanto veritiero, sarebbe indegno dell'uomo: all' umiltà della mia persona sovvenga dunque la parola di un illustre che gli fu emulo ne' primi voli del giovanile ingegno. È questi il prof. Ulisse Dini, che al Senato disse, commemorando il **Beltrami**: " I suoi lavori geniali ed altissimi, nei quali alla importanza della materia trattata si aggiungeva una lucidezza ed eleganza di esposizione che invogliava a leggerli e meditarli, lo resero presto celebre qui e fuori; e questi, e l'amore che egli sapeva infondere in tutti per la matematica, la sua bontà, la sua rara modestia, la sua gentilezza di modi inspirarono in tanti e tanti il culto della scienza ".

Meglio e più brevemente non si poteva delineare la figura del **Beltrami,** scienziato, maestro, educatore, in cui lo stile fu l'uomo, pari cioè alla schiettezza dell'animo e alla genialità della mente. E questa lode di scrittor geniale, oltre che alla sua natura d'artista, dovè il **Beltrami** all'indefesso studio de' classici nella scienza, pei quali professò un culto che a qualche innovatore parve idolatria. Da loro egli apprese come all'altezza dell'argomento possa andar congiunta la forma disinvolta, lo stile semplice ed elegante che è proprio dei grandi scrittori, mostrando con novello esempio che scienze e lettere son fatte per andar di buon accordo e integrarsi a vicenda, e non già per accapigliarsi, come vorrebbe, fomentato dalla poltroneria, un pregiudizio tutto moderno, cagione d'immenso danno per la nazionale cultura. - Qualche pagina di prefazione, che da sè sola è un capolavoro: e già il **Beltrami** ha suscitato nel suo lettore la visione chiara e precisa, nonchè l'interesse per la questione ch'egli prende a trattare, e dato altresì notizia de' risultati ottenuti, quella notizia che pel solito più importa allo studioso. Chi poi avesse vaghezza di seguire il **Beltrami** nelle sue dimostrazioni, si accorgerebbe com'egli, pur ricorrendo al simbolo, quando questo giova o è necessario, ne ricerchi a ogni passo l'ascoso significato, per quindi tradurlo, come responso d'oracolo, in proposizioni e immagini di un'ammirabile evidenza. Dal noto il simbolo, e dal simbolo la nuova parola, che consola lo spirito e parla alla fantasia: questo a mio credere fu il segreto dell'arte del **Beltrami**, questa la prima radice di quella forma elettissima, onde lo studioso è tratto a leggerne da cima a fondo le opere magistrali. E tanta ne' suoi scritti è la semplicità dei mezzi, sapientemente adoperati ad altissimi fini, tanta la naturalezza delle deduzioni, da farti dubitare se per caso, pensando all'argomento, non avresti battuto anche tu la stessa sua via e scoperto le medesime verità. Illusione che si prova alla lettura delle opere dei sommi maestri: ma illusione che attesta l'eccellenza delle opere stesse, perchè dove l'umanità ritrova o crede di ritrovare la sua anima, ivi è l'impronta del genio e il germe dell'immortalità.

Quale lo scrittore, tal fu il maestro, anzi (e perchè non dirlo?) il mio maestro. Il nostro corso si componeva di quattro discepoli: (*) pochini invero per metter su " la baraonda lieta e gioconda „ cantata dal Giusti, ma pur bastanti a formare un'allegra brigatella, qual fummo, disposta a salar le lezioni per un'uscita in campagna al delizioso sole dei romani inverni. Ma la lezione del **Beltrami**, quella no, non si doveva salare: essa ci arrideva come una festa della forma e del pensiero. Ricordo che il **Beltrami** faceva poco a fidanza con la cultura de' suoi discepoli, e che prima della lezione ammanniva loro il *materiale*, da richiamare nel corso della lezione stessa. O che questo consistesse in qualche proprietà elementare delle forme quadratiche, o dei determinanti, o nel più trito teorema della geometria di Euclide, pareva a noi che quella proprietà e quel teorema uscissero dalle labbra di lui quasi trasfigurati e coloriti di nuova luce. - Effetto di suggestione, e del fascino che il maestro esercitava sullo spirito de' suoi discepoli? - E sia pure. Ma quanti maestri ne esercitano altrettanto?

Buono, mite, affabile con tutti: casalingo e tuttavia proclive alla conversazione e all'aneddoto di buona lega, nel conversare poneva la

(*) Tra i quali il Caporali e il De Paolis, che morirono giovanissimi, ma lasciando fama imperitura di sè negli annali della scienza.

più squisita cura per nascondere agli altri la propria superiorità, e questo suo studio lo rendeva cauto e misurato nè giudizj proprj, tollerante e saggio estimatore degli altrui. Il timore di sopraffare gli altri col suo ingegno lo rendeva perfin riluttante a lasciarsi trascinare a questioni di matematica fuor della scuola: meno difficile, sebbene non facile sarebbe stato, lo strappar da lui, valente musicista, una sonata al piano-forte. - Un giorno (e non era il primo) io e i miei tre compagni tardammo alla scuola. Il **Beltrami**, che aveva dovuto aspettare, ce ne rimproverò con un discorsetto pepato, ma che finiva: " Al mondo *siamo* tutti eguali ". La grande modestia aveva fatto smarrire in quel momento all'illustre matematico fino il concetto dell'eguaglianza!

Non dee però credersi che l'indole del **Beltrami** fosse, come suol dirsi, un impasto di latte e miele. Buono sì: ma d'una bontà condita da un pizzico di quel sal manzoniano che piacque tanto al mondo, sebbene fosse la più pungente satira de' suoi costumi. Profondo conoscitore degli uomini, e in ciò simile al Manzoni, il **Beltrami** non li amò forse quanto fu riamato, ove si eccettuino due sole persone: la madre e la consorte, per le quali ebbe tenerezze e abbandoni d'una ingenuità quasi infantile. Fu insomma la sua una bontà serena e senza *dedizioni:* e che questa mia franca opinione trovi riscontro nel sentimento universale, lo prova il fatto, che se molti ricorsero al prof. **Beltrami** per consigli e aiuti scientifici, e n'ebbero a iosa, niuno osò mai tentar le vie del cuore dell'illustre scienziato per isfruttarne la fama a scopo di privato interesse. Del resto, perchè avrebbe dovuto il **Beltrami** rendersi artefice di fortune, spesso immeritate, egli che per sè non cercò mai nulla, e che solo per virtù propria potè riparare ai colpi che la sventura e il livor di parte infersero alla sua prima giovinezza? Nato a Cremona il 16 novembre 1835, aveva studiato tre anni all'Università di Pavia come alunno del Collegio Ghislieri, quando amari casi di famiglia lo costrinsero ad abbandonare le scuole e ad accettare un posto di segretario presso il Direttore delle ferrovie a Verona. Venuto in sospetto al governo austriaco per le opinioni politiche manifestate da' suoi genitori, fu trasferito a Milano, ove nel 1859 lasciò il posto e strinse relazione col Brioschi e col Cremona. Nel 1862, ministro della pubblica istruzione il Mamiani e su proposta del Brioschi suo segretario generale, il giovane **Beltrami**, *senza laurea,* ma già insigne per lavori pubblicati negli " Annali di matematica " fu nominato professore straordinario all'Università di Bologna. Un anno dopo andò a Pisa come professore ordinario, poi tornò a Bologna, quindi fu a Roma, poi a Pavia, poi di nuovo a Roma. Due anni or sono, morto il Brioschi, l'Accademia dei Lincei lo eleggeva a unanimità suo Presidente, e nel giugno passato, durante la prima seduta reale cui presiedette, il **Beltrami** ebbe dalla bocca di S. M. il Re la notizia della sua nomina a senatore. Volle così la Maestà Sua che la solennità della forma e l'opportunità del luogo risarcissero l'ingiustizia di una omissione già troppo a lungo deplorata. - Morì in Roma il 18 del passato febbraio nell'Istituto clinico in Via Milazzo, per esaurimento di forze, il quarto giorno da un'operazione allo stomaco, felicemente riuscita, ma troppo tardi sperimentata.

Alla memoria dell'adorato maestro sia ora concesso al più umile de' suoi discepoli d'intessere una corona, per la quale egli vivo preparò gemme e lauri: corona che non teme gl'insulti del tempo e i ghiacci eterni dell'umano egoismo. - È l'elenco delle sue opere.

G. Frattini.

Pubblicazioni del prof. EUGENIO BELTRAMI.

Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. Annali di Matematica. Roma e Milano, 1861. — *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie* (lettera). Ibid. — *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppate.* Ibid. — *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie aprimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca nelle parti infinitissime una figura simile alla figura rappresentata* (traduzione da C. F. Gauss.) Ibid. — *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione.* Ibid. 1865. — *Sulla flessione delle superficie rigate.* Ibid. — *Risoluzione d'un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe.* Ibid. — *Risoluzione del problema di riportare i punti d'una superficie su quelli d'un piano in modo che le linee geodetiche sieno rappresentate da linee rette.* Ibid. 1866. — *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Ibid. 1867. — *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.* Ibid. 1868. — *Sopra una Nota del prof. Schlaefli.* Ibid. 1872. — *Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi.* Ibid. 1873. — *Intorno ad alcuni nuovi teoremi di Carlo Neumann.* Ibid. 1880. — *Sulle equazioni generali dell'elasticità.* Ibid. 1881. — *Sul potenziale magnetico ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico.* Ibid. 1882. — *Soluzione d'un problema relativo alle superficie di 2° ordine.* Giornale di Battaglini. Napoli, 1863. — *Sulle equazioni algebriche.* Ibid. — *Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti.* Ibid. — *Ricerche di analisi applicata alla geometria.* Ibid. 1864-65. — *Di alcune proprietà generali delle curve algebriche.* Ibid. 1866. — *Dimostrazione di due formole del sig. Ossian Bonnet.* Ibid. — *Di una proprietà delle linee a doppia curvatura.* Ibid. 1867. — *Intorno ad una trasformazione di variabili.* Ibid. — *Sulla minima distanza di due rette.* Ibid. — *Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea.* Ibid. 1868. — *Alcune formole per la teoria delle coniche.* Ibid. 1871. — *Intorno ad una trasformazione di Dirichlet.* Ibid. 1872. — *Teorema di geometria pseudosferica.* Ibid. — *Del moto geometrico d'un solido che ruzzola sopra un altro solido.* Ibid. — *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche.* Ibid. — *Sulle funzioni*

bilineari. Ibid. 1873. — Nella solennità della nascita di C. F. Gauss, discorso di Ernesto Schering (traduzione). Ibid. 1878. — *Intorno alle coniche di nove punti*. Memorie dell'Accademia di Bologna, 1863. — *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima*. Ibid. 1868. — *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*. 1869. — *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche*. Ibid. 1870. — *Ricerche sulla cinematica dei fluidi*. 1871-74. — *Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner*. Ibid. 1875. — *Esercitazione analitica sopra una proposizione di Steiner*. Ibid. 1877. — *Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale*. Ibid. 1878. — *Ricerche di geometria analitica*. Ibid. 1879. — *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi*. Ibid. 1880. — *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*. Ibid. 1881. — *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili*. Ibid. 1882. — *Delle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica*. Ibid. 1884. — *Sulla teoria dell'induzione magnetica*. Ibid. — *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità*. Ibid. 1885. — *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell*. Ibid. 1886. — *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore*. Ibid. 1887. — *Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo*. Ibid. 1891. — *Due Note sulla teoria delle cubiche gobbe*. Rendiconti dell'Istituto Lombardo. Milano, 1868. — *Sulla teoria delle linee geodetiche*. Ibid. — *Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie*. Ibid. 1869. — *Sulla teoria analitica della distanza*. Ibid. 1872. — *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali*. Ibid. — *Considerazioni sopra una legge potenziale*. Ibid. 1876. — *Intorno ad alcune questioni di elettrostatica*. Ibid. 1877. — *Intorno ad alcune proposizioni di Clausius*. Ibid. — *Intorno ad un caso di moto a due coordinate*. Ibid. 1878. — *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse*. Ibid. — *Sull'equazione pentaedrale delle superficie di 3° ordine*. Ibid. 1879. — *Intorno ad una formola integrale*. Ibid. — *Intorno ad un teorema di Abel*. Ibid. 1880. — *Intorno ad alcune serie trigonometriche*. Ibid. — *Sulla teoria della scala diatonica*. Ibid. 1882. — *Sulla teoria dei conduttori elettrizzati*. Ibid. — *Sulla teoria degli strati magnetici*. Ibid. 1883. — *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche*. Ibid. — *Sulla teoria del potenziale*. Ibid. — *Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie*. Ibid. 1884. — *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche*. Ibid. — *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici*. Ibid. 1885. — *Sulla teoria delle onde*. Ibid. 1886. — *Sulle funzioni sferiche d'una variabile*. Ibid. 1887. — *Sulle funzioni complesse*. Ibid. — *Considerazioni idrodinamiche*. Ibid. 1889. — *Sul principio di Huygens*. Ibid. — *Due Note intorno al mezzo elastico di Green*. Ibid. 1891. — *Sulle funzioni complesse*. Ibid. 1894. — *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange*. Ibid. 1895. — *Sulla teoria delle funzioni sferiche*. Ibid. 1896. — *Sulla determinazione della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori*. Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1877. — *Sull'attrazione d'un anello circolare od ellittico*. Ibid. 1880. — *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatchewsky*. Ibid. 1889. — *Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica*. Ibid. — *Sull'espressione analitica del principio di Huygens*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1892. — *Osservazioni su una Nota del prof. Morera*. Ibid. — *Sui potenziali termodinamici*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1895. — *Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens*. R. Accademia dei Lincei, 2° sem. 1895. — *Sul teorema di Kirchhoff*. Ibid. — *A proposito di una nuova ricerca del prof. C. Neumann*. Ibid. — *Commemorazione di F. Brioschi*. Ibid. (Rendiconto dell'adunanza solenne del 12 giugno 1897.) — *Note*

fisico-matematiche. Atti del Circolo Matematico di Palermo, 1889. — *Sulla funzione potenziale della circonferenza.* Ibid. — *Sulla teoria generale delle onde piane.* Ibid. 1891. — *Sur la déformation d'un milieu continu.* Comptes-rendus dell'Accademia delle scienze di Parigi, 1889. — *Quelques remarques au sujet des fonctions sphèriques.* Ibid. 1890. — *Enrico Betti* (commemorazione). Ibid. 1892. — *Discorso sulla vita e sulle opere di Domenico Chelini.* Collectanea Matematica. Milano, Hoepli, 1881. — *Sulla teoria degli assi di rotazione.* Ibid. — *Sur la courbure de quelques lignes singulières.* Nouvelles Annales de Mathèmatiques di Parigi, 1864. — *Zur Theorie des Krummungsmaasses.* Mathematische Annalen di Lipsia, 1869. — *Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici.* Nuovo Cimento, Pisa, 1872. — *Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante.* Bullettin de Darboux, Parigi 1876. — *Sulle funzioni cilindriche.* Atti della R. Accademia di Torino, 1881. — *Sur les couches de niveau électromagnétiques.* Acta mathematica di Stoccolma, 1883.

DI UN GRUPPO NOTEVOLE DI SOSTITUZIONI LINEARI

nella teorica delle forme quadratiche

Nelle formole che seguiranno, le lettere denotano numeri interi. Consideriamo la forma quadratica

$$x^2 - Dy^2$$

e supponiamo che D, oltrechè intero, sia positivo e non sia quadrato perfetto. Poichè per x ed y interi e positivi la forma assume tutti i valori che assumerebbe per x ed y interi, positivi o negativi, dividiamo il quarto di piano, o angolo retto, in quadrati di lato eguale all'unità, e considerando x ed y, supposti interi e positivi, come l'ascissa e l'ordinata di un vertice di quadrato o *nodo*, riguardiamo quel nodo come latore del valore che la forma assume in esso. Si avrà così entro l'angolo retto la più semplice immagine del sistema dei numeri interi contenuti nella forma.

Una parte dell'angolo retto (ed è la parte compresa fra l'asse delle x e la direzione che, uscendo dall'origine delle coordinate, è inclinata al detto asse di un angolo la cui tangente trigonometrica è $\frac{1}{\sqrt{D}}$) è occupata dai numeri interi e positivi contenuti nella forma. Questa parte, e propriamente il sistema de' suoi nodi, verrà detta *campo intero e positivo della forma.* Ivi un dato numero N o manca, o se vi è, si trova ripetuto in infiniti nodi, corrispondenti alle infinite soluzioni dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

in numeri interi e positivi. Questi infiniti nodi si possono ordinare secondo i valori ascendenti delle loro coordinate (le quali crescono contemporaneamente, come si scorge dalla precedente equazione) *dicendo nodo minimo* quello di coordinate minime, che cioè corrisponde alla soluzione minima dell'equazione. Ordinati in tal guisa i nodi di uno stesso numero N, essi rimangono altresì ordinati secondo la grandezza dell'*argomento,* cioè dell'angolo che il raggio vettore del nodo forma con l'asse delle x. Ciò si vede dall'equazione precedente posta sotto la forma

$$D\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 - \frac{N}{x^2},$$

dopo avere osservato che $\frac{y}{x}$ è la tangente trigonometrica dell'argomento. L'argomento del nodo minimo di un numero sarà perciò il minimo fra gli argomenti di tutti i nodi relativi ad esso numero.

Nel sistema dei nodi che costituiscono il campo intero e positivo della forma potremo così distinguere il sistema dei nodi minimi *(sistema minimo).* Fra i numeri interi e positivi contenuti nella forma e i punti o nodi del sistema minimo esiste poi corrispondenza univoca, in quanto a ciascun numero contenuto nella forma corrisponde uno e un sol nodo del sistema minimo, e a ogni nodo del sistema minimo uno e un sol numero contenuto nella forma.

Qualunque sostituzione lineare intera e a coefficienti interi, applicata a un nodo del campo intero e positivo della forma, porta quel nodo in un altro nodo dello stesso campo, o in un punto che è fuor del campo, pur essendo nodo dell'intero piano diviso in quadrati di lato eguale all'unità. Possiamo perciò dire che essa trasforma il detto campo in sè medesimo, nel senso, che il trasformato di un nodo del campo è ancor nodo del campo stesso, se gli appartiene, e non ne è portato fuori per effetto della trasformazione. Avviene nondimeno che il trasformato di un nodo minimo, se pure appartiene al campo, non è, generalmente parlando, un altro nodo minimo. Si può dunque domandare se tra le infinite sostituzioni lineari intere e a coefficienti interi ve n'ha un gruppo di così fatto che trasformino il sistema minimo in sè medesimo, che cioè trasformino i nodi minimi in altri nodi parimenti minimi, *purchè contenuti nel campo intero e positivo della forma.* (È sottintesa, almeno per alcune sostituzioni del gruppo, la condizione che vi siano effettivamente dei nodi minimi i cui trasformati appartengano a quest'ultimo campo.) Ho trovato che un gruppo di siffatte sostituzioni esiste, come è dichiarato dal seguente teorema.

TEOREMA. — *Se*

$$(p_1, q_1) \qquad (p_2, q_2) \ldots\ldots \qquad (p_n, q_n)$$

sono coordinate di nodi relativi a numeri primi, le sostituzioni lineari del gruppo

$$X_0+Y_0\sqrt{D}=(p_1-q_1\sqrt{D})\dots(p_n-q_n\sqrt{D})(x_0+y_0\sqrt{D})\ (*)$$

trasformano in sè medesimo il sistema dei nodi minimi contenuti nel campo intero e positivo della forma

$$x^2-Dy^2.$$

Dimostrazione. — Indicando con P un numero primo contenuto nella forma, sia

$$p^2-Dq^2=P \tag{1}$$

con p e q interi e positivi. Si consideri la sostituzione lineare

$$X_0+Y_0\sqrt{D}=(p-q\sqrt{D})(x_0+y_0\sqrt{D}), \tag{2}$$

dove x_0 e y_0 indicano le coordinate del punto che si trasforma e X_0, Y_0 quelle del suo trasformato. Se (x_0, y_0) appartiene al campo intero e positivo della forma, notiamo subito che X_0 è essenzialmente positivo, che cioè

$$px_0 > Dqy_0.$$

Se infatti

$$x_0^2-Dy_0^2=N,$$

la precedente disuguaglianza si traduce facilmente nell'altra

$$Np^2+DPy_0^2>0,$$

che è evidentemente soddisfatta.

Invece Y_0 può essere positiva o negativa, secondochè py_0 supera qx_0 o ne è minore. Se Y_0 è negativa, il nodo (x_0, y_0) è portato fuor del campo intero e positivo della forma, e non v'è da dir altro.

Consideriamo dunque il primo caso (Y_0 positiva) e supponiamo che il punto (x_0, y_0), al quale si applica la trasformazione, appartenga al sistema minimo, che cioè (x_0, y_0) sia la soluzione minima dell'equazione

$$x^2-Dy^2=N. \tag{3}$$

Dicò che anche (X_0, Y_0) è soluzione minima, e naturalmente dell'equazione

$$x^2-Dy^2=PN, \tag{4}$$

(*) Si indicano con x_0, y_0 le coordinate del punto che si trasforma e con X_0, Y_0 quelle del suo trasformato, e s'intendono eguagliati i coefficienti totali di $\sqrt{D}$ e le rimanenti parti dei due membri, a fin di avere X_0 e Y_0 espressi linearmente mediante x_0 e y_0.

ottenuta moltiplicando la (2) per quella che se ne deriva cambiandovi $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$. Dalla (2) si ricava

$$x_0 + y_0\sqrt{D} = \frac{(X_0 + Y_0\sqrt{D})(p + q\sqrt{D})}{P} \tag{5}$$

dove tutte le lettere indicano numeri positivi, tale essendo anche Y_0, per ipotesi. Se pertanto (X_0, Y_0) non fosse soluzione minima della (4) supponiamo che (X_1, Y_1) fosse tale. Si avrebbe

$$X_1 < X_0 \ , \ Y_1 < Y_0.$$

Si consideri in tal caso il quoziente

$$\frac{(X_1 + Y_1\sqrt{D})(p \pm q\sqrt{D})}{P}.$$

È evidente che, comunque si disponga in esso del doppio segno, i valori assoluti della parte razionale e del coefficiente di $\sqrt{D}$ saranno risp. minori della parte intera e del coefficiente di $\sqrt{D}$ che figurano nel secondo membro della (5), minori cioè di x_0 e di y_0. Se dunque proveremo che, ove si disponga convenientemente del doppio segno, la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ nel detto quoziente sono interi, che cioè

$$\frac{(X_1 + Y_1\sqrt{D})(p \pm q\sqrt{D})}{P} = x_1 + y_1\sqrt{D}, \tag{6}$$

avremo provato l'asserto. Perchè, ricavandosi da quest'ultima eguaglianza

$$x_1^2 - Dy_1^2 = N, \tag{7}$$

rimarrebbe stabilita per la (3) l'esistenza di una soluzione con numeri minori in valore assoluto di x_0 e di y_0, e ciò contradice all'ipotesi fatta, che cioè (x_0, y_0) è soluzione minima.

Dimostriamo dunque che x_1 e y_1 sono interi. A tal fine consideriamo l'eguaglianza

$$X_1^2 - DY_1^2 = PN,$$

e dopo averla moltiplicata per q^2, sostituiamovi il valore di Dq^2 ricavato dalla (1). Avremo:

$$q^2 X_1^2 - (p^2 - P) Y_1^2 = PN q^2.$$

Dalla quale si deduce che la differenza

$$p^2Y_1 - q^2 X_1^2 = (pY_1 + qX_1)(pY_1 - qX_1)$$

è divisibile per P. Ma P è primo: dunque uno almeno dei due binomi

$$pY_1 \pm qX_1$$

è divisibile per P. Ciò prova ché y_1 è intero, ove nella (6) si disponga convenientemente del doppio segno. Essendo intero y_1, la (7) mostra che è intero anche x_1.

Così è provato che, se la trasformazione

$$X_0 + Y_0\sqrt{D} = (p - q\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D})$$

porta un nodo minimo in un altro nodo del campo intero e positivo, anche questo secondo nodo è minimo.

Consideriamo ora la trasformazione

$$X_0 + Y_0\sqrt{D} = (p_1 - q_1\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D})$$

prodotto di due trasformazioni della specie sopra considerata. È facile dimostrare che anch'essa gode della proprietà di trasportare i nodi minimi in altri nodi parimenti minimi. Perchè, se nel prodotto

$$(p_2 - q_2\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}) = x'_0 - y'_0\sqrt{D}$$

il coefficiente di $\sqrt{D}$ è negativo, tale sarà evidentemente anche nel prodotto

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(x'_0 - y'_0\sqrt{D})$$

e in tal caso il punto (x_0, y_0) sarà portato fuor del campo intero e positivo della forma. Se poi quel primo prodotto sarà della forma $x'_0 + y'_0\sqrt{D}$, nel qual caso il nodo (x'_0, y'_0) sarà minimo, come fu dimostrato, potrà ripetersi del prodotto

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(x'_0 + y'_0\sqrt{D})$$

ciò che già si disse in proposito del prodotto

$$(p - q\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}).$$

Così continuando, si giunge a dimostrare che la sostituzione lineare

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D}) \dots (p_n - q_n\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}),$$

qualunque sia il numero de' suoi fattori costanti della forma $p - q\sqrt{D}$, gode della proprietà di trasformare il sistema minimo in sè medesimo.

Rimane da dimostrare che il trovato gruppo contiene trasformazioni *effettive,* cioè tali che trasformano effettivamente dei nodi minimi in altri nodi contenuti nel campo intero e positivo della forma. Consideriamo a tal fine la trasformazione

$$(p - q\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D}),$$

contenuta nel gruppo. La condizione perchè essa sia effettiva sul nodo (x_0, y_0) relativo ad N, è, come si vide,

$$py_0 - qx_0 > 0$$

ossia

$$\frac{q}{p} < \frac{y_0}{x_0}. \tag{8}$$

Questa condizione non può essere soddisfatta da più di un sistema di valori delle costanti p e q relative ad uno stesso numero primo P. Perchè, se fosse nel medesimo tempo

$$\begin{aligned} py_0 - qx_0 &> 0 \\ p'y_0 - q'x_0 &> 0, \end{aligned}$$

si avrebbe

$$\begin{aligned} (p - q\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D}) &= X_0 + Y_0\sqrt{D} \\ (p' - q'\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D}) &= X_0 + Y_0\sqrt{D}, \end{aligned}$$

dove (X_0, Y_0) è la soluzione minima dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = PN,$$

e ne risulterebbe

$$p = p' \qquad q = q'.$$

Da questa osservazione e dalla (8) risulta che l'unico sistema di valori ammissibile per le costanti p e q relative al numero primo P è quello che rende minima $\frac{q}{p}$, cioè quello relativo alla soluzione minima dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = P.$$

Ma in questo caso $\frac{q}{p}$ è la tangente trigonometrica dell'argomento minimo (o semplicemente argomento) del numero primo P. La (8) pertanto ci manifesta che *la trasformazione*

$$(p - q\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D})$$

è effettiva su tutti que' nodi minimi il cui argomento supera l'argomento del numero primo P. Cosicchè, volendo che la trasformazione sia effettiva su quali e quanti nodi si voglia, basterà determinare P in modo che il suo argomento sia minore del minimo degli argomenti relativi a que' nodi. E ciò si può fare, potendosi sempre trovare de' numeri primi di argomento piccolo quanto si vuole. Se per esempio si considera la forma

$$z^2-D$$

la quale contiene infiniti numeri primi (perchè D non è quadrato perfetto) si potrà dare a z un valore z_0 tale che z_0^2-D rappresenti un numero primo, e scegliere quel valore tanto grande, che $\frac{1}{z_0}$ (tangente trigonometrica dell'argomento del numero primo rappresentato) sia piccola quanto si vuole.

Del resto l'effettività del gruppo è anche dimostrata da questa semplicissima riflessione: Se (p, q) (p', q') sono coordinate di nodi minimi relativi a numeri primi, o la sostituzione $p-q\sqrt{D}$ sarà effettiva sul nodo (p', q') o pure la sostituzione $p'-q'\sqrt{D}$ sarà effettiva sul nodo (p, q), perchè in uno dei due prodotti

$$(p-q\sqrt{D})\,(p'+q'\sqrt{D})$$
$$(p'-q'\sqrt{D})\,(p+q\sqrt{D})$$

il coefficiente di $\sqrt{D}$ è certamente positivo.

NOTA. — Le cose dette per la forma

$$x^2-Dy^2$$

a determinante positivo, valgono altresì, con lievi varianti, per la forma a determinante negativo

$$x_2+Dy^2.$$

In questo caso, ove per soluzione minima dell'equazione

$$x^2+Dy^2=N$$

s'intenda quella nella quale il valore della y è minimo (e conseguentemente massimo quello della x) e si denoti con i l'unità immaginaria, si giunge al

TEOREMA. — *Se*

$$(p_1, q_1) \quad (p_2, q_2) \ldots \quad (p_n, q_n)$$

sono coordinate di nodi relativi a numeri primi, le sostituzioni lineari del gruppo

$$X_0+iY_0\sqrt{D}=(p_1-iq_1\sqrt{D})\ldots(p_n-iq_n\sqrt{D})(x_0+iy_0\sqrt{D})$$

trasformano in sè medesimo il sistema dei nodi minimi contenuti nel campo intero e positivo della forma

$$x^2+Dy^2.$$

Da questo teorema e dal precedente si derivano sistematicamente e per via elementare molte verità (in parte cognite) riferentisi alla rappresentazione dei numeri mediante la forma $x^2 \pm Dy^2$, come mostrerò in un altro lavoro.

G. FRATTINI.

SULLA FORMA CHE ASSUMONO

le relazioni di proiettività fra due spazi S_{n-1} S'_{n-1} nel caso dell'omologia

---

Se S_{n-1} S'_{n-1}, sono due spazi lineari di specie $(n-1)$ proiettivi, le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ di due punti corrispondenti sono legate da n relazioni della forma

$$\text{(I)} \qquad \rho x'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots n)$;

e le coordinate di due iperpiani corrispondenti $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ sono legate dalle n relazioni

$$\text{(II)} \qquad \sigma u_i = a_{1i} u'_1 + a_{2i} u'_2 + \ldots + a_{ni} u'_n$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots n)$; essendo ρ, σ fattori di proporzionalità.

È noto inoltre che, se S_{n-1}, S'_{n-1} sono sovrapposti e gli elementi fondamentali sono gli stessi per i due spazi, i punti uniti sono quelli le cui coordinate verificano le equazioni simultanee

$$\text{(III)} \qquad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + (a_{ii} - \rho) x_i + \ldots + a_{in} x_n = 0$$

$(i = 1, 2 \ldots n)$;

e gl'iperpiani uniti sono quelli le cui coordinate verificano le equazioni simultanee

$$\text{(IV)} \qquad a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + \ldots + (a_{ii} - \sigma) u_i + \ldots + a_{ni} u_n = 0$$

$(i = 1, 2 \ldots n)$;

quando si ponga in esse in luogo di ρ e σ una qualunque delle radici dell'equazione

$$\text{(V)} \qquad \Delta(y) = \begin{vmatrix} a_{11} - y & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - y & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - y \end{vmatrix} = 0.$$

Ora si sa che la proiettività dicesi omologia, quando si hanno infiniti punti uniti, tutti i punti di un iperpiano π (iperpiano d'omologia), ed infiniti iperpiani uniti, tutti quelli che passano per un punto P (centro d'omologia); e che ciò accade allora e soltanto allora che esiste una radice k dell'equazione (V) per la quale si annullino tutti i minori di secondo ordine del determinante $\Delta(y)$.

L'equazione dell'iperpiano d'omologia è una qualunque delle (III) e l'equazione del centro d'omologia una qualunque delle (IV), quando si faccia

$$\rho = \sigma = k.$$

Da quanto abbiamo detto risulta che, se indichiamo con $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ le coordinate dell'iperpiano d'omologia, queste coordinate dovranno essere proporzionali ad $a_{i1}\, a_{i2} \dots (a_{ii} - k) \dots a_{in}$, e quindi si avranno le relazioni di proporzionalità

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} z_1\,\theta_1 = a_{11} - k & z_1\,\theta_2 = a_{12} & \dots\ z_1\,\theta_n = a_{1n} \\ z_2\,\theta_1 = a_{21} & z_2\,\theta_2 = a_{22} - k & \dots\ z_2\,\theta_n = a_{2n} \\ \dots\dots\dots & & \\ z_n\,\theta_1 = a_{n1} & z_n\,\theta_2 = a_{n2} & \dots\ z_n\,\theta_n = a_{nn} - k, \end{cases}$$

dalle quali risulta in modo manifesto che $z_1, z_2, \dots, z_n$ sono le coordinate del centro di omologia.

Dalle (VI) si ricava

$$\begin{aligned} a_{ih} &= z_i\,\theta_h \qquad i \lesseqgtr h \\ a_{ii} &= z_i\,\theta_i + k\,; \end{aligned}$$

e allora le relazioni di proiettività (I) assumono la forma

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \rho x'_1 = kx_1 + z_1\,\theta_x \\ \rho x'_2 = kx_2 + z_2\,\theta_x \\ \dots\dots\dots\dots \\ \rho x'_n = kx_n + z_n\,\theta_x\,, \end{cases}$$

essendo $\theta_x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n\, x_n$;

e le relazioni (II) assumono la forma

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \sigma u_1 = ku'_1 + \theta_1\, Z_{u'} \\ \sigma u_2 = ku'_2 + \theta_2\, Z_{u'} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sigma u_n = ku'_n + \theta_n\, Z_{u'}\,, \end{cases}$$

essendo $Z_{u'} = z_1 u'_1 + z_2 u'_2 + \dots + z_n\, u'_n$.

Viceversa è manifesto che qualunque sostituzione lineare della forma (VII) rappresenta un'omologia, perchè tutti i punti dell'iperpiano

$$\theta_x = 0$$

sono punti uniti; tutti gli iperpiani passanti per il punto

$$Z_{u'} = 0$$

sono iperpiani uniti.

Dunque si conclude che:

Nel caso dell'omologia le relazioni di proiettività assumono la forma (VII); $(z_1, z_2 \dots z_n)$ *è il centro d'omologia,* $(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n)$ *l'iperpiano d'omo-*

logia; la forma (VII) *della sostituzione lineare* (I) *è caratteristica dell'omologia.*

Il determinante della sostituzione lineare nel caso dell'omologia diventa, come si trova facilmente,

$$k^n + k^{n-1}\theta_z ,$$

e l'equazione (V)

$$(k-y)^n + (k-y)^{n-1}\theta_z = 0,$$

che si trova subito osservando che il determinante $\Delta(y)$ si deduce dal determinante della sostituzione, ponendo $(k-y)$ in luogo di k.

L'equazione (IX) ammette la radice $y = k$ multipla d'ordine $(n-1)$ e quindi ammetterà un'altra radice, distinta da k, tutte le volte che $\theta_z \gtrless 0$; a questa radice corrisponde, come è facile vedere, il punto unito P, centro d'omologia.

Per $n = 4$ si ha l'omologia nello spazio ordinario; (z_1, z_2, z_3, z_4) è il centro d'omologia, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ il piano d'omologia. Per $n = 3$ si ha l'omologia nel piano, (z_1, z_2, z_3) è il centro d'omologia, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ l'asse d'omologia.

GIULIO MONTI.

SOPRA ALCUNI INTEGRALI INDEFINITI(*)

Il sig. E. BARISIEN, in un suo articolo inserito nel *Periodico di Matematica*, fasc. IV, gennaio-febbraio, 1900, sotto il titolo " Sull'integrale $\int \mathrm{tang}^n\varphi \,.\, d\varphi$, " vorrebbe indicare un metodo utile al calcolo del medesimo, senza trasformarlo nell'integrale di una funzione razionale. Ora, poichè i procedimenti, del tutto distinti, che vengono ivi seguiti nei due casi particolari di $n = 3$, $n = 4$ (i soli esaminati, mentre il caso generale non viene trattato affatto) non raggiungono, a parer mio, altro scopo che quello di rendere complicata una questione di tale semplicità, credo opportuno far rilevare come si possa ridurre immediatamente il calcolo dell'integrale indefinito $\int \mathrm{tang}^n x \,.\, dx$ a quello dell'altro $\int \mathrm{tang}^{n-2} x \,.\, dx$, qualunque sia l'esponente n. Ed allora, con ripetute applicazioni della *formola di riduzione* che risulta, perverremo alla fine all'uno od all'altro degli integrali elementari

$$\int dx = x + c, \qquad \int \mathrm{tang}\, x\, dx = -\log\cos x + C,$$

secondo che n è, rispettivamente, pari o dispari.

(*) Il sig. ing. Bardelli di Milano ci ha comunicate delle osservazioni sostanzialmente eguali a quelle contenute nel presente articolo. (Nota di G. LAZZERI).

Basta perciò osservare che, essendo

$$d \operatorname{tang} x = (1 + \operatorname{tang}^2 x)\, dx,$$

si ha

$$\operatorname{tang}^n x\, dx = \operatorname{tang}^{n-2} x\, d \operatorname{tang} x - \operatorname{tang}^{n-2} x\, dx.$$

E quindi, se è $n > 1$, risulterà

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tang}^{n-1} x - \int \operatorname{tang}^{n-2} x\, dx.$$

Ne segue che

$$\int \operatorname{tang}^{2m} x dx = \frac{1}{2m-1} \operatorname{tang}^{2m-1} x - \frac{1}{2m-3} \operatorname{tang}^{2m-3} x + \frac{1}{2m-5} \operatorname{tang}^{2m-5} x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1} \operatorname{tang} x + (-1)^m x + C$$

$$\int \operatorname{tang}^{2m+1} x dx = \frac{1}{2m} \operatorname{tang}^{2m} x - \frac{1}{2m-1} \operatorname{tang}^{2m-2} x + \frac{1}{2m-4} \operatorname{tang}^{2m-4} x - \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{2} \operatorname{tang}^2 x + (-1)^{m-1} \log \cos x + C.$$

In modo analogo si procederà pel calcolo di $\int \cot^n x\, dx$, osservando che si ha

$$d \cot x = -(1 + \cot^2 x)\, dx$$

e quindi

$$\cot^n x\, dx = -\cot^{n-2} x \,.\, d \cot x - \cot^{n-2} x\, dx.$$

Perciò, se è $n > 1$, otterremo

$$\int \cot^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x\, dx.$$

Applicando ripetutamente questa formola di riduzione, perverremo all'uno od all'altro degli integrali

$$\int dx = x + C, \qquad \int \cot x\, dx = \log \operatorname{sen} x + C$$

secondo che l'esponente n è pari o dispari. Avremo dunque

$$\int \cot^{2m} x dx = -\frac{1}{2m-1} \cot^{2m-1} x + \frac{1}{2m-3} \cot^{2m-3} x - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m \cot x + (-1)^m x + C,$$

$$\int \cot^{2m-1} x\, dx = -\frac{1}{2m} \cot^{2m} x + \frac{1}{2m-2} \cot^{2m-2} x - \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^m}{2} \cot^2 x + (-1)^m \log \operatorname{sen} x + C. \text{(*)}$$

Pavia, 10 febbraio 1900.

M. CHINI.

(*) Le suddette formole di riduzione, coll'uso delle quali si è ottenuto il valore dei due tipi di integrali considerati, si trovano, per esempio, nei miei *Esercizi di Calcolo infinitesimale* (Livorno, Giusti, 1893) a pag. 138; dove sono pure (pagg. 142-43-44) quelle che servono al calcolo degli integrali

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx, \qquad \int \cos^n x\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

Abbachi Trigonometrici

§ 1. L'importanza della *Nomografia* (*) si manifesta ogni dì più, colle numerosissime applicazioni che se ne vanno facendo alla *Ingegneria,* alla *Navigazione,* alla *Balistica,* all'*Arte militare*,...; ci pare quindi utile il mostrarne qui un'altra applicazione semplicissima, la quale, forse, farà sorgere in qualche lettore il desiderio di conoscere i fecondissimi metodi di questa nuova scienza.

Il metodo che seguiremo è quello dei *punti allineati a due quote,* felicemente ideato dallo stesso fondatore della *Nomografia* (**); esso è il più recente e il più notevole, e ci rende possibile la costruzione di abbachi i quali risolvano immediatamente una classe molto generale di equazioni a *sei* variabili, mentre coi notissimi diagrammi cartesiani le variabili non possono essere più di *tre.*

E comincieremo dall'esporre in modo facile e breve il metodo stesso, limitandoci al caso in cui le variabili siano *quattro* soltanto e supponendo che l'equazione sia del tipo (che più frequentemente si presenta in pratica)

$$(1) \qquad \varphi(\alpha) f_1(\gamma, \delta) + \psi(\beta) f_2(\gamma, \delta) + f_3(\gamma, \delta) = 0,$$

dove: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono le quattro variabili; $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$ rappresentano rispettivamente una funzione qualunque solo di α e una funzione qualunque solo di β; $f_1(\gamma, \delta)$, $f_2(\gamma, \delta)$, $f_3(\gamma, \delta)$ sono tre funzioni, pure qualunque, di γ e δ.

§ 2. Assumiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xoy (fig. 1), (in questo paragrafo l'ortogonalità non è necessaria) e tracciamo sull'asse delle x e sulla retta $y = 1$, rispettivamente, le scale definite dalle uguaglianze

$$(2) \qquad x_1 = k_1 \varphi(\alpha), \qquad\qquad (3) \qquad x_2 = k_2 \psi(\beta),$$

dove k_1 e k_2 sono due moduli positivi arbitrari, segnando nei punti di divisione, non i valori di x_1 e di x_2, ma i valori di α e di β rispettivamente corrispondenti, che chiameremo poi *quote* di quei punti: vogliamo dimostrare che, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soddisfano alla (1), i due punti $(x_1, 0)$ e $(x_2, 1)$ sono *allineati* col punto

$$(4)\, x = -\frac{k_1 k_2 f_3(\gamma_1, \delta)}{k_2 f_1(\gamma, \delta) + k_1 f_2(\gamma, \delta)}, \quad (5)\, y = -\frac{k_1 f_2(\gamma, \delta)}{k_2 f_1(\gamma, \delta) + k_1 f_2(\gamma, \delta)},$$

e reciprocamente. Infatti la condizione necessaria e sufficiente affinchè questi tre punti siano in linea retta è

$$x_1(1 - y) + x_2 y - x = 0,$$

(*) È questo il nome attribuito dal Prof. *M. d'Ocagne* (della *École polytechnique* di Parigi) a quel ramo della *Statica grafica* che tratta della costruzione dei grafici *(abbachi)* per risolvere le equazioni a più variabili: ramo che egli ha fatto assurgere al grado di scienza colla pubblicazione del suo grande *Traité de Nomographie* Gauthier-Villars, Parigi, 1899).

(**) V. *Tr. de Nomographie,* pag. 320.

e, sostituendo a x_1, x_2, x, y i valori precedenti, questa eguaglianza si trasforma nella (1).

Se ora fra la (4) e la (5) si elimina δ, si ha un'equazione

(6) $$F_1(x, y, \gamma) = 0$$

la quale rappresenta un sistema di curve aventi per parametro γ; e, se invece si elimina γ, si ha un'altra equazione

(7) $$F_2(x, y, \delta) = 0,$$

la quale rappresenta un altro sistema di curve aventi per parametro δ: e noi diremo curve di *quota* γ le prime, curve di *quota* δ le seconde.

Avremo così due sistemi di punti (α) e (β) distribuiti su due rette parallele e due sistemi di curve (γ) e (δ); e, se $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$

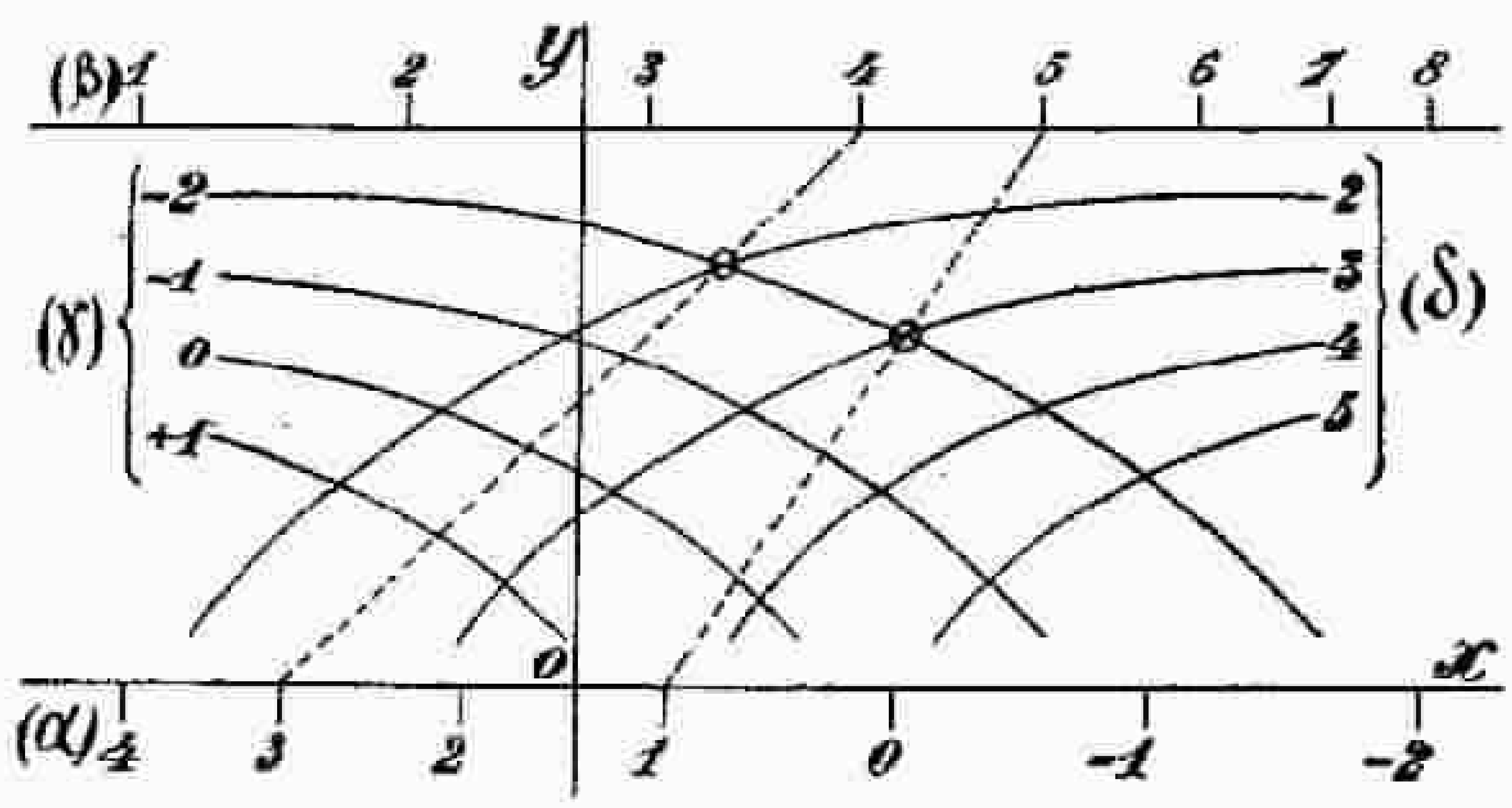


Fig. 1.

sono valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, rispettivamente, che soddisfino alla (1), i punti di quota α' e β' dovranno (per quanto si è detto or ora) essere allineati con una delle intersezioni della curva di quota γ' colla curva di quota δ'. Deriva da tutto ciò che, dati tre qualunque di questi quattro valori, p. es. α', β' e γ', per avere il quarto basta congiungere (preferibilmente con un filo) il punto di quota α' della scala (α), col punto di quota β' della scala (β), perchè per ciascuna delle intersezioni della congiungente con quella delle curve (γ) che è quotata γ' passerà una delle curve δ, e ciascuna delle quote corrispondenti sarà un valore di δ che assieme ad α', β', γ' soddisferà alla (1). E si vede subito come si dovrebbe procedere se l'incognita, invece di essere δ, fosse una delle altre tre variabili. Così dalla fig. 1, per $\alpha' = +1$, $\beta' = +5$, $\gamma' = -2$ (supposto che delle curve (γ) e (δ) non si considerino che gli archi tracciati) si ha $\delta' = +3$; per $\alpha' = +3$, $\gamma = -2$, $\delta' = +2$ si ha $\beta' = +4$.

Osservazione I. Dati α', β' e γ' (o α', β' e δ'), a ciascuna delle intersezioni della curva γ' colla retta che congiunge i punti α' e β' può corrispondere un valore della incognita δ (o γ); dati α', γ' e δ' (o β', γ' e δ'), a ciascuna delle intersezioni della curva γ' colla curva δ' può corrispondere un valore di ψ (β) (o di φ (α)), e ad ognuno di questi valori possono poi corrispondere più valori dell'incognita β (od α). E tutte le soluzioni, che così si trovano, sono tutte e sole le soluzioni reali che si avrebbero dalla (1).

OSSERVAZIONE II. Le curve (6) e (7) si possono costruire per punti mediante la (4) e la (5); così si dovrà necessariamente procedere quando la eliminazione di δ o di γ non sia possibile; ma, in generale, sarà utile tenere questa via anche quando tale impossibilità non si presenti.

§ 3. Stabiliti per ciascuna delle due variabili α e β un limite superiore e un limite inferiore (dipendentemente dalla natura del problema che si considera), gli abbachi costruiti col metodo ora esposto vengono ad avere, generalmente, la forma di un trapezio; vogliamo far vedere come, determinando anche, opportunamente, i moduli k_1 e k_2, si possano trasformare in modo da avere la forma di un dato rettangolo, e ciò per facilitarne l'uso e migliorarne la disposizione.

Affinchè l'allineamento, sul quale è basato il metodo, sia mantenuto, bisogna che l'ordine delle linee non si alteri: ricorreremo per ciò a una trasformazione proiettiva (*), ma daremo il modo di eseguire tale trasformazione analiticamente, perchè, eseguendola geometricamente, si perde in esattezza e si va spesso incontro all'inconveniente di dover considerare dei punti posti fuori dei limiti del disegno. Le formule a ciò occorrenti si deducono facilmente dalle note formule generali di Waring (**), noi però (per il caso che ci interessa) le abbiamo potute ricavare direttamente colle semplicissime considerazioni che seguono.

Supponiamo stabiliti gli accennati limiti di α e di β, e indichiamo con P_1 e Q_1 i minimi, e con P_2 e Q_2 i massimi valori che, corrispondentemente, pigliano $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$. Osserviamo prima di tutto che la (1) può scriversi

$$\{\varphi(\alpha) - P_1\} f_1(\gamma, \delta) + \{\psi(\beta) - Q_1\} f_2(\gamma, \delta) + \\ + P_1 f_1(\gamma, \delta) + Q_1 f_2(\gamma, \delta) + f_3(\gamma, \delta) = 0,$$

e che quindi, invece delle (2), (3) e (4), si può porre

$$(8) \qquad x_1 = k_1 \{\varphi(\alpha) - P_1\} \qquad (9) \qquad x_2 = k_2 \{\psi(\beta) - Q_1\}$$

$$(10) \qquad x = -\frac{k_1 k_2 \{P_1 f_1(\gamma, \delta) + Q_1 f_2(\gamma, \delta) + f_3(\gamma, \delta)\}}{k_2 f_1(\gamma, \delta) + k_1 f_2(\gamma, \delta)}$$

lasciando inalterata la (5); il nuovo abbaco differirà allora dal precedente in ciò, che i segmenti contenenti le parti utili delle scale (α) e (β), invece di cominciare dai punti di ascissa $k_1 P_1$ e $k_2 Q_1$ rispettivamente, cominceranno tutt'e due dal punto di ascissa zero.

Poi possiamo determinare k_1 e k_2 in modo che le stesse due scale occupino un segmento eguale alla unità: basterà che sia

$$k_1 (P_2 - P_1) = 1 \qquad k_2 (Q_2 - Q_1) = 1,$$

da cui

(*) V. *Tr. de Nomographie*, pag. 135.
(**) V. p. es: CHASLES, *Aperçu historique* — Paris 1875, pag. 18.

$$(11) \qquad k_1 = \frac{1}{P_2 - P_1} \qquad k_2 = \frac{1}{Q_2 - Q_1};$$

e il nuovo abbaco avrà allora la forma di un quadrato, avente per lato l'unità.

Ed ora, se l ed h sono le dimensioni del rettangolo, nel quale si vuole racchiuso l'abbaco trasformato, e la prima è quella dei lati che devono essere occupati dalle scale (α) e (β), basterà. dopo aver sostituiti nelle (8), (9), (10) e (5) a k_1 e a k_2 i valori ora indicati, moltiplicare i secondi membri delle prime tre per l e il secondo membro della quarta per h, si avrà così

$$(12) \qquad x_1 = l\,\frac{\varphi(\alpha) - P_1}{P_2 - P_1}, \qquad (13) \qquad x_2 = l\,\frac{\psi(\beta) - Q_1}{Q_2 - Q_1},$$

$$(14) \qquad x = -\,l\,\frac{P_1 f_1(\gamma,\delta) + Q_1 f_2(\gamma,\delta) + f_3(\gamma,\delta)}{(P_2 - P_1) f_1(\gamma,\delta) + (Q_2 - Q_1) f_2(\gamma,\delta)},$$

$$(15) \qquad y = +\,h\,\frac{(Q_2 - Q_1) f_2(\gamma,\delta)}{(P_2 - P_1) f_1(\gamma,\delta) + (Q_2 - Q_1) f_2(\gamma,\delta)}.$$

E queste definiscono completamente un abbaco della (1), il quale ha la forma del rettangolo dato ed è una trasformazione projettiva di quello definito dalle (2), (3), (4) e (5).

Osservazione. Si vede facilmente come, con il medesimo procedimento, si potrebbe trasformare l'abbaco stesso in modo che avesse la forma di un trapezio qualunque dato.

§ 4. Applicheremo ora quanto precede all'equazione

$$(16) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A,$$

la quale rientra nel tipo (1) allorchè si ponga

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = a, \quad \beta = A, \quad \gamma = b, \quad \delta = c, \quad \varphi(\alpha) = a^2, \quad \psi(\beta) = \cos A, \\ f_1(\gamma,\delta) = 1, \quad f_2(\gamma,\delta) = 2\,b\,c, \quad f_3(\gamma,\delta) = -(b^2 + c^2), \end{array} \right.$$

e serve a risolvere un triangolo piano, quando se ne conoscano i tre lati o due lati e un angolo; perchè: noti a, b e c, dà A, noti b, c ed A, dà a; noti a, b ed A, dà c; e in tutti e tre i casi poi basta fare due permutazioni circolari nelle lettere della (16), per poter ricavare gli altri due angoli B e C.

Dalla (17) e dalle (2), (3), (4) e (5) si ha subito

$$(18) \qquad x_1 = k_1\,a^2, \qquad (19) \qquad x_2 = k_2 \cos A,$$

$$(20) \quad x = +\,\frac{k_1 k_2 (b^2 + c^2)}{k_1 k_2 + 2\,b\,c}, \qquad (21) \qquad y = +\,\frac{k_1\,2\,b\,c}{k_1 k_2 + 2\,b\,c},$$

dalle quali ultime, eliminando c, si ricava

$$(22) \; y^2 \{k_2^2 + k_1^2\,4\,b^4\} + k_1\,4\,b^2\,x\,y - k_1\,4\,b^2\,x - k_1^2\,8\,b^4\,y + k_1^2\,4\,b^4 = 0,$$

ed eliminando b si ha questa stessa equazione, quando vi si sostituisca c a b, perchè la (20) e la (21) sono simmetriche rispetto a b e c.

Tanto le linee di quota b quanto quelle di quota c costituiscono dunque uno stesso sistema di curve avente per equazione la (22), e queste curve sono, evidentemente, tante iperbole, aventi per centro il punto

$$x = -\frac{k_2^2}{2\, k_1\, b^2}\,, \quad y = 1 \tag{23}$$

e per asintoti le rette

$$k_1\, 4\, b^2\, x + \{k_2^2 + k_1^2\, 4\, b^4\}\{y - 1\} + 2\, k_2^2 = 0; \tag{24}$$ $$y - 1 = 0; \tag{25}$$

per cui, qualunque sia b, il centro è sempre sulla retta (25), che contiene la scala (20), e che è sempre uno degli asintoti.

§ **5.** Per la costruzione di queste iperbole osserviamo che, posto $y = 0$, dalla (22) si ricava

$$x = k_1\, b^2, \tag{26}$$

da cui, per la (18), deriva che l'iperbola di parametro b passa per il punto che nella scala (a) ha per quota b; di ciascuna iperbola noi conosciamo dunque gli asintoti. (24) e (25), e un punto, e quindi possiamo facilmente costruirla con un metodo notissimo.

Osserviamo inoltre che, dovendo, per la natura del problema, considerare b e c sempre positivi, i soli archi di iperbola che occorrerà di tracciare saranno quelli compresi nella semistriscia posta nel quadrante nel quale ambedue le coordinate sono positive, e limitata dalle due rette sulle quali si trovano le scale (a) ed (A): ciò risulta immediatamente dalla (20) e dalla (21).

Osserviamo pure che l'inviluppo delle (22), come facilmente si verifica, è un luogo del quarto ordine, il quale si scinde in una retta doppia (l'asintoto comune) e nelle due rette

$$k_2\, y - x = 0\,, \tag{27}$$ $$k_2\, y + x = 0, \tag{28}$$

quindi tutti gli archi tracciati sono tangenti al segmento della retta (27) compreso fra i punti $(0\,;0)$, e $(k_2\,;1)$; e la semistriscia da essi occupata è limitata (oltre che dalle due rette accennate) dal segmento stesso.

Osserviamo finalmente che si presenta indeterminazione solo nel caso in cui sia dato, o debba risultare, $b = c$, chè allora le due iperbole coincidono; ma questa indeterminazione è solo apparente, perchè il punto limite d'intersezione di due iperbole, le cui quote tendono ad essere eguali, è il punto nel quale l'iperbole, avente per quota la quota comune, tocca l'inviluppo.

Veggasi la fig. 2., per la quale si è posto $k_1 = 1{,}1$, $k_2 = 0{,}8$, e si è preso per unità 3 cm.; in essa la scala (A) è tracciata tutta, da 0° a 180°, la scala (a) va da 0 a 1,2 soltanto, e delle iperbole si sono tracciate solo le due di quota 0,5 e 1,0. Da questa figura, dati $b = 0{,}5$, $c = 1{,}0$ ed $A = 100°$ si ha subito $a = 1{,}2$ circa; dati $b = c = 0{,}5$ ed $A = 130°$ si ha $a = 0{,}9$ circa.

§ **6.** L'abbaco occupa un trapezio avente per vertici i punti

$$(1\,; -k_2)\,, \quad (1\,; +k_2)\,, \quad (0\,;0)\,, \quad (0\,; k_1\, a_2^2)\,,$$

essendo a_2 il massimo valore di a che si vuol considerare: proponiamoci di trasformarlo in modo che esso occupi un rettangolo di dimensioni l ed h (§ 3). Avremo in questo caso

$$P_1 = 0, \quad P_2 = a_2^2, \quad Q_1 = -1, \quad Q_2 = +1,$$

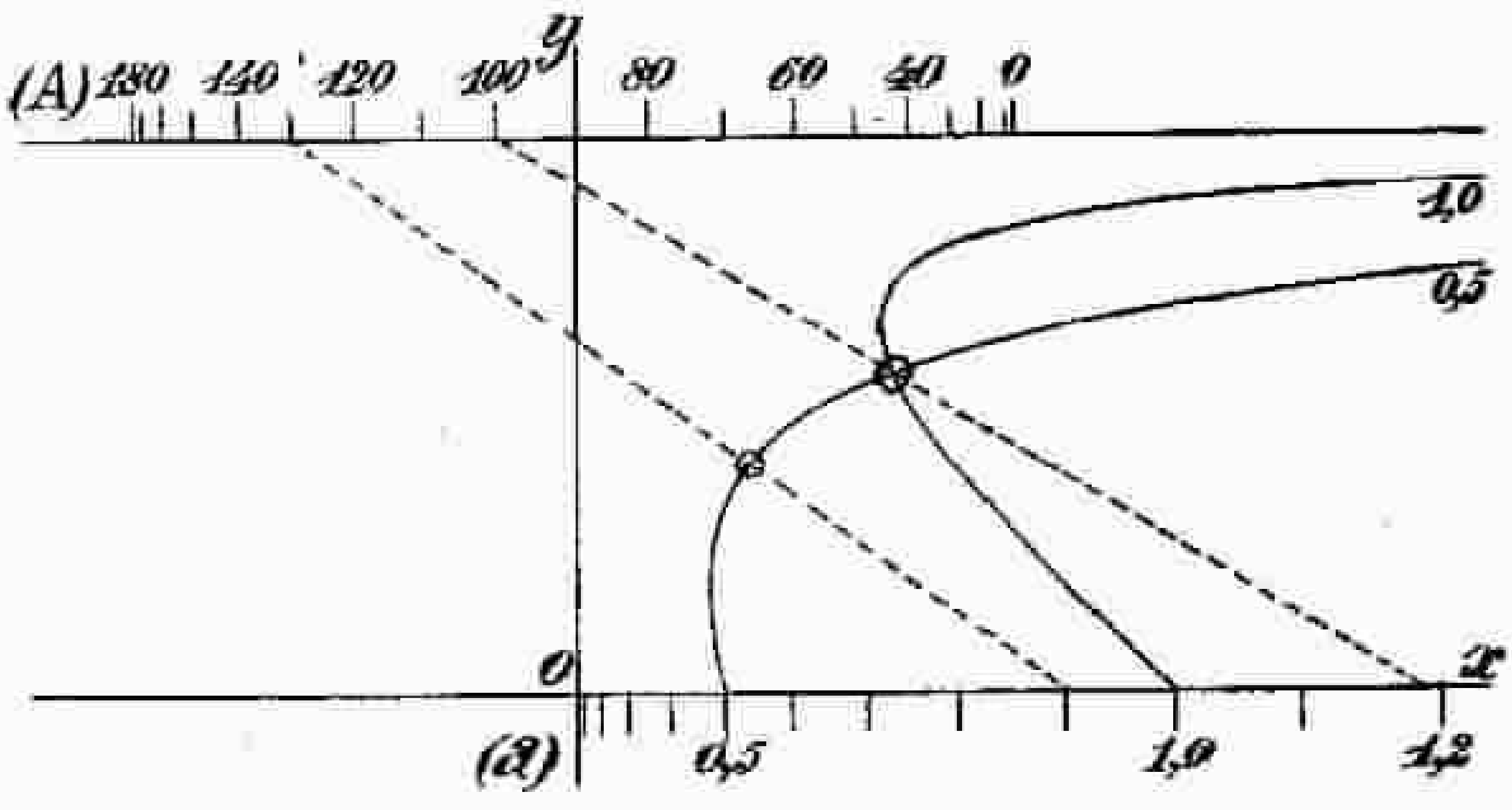


Fig. 2.

quindi dalle (17) e dalle (12), (13), (14) e (15) si avrà senz'altro

$$(29) \qquad x_1 = l \frac{a^2}{a_2^2} \qquad (30) \qquad x = l \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$(31) \qquad x = l \frac{(b+c)^2}{a_2^2 + 4bc} \qquad (32) \qquad y = h \frac{4bc}{a_2^2 + 4bc}.$$

Eliminando poi c fra le ultime due, si avrà

$$(33) \quad y^2 l^2 (4b^2 - a_2^2)^2 + x y l h \, 16 b^2 a_2^2 - y l^2 h \, 8 b^2 (4b^2 - a_2^2) - \\ - x l h^2 \, 16 b^2 a_2^2 + l^2 h^2 \, 16 b^4 = 0$$

per equazione del sistema (22) trasformato, e le curve di questo sistema saranno ancora tante iperbole aventi per centro il punto

$$(34) \qquad x = l \frac{4b^2 - a_2^2}{8b^2}, \quad y = h$$

e per asintoti le rette

$$(35) \quad x h \, 16 b^2 a_2^2 + (y - h) l (4b^2 - a_2^2)^2 - l h \, 2 a_2^2 (4b^2 - a_2^2) = 0,$$

$$(36) \qquad y - h = 0$$

E si potranno qui ripetere tutte le considerazioni fatte al § 5 e trovare così il modo di costruire facilmente gli archi utili delle (33).

§ **7.** Ma gli accennati archi di iperbola si possono costruire per punti in un altro modo molto più semplice.

Siamo a_r ed a_s le quote di due punti qualunque della scala (a), e supponiamo $a_r < a_s$; si congiungano questi due punti rispettivamente coi punti della scala (A) che hanno per quote 0° e 180°: il punto d'intersezione delle due congiungenti è il punto che ha per quote

$$(37) \qquad b = \frac{a_s + a_r}{2} \qquad\qquad c = \frac{a_s - a_r}{2}.$$

Infatti, avendo congiunto il punto a_s col punto 180°, e il punto a_r col punto 0°, le quote del punto d'inserzione devono soddisfare alle due equazioni

(38) $\quad a_s^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c \qquad a_r^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,,$

e da queste, intendendo di indicare con b il maggiore degli altri due lati, derivano immediatamente le (37).

Deriva di quì che per costruire gli archi utili delle iperbole (33) basta congiungere i punti 0° e 180° della scala (A) coi successivi punti della scala (a), segnare in ciascuno dei punti di intersezione le due quote date dalle (37) e poi tracciare gli archi di curva che passano per i punti che hanno una delle due quote costante, giacchè questa quota costante sarà evidentemente la quota dell'iperbola cui quell'arco appartiene.

La fig. 3 è uno abbozzo dell'abbaco che si può così costruire: in essa, fissata per unità il centimetro, si è preso $h = 10$ ed $l = 16$ e si è supposto $a_2 = 10$; degli archi utili di iperbole poi si sono tracciati completamente solo quelli la cui quota non è superiore a 10, degli altri si è tracciata solo quella porzione che è compresa nell'interno dell'arco di quota 10; ed è facile vedere che le quote di questi ultimi non possono superare 20 (perchè per $A = 0^o$, $a = 10$, $c = 10$ si ha $b = 20$). Se quindi il lato b fosse dato, o risultasse, maggiore di 20, e uno dei lati a e c fosse dato, o risultasse, maggiore di 10, bisognerebbe dividere i lati dati per una conveniente potenza di 10 e poi moltiplicare il lato ricavato per la stessa potenza. Analogamente, se ambedue i lati dati fossero minori dell'unità.

Esempi. (Veggansi nella fig. le linee punteggiate). Dati $a = 9$, $b = 7$, $c = 3$, si ha $A = 123°$; dati $A = 70°$, $b = c = 7$, si ha $a = 8$; dati $a = 55$, $b = 7$, $A = 100°$ non si ha nessuna soluzione, perchè la congiungente del punto di quota a col punto di quota A non taglia l'arco utile dell'iperbola di quota 7.

Osservazione. Supponendo $A = 90°$ l'abbaco risolve un triangolo rettangolo dati i due cateti, o l'ipotenusa e un cateto; quindi resta solo escluso il caso in cui sia dato un lato e un angolo.

§ 8. L'abbaco precedente non risolve immediatamente un un caso solo: quello in cui sono dati due angoli e un lato, e nel quale occorre risolvere un'equazione della forma

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}. \tag{30}$$

Però, ricorrendo coll'ordinario regolo logaritmico si può determinare prima il rapporto a: sen A, che è il *modulo* del triangolo e che indicheremo con m, e poscia b mediante m e B.

Si potrebbe anche costruire un abbaco *a rotazione* o *a doppio allineamento* (*), analogo a quello che già costruimmo per una questione di *Geometria pratica* (**), e questo abbaco conterrebbe tre scale rettilinee soltanto: una per a e b, una per α e β e una per m.

(*) V. *Tr. de Nomographie*, pag. 213.
(**) « Application de la Nomographie au jaugeage des tonneaux » — Le Génie Civil. 20 mai 99.

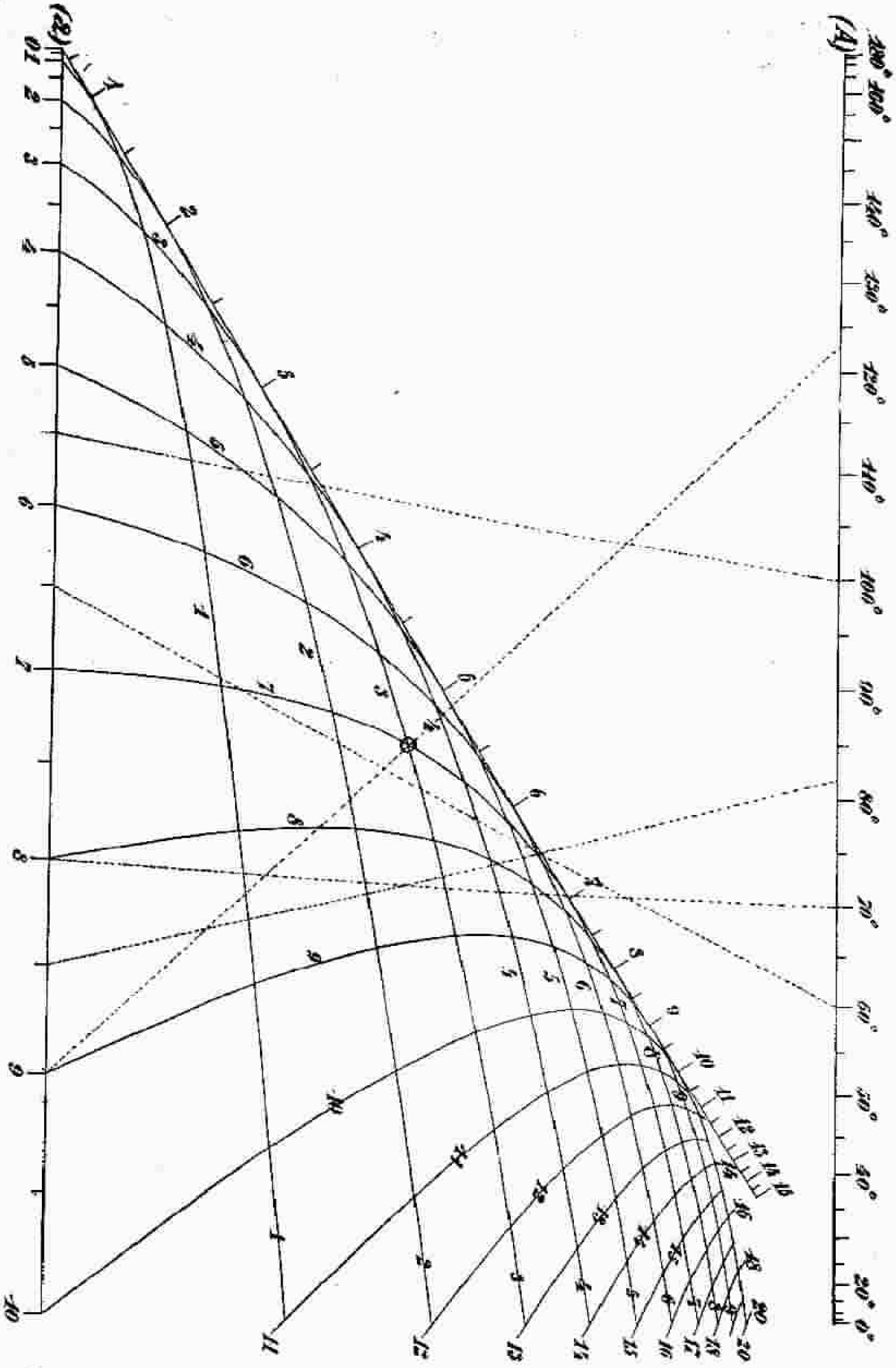


Fig. 3.

Ma l'abbaco che abbiamo già costruito può servire, quasi immediatamente, anche in questo caso. Si tracci la diagonale che fa parte dell' inviluppo del nostro sistema d' imperbole, e si consideri su di essa la scala determinata dai punti di contatto dei varî archi, colle relative quote: se si congiunge il punto di quota a col punto di quota A, è chiaro che la congiungente taglierà la nuova scala in un punto di quota

$$(40) \qquad m = \frac{a}{2} : \operatorname{sen} \frac{A}{2},$$

perchè a questa si riduce la (16) facendo $b = c = m$. E allora, per risolvere la (39), basta congiungere il punto a della scala (a) col punto 2 A della scala (A): si determinerà così sulla diagonale il punto di quota $\frac{m}{2}$; e poi congiungere questo punto col punto 2 B della scala (A), e sulla scala (a) si determinerà b.

Esempio. Dati $a = 6{,}5$, $A = 30^\circ$, $B = 41^\circ$ dall' abbaco si ha $b = 8{,}5$.

Osservazione I. Dal procedimento ora indicato risulta che della nuova scala m basterebbe tracciare solo il sopporto, perchè non occorre conoscere la quota $\frac{m}{2}$ del punto d' intersezione. Questa quota però è utile nel caso particolare che il triangolo sia rettangolo (V. Oss. al § prec.) e ne sia noto un lato e un angolo: così per $b = 8{,}5$ e $B = 41^\circ$ si ha per ipotenusa $m = 2 \times 6{,}5 = 13$.

Osservazione II. Aggiungendo tanto alla scala (A) che alla scala (m) un' altra graduazione che fosse il doppio di quella segnata, l' abbaco risolverebbe *immediatamente* anche il caso considerato: la scala (a) e le due nuove scale (A) ed (m) costituirebbero allora un abbaco a rotazione del tipo suaccennato.

§ **9.** Collo stesso procedimento si può costruire un abbaco dell' equazione

$$(41) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A,$$

la quale serve a risolvere un triangolo sferico in tutt' e sei i casi, perchè tre di questi corrispondono ai tre considerati in principio del § 4, e gli altri tre si riducono ai precedenti mediante la considerazione del triangolo polare.

Prendendo $k_1 = k_2 = g$, basterà porre (§ 2)

$$(42) \qquad x_1 = +g \cos a, \qquad (43) \qquad x_2 = -g \cos A$$

$$(44) \qquad x = \frac{g \cos b \cos c}{1 + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \qquad (45) \qquad y = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{1 + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}:$$

dove i moduli k_1, k_2 si sono assunti eguali, perchè, dovendo considerare tanto a che A compreso fra 0° e 180°, le due scale (a) ed (A) risulteranno identiche (meno in senso); e dove si è posta la (43), perchè, dovendo considerare anche b e c compresi fra 0° e 180°, la (45) ci darà sempre per y valori compresi fra 0 e 1, mentre che, se si fosse posto $x_2 = +g \cos A$ (come sembrerebbe più naturale), per b e c tendenti a 90°, y tenderebbe a $-\infty$. Dalle ultime due, eliminando c, si ha

$$\frac{x^2}{\cos^2 b} + \frac{g^2 y}{\operatorname{sen}^2 b} = g^2 (1-y)^2 : \tag{46}$$

anche qui dunque (§ 4), e per la stessa ragione, le linee di quota b e le linee di quota c costituiscono uno stesso sistema di curve, avente per equazione la (46), e queste curve sono tante ellissi, aventi per centro il punto

$$x = 0\,, \quad y = -\tan^2 b\,; \tag{47}$$

per cui, qualunque sia b, il centro è sempre sull'asse cartesiano delle y, e questo stesso asse (come risulta dalla (46)) contiene sempre uno degli assi della ellisse.

§ 10. L'abbaco precedente è stato costruito dal prof. d'Ocagne (*), il quale ha dato anche un metodo semplice per tracciare le varie ellissi, basato sulle seguenti cansiderazioni.

Posto $y=0$, dalla (46) si ha

$$x = \pm g \cos b\,, \tag{48}$$

per cui l'ellisse di parametro b passa per i due punti che nella scala (a) hanno per quote b e $180^\circ - b$, e le tangenti in questi due punti, come si verifica facilmente, passano per il punto $(0;1)$; inoltre la stessa ellisse taglia la parte positiva dell'asse delle y nel punto

$$y = \frac{\operatorname{sen} b}{1 + \operatorname{sen} b}\,, \tag{49}$$

nel quale punto la tangente è parallela all'asse delle x. La costruzione di ciascuna delle ellisse (46) è dunque ricondotta al caso in cui se ne conoscano due punti, le tangenti in questi due punti, e la tangente parallela alla corda che congiunge i due punti stessi: caso nel quale la costruzione per punti si effettua facilmente con un metodo già indicato dallo stesso prof. d'Ocagne. (**)

Osserviamo che l'inviluppo delle (46) è (come quello delle (22)) un luogo del quarto ordine, il quale si scinde in quattro rette: due che hanno per equazione complessiva $x^2 = g^2$ e che sono i luoghi dei vertici della conica posti sull'asse parallelo all'asse cartesiano delle x; e due che congiungono i punti $(-g;1)$, $(+g;1)$ coi punti $(+g;0)$, $(-g;0)$ rispettivamente: di qui e dalla seconda delle (47) risulta che gli archi utili delle (46) sono quelli racchiusi nel triangolo formato da queste ultime due rette e dall'asse delle x.

Osserviamo pure che, nel caso in cui sia $b=c$, si presenta indeterminazione, ma che questa sparisce subito con una considerazione analoga a quella fatta nel § 5.

Osserviamo finalmente che, come risulta dalla (46), per due valori supplementari di b si ha una stessa ellisse e che due ellissi di quota diversa si tagliano in due punti simmetrici rispetto all'asse delle y; si presenta quindi ambiguità se, dati A, a e b (o A, a e c), si vuole c (o b), e se, dati A, b e c (o a, b e c) si vuole a (od A). Ma anche queste ambiguità spariscono, se si os-

(*) V. *Bulletin astronomique*. — Tom. XI. Gennaio 94; oppure: *Tr. de Nomographie*, pag. 331.
(**) V. *Nouvelles Annales de Math.* — 3. Serie, Tom. XII, pag. 350.

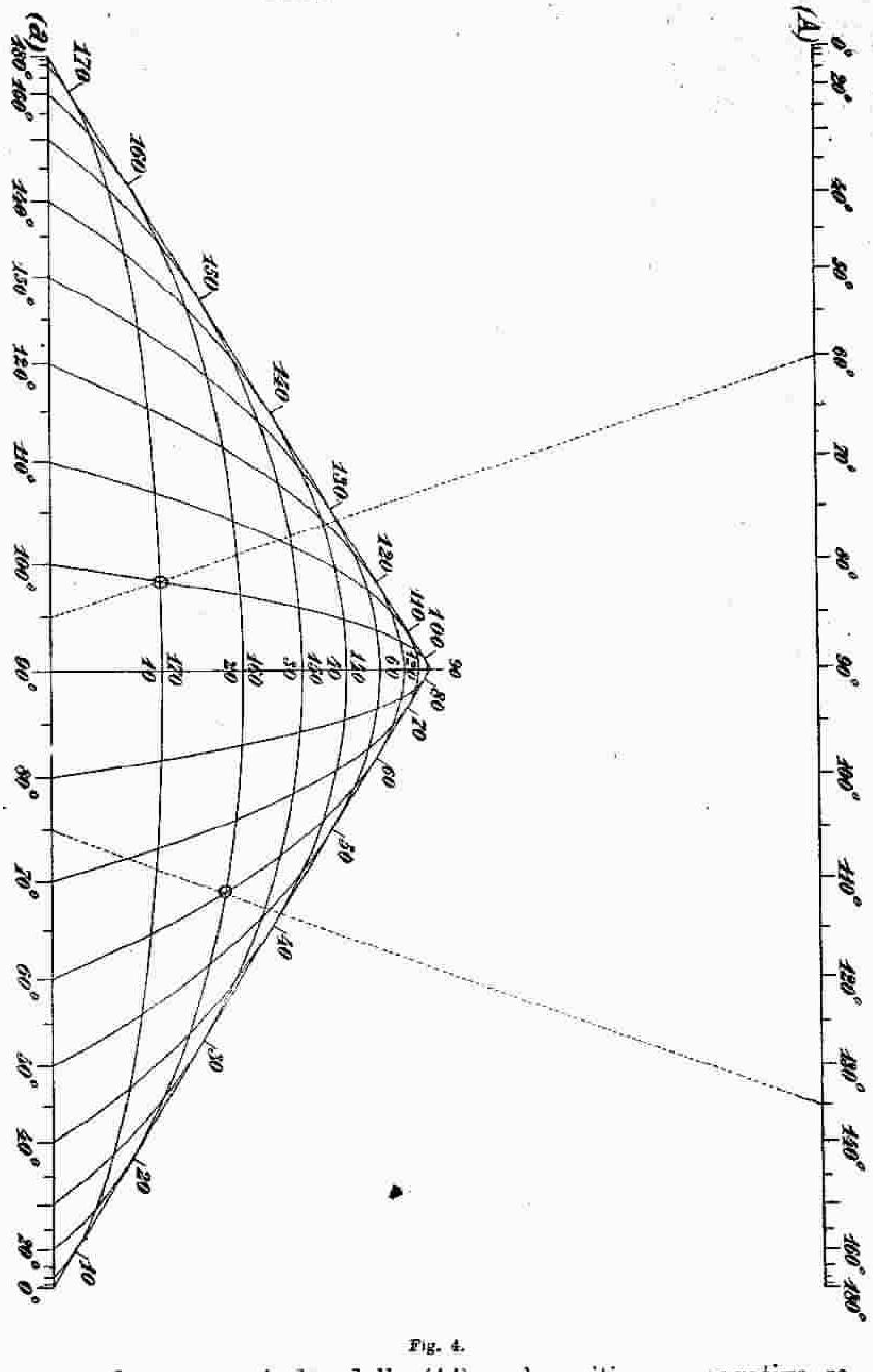


Fig. 4.

serva che, come risulta dalla (44), x è positivo o negativo secondochè b e c sono della stessa specie o di specie contraria.

§ **11.** L'abbaco così costruito ha per vertici i punti $(-g\,;1)$,

$(+g;1), (-g;0), (+g;0)$: esso quindi ha già la forma di un rettangolo, e, perchè questo abbia dimensioni l, h date, basta evidentemente porre $g = \frac{l}{2}$ nelle (42), (43) e (44) e moltiplicare per h il secondo membro della (45).

Osserviamo solo che gli archi utili della (46) si possono costruire con un procedimento analogo a quello del § 7 e che è forse più semplice di quello suaccennato. Infatti, nelle stesse ipotesi del § 7, invece delle (38) avremo ora

$$\cos a_r = \cos(b - c), \quad \cos a_s = \cos(b + c)$$

e quindi anche in questo caso si avranno le (37) e altre due che daranno per c e b valori rispettivamente supplementari.

La fig. 4 è un abbozzo dell'abbaco che si può così costruire, e per essa si sono prese le stesse dimensioni della fig. 3.

Esempi. Dati $a = 95^\circ, b = 10^\circ$ e $c = 100^\circ$, si ha $A = 60^\circ$; dati $A = 135^\circ, a = 75^\circ, b = 60^\circ$ si ha $c = 20^\circ$ soltanto.

§ **12.** Disegnando il primo dei due abbachi precedenti con dimensioni triple o, al più, quadruple di quelle della fig. 3, si possono leggere le misure dei lati con due cifre esatte (e gli angoli coll'approssimazione corrispondente); e questa ci pare un'approssimazione sufficiente per quasi tutte le quistioni della *Navigazione piana* e *costiera*, per molte questioni di *Topografia* e anche per qualche questione di *Balistica*. Del resto, anche quando l'approssimazione fornita dall'abbaco non sia sufficiente, esso può sempre dare una prima approssimazione utile in molti casi.

§ **13.** Siccome quasi tutte le questioni dell'*Astronomia* si riducono, in sostanza, alla risoluzione di un triangolo sferico, il secondo degli abbachi precedenti potrebbe avere un'applicazione larghissima; ma, per raggiungere l'approssimazione che dall'*Astronomia*, generalmente, si richiede, questo abbaco dovrebbe avere dimensioni tali da renderlo praticabilmente inservibile. Però, disegnando anche questo abbaco con dimensioni triple, o quadruple, di quella della fig. 4, si può sempre ottenere una prima approssimazione, utile in molti casi; e in qualche particolare problema, questa approssimazione può essere sufficiente: come, per esempio, nella ricerca della rotta per la navigazione per circolo massimo, ricerca nella quale l'approssimazione di un grado è sufficiente e che nelle carte dell'*Hilleret* (*) richiede una costruzione.

§ **14.** L'approssimazione potrebbe aumentarsi frazionando l'abbaco in diverse parti; in tale ipotesi però si deve notare che, se in un abbaco del tipo precedente si spezza una delle due scale $(\alpha), (\beta), (\S\, 2)$ in p e l'altra in q parti, l'abbaco stesso si spezza in $p\,q$ parti e viene quindi ad occupare $p\,q$ fogli.

E per molti problemi dell'*Astronomia nautica* crediamo che questo numero non dovrebbe essere molto grande, perchè i valori delle incognite di questi problemi servono spesso per eseguire

(*) V. « *Instruction sur les cartes pour la navigation par l'arc de grand cercle.* » — Paris Imprimeci nationale, 1878.

delle costruzioni sulle carte di navigazione e quindi ci pare che tutta l'approsimazione, che ordinariamente si raggiunge in quei valori col calcolo numerico, non sia, generalmente necessaria.

A questo proposito ricordiamo che, per due dei più importanti problemi accennati, il Prof. E. Ippolito recentemente propose di costruire addirittura il triangolo sferico sopra un globo col raggio di 16 a 25 cm. e convenientemente sistemato (**); forse l'approssimazione che così si raggiunge si potrebbe ottenere anche coll'abbaco in questione, frazionato in nove o in sedici parti al più.

§ 15. E fra i mezzi escogitati per risolvere immediatamente un triangolo sferico accenneremo anche a un istrumento notevolissimo inventato, più di un secolo fa, dall'Ing. *Richer* (***).

L'Accademia delle scienze di Parigi aveva aperto, per l'anno 1790, un concorso sulla seguente questione: « *Trouver pour la réduction de la distance apparente de deux astres en distance vraie un méthode sûre et rigoureuse, qui n'exige cependant dans la pratique que des calculs simples et à la portée du plus grand nombre de navigateurs.* » Ma « *parmi les piaces envoyeés au concours, il n'y en eut ancune qui remplît assez sûrement ni assez exantement l'objet de la question proposée* » e il concorso fu rimesso all'anno successsivo. E siccome « *la plupart des concurrents étoient des artistes qui avoient fait ce qui dépendoit d'eux pour inventer des instruments capables d'opérer la réduction demandée, . . . le citoyen Lagrange* » temendo « *qu'ils ne fissent de nouveaux efforts aussi infructueux que le premiers . . . se proposa la recherche d'un principe qui pût servir de base à la construction de ces sortes d'instruments* ». Per ciò l'illustre matematico mostrò che l'equazione (41) può trasformarsi nell'altra

$$4 \operatorname{sen} \frac{2a}{2} = \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} + \operatorname{sem} \frac{b-c}{2} \right\}^2 + \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} - \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \right\}^2 -$$
$$- 2 \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} + \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \right\} \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} - \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \right\} \cos A,$$

e che quindi colla costruzione di un tringolo piano si potevano risolvere quattro dei casi che si presentano nella risoluzione dei triangoli sferici. E « *il paroît que le citoyen Richer en fut le plus frappé, car ce fut l'instrument qui il exécuta sur ce principe, qui remporta le prix en 1791.* »

Non possiamo qui riportare la descrizione di quell'istrumento, diremo solo che con leggiere aggiunte esso serve anche per i due casi esclusi (v. pag. 23 del fasc. cit.), che l'approssimazione, che si può ottenere. può arrivare fino a cinque secondi (pag. 9), che il Borda immaginò un mezzo di rendere l'istrumento « *autant exact dans ses usages que si les dimensions de cet instrument étoient plus que décuplées* (pag. 29), e che il Callet (pag. 10) dichiara

(**) V. « *Uso del globo celeste nella determinazione speditiva delle coordinate geografiche della nave.* » — Rassegna Navale, Anno II, N. 4-5.

(***) V. « *Supplément a la Trigonométrie sphérique et a la Navigation de Bezout par François Callet* » — Imprimerie de Didot, an VI (1798).

che lo ha interessato tanto come se egli stesso ne fosse stato l'inventore *(m'intéressa autant que si j'en eusse été l'inventeur)*. In tutto il fascicolo però non si dice quali ne fossero le dimensioni, e noi supponiamo che fossero troppo grandi e che per questo l'istrumento stesso sia stato dimenticato; a noi pare che ora varrebbe forse la pena di richiamarlo dall'obblio, perchè, coi perfezionamenti introdotti nell'arte della costruzione degli istrumenti geometrici, si potrebbe forse renderlo praticamente utile.

§ 16. Termineremo questa nota con alcune considerazioni d'ordine generale, relative agli abbachi.

Il valore di una quantità incognita si può generalmente ottenere sia col calcolo numerico, sia col calcolo grafico: il primo è quello più comunemente usato, il secondo ha preso il suo sviluppo solo in questi ultimi anni, ma (specialmente colla *Statica grafica)* è già largamente applicato in tutta l'ingegneria. Quando però, in un certo ordine di applicazioni, si presenti la necessità di risolvere frequentemente uno stesso problema, il calcolo numerico (dovendo essere rifatto, in tutto o in parte, per ogni cambiamento dei dati) richiede un tempo, spesso non breve, in una fatica arida e priva di qualunque attrattiva; e altrettando accade per il calcolo grafico, nel quale anzi si presenta un altro inconveniente: quello di richiedere che l'operatore abbia una speciale perizia nell'arte del disegno e si trovi in condizioni materiali che gli permettano di disegnare.

Sorge dunque naturale il bisogno di evitare l'un calcolo e l'altro; e, come per il calcolo numerico si ricorre a delle tavole numeriche, che comprendano i risultati CALCOLATI una volta per sempre (per i valori dei dati racchiusi entro un certo campo di variabilità), per il calcolo grafico si ricorre a degli abbachi che forniscano i risultati una volta per sempre COSTRUITI.

§ 17. Contro l'uso degli abbachi si obbietta principalmente che con essi si raggiunge, in generale, un'approssimazione ben piccola (due o tre cifre), mentre che col calcolo numerico l'approssimazione può generalmente esser spinta a quel grado che si vuole.

Crediamo anche noi che gli abbachi non possano, *in generale*, servire per calcoli astronomici (come abbiamo già accennato), per calcoli geodetici e per calcoli finanziarî; ma esiste un larghissimo campo nelle applicazioni delle matematiche nel quale gli abbachi possono condurre a un'approssimazione sufficiente (*), mentre la maggior approssimazione che si potrebbe raggiungere col calcolo è solo illusoria. (**)

(*) Per avere un'idea delle numerosissime e utili applicazioni che si son fatte fino a tutto il 1897 col metodo dei punti allineati soltanto, veggasi la « *Revue générale des sciences* » del 15 Febbraio 1898.

(**) Così, per esempio, perchè, in *Navigazione*, calcolare la rotta con una approssimazione inferiore a un grado, mentre la nave non si può governare a meno di un grado di approssimazione? perchè, in *Geometria pratica*, calcolare la capacità di una botte ordinaria fino alle frazioni di litro, mentre questi recipienti non hanno una forma geometrica definita (e quindi la formula calcolata non può essere che empirica), e di più sono affetti nella loro costruzione da irregolarità inevitabili e sensibilissime? (basti il dire che le formule più comunemente usate conducono a risultati che possono differire dalla capacità direttamente misurata per più di tre centesimi della capacità stessa).

E neppure nei calcoli astronomici e geodetici crediamo che il loro uso debba essere *assolutamente* bandito, perchè, quando l'elemento incognito abbia un ristretto campo di variabilità (come generalmente accade per gli gli elementi di correzione), si può spesso raggiungere un'approssimazione sufficiente anche con un abbaco: noi stessi ne demmo già un esempio nell' « Abbaco per il calcolo della latitudine mediante un'altezza circummeridiana » (*) e altri se ne potrebbero dare per la formula che serve alla correzione dei cronometri col metodo delle altezze corrispondenti, per la formula che dà la latitudine con la stella polare, ...

Del resto, se l'uso degli abbachi dovesse essere bandito dalle applicazioni perchè il disegno non dà sufficiente approssimazione, per la stessa ragione si dovrebbe bandire la *Statica grafica*, e invece le applicazioni di questa recentissima scienza aumentano sempre più in numero e in importanza.

§ 18. Fra le obbiezioni di minore importanza accenneremo a quella dell'ingombro che possono portare i varî abbachi occorrenti in una determinata classe di applicazioni.

Ma a noi pare che neppure questa obbiezione, generalmente, regga. Così: gli abbachi per i calcoli topografici dovrebbero servire a tavolino (chè in campagna i campagna i calcoli non si fanno) e allora l'ingombro prodotto da pochi fogli non potrebbe essere sensibile; gli abbachi per il tiro delle artiglierie non potrebbero occupare che uno spazio insignificante fra tutto il materiale che accompagna ogni cannone; gli abbachi per i calcoli di navigazione potrebbero benissimo esser posti fra le numerose carte idrografiche, delle quali ogni nave è fornita, e anche in questo caso l'ingombro accennato sarebbe insignificante; ....

§ 19. Gli abbachi invece presentano sulle tavole numeriche numerosi e indiscutibili vantaggi.

Prima di tutto, se la funzione incognita è a due variabili indipendenti, nell'abbaco l'interpolazione si fa immediatamente a occhio, mentre nella corrispondente tavola numerica a doppia entrata occorre un calcolo numerico non molto breve.

Se la funzione è a tre variabili indipendenti, una tavola numerica a doppia entrata non basta più e ne occorrono invece tante quanti sono i valori che per una di quelle tre variabili si vogliono considerare; mentre invece i moderni metodi della *Nomografia*, permettono di costruire degli abbachi per funzioni a un numero qualunque di variabili indipendenti. (**) E ci sembra notevolissimo il fatto che con abbachi del tipo in questa nota indicato (§ 2), si possano ottenere tutte le radici reali di un'equazione numerica completa di 3°, di 4°, e anche di 5° grado (***); risultato, questo, importantissimo, perchè, se anche l'approssimazione non è sufficiente, si possono, con questi abbachi, risparmiare molti dei laboriosissimi tentativi indicati dall' *Algebra superiore*.

(*) V, *Rivista Maritt.* — Ottobre 1898.
(**) V. *Traité de Nomographie*, — pag. 312, 322.
(***) » » » — dalla pag. 333 alla pag. 341.

[illegible] che l'approssimazione sia [illegible] calcolo numerico non è evitato, mentre [illegible] immediatamente il risultato che si avrebbe colla formula [illegible]. Un esempio si ha nel calcolo dell'angolo di presa [illegible] ad angolo fisso. (*)

[illegible] che un problema, che sarebbe utile e interessante risolvere in generale, si risolva solo in determinati casi [illegible] per evitare un calcolo laborioso; l'abbaco allora, dando [illegible] in qualunque caso e immediatamente, permette di [illegible] dei vantaggi che la soluzione stessa può portare. [illegible] si ha nel calcolo della distanza di un punto elevato sulla [illegible] al di là dell'orizzonte (**), problema utilissimo [illegible] costiera, e che ordinariamente per la ragione [illegible] si risolve solo nel caso in cui l'altezza apparente sia nulla.

[illegible] moderni permettono anche la sovrapposizione di [illegible] abbachi, ognuno dei quali dia il valore di una funzione a [illegible] variabili indipendenti; e se ne può vedere un esempio [illegible] nell'*Abbaco del tiro navale* (***), in una pagina del quale [illegible] potuto sovrapporre *quattro* di questi abbachi, mentre [illegible] sovrapposizione dei soliti abbachi cartesiani corrispondenti [illegible] prodotto un disegno assolutamente illeggibile.

[illegible] concluderemo osservando che anche la matematica pura [illegible] forse trarre qualche vantaggio dallo studio dei moderni [illegible] della *Nomografia*, perchè questi, rendendo possibile una [illegible] grafica di funzioni a più variabili, possono [illegible] sulla via di trovare nuove proprietà e di inventare nuovi metodi (****); non si deve dimenticare che il *Calcolo* [illegible] nacque dal problema delle quadrature e che il *Calcolo* [illegible] nacque dal problema delle tangenti.

Livorno, Febbraio 1900.

G. Pesci

(*) V. per esempio, *Parodi*, Rivista d'Artiglieria e Genio, 1889 Vol. II. e *Ronca* « Note sul tiro » Rivista Marittima, — Agosto-Ottobre 1898, § 5).

(**) L'abbaco per l'indicato problema si può vedere nel § 6 delle « Note sul tiro » ora citate [illegible] l'abbaco da noi pubblicato nel fascicolo di Febb. 1899 della Riv. Maritt.

(***) Per l'uso e la descrizione di questa parte dell'abbaco del tiro, veggasi la nota del [illegible] ora citata (§ 7); per l'esposizione dei metodi seguiti nella sua costruzione [illegible] nostra nota: *Cenni di Nomografia*, (Rivista Marit. — Agosto, Novembre 1899 e Febbraio 1900).

(****) [illegible] altro esempio importantissimo si può vedere in una nota pubblicata recentissimamente dal prof. d'Ocagne (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* — 26 Febbraio 1900), nella quale [illegible] sovrapposizione di quattro abbachi, si ottiene un abbaco solo, che risolve immediatamente il problema delle occultazioni lunari.

[illegible] Un esempio molto semplice di tali vantaggi si ha nel § 33 dei *Cenni di Nomografia* ora citati, dove si sono potuti confrontare i risultati a cui conducono due diverse funzioni delle stesse due variabili indipendenti, sovrapponendo i corrispondenti abbachi.

SULLO SVILUPPO

in frazione continua della radice quadrata dei numeri razionali

Usando la formola di trasformazione

$$\sum_1^n v_n = \left(\frac{v_1}{1}, \frac{-v_2}{v_1+v_2}, \frac{-v_1 . v_3}{v_2+v_3}, \frac{-v_2 . v_4}{v_3+v_4}, \frac{-v_3 . v_5}{v_4+v_5}, \ldots\ldots\right),$$

si può sviluppare in frazione continua ogni espressione di cui si conosca uno sviluppo in serie. Lo sviluppo in frazione continua è anzi assai spesso più comodo: la ridotta r^{ma} è eguale alla somma dei primi r elementi della serie corrispondente.

Così, quando vale lo sviluppo in serie di Mac-Laurin e sono diversi da 0 i valori $f(0), f'(0), \ldots, f^{(r)}(0), \ldots$, abbiamo

$$f(x) = \left(\frac{f(0)}{1}, \frac{-x . f'(0)}{f(0)+x . f'(0)}, \frac{-x . f''(0) . f(0)}{2 . f'(0)+x . f''(0)}, \frac{-2x . f'''(0) . f'(0)}{3 . f''(0)+x . f'''(0)}, \ldots\ldots\right),$$

sicchè, ad es., per: $-1 < x < 1$, abbiamo:

$$(1+x)^a = \left(\frac{1}{1}, \frac{-a . x}{1+a . x}, \frac{-(a-1) . x}{2+(a-1) . x}, \frac{-2 . (a-2) . x}{3+(a-2) . x}, \frac{-3 . (a-3) . x}{4+(a-3) . x}, \ldots\ldots\right),$$

e in particolare:

$$\sqrt{1+x} = \left(\frac{1}{1}, \frac{-x}{2+x}, \frac{2 . x}{2 . 2-x}, \frac{2 . 2 . 3 . x}{3 . 2-3 . x}, \frac{3 . 2 . 5 . x}{4 . 2-5 . x}, \frac{4 . 2 . 7 . x}{5 . 2-7 . x}, \ldots\ldots\right).$$

Questo sviluppo però serve solo pei numeri positivi minori di 2 e credo non si sia ancora data una formola generale per lo sviluppo in frazione continua delle radici quadrate dei numeri non interi e maggiori di 2.

In questa breve nota mi propongo di dare un semplice e comodo sviluppo in frazione continua periodica della differenza: $\sqrt{\frac{m}{n}} - r$, indicando con $\frac{m}{n}$ un qualunque numero razionale maggiore di 1 e non quadrato perfetto, e con r la sua radice quadrata a meno di 1, ossia il numero intero tale che sia: $r^2 < \frac{m}{n} < (r+1)^2$.

Dall'eguaglianza $x = \sqrt{\frac{m}{n}} - r$ abbiamo

$$x = \frac{\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) . \left(\sqrt{\frac{m}{n}} + r\right)}{\sqrt{\frac{m}{n}} + r} = \frac{\frac{m}{n} - r^2}{(r+x)+r} = \frac{m - nr^2}{2nr + nx} = \frac{m - nr^2}{2nr + \frac{m - nr^2}{2r + x}}$$

e quindi

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{m}{n}} - r = \left(\frac{m - nr^2}{2nr}, \frac{m - nr^2}{2r}; \frac{m - nr^2}{2nr}, \ldots\ldots\right)$$

purchè però si dimostri che tale frazione è convergente.

Indicando con N_t e D_t rispettivamente il numeratore ed il denominatore della sua ridotta t^{ma}, abbiamo:

$$N_{2s} = 2r \cdot N_{2s-1} + (m - nr^2) \cdot N_{2s-2} \quad , \quad N_{2s+1} = 2nr \cdot N_{2s} + (m - nr^2) \cdot N_{2s-1} ,$$
$$D_{2s} = 2r \cdot D_{2s-1} + (m - nr^2) \cdot D_{2s-2} \quad , \quad D_{2s+1} = 2nr \cdot D_{2s} + (m - nr^2) \cdot D_{2s-1} .$$

Ricordando che $m > nr^2$, facilmente si verificano per $s = 1$ e, ammesse per s, si dimostrano per $s + 1$ le relazioni seguenti:

$$| N_{t+1} \cdot D_t - N_t \cdot D_{t+1} | = (m - nr^2)^{t+1}$$
$$D_{2s} > (4nr^2)^s \qquad , \qquad D_{2s+1} > 2nr \cdot (4nr^2)^s .$$

Ne scende immediatamente che

$$\left| \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} - \frac{N_t}{D_t} \right| < \frac{(m - nr^2)^{t+1}}{2nr \cdot (4nr^2)^t} .$$

Ma da: $r^2 < \frac{m}{n} < (r + 1)^2$ scende: $nr^2 < m < 5nr^2$, e quindi $0 < \frac{m - nr^2}{4nr^2} < 1$; la successione $\left| \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} - \frac{N_t}{D_t} \right|$, per t crescente, converge quindi a 0 assieme alla successione: $\left(\frac{m - nr^2}{4nr^2} \right)^t$; la frazione continua proposta è dunque convergente.

Essendo poi:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} - r = \frac{N_{2p} + \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) \cdot N_{2p-1}}{D_{2p} + \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) \cdot D_{2p-1}} ,$$

ne scende

$$0 < \frac{N_{2s+1}}{D_{2s+1}} - \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) < \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) - \frac{N_{2s}}{D_{2s}} ,$$
$$0 < \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) - \frac{N_{2s}}{D_{2s}} < \frac{N_{2s-1}}{D_{2s-1}} - \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) ,$$

donde infine

$$\left| \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r \right) - \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} - \frac{N_t}{D_t} \right| < r \cdot \left(\frac{m - nr}{4nr^2} \right)^{t+1} .$$

Così si conosce l'errore commesso arrestandosi ad una ridotta qualsiasi e facilmente si vede a qual ridotta conviene arrestarsi per raggiungere una data approssimazione. In pratica però, per avere, ad esempio, la $\sqrt{\frac{m}{n}}$ a meno di $\frac{1}{1000}$, basta procedere nel calcolo delle ridotte finchè se ne trovino due consecutive, che, espresse in frazioni decimali, abbiano in comune le tre prime cifre. Sommando ad r il valore approssimato comune a queste due ridotte si ha la $\sqrt{\frac{m}{n}}$ coll'approssimazione richiesta.

Dalla formola (1) abbiamo poi tosto la

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{r} \; ; \; \frac{m - nr^2}{2nr} \; , \; \frac{m - nr^2}{2r} \; ; \; \frac{m - nr^2}{2nr} \; , \; \ldots\ldots \right) ,$$

che ci dà la radice quadrata d'un qualunque numero razionale minore di 1 e non quadrato perfetto, sviluppata in funzione dei suoi due termini e della radice a meno di 1 del suo inverso.

Padova, 1900.

Paolo Cattaneo.

BARICENTRO DI UN TRONCO DI PRISMA TRIANGOLARE

(QUISTIONE 460)

Se a', b', c' sono le lunghezze degli spigoli laterali di un tronco di prisma triangolare, B'', A'', C'' i punti di mezzo di questi, il baricentro del tronco è il baricentro dei punti A'', B'', C'' affetti dai coefficienti

$$2a' + b' + c', \qquad a' + 2b' + c', \qquad a' + b' + 2c'.$$

Sia $ABC\,A'B'C'$ il tronco dato e prendiamo per assi dalle coordinate le rette CB, CA, CC'. Il piano $C'AB$ scompone il tronco in un tetraedro $C'CAB = P_1$ e in una piramide quadrangolare $C'ABB'A' = P_2$.

Il baricentro K_1 di P_1 è quello dei punti

$$C\,(0,\ 0,\ 0),\quad B\,(a,\ 0,\ 0),\quad A\,(0,\ b,\ 0),\quad C'\,(0,\ 0,\ c'),$$

affetti da coefficienti eguali, e perciò le sue coordinate sono

$$x_1 = \frac{a}{4},\ y_1 = \frac{b}{4},\ z_1 = \frac{c}{4}.$$

Il baricentro H_2 del trapezio $ABB'A'$ è sul segmento limitato dai punti

$$A''\left(0,\ b,\frac{a'}{2}\right),\ B''\left(a,\ 0,\frac{b'}{2}\right),$$

e lo divide in due parti tali che

$$\frac{A''H_2}{H_2B''} = \frac{2b' + a'}{2a' + b'},$$

perciò le sue coordinate sono

$$x_2' = \frac{a(2b' + a')}{3(a' + b)},\quad y_2' = \frac{b(2a' + b)}{3(a' + b)},\quad z_2' = \frac{a'^2 + a'b' + b'^2}{3(a + b')}.$$

Il baricentro K_2 di P_2 si trova sul segmento limitato dai punti $C'(0, 0, c')$ e H_2, e lo divide in due parti tali che sia

$$\frac{C'K_2}{K_2H_2} = \frac{3}{1}.$$

Le sue coordinate sono dunque

$$x_2 = \frac{3x'_2}{4},\qquad y_2 = \frac{3y'_2}{4},\qquad z_2 = \frac{3z'_2 + c'}{4},$$

ovvero

$$x_2 = \frac{a(2b' + a)}{4(a' + b')},\quad y_2 = \frac{b(2a' + b')}{4(a' + b')},\quad z_2 = \frac{a^2 + b^2 + a'b' + a'c' + b'c'}{4(a' + b')}.$$

È facile vedere che

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{c'}{a' + b'},$$

perciò il baricentro del tronco è il baricentro dei punti K_1, K_2, affetti dai coefficienti c', $a' + b'$. Le sue coordinate sono dunque

$$x = \frac{c'x_1 + (a' + b')x_2}{a' + b' + c'},\quad y = \frac{c'y_1 + (a' + b')y_2}{a' + b' + c'},\quad z = \frac{c'z_1 + (a' + b')z_2}{a' + b' + c'},$$

ovvero

$$x = a \cdot \frac{a' + 2b' + c'}{4(a' + b' + c')},$$
$$y = b \cdot \frac{2a' + b' + c'}{4(a' + b' + c')},$$
$$z = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2 + b'c' + c'a' + a'b'}{4(a' + b' + c')}.$$

Queste sono anche le coordinate del baricentro dei punti

$$\begin{array}{llll} A''\left(0,\ b,\ \frac{a'}{2}\right) & \text{affetto dal coefficiente} & & 2a' + b' + c' \\ B''\left(a,\ 0,\ \frac{b'}{2}\right) & \text{»} & \text{»} & a' + 2b' + c' \\ C''\left(0,\ 0,\ \frac{c'}{2}\right) & \text{»} & \text{»} & a' + b' + 2c' \end{array}$$

G. Lazzeri.

NOTA GEOMETRICA SULLE QUISTIONI 73, 387, 468

1°. Sieno D ed E i piedi delle bisettrici interne degli angoli B e C del triangolo ABC. Supponiamo tre forze eguali F e dirette secondo BC, BA, AC rispettivamente.

Le due prime ammettono una risultante diretta secondo la bisettrice interna dell'angolo B e per conseguenza la risultante generale del sistema delle tre forze passa per D. La prima e la terza ammettono una risultante diretta secondo CE e per conseguenza la risultante generale passa pure per E. Ne segue che questa risultante è diretta secondo DE, e che per ciascuno dei suoi punti la somma dei momenti delle tre forze è nulla.

Sieno dunque P un punto qualunque di DE e x, y, z le sue distanze dai tre lati del triangolo; si avrà

$$x \cdot F - y \cdot F - z \cdot F = 0,$$
$$x = y + z.$$

2°. Sieno F_1, F_2, F_3 tre figure eguali ed egualmente disposte; si sa che si possono considerare come le simmetriche di una figura eguale ad F rispetto ai tre lati del triangolo O_1, O_2, O_3 di cui i vertici sono i punti doppi delle figure F_2 e F_3, F_3 e F_1, F_1 e F_2. Se P ammette come simmetrici rispetto ai tre lati i punti P_1, P_2, P_3, si sa inoltre che la circonferenza $P_1P_2P_3$ ha per centro il punto coniugato isogonale di P nel triangolo $O_1O_2O_3$. Se P descrive una retta, π descrive la trasformata isogonale di questa retta, cioè una conica circoscritta al triangolo $O_1O_2O_3$, della quale è facile determinare la natura.

3°. L'eminente Prof. Mannheim della Scuola politecnica di Parigi mi ha comunicato una soluzione geometrica quasi evidente della prima parte della quistione 468.

Sia C' il punto di mezzo di AA', ed O il punto di mezzo di FF'. Si avrà

$$FC + CO = \frac{1}{2}(FP + PF') = a.$$

Dunque

$$FC + CO = FC + CA,$$

e per conseguenza

$$CO = CA = CA'.$$

L'angolo AOA' è dunque noto.

Droz-Farny.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 485, 487, 488, 490, 493

485. *Se lungo le tangenti ad un'elica circolare si riporta, a partire dai rispettivi punti di contatto, un segmento costante* l, *il luogo degli estremi di questo è una nuova elica circolare, giacente in un cilindro parallelo a quello della prima; la quale taglia le tangenti di essa sotto l'angolo costante* $\theta = \text{arc tang}\,\frac{l}{\rho}$, *dove* ρ *è il raggio di prima curvatura della data elica. Inoltre fra gli angoli* γ *e* γ_1 *sotto cui l'elica considerata e quella resultante tagliano le generatrici dei rispettivi cilindri, passa la relazione:* $\cos\gamma_1 = \cos\gamma \,.\, \cos\theta$.

M. Chini.

Risoluzione del sig. G. Marletta, studente della R. Università di Catania.

Sia t la tangente all'elica C nel punto P, e sia P_1 un punto di t, in modo da essere $PP_1 = l$. Per P_1 tirisi il piano normale alle generatrici del cilindro in cui trovasi la C, e siano K ed O i punti in cui questo piano incontra rispettivamente la generatrice del cilindro passante per P, e l'asse del detto cilindro. Nel triangolo rettangolo PKP_1 è costante l'ipotenusa PP_1 e l'angolo elicoidale γ, quindi sarà costante il cateto KP_1. Nel triangolo rettangolo OKP_1 è costante il cateto KP_1, e il cateto OK, quindi è costante l'ipotenusa OP_1, e ciò dimostra che il luogo dei punti come P_1 è una curva C_1, tracciata in un cilindro parallelo a quello in cui è la C. Se t_1 è la tangente alla curva C_1 in P_1, la t_1 deve essere e nel piano tangente al nuovo cilindro lungo la generatrice g_1 passante per P_1, e nel piano tangente all'elicoide sviluppabile il cui spigolo di regresso è la C, lungo la PP_1, il quale piano tangente è il piano osculatore alla C in P. Nel triedo di spigoli t, t_1, g_1 è costante la faccia tg_1, l'angolo delle g_1t e t_1t perchè retto (essendo C una geodetica del cilindro), ed è anche costante l'angolo delle tg_1 e t_1g_1 perchè uguale all'angolo costante $K(O)P_1$ per avere rispettivamente le facce perpendicolari ai lati del detto angolo. Adunque è anche costante l'angolo $t_1g_1 = \gamma_1$, cioè la curva C_1 è anch'essa un'elica.

La trigonometria sferica ci dà poi:

$$\text{tg}\theta = \text{sen}\gamma \,.\, \text{tg}\,[K(O)\rho_1] = \text{sen}\gamma \,.\, \frac{K\rho_1}{OK} = \text{sen}\gamma \,.\, \frac{l\,\text{sen}\gamma}{OK} = \frac{l}{\rho};$$

ed anche si ha; $\cos\gamma_1 = \cos\gamma \,.\, \cos\theta$.

Altra risoluzione del Prof. Piccioli.

487. *Trovare lo inviluppo del sistema d'ellissi*

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + \frac{y^2}{\text{sen}^2\alpha} = (1-y)^2.$$

Pesci.

Risoluzione del Prof. Retali.

Ponendo $\text{sen}^2\alpha = h$, l'equazione del sistema è

$$h^2 . (1-y)^2 - h . (1 - 2y + 2y^2 - x^2) + y_2 = 0$$

ed eguagliando a zero il discriminante, abbiamo per equazione dello inviluppo cercato

$$x^4 - 4x^2(y^2 - y + 1) + (1 - 2y)^2 = 0;$$

una quartica dell'ottava classe con due punti doppi di inflessioni, uno dei quali all'infinito.

Altra risoluzione del Comandante Barisien.

488. *Di un triangolo* ABC *non rettangolo è data la base* BC; *qual'è il luogo geometrico del vertice* A, *sapendo che la distanza dell'ortocentro dal centro del cerchio circoscritto è uguale alla metà di* BC?

DROZ-FARNY.

Risoluzione del Prof. Cardoso-Laynes.

Prendiamo per origine degli assi rettangolari il punto medio M_a di BC e sia M_aC l'asse della x. Essendo O ed H il circumcentro e l'ortocentro, supposto $BC = 2d$ ed $A \equiv (x, y)$, si ha

$$O \equiv \left(0, \frac{x^2 + y^2 - d^2}{2y}\right) \quad ; \quad H \equiv \left(x, \frac{d^2 - x^2}{y}\right)$$

e, dovendo essere $OH = d$, avremo per il luogo di A l'equazione

$$x^2 + \left\{\frac{d^2 - x^2}{y} - \frac{x^2 + y^2 - d^2}{2y}\right\}^2 = d^2,$$

la quale, dopo semplici riduzioni, diviene

$$(x^2 + y^2 - d^2)(9x^2 + y^2 - 9d^2) = 0 \qquad \text{(circolo ed ellisse)}$$

Ma il circolo non fa parte del luogo richiesto, perchè si esclude che ABC sia rettangolo; resta dunque l'ellisse

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{(d\sqrt{3})^2} = 1.$$

Osservazione. — Se, più in generale, si suppone $|HO| = \delta$, $(\delta \gtreqless d)$, si ha per il luogo cercato la quartica

$$9x^4 + 10x^2y^2 + y^4 - 2y^2(3d^2 + 2\delta^2) - 18\, d^2x^2 + 9\, d^4 = 0$$

e poichè l'equazione contiene x, y soltanto con esponenti pari ed il discriminante è $\Delta = -36(d^2 - \delta^2)$, la quartica si spezza in due coniche solo se è $\delta = d$ (caso considerato dalla questione 488).

Altra risoluzione del Comandante Barisien.

490. *Da un punto* I *della tangente nel vertice di una parabola si conduca una corda* PQ *che incontri l'asse in* A. *Sia* A' *il simmetrico di* A *rispetto a* I; *i quattro punti* A, A', P, Q *formano un gruppo armonico.*

BARISIEN.

1ª Risoluzione del Prof. Retali.

Per un corollario molto noto del teorema di Desargues, se una trasversale sega una conica in due punti PQ, due sue tangenti in II' e la corda di contatto in A, quest'ultimo punto è un punto doppio dell'involuzione definita dalle coppie PQ, II' (v. per es. CREMONA, *Geom. Projettive*, pag. 141). Assumendo per la tangente passante per I' la retta all'infinito, abbiamo il teorema: Se da un punto I di una tangente (qualunque) di una parabola si conduce una corda PQ che seghi il diametro passante pel punto di contatto in A, e prendiamo il simmetrico A' di A rispetto ad I, i quattro punti AA'PQ formano un gruppo armonico.

2ª Risoluzione del Prof. Cardoso-Laynes.

Infatti la parallela r condotta per A' alla tangente nel vertice è la polare di A rispetto alla parabola (perchè se A'' è il punto d'incontro della r con l'asse della parabola e V è il vertice di questa, è evidentemente $A''V = VA$); segue immediatamente da ciò che è $(A'PAQ) = -1$.

Altra risoluzione del signor Marletta, studente della R. U. di Catania.

493. *Dimostrare le identità:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x)\,dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x + 2)\,dx}{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

BARISIEN.

Risoluzione e rettificazione del Prof. Retali.

Si ha

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \text{ e, mutando } x \text{ in } \frac{\pi}{2} - x, \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

dunque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 1$. Il terzo integrale proposto può scriversi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ e ha per valore 2.

Quanto al 2° integrale si riduce subito a integrali immediati; infatti l'integrale indefinito è

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} - \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x - \sec x + \operatorname{cosec} x$$

e, osservando che il secondo membro è eguale a $\dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$ troviamo per l'integrale definito il valore 2.

QUISTIONI PROPOSTE

497. Sieno dati due cerchi c e c' e supponiamo che una tangente mobile a c incontri c' in P e Q. Da P e Q si conducano le seconde tangenti al cerchio c, che s'incontrano in M.

1°. Trovare il luogo del punto M.

2°. Se MP ed MQ incontrano rispettivamente c' in P′ e Q′, trovare il luogo del punto d'incontro delle due rette PQ e P′Q′.

3°. Trovare il luogo dei centri delle iperbole equilatere passanti per i punti P, Q, P′ e Q′.

E.-N. BARISIEN.

498. Per a ed n interi e positivi si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \dots}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \dots} = 1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \dots}{(a+1)^{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \dots}{(a+1)^{n-1}} = \frac{a+1}{2}.$$

499. Sia C una curva piana riferita ad un sistema cartesiano OX, OY ed M un suo punto variabile. Si riporti sulla perpendicolare condotta da M all'asse x, a partire da M e nei due sensi, il segmento OM e sieno MP ed MQ tali segmenti; i punti P e Q descrivono una curva C'; si studi la trasformazione (C, C') e si dimostri in particolare che:

1° se C è una retta, C' è, in generale, un'*iperbole equilatera.*

2° se C è un circolo di centro O, C' si compone di due circoli.

3° se C è un circolo tangente all'asse x in O, C' è un *trifolium retto.*

4° se C è un circolo tangente all'asse y in O, C' è un *folium doppio.*

5° se C è una *strofoide retta* col vertice in O e avente per asse l'asse x, C' si compone di un circolo e di una *Cissoide di Diocle;*

6° se C è una *cissoide di Diocle* con la cuspide in O ed avente OX per asse, C' è una *quintica bicircolare.* (Si studi tale curva specialmente nell'intorno del suo punto quadruplo.)

7° se C è una *Cappa* che ha il punto doppio in O e tale che la tangente in O sia l'asse della x, C' si compone di due *strofoidi rette.*

8° se C è una *kreuzcurva equilatera* che ha per assi x e y, C' si compone di due inverse di *trifolium retto.*

G. Cardoso-Laynes.

500. Col centro sopra un cerchio K^2 di raggio uno si descrive nel medesimo piano e con raggio $\sqrt{3}$ un altro cerchio C^2: dimostrare che in questo secondo cerchio possono inscriversi infiniti esagoni circoscritti a K^2.

501. Dimostrare che nella quartica avente per equazione (assi rettangolari)

$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax\,(x^2 - y^2) + 4a^2\,(x^2 - 3y^2) = 0.$$

1°. Le quattro tangenti condotte alla curva da ognuno dei suoi due punti doppi A e B formano un fascio equianarmonico.

2°. Delle otto tangenti doppie, quattro sono immaginarie e quattro reali; queste ultime, due delle quali sono isolate, concorrono in un punto, e gli otto punti di contatto sono sopra un cerchio. Trovare le otto equazioni delle tangenti doppie.

3°. Se P è un punto arbitrario della quartica, l'ortocentro del triangolo PAB cade sulla curva.

502. Dimostrare che nella quartica binodale della quistione precedente possono inscriversi esagoni di Steiner.

503. A e B sono i termini di un diametro di un cerchio fisso K^2; un raggio variabile p del fascio B sega in P il diametro perpendicolare ad $|AB|$, e l'asse del segmento $\overline{BP}$ taglia il cerchio in P_1 e P_2: trovare il luogo dei punti d'intersezione di p coi raggi $|AP_1|$, $|AP_2|$.

504. Inviluppo delle iperboli equilatere che passano pei termini di un diametro d'un cerchio fisso e segano questo cerchio sopra una tangente variabile d'una curva $C^{(n)}$ generale d'ordine n. Luogo dei centri delle medesime iperboli equilatere.

505. Inviluppo delle iperboli equilatere che passano pei termini AB di un diametro d'un cerchio fisso K^2 e segano questo cerchio sopra una tangente variabile d'un altro cerchio C^2 col centro sopra $|AB|$. Costruire le tangenti doppie dello inviluppo e i corrispondenti punti di contatto; le tangenti stazionarie coi corrispondenti flessi; le tangenti nei due punti doppi che la curva inviluppo possiede; le tangenti che arrivano alla curva da questi punti doppi.

Esaminare il caso particolare in cui C^2 ha A per centro, e per raggio il lato del triangolo equilatero inscritto in K^2.

506. Sono dati in un piano due cerchi K^2, C^2 ed AB sono i termini del diametro di K^2 sulla linea dei centri; da un punto variabile P di C^2 si conducono la perpendicolare p ad $|AB|$ e la tangente $|P\omega|$ a K^2. Determinare il luogo dei punti d'intersezione di p con le rette $|\omega A|$, $|\omega B|$ che uniscono il punto di contatto ω con A e B.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

B. Niewenglowski et L. Gérard. — *Cours de géométrie élémentaire* a l'usage des éleves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales; des candidats aux écoles du gouvernement et des candidats a l'agregation. — Paris, Carré et Naud.

Géométrie plane, 1898.
Géométrie dans l'espace, 1899.

Questo libro si distingue dai libri congeneri per la gran quantità di materia raccolta in un volume relativamente piccolo, e per un bene inteso spirito di modernità che ha indotto i due egregi autori a introdurre molti concetti fin qui poco usati negli elementi, come la teoria delle antiparallele, dei vettori, delle varie trasformazioni del piano e dello spazio, ecc. — Abbiamo notato con piacere che in questo libro sono stati accettati per la prima volta in Francia (se non erriamo) alcuni concetti proposti da autori italiani. Per es. la teoria delle parallele precede quella delle perpendicolari, come nei trattati di De-Paolis, Lazzeri e Bassani. La teoria della similitudine segue quella dell'omotetia e viene usata la seguente definizione adottata per la prima volta nel trattato di Lazzeri e Bassani: *Si dice che due figure sono simili, quando l'una di esse è uguale ad una omotetica dell'altra.*

È fatto un largo posto al teorema di Stewart ed alle sue molteplici e numerose applicazioni.

Il primo volume (*geometria piana*) è diviso in quattro libri, il 1° dei quali consta di otto capitoli che trattano *degli angoli*, delle parallele, dei poligoni, delle perpendicolari e oblique, dei casi di eguaglianza dei triangoli e dei parallelogrammi.

Il 2° libro è diviso in sei capitoli, che trattano delle corde e archi di circolo, delle tangenti e normali, delle posizioni relative di due circoli, della misura degli angoli, delle costruzioni geometriche più comuni, degli spostamenti delle figure.

Il 3° libro, che è il più notevole per la varietà degli argomenti, si compone di otto capitoli, e cioè:

1°. *Vettori.* Contiene le prime nozioni sull'equipollenza e la divisione armonica dei segmenti. A dire il vero non sappiamo quale sia il nesso fra questi due argomenti.

2°. *Linee proporzionali.*

3°. *Figure omotetiche.*

4°. *Figure simili.*

5°. *Proprietà metriche del triangolo, del quadrilatero, del circolo, ecc.* Contiene i teoremi di Pitagora, di Carnot, di Stewart ecc., la potenza di un punto rispetto ad un circolo, le antiparallele, la teoria degli assi radicali, ecc., ecc.

6°. *Traversali, polari, inversione.* Contiene i teoremi di Menelao e Ceva, la nozione di rapporto anarmonico, la teoria della polare di un punto rispetto ad un circolo, i teoremi di Pascal e Brianchon per il circolo, l'inversione, i vettori isogonali, la costruzione del circolo tangente a tre circoli col metodo di Faichè.

7°. *Poligoni regolari.*

8°. *Lunghezza della circonferenza.*

Il libro 4° è diviso in due soli capitoli, destinati il primo alla misura delle aree, il secondo al confronto delle aree.

Il volume termina con tre note, nella prima delle quali è svolta brevemente la teoria delle grandezze, nella seconda sono studiate le varie trasformazioni del piano e le composizioni di queste, nella terza è trattata rigorosamente la teoria dell'equivalenza, che nel volume è studiato senza troppo rigore.

Accenneremo ad alcune piccole mende.

I postulati fondamentali non sono stabiliti con tutto il rigore e l'esattezza desiderabile, cosicchè nella dimostrazione del teorema: *per tre punti passa un solo piano* si trovano non pochi sottintesi.

A pag. 285 si trova la seguente definizione *si chiama area l'estensione di una parte limitata di superficie*, la quale definizione, che è del resto quella usata dalla maggior parte dei trattatisti, ci sembra che non definisca nulla.

Il volume secondo contiene la geometria solida divisa in tre libri (libro 5°, 6° e 7°), le curve usuali (libro 8°), i complementi e quattro Note.

Il libro 5° è diviso in diciannove capitoli, dei quali primi tre trattano delle proprietà fondamentali del piano e delle rette nello spazio, il 4° delle rette e piani perpendicolari, il 5° dei diedri, il 6° dei piani paralleli, il 7° dei piani paralleli, l'8° delle proiezioni ortogonali, il 9° degli angoloidi, il 10° del rapporto armonico di quattro piani di un fascio, l'11° delle traslazioni e rotazioni. Per la simmetria dell'opera sarebbe stato preferibile che la teoria dei piani paralleli precedesse quella dei piani perpendicolari, a somiglianza di quanto era stato fatto nel primo volume.

Il libro 6° contiene nei primi tre capitoli le proprietà generali e le misure dei poliedri, nel 4° capitolo la simmetria e nel 5° ed ultimo l'omotetia e la similitudine.

È notevole la considerazione del tronco di piramide di *seconda specie*, cioè della figura che si ottiene tagliando i prolungamenti degli spigoli di una piramide con un piano parallelo alla base.

Il libro 7°, diviso in otto capitoli, è destinato allo studio dei corpi rotondi. — I primi cinque capitoli contengono le proprietà generali e le misure relative a tali corpi. — I capitoli 6° e 7° trattano dei piani radicali e polari e dei sistemi di sfere, l'8° la geometria sulla sfera.

Il libro 8° contiene una trattazione elementare accurata e abbastanza estesa delle proprietà dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola, prima considerate separatamente nei tre primi capitoli, mentre nel 4° sono esposte le proprietà comuni a tali curve, e nel 5° capitolo è studiata l'elica cilindrica.

I complementi sono divisi in otto capitoli, il 1° dei quali, notevolissimo, studia gli spostamenti delle figure solide indeformabili, come risultanti di simmetrie.

I capitoli 2°, 3°, 4° e 5° contengono in sunto l'ordinaria geometria proiettiva piana; l' 8° contiene le proprietà generali dei poliedri, in base al teorema di Eulero.

Le note 1ª e 2ª si riferiscono alla simmetria e alle coordinate teraedriche, la 3ª dà una trattazione rigorosa della teoria dell'equivalenza dei poliedri, la 4ª studia le geodetiche della sfera.

K.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.

Vol. XXXIV, disp. 15. *N. Jadanza*, Errata-corrige alla nota: " Alcune osservazioni sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie ". — *P. Pizzetti*, Sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie. — *O. Tedone*, Sulle equazioni della elasticità in coordinate curvilinee.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, Vol. XXXII, Fasc. 16-18. — *C. Rosati*, Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in uno spazio a dimensione pari.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Tomo LVIII, Serie VIII, disp. 4-5. — *C. A. Dell'Agnola*, Estensione di un teorema di Hadamard.

Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna.

Serie V, Tomo VII, Fasc. 4. — *L. Donati*, Osservazioni sulle equazioni di Hertz e sul teorema di Poynting.

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze nell'Istituto di Bologna.

Nuove serie, Vol. III (1898-99), Fasc. 4. — *C. Arzelà*, Sulle serie di funzioni.

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze fisiche e matematiche.

Vol. VIII (della Serie, Vol. XXI). — *O. Nicoletti*, Sulla trasformazione delle equazioni lineari del 2° ordine con due variabili indipendenti. — *A. Bemporad*, Sui gruppi di movimenti e similitudini nello spazio a 3, 4, 5 dimensioni. — *P. Benedetti*, Sulla teoria delle forme iperalgebriche. — *A. Giacomini*, Sulla corrispondenza fra la Geometria conforme di S_4 e la Geometria proiettiva dello spazio ordinario.

Annali del R. Istituto Tecnico e Nautico di Napoli.

Anno XVI (1899). — *F. Cannizzo*, Studio sopra due determinanti.

Annali di Matematica pura e applicata.

Milano, Tomo III, Fasc. 1-4. — *Baire*, Sur les fonctions de variables réelles. — *Dini*, Studi sulle equazioni differenziali lineari. — *Bianchi*, Sulla teoria delle trasformazioni della superficie a curvatura costante. — *Vitali*, Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, riguardato come elemento di un calcolo.

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal comitato di redazione dell'Associazione MATHESIS.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Fasc. 6°. — *Poincaré,* Complément à l'*Analysis Situs* (Continuaz. e fine). — *Picard,* Sur les sistèmes de lignes tracées sur una surface algébrique. — *Ciani,* I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche. — *Studnicka,* Sur la périodicité de la fonction *sin x* et *cos x*. (Démostration sans paroles.) — *Giudice,* Rettifica alla memoria. " Introduz. alle coordinate triangolari e tetraedriche ".

Il Pitagora diretto da *G. Fazzari.*

Fasc. 6°. — *F. Palatini,* Teoria della misura (Cont. e fine). — *D. Gambioli,* A proposito di una formula di Fermat. — *A. Droz-Farny,* Nota di Geometria. — *L. Bosi,* Ancora intorno alla dimostrazione di un teorema sul polinomio. — Archita. — *G. Gallucci,* Un teorema sul triangolo — Teorema intorno a quantità proporzionali — Varietà.

Fasc. 1° dell'anno VI (1900). — *C. Burali-Forti,* Sui simboli di Logica matematica. — *C. Ciamberlini,* Generalizzazione di alcune definizioni date in Geometria elementare (Contin.) — *Id.*, Una domanda agl'insegnanti di Matematica. — *G. Del Prete,* Sulla teoria delle operazioni aritmetiche — Metodo d'Archita per la soluzione del problema delle due medie proporzionali — Sul minimo multiplo. — *G. Riboni,* Contributo allo studio del triangolo — Temi a concorso.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali. — Giornale per la coltura dei maestri delle scuole elementari e degli alunni delle scuole normali, diretto da *A. Conti* (Bologna).

Fasc. 1° dell'anno I. — *Conti,* Due parole d'introduzione. — *Scoto,* Per uno svolgimento puramente geometrico della teoria della similitudine dei poligoni. — *Del Prete,* Sopra alcune definizioni in Aritmetica (Numero, Grandezza, Quantità). — *Flores,* Pro-Agraria. — *Bombicci,* Dopo gli spari di Casal Monferrato. — *Conti,* Prodigiose invenzioni d'un maestro — Rubriche intermediario-didattiche — Questioni.

Fasc. 2°. — Lettera del Presidente dell'Associazione " Mathesis ". — *Buzzi,* La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione. — *Gherardini,* Sui movimenti delle stelle. — *Scoto,* Rivista storica. — *Del Prete,* Fra i nuovi libri di testo.

Fasc. 3°. — *Conti,* Forme da evitarsi nell'insegnamento dell'Aritmetica e della Geometria. — *Hory,* L'oro nell'Eritrea. — *Ravaglia,* Un po' di geografia fisica. — *Scoto,* Rivista storica (Continuazione).

Fasc. 4° — *Ciamberlini* e *Conti,* Corrispondenza. — *Buzzi,* La genesi ecc. (Continuaz.) — *Neri,* Il Campicello come sussidio all'insegnamento agrario elementare.

Fasc. 5°. — *Garbieri,* Il buon senso nella risoluzione dei problemi aritmetici. — *Neri,* A proposito del museo scolastico. — *Del Prete,* Sopra alcune definizioni in Aritmetica. (Le operazioni aritmetiche - Addizione). — *Scoto,* Rivista storica (Continuaz.) — Rivista bibliografica.

Fasc. 6°. — *Conti,* Forme da evitarsi ecc. — *Trevisan,* Perpendicolarità e verticalità. — *Griffini,* A proposito delle distinzioni fra corpi viventi e corpi non viventi — Rivista bibliografica.

Nouvelles Annales de math. Tomo XVIII, 1899 (Paris, Gauthier-Villars.)

Fasc. 11° (novembre). — Primo concorso dei " Nouv. Annales " pel 1900. — *E. Collignon,* Problemi diversi sul metodo inverso delle tangenti. (Problema di de Beaune e problemi connessi). — *H. Piccioli,* Sopra alcune quistioni della teoria delle curve a doppia curvatura (l'A. dimostra che l'elica cilindro-conica non giace, in generale, sopra un cono di rotazione, poi dà due teoremi relativi alle lossodromie e alle geodetiche del cono). — *Lefebvre,* Studio di un sistema di due specchi sferici (l'A. studia le riflessioni multiple che si producono in un sistema di due specchi sferici; dà una classificazione dei sistemi di specchi fondata sull'omografia e costruisce gli elementi delle immagini mediante le teorie della involuzione e della omografia; finalmente trova le due condizioni geometriche necessarie affinchè il numero delle immagini sia limitato). — *S. C.*, Delle arti e manifatture, Concorso del 1899, seconda sessione — Bibliografia (Essai critique sur l'hypotése des atomes par *M. A. Hannequin*) — Solution de la question 1790 (*E. Genty*).

Fasc. 12° (dicembre). — *N. Saltykow*, Sulla teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali del 1° ordine d'una sola funzione. — *E. Lacour*, Sul moto d'un solido pesante attorno a un punto fisso. (Applicazione delle funzioni ellittiche allo studio del moto della trottola: l'A. ritrova le formule date dai sigg. *Klein* e *Sommerfeld* a p. 420 della loro " Theorie des Kreisels „ evitando una certa superficie di Riemann da essi utilizzata). — *V. Jamet*, Sul problema d'analisi dato all'aggregazione nel 1899. (L'A., stabilito il significato geometrico della quistione, la generalizza sostituendo una quadrica qualunque al paraboloide che figura nell'enunciato) — Certificati di studî superiori delle Fac. di scienze (luglio 1899). — *Caen*, Quistioni proposte 1831-1832 — Lista delle quistioni (in numero di 258) rimaste senza soluzione al 31 dicembre 1899.

Mathèsis, recuel mathématique etc., par MM. *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Tomo IX, Gand, A. Hoste, editeur.

Fasc. 6° (giugno 1899). — *P. Mansion*, Continuità in senso analitico e continuità in senso volgare. — *G. Loria*, Generalizzazione d'un problema di minimo classico (dati in uno spazio euclideo lineare a n dimensioni S_n, $n+1$ punti A_0, $A_1, \ldots A_n$ trovarne un altro X tale che la somma delle sue distanze ai punti dati sia un minimo: se la distanza del punto incognito da A_i è d_i e ρ un fattore di proporzionalità, l'A. trova $\rho = n!\,\mathrm{Vol.}\,(XA_{i+1} \ldots A_n A_0 \ldots A_{i+1}) \cdot d_i$; poi dimostra che, analogamente a quanto accade per $n=2$, un punto X che soddisfa alla questione è in generale tale che le semirette XA_i dividono lo spazio attorno ad X in $n+1$ parti eguali). — *G. Gérard*, Sul punto di Frégier — Varietà (Accademia delle scienze ecc. di Tolosa; Soggetto del premio di Matematiche da conferirsi nel 1901) — Bibliografia — Risoluzioni di quistioni; 1129 (*Droz-Farny*); 1174 (*G. Gérard*); 1180 (*V. Cristesco* e *Barisien*); 1191 (*Buysens*, *Barisien* e *Déprez*); 1196 (*V. Retali*); 1200 — Concorso d'ammissione alla Scuola politecnica di Parigi — Quistioni d'esame — Quistioni proposte 1223-1226.

Fasc. 7° (luglio) — *G. Pirondini*, Sulla spirale logaritmica (esposizione delle principali proprietà note di questa curva). — *A. Demoulin*, Dimostrazione geometrica di una proprietà delle linee assintotiche d'una superficie rigata. (Si tratta del teorema notissimo: quattro linee assintotiche curvilinee d'una superficie rigata segano una generatrice rettilinea variabile in quattro punti di rapporto anarmonico costante.) — *L. Orlando*, Sul cerchio tangente a tre cerchi dati. (Soluzione nota del problema d'Apollonio.) — Note matematiche: Sulla determinazione di alcuni integrali (*Barisien*); Sopra un teorema di Geometria elementare (*Volkof*); Sopra un teorema del sig. *Droz-Farny* (*Neuberg*); Sui triangoli sferici (*Neuberg*); Sull'iperbole equilatera (*Barisien*); Teorema sui numeri (*G. de Rocquigny*) — Bibliografia. (Notes de Bibliographie des courbes géometriques, partie complementaire, par *H. Brocard*) — Soluzioni di quistioni: 1185, 1187, 1201 (*Déprez, Emmerich, Barisien*); 1204 (*V. Retali*); 1205, 1206 (*Barisien*); 1207 (*Emmerich*) — Quistioni di esame 894-897 — Quistioni proposte 1227-1230.

V. R.

Bulletin de sciences mathématiques et physiques, di *M. B. Niewenglowski.*

Fasc. 2° (15 ottobre 1899). — *N. Plakhowo,* Area del quadrilatero inscrittibile e circoscrittibile. (Dà le notissime formule dell'area in funzione dei lati.) — *L. Gérard,* Geometria del circolo. (Richiama le principali notazioni e definizioni: e tratta dei circoli cofasciali) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 3° (1 novembre 1899). — Soluzione premiata del concorso generale (1899) di prima classe moderna — Preparazione agli esami — Quest. risolte — Quest. prop.

Fasc. 4° (15 novembre 1899). — *G. De Rocquigny-Adanson,* Questioni d'aritmetica. (I numeri naturali disposti in linee orizzontali, in modo che la somma dei termini di un'orizzontale qualunque sia la somma di due cubi consecutivi — Generalizzazione) — Altra soluzione premiata nel concorso generale di prima classe moderna — Preparazioni agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 5° (1 dicembre 1899). — *G. L. Gérard,* Geometria del circolo (Continuazione v. Fasc. 2°) — Dimostrazione diretta di alcuni teoremi di Affolter, che ordinariamente si dimostrano coll'inversione — Preparazione agli esami — Questioni proposte.

Fasc. 6° (15 dicembre 1899). — *E. N. Barisien,* Sullo sconto in dentro e in fuori. (Indicando con e lo sconto commerciale o in fuori, con E lo sconto in dentro e E_1 un'altra specie di sconto che l'A. considera, si trova $\frac{1}{E}+\frac{1}{E_1}=\frac{2}{e}$ e $E < e < E_1$) — Preparazione agli esami — Questioni proposte — Questioni risolute — Bibliografia.

Fasc. 7° (1 gennaio 1900). — *L. Gérard,* Geometria del circolo (Continuaz. Tangenti comuni a due e a tre circoli) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 8° (15 gennaio 1900). — *E. Rebuffel,* Su un teorema di Casey. Il Casey aveva dimostrato, servendosi delle proprietà dell'inversione che, dati quattro circoli S_1, S_2, S_3, S_4, indicando con t_{ij} le lunghezze della parte di tangente esterna comune ai due circoli S_i, S_j, si ha:

$$t_{12}\,.\,t_{34}+t_{23}\,.\,t_{41}=t_{13}\,.\,t_{24}\,.$$

Il Rebuffel dimostra lo stesso teorema per altra via; e ne stabilisce il teorema inverso. — *L. G.*, Angolo sotto il quale si vede dal fuoco d'una conica il segmento di tangente mobile compreso fra due tangenti fisse — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 9° (1 febbraio 1900). — *G. Lehr,* I teoremi di Tolomeo (ottiene questi noti teoremi sul quadrilatero inscrittibile dalla relazione di *Stewart*). — *G. Fontené,* Sistema ortogonale di sei punti. (Definito come sistema ortogonale di sei punti quello in cui il piano di tre de' punti è perpendicolare a quello degli altri tre, determina il numero delle condizioni necessarie per stabilirlo: rammenta alcuni noti teoremi e dimostra che: *Data un'unica condizione, esiste un punto da cui si vedono le dieci diagonali d'un esaedro completo sotto un angolo retto.*) — *G. De Rocquigny-Adanson,* Questioni d'Aritmetica. (Date le progressioni aritmetiche $\div 1,\ 1+p,\ 1+2p\ldots\ \div 1,\ 1+2p,\ 1+4p\ldots$, dividendo i termini della seconda in gruppi in modo che il numero dei termini dell' n^0 gruppo sia eguale all' n^0 termine della prima, si ha che la somma dei termini di ciascun gruppo è un cubo perfetto. E se invece si divide in gruppi i termini della prima con legge analoga rispetto ai termini della seconda, la somma dei termini di ciascun gruppo è la somma di due cubi) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 10° (15 febbraio 1900). — *H. Vincent*, Sugli spostamenti. — *L. G.*, Questioni di massimo e di minimo. (Dall'art. del sig. Volpi nel *Periodico* trae il metodo per dimostrare $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 x_2 \ldots x_n$). — *G. Fontené*, Sistema ortogonale di sei punti (Continuaz.) Svolge altre considerazioni sui pentaedri; ed enuncia soltanto alcuni teoremi che propone per trovarne una dimostrazione elementare) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Journal de Mathématiques élémentaires de *H. Vuibert*.

Fasc. 2° (15 ottobre 1899). — *A. Goulard*, Nota d'aritmetica e d'algebra (Proprietà commutativa della somma). — *M. Moreaux*, Sull'esistenza di linee spezzate convesse di un numero qualunque di lati.

Fasc. 4° (15 novembre 1899). — *I. Girod*, Sull'applicazione d'un teorema classico relativo alle questioni di massimo. (Tratta dell'applicazione del noto teorema: Il prodotto $P = x^p y^q z^r$ dove x, y, z non numeri positivi variabili di cui la somma è costante, e p, q, r numeri positivi costanti, assume un valore massimo quando x, y, z assumono valori eguali ai numeri che si ottengono dividendo la somma in parti proporzionali agli esponenti.)

Fasc. 5° (1 dicembre 1899). — *I. Girod*, Continuaz. della nota del numero precedente. (Risolve il problema più generale: Trovare il sistema di valori che rende massima o minima la funzione $u = x^a y^b$ o l'altra $v = \frac{x^a}{y^b}$, essendo a e b numeri interi o fratti, quando le variabili x e y son soggette alla condizione di verificare un'equazione di tre termini, interi o fratti, razionali o irrazionali.)

Fasc. 6° (15 dicembre 1899). — Nota della teoria elementare della bilancia.

Fasc. 7° (1 gennaio 1900). — Osservazioni sui problemi di massimo e di minimo.

Fasc. 8° (1 febbraio 1900). — *C. Rech*, Nota su alcune identità. (Ritrova alcune note identità di Eulero e di Newton.)

E. Nannei.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

G. Angelini, Nozioni elementari di algebra per le scuole tecniche e per la prima classe delle scuole normali, conforme agli ultimi programmi ministeriali. Empoli, Traversari, 1899. L. 0,90.

A. Conti, Elementi di Aritmetica razionale ad uso degli allievi delle scuole normali, 2° e 3° corso. Parte 1. Bologna, Zanichelli, 1900. L. 2,40.

P. Mola. Appunti di Trigonometria. Torino, Prete, 1899.

S. Ortu-Carboni, I complementi dell'algebra elementare per la discussione completa o sistematica dei problemi algebrici di 1° e 2° grado, con 2000 problemi (risoluti ed avviati) d'applicazione dell'algebra e della trigonometria alla geometria. Parte I (Teorie). Livorno, Giusti, 1900. L. 5.

E. Pascal, Repertorio di matematiche superiori: definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici. Vol. II (Geometria). Milano, Hoepli, 1900.

S. Pincherle. Geometria metrica e trigonometria. Milano, Hoepli (Manuali) 1900.

A. Socci, Aritmetica ad uso dei ginnasi e delle scuole tecniche. Seconda edizione. Quinta impressione. Firenze, Le Monnier, 1900. L. 2,50.

G. M. Testi, Corso di matematica ad uso delle scuole secondarie e più specialmente degli istituti tecnici. Vol. II (Algebra elementare). Seconda edizione. Livorno, Giusti, 1900. L. 2,80.

G. M. Testi, Elementi di matematica ad uso degli alunni delle scuole normali. Livorno, Giusti, 1900. Fasc. 1° cent. 80; 2°, 80; 3°, 90; 4°, 60; 5°, 70, 6°, 90.

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI A PARIGI

(6-12 AGOSTO 1900)

Il Comitato organizzatore ha inviato una circolare a tutti coloro che risposero affermativamente o negativamente all'altra circolare in data del Dicembre 1898, colla quale si domandava se l'invitato avrebbe *probabilmente* assistito o no al congresso, o solo o accompagnato da qualche persona della propria famiglia.

Risulta da questa nuova circolare che il numero degli aderenti sarà di circa 100, e 680 saranno circa le persone appartenenti alle famiglie degli aderenti che li accompagneranno.

Il prezzo della *carta di membro del congresso* è fissato in 30 franchi e quello della *carta di famiglia* in franchi 5 per persona.

Queste carte daranno diritto a partecipare a tutti i lavori, a tutte le assemblee, a tutte le visite che saranno organizzate, ma non daranno diritto di assistere al banchetto, nè a ricevere i rendiconti dei lavori del congresso.

Le ferrovie francesi hanno accordato il ribasso del 50 per cento ai soli congressisti, ma non alle persone munite della *carta di famiglia*.

Le lingue officialmente ammesse al congresso saranno la *tedesca*, l'*inglese*, la *francese* e l'*italiana*.

I lavori saranno divisi in sei sezioni: I. *Aritmetica* e *Algebra*. — II. *Analisi*. — III. *Geometria*. — IV. *Meccanica, Meccanica celeste* e *Fisica matematica*. — V. *Bibliografia e Storia*. — VI. *Insegnamento* e *Metodi*.

Tutte le comunicazioni concernenti il congresso debbono essere indirizzate a M. le *Président de la Société mathématique de France, rue des grands-Augustins, 7, Paris*.

Mentre facciamo voti per l'ottima riuscita del congresso, non possiamo astenerci dall'osservare che la scelta della data del congresso ci sembra poco felice. Chi assisterà al congresso si propone senza dubbio, unendo *utile dulci* di visitare Parigi e la grande esposizione, e ciò si fa poco bene in una stagione in cui il caldo si fa sentire dappertutto e a Parigi più che altrove.

Siamo convinti che se il congresso potesse esser rimandato alla seconda metà di Settembre il concorso, specialmente dall'Italia, sarebbe molto maggiore.

ERRATA-CORRIGE del fasc. precedente.

A pag. 170, subito dopo l'equazione (4), prima cioè delle parole " che rappresenta ecc. ", è stato omesso quanto segue:

" In particolare se è $m = n = 0$, cioè se si prende per polo il centro della conica data, si ha

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 y^2 \pm b^2 x^2) = c^4 x^2 y^2 \text{ "}.$$

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 29 Marzo 1900.

SULLO SVILUPPO DEI POLIEDRI

E SU ALCUNE NORME PRATICHE PER LA COSTRUZIONE DEI LORO MODELLI IN CARTONE

I. — Sviluppo dei poliedri.

1. Una superficie poliedrica, come quella che è formata da faccie piane, può distendersi o, come suol dirsi, svilupparsi su di un piano. La forma di questo sviluppo è, in generale, quella di un grande poligono concavo diviso internamente in tanti poligoni, eguali in numero, grandezza e forma, alle facce del poliedro.

Qualche volta questo sviluppo può effettuarsi senza sovrapposizione, tal altra, invece, una o più parti vengono a ricoprire parzialmente o totalmente altre parti dello sviluppo stesso. Per lo sviluppo di un poliedro *intrecciato* si considera, generalmente, la sola superficie esterna del poliedro.

In ciò che segue limiteremo le nostre considerazioni ai soli poliedri ordinari (euleriani) e a quelli *intrecciati,* escludendo perciò quei corpi pei quali alcune facce o l'intera superficie che li limitano, non sono *semplicemente connesse*.

Lo sviluppo di un poliedro può essere effettuato con criteri diversi; ma ordinariamente si segue o l'uno o l'altro dei due procedimenti che appresso:

1°. S'immagini che il poliedro, staccandosi da una faccia che supporremo fissa, ruoti attorno all'unico lato che lo tiene unito ad essa, finchè la faccia adiacente a quella immobile non sia venuta a distendersi sul piano di quest'ultima. Restando poi fissa questa seconda faccia si fa ancora ruotare il poliedro rimanente in modo da portare una terza faccia nel piano delle prime due. Si ripete questa operazione finchè tutte le facce non sieno condotte successivamente nel piano della prima.

2°. Poichè un angoloide può sempre distendersi su di un piano, quando lo si supponga aperto lungo uno dei suoi spigoli, così potremo sviluppare un poliedro allorchè, per mezzo di aperture praticate lungo i suoi spigoli, si sieno resi sviluppabili tutti i suoi angoloidi.

È chiaro che seguendo o l'uno o l'altro di questi due metodi, si può avere lo sviluppo di uno stesso poliedro sotto forme svariate. Infatti, col primo procedimento si può far ruotare il poliedro, e successivamente la parte di esso che via via rimane, attorno ad uno qualunque dei lati di quelle facce che si considerano come fisse. Col secondo metodo poi, la linea o le linee che si possono percorrere per passare da un vertice ad un altro, presentano, in generale, la più grande varietà.

2. A proposito del secondo procedimento indicato si può verificare che, *partendo da un vertice qualunque del poliedro, è possibile con una linea continua formata di costole del poliedro stesso, toccare tutti i vertici una volta ed una volta soltanto, senza esser costretti, per conseguenza, a dover ripassare due volte per lo stesso cammino.*

Premettiamo anzitutto una definizione. Gli n vertici di un poliedro che si trovano alle estremità delle n costole concorrenti coll'altro estremo in uno stesso vertice V, si possono riguardare come gli n vertici di un poligono piano o gobbo, di cui alcuni lati potranno essere costole del poliedro, ed altri invece diagonali di alcune di quelle facce che formano l'angoloide V. Supponiamo ora, per ognuna di queste facce, di avere sostituito alla diagonale corrispondente, quella parte del perimetro della faccia stessa che ha con quella diagonale gli estremi in comune, e che si trova dalla banda opposta del vertice V. Il poligono piano o gobbo che così si ottiene, e che risulta formato unicamente di costole del poliedro, lo chiameremo, per brevità, il *poligono corrispondente all'angoloide* V.

Ciò premesso ecco in qual modo deve effettuarsi il cammino per poter soddisfare alla condizione espressa dalla regola enunciata:

A partire dal vertice V si percorra una delle costole in esso concorrenti, fino all'altro estremo che è uno dei vertici del *poligono corrispondente all'angoloide* V; indi si percorra in un determinato senso, per esempio nel senso del movimento delle lancette dell'orologio, il perimetro di questo poligono fino al vertice $m-1$, restando per tal modo escluso dal percorso l'm° lato di detto poligono. Se a partire da V numeriamo i vertici che via via s'incontrano secondo le serie dei numeri naturali, è evidente che quell'$(m-1)^{mo}$ vertice sarà distinto col numero m e sarà un vertice del *poligono corrispondente all'angoloide* 2. Si percorra questo secondo poligono nel senso del primo fino al penultimo lato (e cioè arrestandoci al penultimo vertice che apparterrà al poligono corrispondente all'angoloide 3, notando coi numeri naturali successivi ai precedenti, i vertici che mano a mano s'incontrano. Dopo questo poligono si percorra nello stesso modo quello corrispondente all'angoloide 3, poi quello corrispondente all'angoloide 4, e così di seguito sino a che, colla linea poligonale continua, non si sieno toccati tutti i vertici del poliedro.

Al procedimento ora spiegato sono necessarie le due avvertenze seguenti:

1°. Nel percorrere uno dei poligoni, per esempio quello corrispondente all'angoloide p^{mo}, può accadere che alcuni lati di questo sieno già stati percorsi nel descrivere il cammino di qualche altro poligono

precedente. Tali lati, allora, non potranno mai incontrarsi saltuaria-
mente in uno stesso poligono, ma si troveranno sempre l'uno di seguito all'altro formando sempre altresì l'ultima parte che nello stesso poligono rimarrebbe ancora da descrivere. Inoltre l'ultimo vertice v a cui si giunge, e oltre il quale si cadrebbe nelle parti già descritte in qualche poligono precedente, apparterrà sempre al poligono corrispondente all'angoloide successivo $(p+1)^{mo}$.

Quando si presenti adunque il caso accennato, giunti in v percorreremmo il poligono corrispondente all'angoloide $(p+1)^{mo}$.

2°. Se un lato del poligono da descriversi appartiene ad una faccia triangolare, di cui il vertice opposto a quel lato concorre alla formazione di un angoloide triedro del poliedro, dovremo, invece di quel lato, percorrere i due lati rimanenti del triangolo. Senza questa avvertenza, il vertice dell'angoloide in questione rimarrebbe per sempre escluso dalla linea poligonale che deve passare per tutti i vertici. (*)

3. Intorno agli sviluppi dei poliedri si possono fare anche le osservazioni seguenti, che ci torneranno utili per le ulteriori considerazioni che svolgeremo.

1ª. Lo sviluppo di un poliedro può sempre supporsi tutto di un pezzo quando non si escluda che possano esservi delle parti sovrapposte. Solo per evitare queste sovrapposizioni, e anche per altre ragioni che accenneremo in seguito, potrà essere conveniente di avere lo sviluppo formato di più parti distinte.

2ª. Può accadere che uno dei lati del perimetro dello sviluppo venga a adattarsi esattamente su di un altro lato del perimetro stesso; come può accadere che due parti di uno stesso sviluppo vengano a toccarsi per un vertice. Tanto nel primo quanto nel secondo caso si formano nell'interno dello sviluppo, una o più lacune.

3ª. Se un angoloide concavo di un poliedro ha la somma degli angoli piani eguale a 360°, esso si sviluppa su di un piano senza alcuna apertura lungo una qualunque delle sue costole. Questa circostanza si verifica, per esempio, nello sviluppo del dodecaedro regolare di terza specie del Poinsot.

4ª. Allorchè con un dato sviluppo si costruisce il poliedro corrispondente, la linea poligonale, piana o gobba, lungo la quale si riuniscono le diverse facce dello sviluppo, può presentare forme svariate che dipendono dalla forma particolare che è stata data allo sviluppo stesso. Questa linea la diremo la *sutura* del poliedro.

Se lo sviluppo è di un sol pezzo, la *sutura* è una linea spezzata non chiusa che, tal volta presenta la forma più semplice di una linea poligonale ordinaria piana o gobba; tal altra invece può presentare delle rami-

(*) Nella regola generale enunciata è contenuta la soluzione del " Giuoco icosiano di Hamilton, " (vedi *Supplemento al Periodico di Matematica*, fasc. I, 1899), e la soluzione del " Problema dei Ponti " (EULERO. — *Memoria dell'accademia delle Scienze di Berlino*, 1759). Essa, molto probabilmente, dovrebbe anche applicarsi alla soluzione del " Problema del salto del Cavallo " nel giuoco degli scacchi.

ficazioni più o meno complicate ed estese. Se lo sviluppo è di più pezzi la detta sutura è formata da linee poligonali chiuse, ramificate o no.

5ª. Il numero dei lati del perimetro dello sviluppo di un poliedro è sempre pari, poichè nel ricostrurre quel poliedro i lati debbono venire a combaciare due a due.

6ª. Uno sviluppo non può mai essere composto di un numero dispari di pezzi ognuno dei quali abbia un perimetro con numero dispari di lati. Ciò risulta manifesto osservando che, se si immaginano riunite le diverse parti per formare lo sviluppo di un sol pezzo, la somma dei numeri dei lati dei diversi perimetri rimane diminuita di un numero pari, e conseguentemente il perimetro dello sviluppo verrebbe a contenere un numero dispari di lati, ciò che è impossibile.

4. Intorno alla *sutura* del poliedro si può ora dimostrare la seguente proprietà.

Se si percorre con continuità tutto il perimetro dello sviluppo (supposto di un sol pezzo), e si notano i lati alternativamente col segno + e —, dico che in ogni lato della sutura vengono a combaciare due lati del perimetro distinti col segno differente.

Per dimostrare questa proprietà cominciamo ad osservare che se a partire da un vertice qualunque si percorre una linea poligonale aperta, ma non ramificata, fino ad una delle estremità, poi da questa all'altro estremo, e da questo retrocedendo ancora, fino al punto di partenza, e se in questo doppio percorso si assegnano ai lati alternativamente il segno + e —, è chiaro che a cammino compiuto ogni lato della linea poligonale verrà ad essere distinto col segno + e —.

Se la linea poligonale è ramificata, essa verrà percorsa nel modo già detto coll'avvertenza d'intercalare sempre il doppio cammino delle diverse ramificazioni che mano a mano s'incontrano nel percorrere la linea principale.

Con tale avvertenza, anche in questo caso, ogni lato della linea poligonale verrà sempre ad essere distinto col segno + e —.

Si noti che due lati consecutivi della linea poligonale, che hanno in comune il vertice da cui parte una ramificazione, resultano sempre di segno differente, sia che i due lati vengano percorsi successivamente, astrazion fatta dalle ramificazioni fra essi lati interposte, sia che fra il percorso di un lato e il suo consecutivo s'intercali il doppio percorso della ramificazione medesima; e ciò per la ragione che una ramificazione, qualunque sia il numero dei suoi lati, venendo ad essere percorsa due volte, produce un numero pari di cambiamenti di segno, e quindi il lato che precede e quello che segue la ramificazione stessa, vengono egualmente ad essere di segno contrario nell'un caso e nell'altro.

Immaginiamo ora di percorrere, a partire da un vertice V, tutto il perimetro dello sviluppo di un poliedro, e di assegnare alternativamente ai lati il segno + e —. Supponiamo poi di percorrere nello stesso tempo a partire dal vertice corrispondente a V, i due bordi della *sutura* distinguendo ancora i lati alternativamente col $+$ e $-$. Siccome ogni lato, del perimetro, come abbiamo già detto, viene ad avere in ultimo il segno $+$ e $-$, così resta dimostrato che in ciascun lato della *sutura* verranno a concorrere i due lati del perimetro dello sviluppo, distinti con segno contrario.

Per l'applicazione del teorema enunciato è necessario di riguardare i perimetri delle lacune come facenti parte di un unico perimetro, che è quello che limita l'intero sviluppo; e per conseguenza dovremo supporre separati quei lati e vertici di cui abbiamo parlato al n. 3, 2ª.

Questo teorema non è privo di pratica utilità, e ne vedremo un'applicazione nella II parte n. 10 di questo scritto.

5. Veniamo ora a determinare alcune relazioni numeriche tra gli elementi: vertici, facce e lati di un poliedro, e quelli del suo sviluppo che supporremo di un sol pezzo.

Ammetteremo inoltre di riguardare sempre come disgiunti i lati e i vertici dalla unione dei quali si producono nello sviluppo, come abbiamo osservato al n. 3, 2ª, delle lacune, di guisa che, dopo tale operazione, si possa ritenere lo sviluppo stesso come semplicemente connesso.

Ammetteremo infine di avere praticato un taglio lungo uno spigolo di ciascuno angoloide che si trova nelle condizioni dette al n. 3, 3ª, in modo che questo spigolo possa riguardarsi come un doppio lato del perimetro dello sviluppo.

In ciò che segue è poi sottinteso che pei poliedri intrecciati dovremo contare come vertici, lati e facce tutti quelli che compariscono all'esterno e che a rigore non possono considerarsi come elementi del poliedro. Stabiliamo poi le notazioni seguenti: con V, C, F e v, c, f, r ppresenteremo rispettivamente il numero dei vertici delle costole e delle facce del poliedro dato e del relativo sviluppo; con v_i e v_p c_i e c_p rispettivamente i vertici interni e quelli del perimetro, le costole interne e quelle del perimetro dello sviluppo. Ricordiamo inoltre le due relazioni,

1ª. $V - C + F = 2$ (formula di Eulero),

2ª. $v - c + f = 1$ (formula di Cauchy),

che valgono rispettivamente per un poliedro chiuso e per una rete aperta di poligoni.

Ecco ora le principali relazioni relative ai numeri: V, C, F, v, c, f, v_i, v_p, c_i, c_p.

$$\left.\begin{array}{l} 3^a.\ F = f \\ 4^a.\ v = v_p + v_i \\ 5^a.\ c = c_p + c_i \end{array}\right\} \text{sono evidenti}$$

6ª. $v_i = 0$ ovvero che nell'interno dello sviluppo non esiste alcun vertice. Ciò appare manifesto dopo la convenzione fatta intorno allo sviluppo di quegli angoloidi pei quali la somma delle facce eguaglia 4 angoli retti, e dopo la disgiunzione dei lati e dei vertici a cui abbiamo or ora accennato.

$$\left.\begin{array}{l} 7^a.\ v = v_p \\ 8^a.\ v = c_p \end{array}\right\} \text{conseguenza della } 4^a \text{ e } 6^a.$$

9ª. $C = \frac{c_p}{2} + c_i$. Infatti nella costruzione del poliedro, c_i rimane invariato, e c_p si riduce a metà, perchè i lati del perimetro si riuniscono due a due per formare i lati della *sutura*.

10ª. $c_i = F - 1$. Infatti dalla 2ª, tenendo conto della 3ª e 5ª, si ricava:

$$c_p + c_i = v + F - 1$$

la quale, per la 8ª, fornisce la relazione scritta sopra.

La stessa formula, del resto, si dimostra anche direttamente, osservando che quando si effettua lo sviluppo del poliedro secondo il 1° procedimento spiegato, si ha che a partire della prima faccia, le $F - 1$ rimanenti, rimangono unite via via alla parte sviluppata per un solo lato; ciò ben inteso, nella supposizione che si tenga conto della convenzione stabilita al principio di questo numero.

11ª. $c_p = 2(V - 1)$.

Infatti dalla 9ª dalla 10ª e dalla 1ª si ricava

$$c_p = 2\ (C - c_i) = 2(C - F + 1) = 2(V - 1).$$

La stessa relazione può dimostrarsi anche direttamente, osservando che per effettuare lo sviluppo in conformità del 2° metodo spiegato, occorrono $V - 1$ tagli per andare successivamente dal 1° al V^{mo} vertice del poliedro, e questi tagli danno luogo, nello sviluppo, a $2\ (V - 1)$ lati del perimetro.

Si deduce di quì che in qualunque modo venga effettuato lo sviluppo, e comunque vari la forma di esso, il numero dei lati al perimetro rimane sempre costante.

Le relazioni 10ª e 11ª ci dicono che gli sviluppi di due poliedri qualunque, aventi uno stesso numero di facce, contengono uno stesso numero di lati interni, e i perimetri degli sviluppi di due poliedri, aventi uno stesso numero di vertici, contengono un egual numero di lati.

Nell'ipotesi di un poliedro autocorrelativo la 10ª e 11ª ci danno $c_p = 2\,c_i$, ossia che i lati al perimetro dello sviluppo, sono in numero doppio dei lati interni, o anche, per la 9ª, che il numero dei lati della *sutura* è sempre la metà del numero delle costole del poliedro.

12ª. $c = C + V - 1$. Questa eguaglianza resulta dimostrata per le relazioni 5ª, 10ª, 11ª e 1ª.

6. Si considerino ora due poliedri correlativi tra di loro; per uno di essi adotteremo tutte le notazioni già usate, e per l'altro le stesse notazioni coll'aggiunta di un apice. Avremo allora per la condizione stessa di correlatività di due poliedri,

13ª. $V = F'\ ,\ F = V'\ ,\ C = C'$.

Per la 10ª, per le relazioni precedenti e per la 1ª abbiamo,

14ª. $c_i + c'_i = F + F' - 2 = C = C'$.

Per la 11ª, per le relazioni 5ª e per la 1ª si ha pure,

15ª. $c_p + c'_p = 2\ (V + V' - 1) = 2C = 2C'$.

Sommando membro a membro la 14^a e 15^a e tenendo conto per ciascun poliedro della 5^a si ha,

16^a. $c + c' = 3C = 3\,C'$.

Le tre formule ora date ci dicono che negli sviluppi di due poliedri correlativi, la somma dei lati interni, quella dei perimetri e quella di tutti i lati degli sviluppi, hanno rispettivamente per valore una volta, due volte, tre volte il numero delle costole di ciascuno dei poliedri considerati.

Infine dalla proprietà 10^a e 11^a si deduce ancora, per due poliedri correlativi,

17^a. $c_i + c'_p = 3\,(F-1) = 3\,(V'-1)$.

7. Supponiamo ora che allo scopo di togliere le sovrapposizioni che possono presentarsi nello sviluppo di un poliedro, si sia separato questo sviluppo in n parti distinte, e che sieno

$$\begin{array}{l} f_1 \;\; f_2 \ldots\ldots f_n \\ v_1 \;\; v_2 \ldots\ldots v_n \\ c_{p_1} \;\; c_{p_2} \ldots\ldots c_{p_n} \\ c_{i_1} \;\; c_{i_2} \ldots\ldots c_{i_n} \end{array}$$

rispettivamente i numeri delle facce, dei vertici, dei lati del perimetro, e quelli interni di ciascun pezzo; avremo allora le seguenti proprietà:

1^a. Le diverse parti dello sviluppo, allorchè si riuniscono tra di loro per formare lo sviluppo di un sol pezzo, si attaccano l'una all'altra per un sol lato, purchè si tenga conto delle convenzioni stabilite al principio del n. 5.

2^a. $\Sigma f_r = F$. Questa eguaglianza è evidente.

3^a. $\Sigma c_{p_r} = 2\,(V + n - 2)$. Infatti se lo sviluppo fosse tutto di un pezzo, si avrebbe, per la 11^a, $c_p = 2\,(V-1)$. Ora per ogni pezzo di sviluppo che si stacca, si acquistano due lati; quindi per gli n pezzi dello sviluppo avremo,

$$\Sigma c_{p_r} = 2\,(V-1) + 2\,(n-1) = 2\,(V+n-2).$$

Questa relazione può anche dimostrarsi direttamente così:

Gli n pezzi di cui si compone lo sviluppo di un dato poliedro possono riguardarsi (astraendo dalle diverse facce di cui si compone ciascun pezzo) come le n facce di un nuovo poliedro avente lo stesso numero V di vertici del poliedro dato, ed un numero c_s di costole, eguale a quello contenuto nella *sutura* del poliedro. Ora per questo nuovo poliedro abbiamo in virtù della 1^a, $V - c_s + n = 2$ ovvero $c_s = V + n - 2$. Tornando di nuovo a staccare le diversi parte dello sviluppo, tutti i lati della *sutura* si raddoppiano per cui avremo

$$\Sigma c_{p_r} = 2c_s = 2\,(V + n - 2).$$

4^a. $\Sigma c_{i_r} = F - n$. Infatti se lo sviluppo è di un sol pezzo, abbiamo per la 10^a, $c_i = F - 1$; ma per ogni pezzo che si stacca si perde un lato interno, quindi dopo aver ridotto lo sviluppo in n parti, avremo

$$\Sigma c_{i_r} = c_i - (n-1) = F - 1 - (n-1) = F - n.$$

Corollario. — Le due ultime formule, per $n = \mathrm{F}$, danno

$$\Sigma c_{pr} = 2(\mathrm{V} + \mathrm{F} - 2) = 2\mathrm{C},$$
$$\Sigma c_{ir} = 0,$$

resultati facili a prevedersi, perchè se tutte le facce dello sviluppo sono distinte, la somma dei lati di ciascuna faccia è il doppio delle costole del poliedro, e quella dei lati interni dello sviluppo si riduce a zero.

II. — Norme pratiche per la costruzione dei modelli di poliedri in cartone.

8. Per quanto, a parer mio, l'uso dei modelli nell'insegnamento della matematica non sia in generale da incoraggiarsi, tuttavia nello studio di speciali questioni può essere utile, e alcune volte indispensabile, un qualche sussidio materiale. Così per esempio nella teoria dei poliedri regolari e semiregolari di specie superiore, non è facile acquistar un concetto adeguato di questi corpi, senza che degli opportuni modelli non mettano bene in evidenza il modo particolare secondo il quale sono aggregati i diversi elementi che costituiscono quei poliedri; oltre a ciò la presenza di un modello può suggerire l'idea di nuove forme, e far scoprire fra queste e la fondamentale, delle relazioni importanti, che difficilmente, forse, sarebbero state ricavate da un disegno o dallo studio teorico di una determinata serie di poliedri.

Anche in cristallografia è utilissima, specie per i principianti, una buona collezione di modelli, coi quali si possa chiarire meglio il modo di derivare le diverse forme cristalline da alcuni tipi fondamentali.

Ma non sempre si possono avere sott'occhio dei modelli, o perchè non si trovano in commercio, o perchè il loro prezzo elevato non li rende accessibili allo studioso. In tal caso, mettendo da parte l'idea delle costruzioni in legno, perchè troppo costose e non sempre di facile attuazione, non vi ha altro mezzo che di costruirsi, cogli opportuni sviluppi in cartone, i modelli delle diverse forme geometriche che si desiderano. (*)

(*) Nel catalogo del materiale scolastico della Ditta Paravia, sono registrate varie collezioni dei solidi geometrici più semplici e quelle delle principali forme cristalline. Alcuni di questi modelli sono in legno, altri in fili di ferro verniciati rappresentanti la sola parte scheletrica del poliedro. — Modelli in cartone di poliedri regolari, di quelli d'Archimede, di quelli stellati del Poinsot, e di altri poliedri e forme cristallografiche diverse, possono trovarsi presso il Prof. Mariano Clavero J. Guervos, Taragona. — I bellissimi modelli dei quattro poliedri regolari di specie superiore, costruiti in legno sotto la direzione del Prof. Peri fin dal 1861, possono vedersi al R. Istituto Tecnico di Firenze ove fanno parte della numerosa e bella raccolta dei modelli in legno ed in gesso per uso della Scuola di Geometria descrittiva. Uno di questi però (l'icosaedro stellato di settima specie) è incompleto perchè mancante di alcune piccole parti che dovrebbero completare le facce triangolari. Questo difetto sembra ripetere la sua origine dalla stessa omissione che si verifica nella proiezione orizzontale di quel poliedro rappresentato dalla fig. 89 del *Trattato di Geometria descrittiva* dello stesso Prof. Peri.

Oltre i citati possono trovarsi in commercio i disegni, in cartoncino, di sviluppi già preparati per la costruzione di alcuni solidi. Tali sono ad esempio: 1° le collezioni che si trovano nel cata-

Qualcuno potrebbe forse ritenere occupazione puerile, nel campo della matematica, quella delle costruzioni in cartoncino; a me pare invece che esse, oltre soddisfare in molti casi ad un vero e proprio bisogno, possono offrire agli studenti, materia per utili esercitazioni di Geometria descrittiva. Stimo quindi non del tutto inutile di dare ora, per coloro che volessero dilettarsi in questo genere di lavori, alcune norme pratiche suggeritemi dal lungo esercizio che ho avuto occasione di fare nella costruzione di una numerosa collezione di poliedri. (*)

9. Per la costruzione del modello di un corpo geometrico, mediante il suo sviluppo, dovremo anzitutto, procurarci una sua rappresentazione grafica atta a fornire la vera forma e grandezza delle singole facce, e a far conoscere il loro modo di aggruppamento nella formazione dei diversi angoloidi; generalmente può bastare una rappresentazione su due piani coordinati. Lo sviluppo del corpo si disegna su di un cartoncino non troppo fine, affinchè il modello non venga a mancare di una certa solidità, nè troppo grosso per la ragione che diremo poi (n. 11). Il più conveniente è quello dei biglietti da visita (di cui io stesso mi son servito per i modelli ora ricordati) avvertendo bene che sia di qualità da potersi piegare senza troncarsi. Del resto lo spessore del cartoncino deve essere sempre in relazione colla grandezza che si vuol dare al modello.

Lo sviluppo, come abbiamo già osservato nella prima parte, può ottenersi con criterii differenti. Ma quale sarà la forma più conveniente di esso, perchè si possa disegnarlo nel modo più spedito, e perchè si presti alla più facile costruzione del modello? Generalmente la forma speciale del corpo suggerisce la forma più opportuna dello sviluppo; così per es. se la superficie poliedrica può dividersi in parti eguali tra di loro, si potrà disegnare lo sviluppo di una di queste parti; indi postala sopra tanti altri fogli sovrapposti quanti sono le rimanenti parti eguali che abbisognano, si trafora l'insieme con un ago in corrispondenza di ciascun vertice del disegno. Dopo ciò si uniscono in modo conveniente con linee a lapis (il che può farsi anche a mano libera per la ragione che diremo appresso n. 11) i vari punti, allo scopo di distinguere per ogni parte le diverse facce dello sviluppo. Questo procedimento si ripete tante volte quanti sono i gruppi distinti di parti eguali.

Se il corpo non presenta alcuna simmetria, si segue generalmente il metodo fornito dalla prima regola data al n. 1.

---

logo summentovato. — 2º. Le costruzioni n. 86. 87, 88, 89 (Origoni Bianchi, Milano), disegni su quattro cartoncini di 24 figure da ritagliarsi. — 3º. Sviluppo e costruzione di solidi geometrici; 10 tav. con 36 sviluppi. (Enrico Mortara, Saluzzo, tip. Lobetti). — 4º. Catalogo dei modelli e apparecchi per l'insegnamento (Schröder, Darmstadt).

Per il disegno degli sviluppi dei 4 poliedri regolari stellati ed alcuni altri pochi di specie superiore, veggasi Paoni, *Nuove considerazioni sui poligoni e poliedri regolari di specie superiore.* (Le Mounier, Firenze, 1872).

(*) La collezione a cui qui si accenna è quella dei pol. reg. e semireg. di prima specie e di specie sup., di tutte le loro varietà e di tutti i loro correlativi. A questa sono uniti i modelli di alcuni corpi autocorrelativi, e quelli degli sviluppi, nel nostro spazio, di alcuni corpi reg. dello spazio a quattro dimensioni. Questi modelli (circa 200) furono costruiti negli anni 1884-85-86 e presentati alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa nel Giugno del 1886 per la discussione della mia tesi di abilitazione all'insegnamento. Nell'anno successivo comparvero all'Esposizione Circondariale di Spezia ove dal giurì (di cui faceva parte il Prof. Arzelà) vennero giudicati meritevoli del Diploma d'Onore.

Quando il corpo presenta una certa regolarità di forma si può anche procedere in quest'altro modo: Partendo da una faccia F di n lati, si disegnano intorno ad esso tutte le adiacenti che indicheremo con $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$; poi intorno ad ognuna di queste, pure tutte le respettive adiacenti $f_1, f_2, f_3, \ldots$ avendo cura di distribuire simmetricamente fra le $F_1, F_2, \ldots F_n$, quelle tra le f che fossero adiacenti a più di una F. Questo procedimento si continua via via per tutte le altre facce rimanenti. Seguendo un tal metodo lo sviluppo viene ad assumere in generale una forma stellare nella quale le diverse facce appariscono come aggregate intorno ad assi ideali che partono dalla faccia centrale secondo linee rette o curve, e con delle ramificazioni più o meno complicate. Se nel poliedro esista una faccia opposta a quella intorno alla quale è stato effettuato lo sviluppo, essa verrà disegnata in posizione conveniente, di seguito ad una delle facce che si trovano all'estremità di uno di quegli assi ideali.

Ma nel fare lo sviluppo di un poliedro si deve avere riguardo non tanto al modo più o meno semplice secondo il quale può essere disegnato, quanto a quello che offre maggiori facilitazioni per la costruzione del modello. È chiaro che una tale costruzione riuscirà tanto più agevole e perfetta quanto minore è il numero delle commettiture che avremo occasione di fare. Però sotto questo aspetto non si può ottenere alcuna facilitazione per la proprietà espressa dalla relazione 10).

Piuttosto sarà il caso di vedere quale sia la distribuzione, più opportuna da dare ai lati della *sutura,* tenendo presente che un angoloide riuscirà tanto meglio conformato quanto minore è il numero delle commettiture che si dovranno fare lungo i suoi spigoli. A questo riguardo non sarebbe quindi conveniente di ridurre ad un minimo il numero delle commettiture in alcuni di questi angoloidi per averne poi un massimo in altri. Miglior partito è dunque quello di distribuirle egualmente fra i diversi angoloidi; e perciò sarà opportuno di seguire nello sviluppo il 2° procedimento accennato al n. 1, il quale ci dà appunto una sola commettitura per il primo ed ultimo vertice della sutura, e due per tutti i vertici intermedi. Ma per l'appunto questo 2° metodo è, in generale, il meno agevole degli altri; il procedere quindi nella pratica in un modo piuttosto che in un altro, dipenderà unicamente dalla forma speciale del corpo che si deve costruire.

Non sempre lo sviluppo di un corpo può esser fatto di un sol pezzo; qualche volta perchè esso sorpasserebbe i limiti del foglio, tal altra perchè lo sviluppo stesso resulterebbe con delle sovrapposizioni. Ma anche prescindendo da queste impossibilità, spesso si preferisce in più pezzi, specialmente quando questi sono eguali, per poterlo disegnare con maggior speditezza. Certo lo sviluppo di un sol pezzo può essere utile per una maggiore esattezza del disegno potendosi spesso controllare questa esattezza col fatto che per es. alcuni lati debbano passare per uno stesso punto, o più vertici giacere su di una stessa retta, o su di una medesima circonferenza. È per questa ragione che avendo lo sviluppo in più parti, si preferisce qualche volta di riunire queste opportunamente tra di loro allo scopo di dare a ciascuna l'orientazione che loro compete, per potere in tal modo soddisfare esattamente agli eventuali controlli sopra accennati.

Se si aggiungono invece le diverse parti mano a mano che se ne presenta il bisogno nella costruzione del modello, e se la riunione non è fatta in modo perfetto, le facce estreme di quelle parti, specie se queste sono alquanto estese, possono resultare sensibilmente deviate dalla loro giusta posizione, il che può portare a delle deformazioni nel modello per lo sforzo necessario a dover ricondurre quelle facce alla loro opportuna posizione.

Altre volte invece per facilitare la costruzione di un modello di forma molto complicata, come accade ad esempio pei poliedri intrecciati, è preferibile, anche quando lo sviluppo possa farsi di un sol pezzo, di disgiungerlo in più parti che si aggiungeranno poi successivamente mano a mano che se ne presenta il bisogno nella costruzione del modello; in tal modo si evita l'inconveniente di dover maneggiare fin da principio un copioso sviluppo che potrebbe ostacolare la perfetta commettitura delle facce. Ma anche intorno a ciò non si può dare una regola assoluta; è la pratica e la forma speciale del modello che può consigliare volta per volta la via più conveniente da seguire.

Quando lo sviluppo è di più pezzi, si avrà cura di distinguere i lati lungo i quali si debbono riunire le diverse parti per formare lo sviluppo di un sol pezzo, mettendo uno stesso numero d'ordine ai due lati che debbono venire in coincidenza.

10. La costruzione del modello si fa col riunire tra di loro due a due i lati del perimetro dello sviluppo, in modo da formare un unico lato della sutura. Non potendo per il piccolo spessore del cartoncino ottenere questa riunione per i bordi delle facce, si potranno mettere ad alcune di queste delle piccole appendici, che chiameremo *linguette,* alle quali sovrapporre altrettante facce corrispondenti. Queste linguette, anzichè innestarle nella parte posteriore, ciò che porterebbe ad un lavoro più lungo e meno preciso, si preferisce di lasciarle come prolungamento delle facce.

In ogni modo è importante di avere una regola per sapere fin da principio a quali lati del perimetro dovranno esser poste quell'appendici, per evitare che lungo la sutura si presentino due lati muniti o privi di linguette; e perciò si ricorre al teorema del n. 4, il quale ci dice che le linguette si possono lasciare lungo il perimetro dello sviluppo ad un lato sì ed uno no alternativamente, a partire da uno qualunque dei lati.

L'indicazione dei lati che debbono portare quest'appendice si fa col percorrere il perimetro tracciando a mano sulla parte esterna dello sviluppo, e in direzione parallela ai diversi lati che debbono avere le linguette, una linea con lapis colorato. Se lo sviluppo è di più pezzi si percorreranno successivamente e nello stesso modo i perimetri, ricordandoci però di passare da uno ad un altro pezzo tutte le volte che nel cammino s'incontra un lato col numero progressivo il quale ricordi che a quel punto s'innesta un'altra parte dello sviluppo.

Le linguette che uniscono le diverse parti tra di loro rimangono escluse, in generale, dalla regola enunciata, e si potranno lasciare all'uno o all'altro pezzo secondo la convenienza dei casi; può quindi succedere che in alcune parti si presentino tre linguette consecutive. Solamente quando tutti i pezzi hanno un numero pari di lati, tutte le linguette per ogni pezzo separato, appariscono alternate.

Se tutti i pezzi di cui si compone uno sviluppo sono eguali, e ognuno limitato da un numero pari di lati, anche senza supporli riuniti si possono porre le linguette a ciascuno, indipendentemente l'uno dall'altro, colla regola data precedentemente, avendo solo l'avvertenza di cominciare in tutti i pezzi dal medesimo lato. Ma se avessero invece un numero dispari di lati al contorno, allora ricordando che questi pezzi non possono essere in numero dispari (n. 3, 6°) potremo riunirli due a due in modo conveniente, e dopo ciò, resultando ciascun pezzo con un numero pari di lati al perimetro, saremo ricondotti al caso precedente.

11. Disegnato lo sviluppo in tutte le sue parti e fissati i lati del perimetro che debbono portare le linguette, si noteranno con un piccolo tratto di lapis a colore tutti quei lati interni dello sviluppo che sono costole di altrettanti diedri concavi del poliedro. Dopo ciò, posto lo sviluppo su di una solida lastra di cristallo, con un temperino ben tagliente e col sussidio di righe o squadre metalliche, o almeno in legno colla costola metallica, si intaccano a mezza grossezza tutti i lati interni dello sviluppo e tutti quelli del perimetro ove si trovano delle linguette e che corrispondono a costole di diedri convessi del poliedro. Per incidere esattamente il cartone al disotto, in corrispondenza di quei lati che sono invece costole di angoli diedri concavi, si deve aver prima l'avvertenza di forare con un ago agli estremi ed anche (per evitare confusione di punti sul rovescio del foglio ove manca il disegno) alla metà dei diversi lati; poscia, rovesciando il foglio, s'incide ugualmente al disotto il cartoncino in corrispondenza dei diversi punti segnati.

Fatta questa operazione si taglia interamente il cartoncino lungo i lati del perimetro che non contengono linguette, mentre in corrispondenza di questi si fa invece il taglio parallelamente al lato, ad una distanza di circa un centimetro. Si avverta che per eseguire questi tagli e mezzi tagli basta solo di conoscere i vertici delle diverse facce; è quindi inutile, nel disegnare lo sviluppo, di tracciare i lati, a meno che questi non sieno richiesti per altra ragione. Allo scopo però di evitare confusione di punti, specie quando questi sono riportati da altro disegno mediante fori con un ago (n. 9), sarà utile di riunirli convenientemente a mano, tanto per avere un'idea della forma delle diverse facce e del loro modo di aggregazione.

Fatto questo si tolgono le parti del foglio estranee allo sviluppo lasciando le linguette approssimativamente sotto la forma di piccoli rettangoli; indi si piegano le facce e le linguette lungo le rispettive intaccature fino a far combaciare le due parti, e sempre nel senso che tende ad aprire l'intaccatura medesima.

Dicemmo già al n. 9 che il cartoncino sul quale si disegna lo sviluppo non deve essere molto grosso, e ciò per la ragione che le molteplici sovrapposizioni di facce sulle rispettive linguette venendo via via ad aumentare la superficie del poliedro, possono produrre, in ultimo, degli errori non trascurabili e delle deformazioni piuttosto sentite. Per ovviare a questo inconveniente si prende ogni linguetta tra il pollice e l'indice e si fanno poi scorrere le due dita premendo al tempo stesso coll'unghia del pollice lungo l'intaccatura, in modo da potere abbassare la linguetta stessa. Si può anche asportare facilmente la parte del cartoncino che corrisponde al mezzo taglio, e così si ottiene una risega sulla quale viene ad adattarsi lo spessore della faccia che vi si sovrappone. In ultimo se alcune linguette mancano lungo il perimetro per averle inavvedutamente tagliate, dovremo ripristinarle innestandole nella parte superiore delle facce, in modo da lasciare sempre una piccola risega corrispondente alla grossezza del cartoncino.

Prima di accingerci alla costruzione del modello è utile di riscontrare se le diverse facce dello sviluppo vengono bene a combaciare tra di loro, e, mano a mano che si fa questa operazione di prova, si ritagliano le linguette sotto forma di trapezi in modo che gli angoli adiacenti alla base sieno presso a poco eguali (cosa che si giudica ad occhio) agli angoli della faccia che deve venire a sovrapporvisi. Si profitta anche di questa prima prova di ricostruzione del poliedro, per togliere quella piccola elasticità residua che il cartoncino può ancora conservare lungo qualche piegatura, perchè è bene che le diverse parti vengano a combaciare tra di loro senza alcuno sforzo.

12. E dopo ciò si comincia a mettere insieme il modello. Per attaccare le diverse parti tra di loro non è indicata la pasta dei librai perchè non fa *presa* subito e perchè bagnando un po' troppo il cartoncino, può produrre delle deformazioni nel solido. Neppure la gomma o colla liquida in boccette soddisfa bene, perchè anch'essa inumidisce troppo, impiega sempre un po' a far *presa*, ed inoltre col tempo si screpola e le parti si staccano. Meglio di ogni altra materia agglutinante è la colla forte da falegnami, di 1ª qualità, preparata in soluzione ben dosata e leggermente scorrevole. La colla forte ha il vantaggio di seccare rapidamente e di dare forza e consistenza al modello. Si abbia però l'avvertenza, quando si adopra, di mantenerla sempre calda in apposito recipiente riscaldato a bagno-maria, e di distenderla uniformemente con un piccolo pennello di forma piatta e non molto ruvido.

È bene poi di non riunire mai due facce finchè le parti adiacenti non sono solidamente attaccate; per non perder tempo si può passare una lamina scaldata sulla attaccatura fatta, oppure si possono costruire più modelli contemporaneamente attaccando alternativamente le diverse parti in ciascuno di essi; così si guadagna tempo e il lavoro risulta più preciso. Circa l'ordine secondo il quale debbono incollarsi le diverse parti non si può dare una precisa indicazione, perchè anche in questo caso si giudica meglio all'atto pratico. Tuttavia possiamo dire in generale che, siccome le difficoltà nella costruzione del modello vanno sempre aumentando coll'avvicinarsi al termine del lavoro, così sarà utile di mettere insieme dapprima le parti più difficili; inoltre si deve procurare di chiudere il poliedro colla faccia di minore estensione e che ha il minor numero di lati, perchè per essa si richiede un minor numero di attaccature che sono sempre fatte in condizioni poco favorevoli. Per far bene aderire le parti di quest'ultima faccia, si fanno all'esterno delle leggere e convenienti pressioni in modo da produrre il contatto delle linguette sulle quali è stata stesa preventivamente la colla.

Non sempre la cosa però è facile, e tante volte è necessario di ricorrere a dei compensi che il caso suggerisce volta per volta, come ad es. quello di forare il modello, nella parte opposta all'ultima faccia con dei ferri da calza, e con questi opporre un contrasto successivamente alle diverse parti sulle quali si deve fare esternamente una leggiera pressione.

Termineremo queste norme pratiche con alcune osservazioni.

Per render più solide alcune parti del modello, come sarebbero gli angoli molto acuti e molto sporgenti, e in genere tutte quelle parti che sono soggette a guastarsi facilmente, si può colare alcune gocciole liquefatte di buona ceralacca nei punti che debbono essere rinforzati. Parimente nei modelli molto complicati, per impedire le possibili deformazioni che possono verificarsi col tempo, si assicurano le diverse parti, specialmente quelle opposte, con degli steccolini di opportuna lunghezza in modo da mantenerle sempre alla necessaria distanza.

Allo scopo poi di ottenere il modello ben pulito, specialmente se non deve essere tinto in ultimo, si devono togliere con una gomma, prima di cominciare l'incollatura, tutti i segni in lapis, ripulendo poi tutto lo sviluppo con mollica di pane. Durante il lavoro si abbia l'avvertenza di tenere le mani pulite dalla colla, per evitare che appiccicandosi al modello possano produrre dei guasti.

Si badi poi di non imbrattare lo sviluppo con la colla; le gocciole cadute qua e là per caso durante il lavoro, come pure la colla che sopravanza dalle commettiture non si deve mai togliere subito perchè si corre il rischio di sporcare maggiormente il modello. Miglior cosa è quella di aspettare che il lavoro sia terminato e tutte le parti ben seccate, ed allora con un temperino si possono asportare facilmente tutte le gocciole e tutte le sbavature.

Ultima operazione da farsi è quella di riordinare le diverse commettiture, eliminando le piccole irregolarità con un po' di carta vetrata o con una piccola lima a grana sottile; le parti più difettose possono esser corrette con un po' di stucco a colla. Dopo ciò si dà una prima mano di bianco di zinco disciolto con acqua e colla, la quale operazione oltre fare sparire le piccole riseghe lungo le commettiture, serve a rinforzare tutto il modello. Indi con carta vetrata finissima si tolgono tutte le irregolarità della superficie, poi si dà un'altra mano o di bianco di zinco o di colori differenti per le diverse facce, nel caso che queste debbano esser distinte tra di loro. Infine il modello può esser verniciato con vernice coppale, il che oltre dare un migliore aspetto al modello, lo rafforza e lo preserva più facilmente dall'umidità.

A. ANDREINI.

SU ALCUNI DETERMINANTI

Consideriamo alcuni determinanti in cui ogni elemento è funzione del posto che occupa. Se ogni elemento a_{rs} è funzione della sola r, evidentemente il determinante è nullo, perchè ha tutte le colonne uguali. Lo stesso dicasi se a_{rs} è funzione della sola s. Osserviamo anzi, benchè sia ovvio, che ciò che dicesi per la r vale per la s e viceversa, giacchè il sostituire in un ragionamento s ad r equivale a considerare un determinante in cui le linee dell'uno sono le colonne dell'altro. Vediamo qualche esempio di determinanti in cui a_{rs} è funzione sì di r che di s.

a) Sia $a_{rs}=f(r)\,.\,\varphi(s)$. Allora il determinante Δ dell'ordine n^0 corrispondente, sarà

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(1)\,.\,\varphi(1) & f(1)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(1)\,.\,\varphi(n) \\ f(2)\,.\,\varphi(1) & f(2)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(2)\,.\,\varphi(n) \\ f(3)\,.\,\varphi(1) & f(3)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(3)\,.\,\varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(n)\,.\,\varphi(1) & f(n)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(n)\,.\,\varphi(n) \end{vmatrix}=$$

$$=f(1)\,.\,f(2)\,.\,f(3)\dots f(n)\begin{vmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{vmatrix}=0.$$

b) Sia $a_{rs}=f(r)+\varphi(s)$, ossia

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(1)+\varphi(1) & f(1)+\varphi(2) & \dots\dots & f(1)+\varphi(n) \\ f(2)+\varphi(1) & f(2)+\varphi(2) & \dots\dots & f(2)+\varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(n)+\varphi(1) & f(n)+\varphi(2) & \dots\dots & f(n)+\varphi(n) \end{vmatrix}.$$

In questo caso Δ si scompone in 2^n determinanti ad elementi monomi rispetto ad f e φ, dei quali 2^n-n hanno due o più colonne uguali e gli altri n sono della forma

$$\begin{vmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) \ldots\ldots & \varphi(h-1) & f(1) & \varphi(h+1) \ldots\ldots & \varphi(n) \\ \varphi(1) & \varphi(2) \ldots\ldots & \varphi(h-1) & f(2) & \varphi(h+1) \ldots\ldots & \varphi(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(1) & \varphi(2) \ldots\ldots & \varphi(h-1) & f(n) & \varphi(h+1) \ldots\ldots & \varphi(n) \end{vmatrix},$$

dove la colonna ad elementi disuguali occupa rispettivamente il 1°, 2°, 3° .... n° posto. Ma ognuno di essi è uguale alla somma algebrica dei prodotti degli elementi $f(1) f(2) \ldots . f(n)$ pei rispettivi complementi algebrici, che sono determinanti nulli, perchè a linee uguali.

Dunque se $a_{rs}=f(r)+\varphi(s)$, $\Delta=0$.

c) Sia $a_{rs}=\overline{f(r)}^s$. Allora è

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(1) & f(2) & f(3) \ldots\ldots\ldots & f(n) \\ \overline{f(1)}^2 & \overline{f(2)}^2 & \overline{f(3)}^2 \ldots\ldots\ldots & \overline{f(n)}^2 \\ \overline{f(1)}^3 & \overline{f(2)}^3 & \overline{f(3)}^3 \ldots\ldots\ldots & \overline{f(n)}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{f(1)}^n & \overline{f(2)}^n & \overline{f(3)}^n \ldots\ldots\ldots & \overline{f(n)}^n \end{vmatrix}$$

Divisa la prima colonna per $f(1)$, la seconda per $f(2)$ .... la n^a per $f(n)$, resta un determinante di Vandermonde; epperò

$$\Delta=f(1)\,.\,f(2)\,.\,f(3) \ldots . f(n) \prod_{r=1}^{r=n-1} (f(r+1)-f(r))\,(f(r+2)-f(r)) \ldots . (f(n)-f(r)).$$

d) Se in particolare fosse $f(r)=r$ avremmo il determinante studiato nella quistione 472 proposta dal Prof. Cardoso-Laynes.

e) Sia $a_{rs}=(r+s)^m$. Considerando il determinante dell'n° ordine, distinguiamo tre casi, a seconda che $m \lesseqgtr n-1$.

Sia in primo luogo, $a_{rs}=(r+s)^m$ con $m<n-1$.

Ogni elemento è un polinomio di $m+1$ termini epperò il determinante Δ dell'n° ordine si scinde in $(m+1)^n$ determinanti ad elementi monomi. Ognuno di essi ha almeno due colonne o uguali o proporzionali, epperò è nullo, e tale sarà quindi anche Δ.

f) Sia $a_{rs}=(r+s)^{n-1}$. Indichiamo con Δ il determinante dell'n° ordine che ne risulta. Ogni elemento è un polinomio (omogeneo completo) di n termini, epperò Δ si scinde nella somma di n^n determinanti ad elementi monomi, dei quali sono nulli tutti quelli che si ottengono prendendo in Δ almeno due colonne di posto uguale. Sono quindi disuguali da zero solo gli $n!$ determinanti Δ' che si ottengono con colonne di posto disuguale. Ma ogni colonna dei Δ' ha per fattore comune un coefficiente binomiale e la s elevata ad uno dei numeri $0, 1, 2 \ldots , n-1$. La s poi evidentemente ha i valori $1, 2 \ldots . n$ ond'è [illegible] ... [illegible] delle colonne, uno [illegible]

$$\Delta = \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\cdots\binom{n-1}{n-1} 1^{\overline{\mu}_1} 2^{\overline{\mu}_2} 3^{\overline{\mu}_3} \cdots \ [illegible]$$

dove $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\ldots\,\mu_n$ rappresenta una permutazione qualsiasi dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n-1$, e $\overline{\mu}_k = (n-1) - \mu_k$. Anche $\overline{\mu}_1\,\overline{\mu}_2\,\overline{\mu}_3\,\ldots\,\overline{\mu}_n$ è evidentemente una permutazione dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Il valore del determinante è uguale, tranne il segno a quello di

$$(\alpha)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix},$$

che sappiamo essere $(n-1)!\,(n-2)!\,\ldots\,3!\,2!\,1!$ (quistione citata).

Il segno sarà $+$ o $-$, a seconda che la permutazione $\overline{\mu}_1\,\overline{\mu}_2\,\overline{\mu}_3 \ldots$ [illegible] della 1^a o della 2^a classe. Questa sarà della stessa classe o diversa della permutazione $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\ldots\mu_n$ a seconda che $\frac{n(n+1)}{2}$ è pari o dispari. Il determinante Δ è dunque uguale a

$$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1}(n-1)!\,(n-2)!\ldots 3!\,2!\,1!\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\,\Sigma \pm 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots$$

Ma $\Sigma \pm 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots n^{\mu_n}$ è lo stesso determinante (α); e poi evidentemente

$$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}\ldots 2^2 \cdot 1}{1^{n-1}\cdot 2^{n-2}\ldots(n-2)^2(n-1)} =$$
$$= (n-1)^{n-2}(n-2)^{n-4}\ldots 3^{-(n-6)}\,2^{-(n-4)}\,1^{-(n-2)},$$

onde:

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)^{n-2}(n-2)^{n-4}\ldots 3^{-(n-6)}\,2^{-(n-4)}\,1^{-(n-2)}\left\{(n-1)!\,(n-2)!\ldots 3!\,2!\,1!\right\}^2.$$

β) Se fosse $a_{rs} = r^{n-1} + r^{n-2}s + r^{n-3}s^2 + \ldots + s^{n-1}$, evidentemente sarebbe

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\{(n-1)!\,(n-2)!\ldots 3!\,2!\,1!\right\}^2$$

risultato al quale, oltrechè col fare i coefficienti binomiali uguali all'unità, si giunge tosto coll'osservare che il determinante corrispondente è il prodotto di (α) per se stesso in cui però si sia invertito l'ordine delle colonne.

h) Sia $a_{rs}=(r+s)^m$, con $m>n-1$.

Anche qui ogni elemento è un polinomio di $m+1$ termini ed il determinante Δ dell'n^o ordine, si scompone nella somma di $(m+1)^n$ determinanti ad elementi monomi, dei quali sono disuguali da zero solamente i $D_{m+1,n}=(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)$ determinanti che si ottengono prendendo dagli elementi di Δ colonne di posto disuguale. Uno di questi determinanti è della forma

$$\Delta'=\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}\begin{vmatrix}1^{m-\nu_1} & 1^{m-\nu_2} & \ldots & 1^{m-\nu_n}\\ 2^{m-\nu_1} & 2^{m-\nu_2} & \ldots & 2^{m-\nu_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n^{m-\nu_1} & n^{m-\nu_2} & \ldots & n^{m-\nu_n}\end{vmatrix}=$$

$$=\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}\sum\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n},$$

dove $\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\ldots\nu_n$ è una combinazione semplice di n numeri presi fra gli $m+1$ numeri $0,1,2,\ldots m$. Tenendo fissi i numeri $\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\ldots\nu_n$ e facendone tutte le permutazioni, si ottengono $n!$ determinanti, la cui somma è

$$\Delta''=\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}.\sum\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n}.$$

Onde Δ sarà uguale sarà uguale alla somma degli $\binom{m+1}{n}$ prodotti analoghi a Δ'' che si ottengono prendendo tutte le combinazioni semplici di n dei numeri $0, 1, 2\ldots m$. Indicando con $\Sigma_{\binom{m+1}{n}}$ la somma estesa nel modo ora detto, sarà

$$\Delta=\sum_{\binom{m+1}{n}}\left\{\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}.\sum\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n}\right\}.$$

Ciascuno dei determinanti $\Sigma\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}$ e $\Sigma\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n}$ è un determinante (generalizzazione di quello di Vandermonde o di Cauchy) esprimibile mediante le *funzioni omogenee complete* (dette *funzioni aleph* da Wronski) degli elementi di una sua linea.

Si dice funzione omogenea completa di grado k di n quantità $a_1\,a_2\ldots a_n$ lo sviluppo della potenza k^{ma} di $a_1+a_2+\ldots+a_n$ dove ai coefficienti numerici che compariscono in questo sviluppo è stata sostituita l'unità.

Denotando una tale funzione con V_k, si dimostra (cfr. Trudi, "Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici di un'equazione ecc.," *Giornale di Battaglini*, vol. II, pag. 152) che

$$\begin{vmatrix}a_1^{r_1} & a_2^{r_1} & \ldots & a_n^{r_1}\\ a_1^{r_2} & a_2^{r_2} & \ldots & a_n^{r_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{r_n} & a_2^{r_n} & \ldots & a_n^{r_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}V_{r_1} & V_{r_1-1} & \ldots & V_{r_1-n+1}\\ V_{r_2} & V_{r_2-1} & \ldots & V_{r_2-n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ V_{r_n} & V_{r_n-1} & \ldots & V_{r_n-n+1}\end{vmatrix}$$

dove $r_1\,r_2\ldots r_n$ sono numeri interi qualunque.

In virtù di questa formola sarà

$$\Sigma\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots\ldots n^{\nu_n}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots 1\\ 1 & 2 & \ldots n\\ 1^2 & 2^2 & \ldots n^2\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots n^{n-1}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}V'_{\nu_1} & V'_{\nu_1-1} & \ldots V'_{\nu_1-n+1}\\ V'_{\nu_2} & V'_{\nu_2-1} & \ldots V'_{\nu_2-n+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ V'_{\nu_n} & V'_{m-\nu_n-1} & \ldots V'_{m-\nu_n-n+1}\end{vmatrix},$$

e

$$\Sigma\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{\nu_n}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots 1\\ 1 & 2 & \ldots n\\ 1^2 & 2^2 & \ldots n^2\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots n^{n-1}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}V'_{m-\nu_1} & V'_{m-\nu_1-1} & \ldots V'_{m-\nu_1-n+1}\\ V'_{m-\nu_2} & V'_{m-\nu_2-1} & \ldots V'_{m-\nu_2-n+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ V'_{\nu_n} & V'_{\nu_n-1} & \ldots V'_{\nu_n-n+1}\end{vmatrix},$$

dove con V'_i indichiamo la funzione omogenea completa di grado i dei numeri $1, 2, \ldots . n$. Onde possiamo porre

$$\Delta=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\{(n-1)!\,(n-2)!\ldots\}^2\sum_{\binom{m+1}{n}}\left\{\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\ldots\binom{m}{\nu_n}\begin{vmatrix}V'_{\nu_1}V'_{\nu_1-1}\ldots V'_{\nu_1-n+1}\\ V'_{\nu_2}V'_{\nu_2-1}\ldots V'_{\nu_2-n+1}\\ \ldots\ldots\\ V'_{\nu_n}V'_{\nu_n-1}\ldots V'_{\nu_n-n+1}\end{vmatrix}\times\right.$$

$$\left.\times\begin{vmatrix}V'_{m-\nu_1}V'_{m-\nu_1-1}\ldots V'_{m-\nu_1-n+1}\\ V'_{m-\nu_2}V'_{m-\nu_2-1}\ldots V'_{m-\nu_2-n+1}\\ \ldots\ldots\\ V'_{m-\nu_n}V'_{m-\nu_n-1}\ldots V'_{m-\nu_n-n+1}\end{vmatrix}\right\}.$$

i) Se fosse $a_{rs}=r^m+r^{m-1}s+\ldots+rs^{m-1}+s^m$, ossia $a_{rs}=(r,s)^m$ usando una notazione usata già dal Prof. Trudi (*loc. cit.*) per designare la funzione omogenea completa di grado m di r ed s, il determinante dell'n^o ordine (nella condizione prima posta che sia $m>n-1$) è

$$\begin{vmatrix}(1,1)^m(1,2)^m\ldots(1,n)^m\\ (2,1)^m(2,2)^m\ldots(2,n)^m\\ \ldots\ldots\\ (n,1)^m(n,2)^m\ldots(n,n)^m\end{vmatrix}=$$

$$=(1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\{(n-1)!\,(n-2)!\ldots 2!\,1!\}^2\sum_{\binom{m+1}{n}}\left\{\begin{vmatrix}V'_{\nu_1}V'_{\nu_1-1}\ldots V'_{\nu_1-n+1}\\ V'_{\nu_2}V'_{\nu_2-1}\ldots V'_{\nu_2-n+1}\\ \ldots\ldots\\ V'_{\nu_n}V'_{\nu_n-1}\ldots V'_{\nu_n-n+1}\end{vmatrix}\times\right.$$

$$\left.\times\begin{vmatrix}V'_{m-\nu_1}V'_{m-\nu_1-1}V'_{m-\nu_1-n+1}\\ V'_{m-\nu_2}V'_{m-\nu_2-1}V'_{m-\nu_2-n+1}\\ \ldots\ldots\\ V'_{m-\nu_n}V'_{m-\nu_n-1}V'_{m-\nu_n-n+1}\end{vmatrix}\right\}.$$

l) Tenendo conto del risultato del paragrafo *g*), e notando che

$$r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+rs^{n-2}+s^{n-1}=(r,s)^{n-1}$$

possiamo dire che il determinante dell'n^o ordine in cui ogni elemento è la funzione omogenea completa di grado $n-1$ degli indici dell'elemento stesso, è uguale a

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\{(n-1)!\,(n-2)!\ldots 3!\,2!\,1!\right\}^2$$

m) Sia, per ultimo, $a_{rs}=(r+s)^{r-1}$.

La prima linea del determinante Δ dell'n^{o} ordine, che ne risulta, ha per elementi dei monomi (l'unità), la seconda dei binomi, la terza dei trinomi, ... la n^{a} dei polinomi di n termini.

Si può scomporre Δ, come è noto, in n^{n} altri determinanti, supponendo tutti gli elementi polinomi di n termini, rimpiazzando collo zero quelli che mancano. Di questi determinanti sono disuguali da zero solamente gli $n!$, che si ottengono prendendo da Δ colonne di posto disuguale. In ognuno di essi le n colonne hanno, in un ordine qualsiasi, $0, 1, 2 \ldots. n-1$ primi elementi nulli, il primo elemento non nullo è in ciascuna colonna s^{r-1}; mediante scambi di colonne si può ridurre ogni determinante ad avere nulli tutti gli elementi alla destra della diagonale principale, epperò il suo valore è il prodotto degli elementi della diagonale principale stessa $1^{\mu_1}2^{\mu_2}3^{\mu_3}\ldots. n^{\mu_n}$, essendo $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3 \ldots. \mu_n$ una permutazione di $0, 1, 2 \ldots. n-1$. Onde è

$$\Delta = \Sigma \pm 1^{\mu_1}2^{\mu_2}3^{\mu_3}\ldots. n^{\mu_n}=(n-1)!\,(n-2)!\,(n-3)!\ldots 3!\,2!\,1!$$

Bologna, febbraio 1900.

FILIPPO SIBIRANI.

SOPRA UN PROBLEMA DI ANALISI INDETERMINATA

PROBLEMA. *Risolvere in numeri interi e non negativi l'equazione*

(1) $$\mathrm{a}x + \mathrm{b}y = \mathrm{c}$$

essendo a, b, c *interi non negativi ed* a *e* b *diversi da zero e primi fra loro.* (*)

RISOLUZIONE. Distingueremo quattro casi.

Primo caso. $a=1$, $b=1$. Manifestamente la (1) ha allora le $c+1$ soluzioni

$$(x=0,\ y=c),\quad (x=1,\ y=c-1)\ldots\quad (x=c,\ y=0).$$

Secondo caso. Uno (solo) dei due numeri a, b sia 1; sia per es. $a>1$, $b=1$. Allora, se q è il quoziente ed r il resto della divisione di c per a, la (1) ci dà

(*) Intendo di presentare sotto forma forse più comoda nella pratica la notissima risoluzione di questo problema.

$y = a(q - x) + r$, la quale manifestamente ha le $q+1$ soluzioni, che si ottengono per $x = 0, 1 \ldots q$,

$$(x = 0,\ y = c) \ldots \quad (x = q,\ y = r).$$

Terzo caso. $a > 1$, $b > 1$ e c divisibile per a (o per b). Sia per esempio $c = aq$. Allora dalla

$$ax + by = aq$$

segue che y è un multiplo di a; pongasi $y = az$. Resterà l'equazione

$$x + bz = q,$$

che rientra nel secondo caso.

Quarto caso. $a > 1$, $b > 1$ e c non divisibile nè per a nè per b.

Intanto lo sviluppo di $\frac{a}{b}$ in frazione continua darà luogo ad almeno due quozienti incompleti non nulli, epperò ad almeno due ridotte non nulle; l'ultima di queste è $\frac{a}{b}$; sia $\frac{p}{q}$ la penultima. Avremo

$$aq - bp = \pm 1,$$

e si potrà supporre (scambiando, ove occorra, a, p, x con b, q, y rispettivamente) che sia appunto

$$aq - bp = 1. \tag{2}$$

Da questa abbiamo

$$a\,(qc) + b\,(-pc) = c,$$

epperò ogni soluzione intera di (1) sarà della forma

$$\begin{cases} x = qc - bt \\ y = -pc + at, \end{cases} \tag{3}$$

essendo t un intero arbitrario.

Indichiamo con $\left(\frac{pc}{a}\right)$ e $\left(\frac{qc}{b}\right)$ le parti intere di $\frac{pc}{a}$ e $\frac{qc}{b}$ e con α e β i rispettivi resti. Avremo

$$\begin{cases} pc = \left(\frac{pc}{a}\right) a + \alpha, \\ qc = \left(\frac{qc}{b}\right) b + \beta; \end{cases} \tag{4}$$

e poichè a per la (2) è primo con p e per ipotesi a non divide c, sarà $\alpha > 0$. Similmente sarà $\beta > 0$.

Ciò posto le (3) si potranno scrivere

$$\begin{cases} x = \left\{\left(\frac{qc}{b}\right) - t\right\} b + \beta \\ y = \left\{t - \left(\frac{pc}{a}\right) - 1\right\} a + (a - \alpha). \end{cases} \tag{5}$$

Poniamo ora

$$u = \left(\frac{qc}{b}\right) - t, \qquad v = t - \left(\frac{pc}{a}\right) - 1,$$

che equivalgono all'unica

$$u + v = \left(\frac{qc}{b}\right) - \left(\frac{pc}{a}\right) - 1. \tag{6}$$

Allora le (5) diverranno

$$\begin{cases} x = bu + \beta \\ y = av + (a - \alpha) \end{cases} \tag{7}$$

con u e v soddisfacenti a (6) ed interi. È chiaro che se u o v sono interi negativi le (7) ci danno per x o per y valori negativi, perchè $\beta < b$ e $a - \alpha < a$. Sicchè si otterranno tutte le soluzioni intere non negative di (1) dalle (7) prendendo u e v interi non negativi soddisfacenti a (6).

Si può avere un controllo dei resultati (7) calcolando il quoziente Q e il resto R della divisione di c per ab. Così da $c = Qab + R$ si ricava

$$pc = Qpab + pR, \qquad qc = Qqab + qR,$$

e quindi

$$\left(\frac{pc}{a}\right) = Qpb + \left(\frac{pR}{a}\right), \qquad \left(\frac{qc}{b}\right) = Qqa + \left(\frac{qR}{b}\right). \tag{8}$$

e poi per le (4)

$$pR = \left(\frac{pR}{a}\right)a + \alpha, \quad qR = \left(\frac{qR}{b}\right)b + \beta;$$

e queste ultime ci provano intanto che α e β sono ancora i resti delle divisioni per a e b rispettivamente di pR e qR. Inoltre da (8) abbiamo

$$\left(\frac{qc}{b}\right) - \left(\frac{pc}{a}\right) = Q(qa - pb) + \left(\frac{qR}{b}\right) - \left(\frac{pR}{a}\right);$$

sicchè, osservando alla (2) e ponendo per brevità

$$\rho = \left(\frac{qR}{b}\right) - \left(\frac{pR}{a}\right), \tag{9}$$

la (6) si può anche scrivere

$$u + v = Q + \rho - 1. \tag{10}$$

Quanto a ρ dato da (9) si può vedere che è zero od uno. Infatti, essendo per la (2) $\frac{q}{b} > \frac{p}{a}$, sarà $\left(\frac{q}{b}\right) \geq \left(\frac{p}{a}\right)$ epperò $\rho \geq 0$; inoltre, avendosi

$$\rho = \frac{qR - \beta}{b} - \frac{pR - \alpha}{a} = \frac{R(aq - bp) + b\alpha - a\beta}{ab} = \frac{R + b\alpha - a\beta}{ab},$$

per essere $R < ab$, $b\alpha < ab$, $a\beta < ab$ si ha $R + b\alpha - a\beta < 2ab$, sicchè $\rho < 2$; cioè appunto $\rho = 0$ oppure $\rho = 1$.

Da (10) risulta che la (1) ha $Q + \rho$ soluzioni intere e positive, cioè $Q + 1$ ovvero Q soluzioni intere e positive, secondochè $\rho = 1$ oppure $\rho = 0$. In particolare per $Q = 0$ si ottiene che la

$$ax + by = R \tag{11}$$

ha una soluzione in numeri interi e positivi o non ne ha nessuna, secondochè $\rho = 1$ oppure $\rho = 0$. Si può dunque concludere che *la* (1) *nel quarto caso* *ha* $Q+1$ *ovvero* Q *soluzioni intere e positive, secondochè la* (11) *ha o non ha una tale soluzione.* Questa conclusione è valida anche nei casi primo, secondo e terzo; infatti si trova allora che la (11) ha sempre una soluzione in numeri interi e non negativi e che il numero totale dei sistemi di soluzioni intere e non negative della (1) è $Q+1$. (Cfr. Bertrand, *Algebra.*)

La (10) ci dice ancora che il minimo valore di Q pel quale la (1) ha soluzioni intere e positive è nel quarto caso $Q=1-\rho$; allora poi si ha $u=0$, $v=0$; dunque, poichè le (6) ci danno in tal caso $x=\beta$, $y=a-\alpha$, vediamo che quest'ultima è la soluzione dell'equazione

$$ax+by=R+(1-\rho)\,ab;$$

e questa relazione può servire appunto di comodo controllo ai numeri α e β.

Diciamo *complementari* due numeri interi non negativi la cui somma sia ab. Se di due numeri complementari uno è multiplo di a (o di b) anche l'altro manifestamente è tale. Ora ogni numero minore di ab che sia multiplo di a è della forma $ax+by$ con $y=0$ ed $x\leq b-1$; dunque tali numeri sono in numero di b; similmente i numeri minori di ab e multipli di b sono della forma $ax+by$ e sono in numero di a. Dunque i numeri minori di ab e multipli di a o di b sono (poichè a e b sono primi fra loro) in numero di $a+b-1$. I numeri minori di ab e non multipli di a o di b saranno perciò in numero di $ab-(a+b-1)=(a-1)(b-1)$, e formeranno $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$ coppie di numeri complementari. Sia R, R' una di tali coppie. Essendo $R+R'=ab$, dalle

$$Rp=\left(\frac{Rp}{a}\right)a+\alpha \qquad Rq=\left(\frac{Rq}{b}\right)b+\beta$$

ricaveremo

$$R'p=\left\{bp-\left(\frac{Rp}{a}\right)-1\right\}a+(a-\alpha) \qquad R'q=\left\{aq-\left(\frac{Rq}{b}\right)-1\right\}b+(b-\beta)$$

epperò

$$\left(\frac{R'p}{a}\right)+\left(\frac{Rp}{a}\right)=bp-1 \qquad \left(\frac{R'q}{b}\right)+\left(\frac{Rq}{b}\right)=aq-1.$$

Da cui, se ρ' è ciò che diventa ρ quando in (9) si cangia R in R', otteniamo: $\rho'+\rho=aq-bp=1$; dunque se $\rho=0$ si ha $\rho'=1$ e se $\rho=1$ si ha $\rho'=0$. Cioè: *di due numeri complementari non multipli nè di* a *nè di* b *uno ed uno solo è della forma* ax + by.

Segue di qui: *i numeri minori di* ab *che non sono della forma* ax + by *sono in numero di* $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$. Siccome poi fra questi vi sono evidentemente quei non multipli di a o di b che sono minori di $a+b$, così in particolare concludiamo: *gli* a + b − 1 *numeri*

$$ab-1,\ ab-2, \ldots\ldots ab-(a+b)+1$$

sono tutti della forma ax + by, perchè sono complementari o dei precedentemente considerati oppure di multipli di a o di b.

G. Sforza.

ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA

Si consideri un triangolo ABC *la cui base* BC = 2a *sia fissa, ed i cui angoli* B *e* C *siano legati tra loro da una relazione.* A seconda delle varie forme di questa relazione, si trovano dei resultati interessanti pei luoghi del vertice C e dell'ortocentro H del triangolo ABC.

Prendendo per assi cartesiani la retta BC e la perpendicolare ad essa condotta pel suo centro O, e designando con (α, β) le coordinate di A e con (x, y) quelle dell'ortocentro H del triangolo ABC, si trova

$$(1) \qquad \alpha = x \quad , \quad \beta = \frac{a^2 - x^2}{y},$$

cosicchè il luogo di H è la trasformata del luogo di A, cangiando nell'equazione del luogo di A, α in x e β in $\dfrac{a^2 - x^2}{y}$.

Ecco alcuni resultati, lasciando la cura di trovarne altri a quei lettori che s'interessano di questa quistione.

1° $\tan B = \tan^2 C$

Luogo di A $\quad (\alpha + a)^2 + \beta(\alpha - a) = 0$ . . . . . iperbole
Luogo di H $\quad (x - a)^2 - y(x + a) = 0$ . . . . . „

2° $\tan B = \tan^3 C$

Luogo di A $\quad (\alpha + a)^3 + \beta^2(\alpha - a) = 0$ . . . . . cissoide retta
Luogo di H $\quad (x - a)^3 + y^2(x + a) = 0$ . . . . . „

3° $\tan B = k \cot C$ o $\operatorname{tg} B \tan C = k$

Luogo di A $\quad k\alpha^2 + \beta^2 = ka^2$ . . . . conica
Luogo di H $\quad x^2 + ky^2 = a^2$ . . . . „

4° $\tan B = \cot^2 C$

Luogo di A $\quad \beta^3 = (a + \alpha)^2(a - \alpha)$ . . . . cubica
Luogo di H $\quad y^3 = (a + x)(a - x)^2$ . . . . „

5° $\tan B - \cot 2C$

Luogo di A $\quad \beta^2(3a + \alpha) = (a - \alpha)(a + \alpha)^2$ . . sferoide retta
Luogo di H $\quad x^2 + y^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ . . . . . circolo

6° $B = 180° - 2C$

Luogo di A $\quad \alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 3a^2 = 0$ . . . . . circolo
Luogo di H $\quad y^2(3a - x) = (x - a)^2(2 + a)$ . . strofoide retta

7° $B = 2C$

Luogo di A $\quad 3\alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0$. . . . . . iperbole
Luogo di H $\quad y^2(3x - a) = (x - a)^2(2 + a)$. . . cubica

8° $\tan B + \tan C = k$

Luogo di A $k\alpha^2 + 2a\beta - ka^2 = 0$ . . . . parabola

Luogo di H $ky = 2a$ . . . . retta

9° $\dfrac{\tan B}{\tan C} = k$

Luogo di A $\alpha(k+1) = a(k-1)$ . . . . retta

Luogo di H $x(k+1) = a(k-1)$ . . . . „

10° $\dfrac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, C} = k$

Luogo di A $(\alpha^2+\beta^2)(1-k^2)+2a\alpha(1+k^2)+a^2(1-k^2)=0$ circolo

Luogo di H $y^2[(x^2+a^2)(1-k^2)+2ax(1+k^2)]+(1-k^2)(x^2-a^2)^2=0$ quartica

11° $\tan B \tan C = -1$ o $B - C = 90°$. È il 3° caso per $k = -1$

Luogo di A $\alpha - \beta^2 = a^2$ . . . . iperbole equilatera

Luogo di H $x^2 - y^2 = a^2$. . . . . „

12° $\tan B = \text{sen}\, C$

Luogo di A $\beta^2 + 4a\alpha = 0$ . . . . parabola

Luogo di H $(x^2 - a^2)^2 + 4\,axy^2 = 0$ . . . . . . quartica

13° $\tan 2B = \text{sen}\, 2C$

Luogo di A $\alpha\beta^2 = a(\alpha^2 - a^2)$ . . . . cubica

Luogo di H $xy^2 = a(x^2 - a^2)$. . . . . „

14° $\tan B = \text{sen}\, 2C$

Luogo di A $3\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0$ . . . . . ellisse

Luogo di H $(3x - a)y^2 + (x - a)^2(x + a) = 0$ cubica

15° $\tan B = -\text{sen}\, 2C$

Luogo di A $\alpha^2 - \beta^2 - 2a\alpha - 3a^2 = 0$ . . . . . iperbole equilatera

Luogo di H $y^2(x - 3a) = (x + a)(x - a)^2$ . . cubica

16° $\tan 2B = -\text{sen}\, 2C$

Luogo di A $\alpha\beta^2 = a(a^2 - \alpha^2)$ . . . . cubica

Luogo di H $ay^2 = x(a^2 - x^2)$. . . . . „

17° $\tan^2 B + \tan^2 C = k^2$

Luogo di A $2\beta^2(\alpha^2 + a^2) = k^2(\alpha^2 - a^2)^2$ . . . . quartica

Luogo di H $k^2y^2 - 2x^2 = 2a^2$ . . . . iperbole

(Equilatera per $k^2 = 2$)

Si può anche cercare il luogo geometrico di altri punti notevoli del triangolo. Come le coordinate dell'ortocentro H sono

(2) $$x = \alpha \quad , \quad y = \frac{a^2 - \alpha^2}{\beta} \, .$$

così si trova che quelle del centro del circolo dei nove punti (X, Y) e quelle del punto di Lemoine (ξ, η) sono

$$(3) \qquad x = \frac{\alpha}{2}, \qquad y = \frac{\beta^2 - \alpha^2 + a^2}{4\beta},$$

$$(4) \qquad \xi = \frac{4a^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 3a^2}, \qquad \eta = \frac{\beta}{2\alpha}\cdot\xi.$$

Si avrà l'equazione del luogo di (x, y), eliminando α, β fra le due equazioni (3) e l'equazione del luogo di A, e similmente quella del luogo di (ξ, η) eliminando α, β fra le due equazioni (4) e l'equazione del luogo di A.

È da notarsi che si ha

$$X = \frac{x}{2} \qquad Y = \frac{a^2 - x^2 + y^2}{4y}$$

Ecco alcuni semplici risultati relativi ai casi precedenti

3°	$4X^2 + 16kY^2(k+1)^2 = a^2$	conica
8°	$4k^2X^2 + 8akY = (k^2+4)\,a^2$	parabola
11°	$Y = 0$	asse x
	$(\xi^2 - 2y^2)^2 = a^2(\xi^2 - 4\eta^2)$	quartica.

Osservazione. — Le formole (4) mostrano che, se il vertice A del triangolo ABC di cui la base è fissa descrive il circolo $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, il punto di Lemoine del triangolo ABC descrive un'ellisse.

E.-N. Barisien.

SULLE FIGURE PIANE UGUALI

Nella teoria elementare delle *figure piane uguali* (argomento che viene svolto nel 2° biennio degli Istituti Tecnici) si suole ottenere il *punto unito* (corrispondente a sè stesso) *di due figure piane direttamente uguali* come l'intersezione O, se esiste, degli assi di due segmenti AA′, BB′ condotti tra punti corrispondenti; ora per questo bisognerebbe dimostrare che i due triangoli uguali AOB, A′OB′ lo sono *direttamente*, ciò che non risulta immediatamente da codesta costruzione. Riguardo poi alla *retta unita di due figure piane inversamente uguali*, essa viene ottenuta come congiungente dei punti medî di due segmenti AA′, BB′ condotti tra punti corrispondenti, e questo mediante una dimostrazione certamente non semplicissima.

Quanto ho detto può verificarsi consultando il *Trattato* dei Sannia e D'Ovidio (§ 110 delle ultime edizioni).

Ai miei giovani dell'Istituto tratto queste due questioncine giovandomi di un semplice lemma, che mi permette di dare una dimostrazione completa della prima questione, e di risolvere in modo breve e piano la seconda.

Ne espongo lo svolgimento procedendo sulle traccie dello svolgimento corrispondente che si trova nel *Trattato* dei SANNIA e D'OVIDIO, allo scopo di raccogliere la trattazione nei termini più ristretti, tralasciando quanto ivi è premesso.

LEMMA. — *Due figure piane inversamente uguali aventi un punto unito* (un punto corrispondente a sè stesso) *sono simmetriche rispetto ad una retta che passa per quel punto.*

Sia O un punto unito di due figure inversamente uguali, e siano A, A′ due punti corrispondenti: sarà $OA = OA'$. Si conduca la bisettrice OO_1 dell'angolo AOA, e si rovesci la seconda figura intorno ad OO_1: le due figure divengono direttamente uguali, e di più siccome il segmento OA′ viene a coincidere col segmento corrispondente OA, le due figure verranno a coincidere con tutti i loro punti. Segue da ciò che, se rimettiamo la seconda figura nella posizione primitiva, ogni suo punto B′ determinerà col suo corrispondente B un segmento avente per asse la OO_1; cioè le due figure sono simmetriche rispetto all'asse OO_1.

TEOREMA 1°. — *Due figure piane direttamente uguali hanno, in generale, un punto unito; e le due figure si possono rendere coincidenti rotando una di esse intorno a questo punto nel piano comune.*

Infatti, siano A, B due punti della prima figura, e A′, B′ i corrispondenti punti della seconda: sarà $AB = A'B'$. Dei segmenti AA′, BB′ conduciamo gli assi; escludendo che AA′, BB′ siano paralleli (caso che esamineremo a parte), gli assi di tali segmenti si secheranno in un punto O. Sarà $OA = OA'$, $OB = OB'$; onde i due triangoli AOB, A′OB′ saranno uguali, e lo saranno direttamente, giacchè altrimenti i due triangoli (pel lemma dimostrato) sarebbero simmetrici, e quindi le AA′, BB′ sarebbero parallele, ciò che si è escluso. Dunque se si fa rotare per esempio la seconda figura intorno ad O dell'angolo A′OA in modo che il segmento OA″ venga a coincidere col suo uguale OA, i due triangoli AOB, A′OB′ e le intere due figure direttamente uguali verranno a coincidere con tutti i loro punti.

Scolio 1°. — Sul punto unito O si può notare quanto segue:

1°. Esso è equidistante da due punti corrispondenti qualunque C, C′, e quindi esso è il punto di concorso degli assi dei segmenti come CC′.

2°. Dista egualmente da due rette corrispondenti qualunque, e quindi è il punto di concorso delle bisettrici degli angoli formati da ciascuna retta con la corrispondente presa in direzione opposta.

3°. Gli angoli A′OA, B′OB, C′OC,... risultano uguali tra loro e all'angolo di due direzioni corrispondenti.

4°. Da tale eguaglianza di angoli segue che per O passano tutte le circonferenze individuate da due punti corrispondenti e dal punto di concorso di due rette corrispondenti condotte per essi.

Scolio 2°. — Se i segmenti AB, A′B′ sono paralleli e in direzione opposta, AA′, BB′ risultano le diagonali di un parallelogrammo e il punto O coincide col loro punto medio. L'angolo A′OA risulta in tal caso un angolo piatto.

Scolio 3°. — Nella dimostrazione del teorema si è escluso che AA′, BB′, risultino paralleli. Quando ciò accada, essendo i due segmenti uguali AB, A′B′ compresi tra le rette parallele AA′, BB′, potranno darsi due casi:

1°. I due segmenti AB, A′B′ (o i loro prolungamenti) concorrono in un punto O, vertice dei due triangoli isosceli AOA′, BOB′; allora il punto di concorso O risulta unito ed AOA′ è l'angolo di cui deve rotare una delle figure per coincidere coll'altra.

2°. I due segmenti AB, A'B' sono paralleli e con la medesima direzione (equipollenti): tali risultano due segmenti corrispondenti qualunque, e i segmenti che uniscono due punti corrispondenti sono tutti equipollenti al segmento AA': quindi con la traslazione di una delle figure, per es. la seconda, lungo la A'A, quando A' sarà venuto a coincidere con A, coinciderà anche B' con B, e ciascun punto della seconda figura col suo corrispondente della prima. Manifestamente in tale caso non esistono punti uniti delle due figure.

Teorema 2°. — *Due figure piane inversamente uguali hanno sempre una retta unita; e le due figure si possono, in generale, rendere coincidenti mediante una traslazione e una rotazione secondo detta retta.*

Siano AB, A'B' due rette corrispondenti di due figure inversamente uguali. Escludendo che tali rette siano parallele (caso che esamineremo a parte), essi si secheranno in un punto O. Se O è un punto unito delle due figure, queste (pel lemma dimostrato) sono simmetriche rispetto alla bisettrice OO_1 dell'angolo AOA', e le due figure si rendono coincidenti con una semplice rotazione di una di esse intorno all'asse di simmetria (retta unita). Se invece il punto d'incontro delle AB, A'B' non è punto unito delle due figure, considerato come punto O della prima, avrà per corrispondente un punto O' della A'B', e considerato come punto P' della seconda, avrà per corrispondente un punto P della AB. Sarà OP = O'P', e i punti medi M, M' di questi segmenti saranno punti corrispondenti. Conducasi la retta MM': con la traslazione di una delle due figure, per es. della seconda, lungo la M'M fino a che M' venga a coincidere con M, le due figure inversamante uguali avranno, nella nuova posizione, il punto unito M, e saranno quindi simmetriche rispetto alla retta MM', che è bisettrice di due direzioni corrispondenti: perciò le due figure verranno a coincidere rotando una di esse intorno alla MM'. La retta MM', che è unita rispetto alle due figure simmetriche, sarà pure unita rispetto alle due figure considerate nella posizione primitiva.

Scolio 1°. — Circa alla retta MM' si può notare quanto segue:

1°. Essa passa per i punti medi dei segmenti condotti tra punti corrispondenti. Invero, siano A_1, A'_1 le proiezioni di A, A' sulla MM': quando le due figure sono rese simmetriche nel modo anzidetto, A'_1 coincide con A', e quindi sarà $AA_1 = A'A'_1$, da cui si deduce facilmente che la MM' taglia il segmento AA' nel suo punto medio. E si deduce ancora che la MM' ha distanze uguali ed opposte da due punti corrispondenti.

2°. La MM' fa con due direzioni corrispondenti qualunque angoli uguali, in modo da riuscire parallela alla bisettrice dell'angolo delle due direzioni corrispondenti.

Scolio 2°. — Nella dimostrazione del teorema si è escluso che le due rette corrispondenti AB, A'B' siano parallele. Se ciò accade potranno darsi due casi:

1°. Le due parallele AB, A'B' hanno stessa direzione. Allora la retta unita è la retta che biseca la striscia delle AB, A'B.

2°. Le due parallele AB, A'B' hanno direzione opposta. In tal caso la retta unita si ottiene conducendo pel punto d'incontro delle AA', BB' la perpendicolare alle AB, A'B'.

In entrambi questi due casi la retta unita ha le proprietà del caso generale; solamente è diverso il modo di costruirla partendosi da due rette corrispondenti speciali.

Macerata, gennaio 1900.

E. Maccaferri.

SUI NODI DELLE GEODETICHE DEL CONO

Com'è noto, per una superficie si chiama geodetica quella linea che tiene lo stesso ufficio (entro certi limiti) della retta nel piano. Per un'estesa classe di superficie, dette sviluppabili per la proprietà che hanno di potersi distendere su di un piano, si può ottenere una geodetica mediante la traccia lasciata su queste da una qualunque retta di questo piano. Limitandomi nel presente articolo a una speciale superficie di questa classe, il cono, mi propongo di far conoscere una notevole proprietà delle geodetiche di questa superficie espressa dal seguente

Teorema. — *Ogni geodetica di un dato cono presenta nel suo percorso un numero finito di nodi tutti reali.*

In un piano π siano dati una retta g e un punto V fuori di essa. Si abbassi da V la perpendicolare VP_0 a g e da una parte e dall'altra di VP_0, col vertice in V si costruiscano due angoli $P_0\widehat{V}P_1$, $P_0\widehat{V}P'_1$ eguali ad un angolo dato α, che si supporrà minore o tutt'al più eguale a $\frac{\pi}{2}$. Se poi α è minore od eguale a $\frac{\pi}{4}$, sempre col vertice in V si costruiscano sui lati VP_1, VP'_1 due altri angoli $P_1\widehat{V}P_2$, $P'_1\widehat{V}P'_2$ ancora eguali ad α, e così si proceda nella doppia operazione fino a che, se α è minore o tutt'al più eguale a $\frac{\pi}{2n}$, si sia pervenuti agli angoli $P_{2n-3}\widehat{V}P_{2n-2}$, $P'_{2n-3}\widehat{V}P'_{2n-2}$, non escludendo il caso che i lati VP_{2n-2} VP'_{2n-2} possano coincidere rispettivamente coi raggi VA, VA' determinanti la parallela a g passante per V; nel qual caso i punti P_{2n-2} e P'_{2n-2} coinciderebbero col punto all'infinito P_∞ di g.

Immaginiamo ora un cono (per semplicità lo supporremo circolare) che spiegato sul piano dia luogo ad un angolo di ampiezza 2α. Collochiamo questo cono sul piano π in modo che il vertice venga a cadere su V e che VP_0 sia la generatrice di contatto. Facendo rotolare questo cono su π senza strisciare, una prima volta da una banda di VP_0, una seconda dall'altra banda, la traccia di g su di esso sarà una geodetica. In questo rotolamento è chiaro che $VP_2, VP_4 \ldots VP'_2, VP'_4 \ldots$ sono le posizioni assunte dalla generatrice di contatto iniziale, mentre VP_1 $VP_3 \ldots$ VP'_1 $VP'_3 \ldots$ sono quelle assunte dalla generatrice *opposte*. A causa delle eguaglianze $VP_i = VP'_i$ $(i = 1, 2, 3 \ldots 2n-2)$ ai punti P_1, P'_1 corrisponderà sulla geodetica un unico punto N_1, ai punti P_2 P'_2 corrisponderà un altro punto N_2 e così via. Questi punti, in numero finito poichè corrispondenti ai punti P_1 $P_2 \ldots$ manifestamente in numero finito, sono tali che per ciascuno d'essi la geodetica passa due volte e due soltanto. Essi sono dunque veri e propri *nodi*.

Ne concludiamo che una geodetica qualsivoglia di un cono di ampiezza 2α (minore o tutt'al più uguale a 180°), presenta nel suo percorso dei nodi in numero finito e tutti reali. Il loro numero h è dato da $E(90 : \alpha)$ cioè dal massimo intero contenuto nel quoziente $90 : \alpha$. Quando α sia summultiplo di 90° in questo numero va compreso l'ultimo nodo che allora si allontana fino a distanza infinita. Se α è più grande di 90° non vi ha alcun nodo: ciò risulta subito geometricamente come anche dalla formula trovata, che è quindi generale.

Aggiungiamo da ultimo:

Se una curva piana di ordine m simmetrica rispetto ad un asse si avvolge sopra un cono di ampiezza 2α in modo che il vertice si trovi sull'asse di simmetria, essa presenta nel suo cammino $m.\,E\,(90:\alpha)$ nodi computando anche quelli immaginari.

Enrico Piccioli.

A PROPOSITO DELLA QUESTIONE 493

Il secondo integrale ha il numeratore che si annulla per $\operatorname{sen} x = 1$ e $\cos x = 1$, e quindi è divisibile per il prodotto $(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x) = 1 - \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$. Effettuando la divisione si trova $2 + \operatorname{sen} x + \cos x$ per quoziente.

Il denominatore $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ diviso per lo stesso prodotto dà per quoziente

$$(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x).$$

Il secondo e terzo integrale sono dunque identici e si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x)\,dx}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x + 2)\,dx}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)} = 2.$$

E.-N. Barisien.

N. B. — Anche il prof. Ugo Fornari e il sig. Giuseppe Marletta inviarono la risoluzione della quistione 493, rilevando che i secondi membri delle ultime due equazioni devono essere 2 e non $^1/_2$.

Il sig. Valentino Golisciani inviò anche la risoluzione della quistione 488.

CORRISPONDENZA

L'articolo del sig. prof. M. Chini (v. *Periodico di Matematica*, fasc. V, 1900, pagg. 199-200) è giusto per il caso generale. Credo che il mio procedimento sia migliore, se nella ricerca d'un'area, si voglia trovare rapidamente (abbiasi o no sotto mano un *ripetitorio* e un *formulario*) certi integrali, come $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ o $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. Il mio procedimento non è certamente *acutissimo*, ma lo credo *pratico* e per questo sarà più utile per gli allievi che per i professori.

E.-N. Barisien.

A proposito della recensione della *Geometria* di Gérard e Niewenglowski pubblicata nel numero precedente il sig. Gérard ci scrive „ vi sarò estremamente „ riconoscente se vorrete segnalare una dimenticanza; cioè che lo scopo principale „ che ci siamo proposti scrivendo la nostra *Geometria* è d'introdurre sistematica- „ mente e *fin dal principio* la nozione di senso per i segmenti, angoli, ecc., in tutte „ le quistioni nelle quali questa nozione può intervenire utilmente „.

G. Lazzeri.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 341*, 483, 486, 492, 498, 499

341*. *Due triangoli coi lati rispettivamente paralleli sono interni l'uno all'altro, e volti nello stesso senso. Prolungando i lati dello interno si hanno tre parallelogrammi* x, y, z *e tre trapezi* t, t', t''.

Determinare x, y, z *in funzione* t, t', t'' *e del triangolo interno* T.

ALASIA.

Risoluzione del Prof. Barozzini.

Sia il triangolo interno ABC; x,y,z i *pgr*, che hanno rispettivamente un vertice in A, B, C; t, t', t'' i trapezi che hanno per lati BC, CA, AB; inoltre AR lato comune ad x e t''.

I triangoli $T + t'$ e T sono simili, quindi per nota proprietà:

$$DR : BA = \sqrt{T+t} : \sqrt{T}$$

da cui dividendo:

e similmente
$$\left.\begin{array}{l} AR : BA = \sqrt{T+t} - \sqrt{T} : \sqrt{T} \\ AS : C'A = \sqrt{T+t'} - \sqrt{T} : \sqrt{T} \end{array}\right\} (1)$$

Ricavo dalle (1) i valori di AR, AS li sostituisco nella $x = AR \,.\, AS \operatorname{sen} A$ e tenendo conto della $T = \frac{1}{2} AB, AC \operatorname{sen} A$, ottengo:

così
$$\begin{aligned} x &= 2\left[\sqrt{T+t'} - \sqrt{T}\right]\left[\sqrt{T+t'} - \sqrt{T}\right]. \\ y &= 2\left[\sqrt{T+t''} - \sqrt{T}\right]\left[\sqrt{T+t} - \sqrt{T}\right]. \\ z &= 2\left[\sqrt{T+t} - \sqrt{T}\right]\left[\sqrt{T+t} - \sqrt{T}\right]. \end{aligned}$$

483. *Se le linee* $\varphi = cost.^e$ *sono geodetiche di una superficie il cui elemento lineare è* $\sqrt{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}$, *si ha:*

$$\Delta_2 \varphi + \frac{1}{\Delta}\left(G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \frac{\partial}{\partial u} \log\sqrt{\Delta_1 \varphi} + \frac{1}{\Delta}\left(E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \frac{\partial}{\partial v} \log\sqrt{\Delta_1 \varphi} = 0$$

dove $\Delta = EG - F^2$ e Δ_1, Δ_2 *sono rispettivamente i parametri differenziali primo e secondo.*

Supponendo che le φ *sieno geodeticamente parallele, si deduce* $\Delta_2 \varphi = 0$.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del sig. Gragnani.

Se $\varphi\ (uv) = cost^e$ è l'equazione di un sistema di linee tracciate sulla superficie in cui è $ds^2 = E du^2 + 2F d u dv + G dv^2$, abbiamo per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\varphi}$ di queste linee

$$-\frac{1}{\rho_\varphi} = \Delta_2 \varphi + \sqrt{\Delta_1 \varphi}\, \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right) \qquad (1)$$

dove $\Delta_1, \nabla, \Delta_2$ rappresentano rispettivamente i parametri differenziali, primo, misto e secondo. Abbiamo inoltre essendo $\Delta = EG - F^2$

$$\nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}} + \frac{1}{\Delta}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}$$

che sostituita nella (1) da:

$$-\frac{1}{\rho_\varphi} = \Delta_2\varphi + \frac{1}{\Delta}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} + \frac{1}{\Delta}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} \quad (2)$$

Se le $\varphi = \text{cost.}^e$ sono geodetiche $\frac{1}{\rho_\varphi} = 0$ e se inoltre esse sono geodeticamente parallele dovendo essere $\varphi\ (u, v)$ un integrale dell'equazione $\Delta_1\varphi = 1$, ne viene $\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} = \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} = 0$ e dalla (2)

$$\Delta_2\varphi = 0$$

come si voleva.

φ è l'arco delle geodetiche ortogonali contato a partire da una linea fissa $\varphi = \varphi_0$, e le $\varphi = \text{cost.}^e$ insieme alle loro traiettorie ortogonali formano un sistema isotermo.

486. *Trovare l'inviluppo del sistema d'iperbole*

$$y^2(1 + 4a^4) + 4a^2xy - 4a^2x - 8a^4y + 4a^4 = 0.$$

PESCI.

Risoluzione del sig. Comandante Barisien di Costantinopoli e del sig. V. Golisciani, studente della R. U. di Napoli.

Questa equazione ordinata rispetto ad a^2 si può scrivere

$$4a^4(y-1)^2 + 4a^2x(y-1) + y^2 = 0.$$

La condizione affinchè i due valori di a^2 sieno eguali è

$$x^2(y-1)^2 - y^2(y-1)^2 = 0$$

ossia

$$(x-y)(x+y)(y-1)^2 = 0.$$

L'inviluppo si compone dunque delle due rette $(x-y) = 0$, $x + y = 0$ bisettrici degli angoli degli assi e dell'asintoto $y - 1 = 0$ dell'iperbole, contato due volte.

Altre risoluzioni dei Proff. Retali e Santorelli.

492. *Sia* F *un fuoco di una ellisse e* M *un punto variabile di questa curva. Si descrive il cerchio di centro* M *e raggio* MF. *Il luogo delle estremità del diametro di questo cerchio, perpendicolare ad* MF *è una curva la cui area è doppia di quella dell'ellisse.*

BARISIEN.

Risoluzione del Prof. Retali.

Il teorema vale anche quando invece dell'ellisse e un suo fuoco, si considera una curva chiusa qualunque e un punto arbitrario del suo piano: Se ρ, θ sono le coordinate polari di un punto variabile M della curva data, quelle del punto corrispondente della trasformata sono evidentemente

$$\rho' = \rho\sqrt{2}, \quad \theta' = \theta \pm \frac{\pi}{4}$$

dunque

$$\rho'^2 \,.\, d\theta' = 2\rho^2 \,.\, d\theta$$

e il teorema è dimostrato.

498. *Per* a *ed* n *interi e positivi si ha*

$$\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\binom{n}{5}a^{n-5}+\dots}{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}a^{n-4}+\dots}=-1,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}a^{n-4}+\dots}{(a+1)^{n-1}}=\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\binom{n}{5}a^{n-5}+\dots}{(a+1)^{n-1}}=\frac{a+1}{2}.$$

A. B.

Risoluzione del sig. Angelo Pensa.

Poichè a è intero e positivo, ponendo $\frac{a-1}{a+1}=\varepsilon$, sarà $\varepsilon<1$.

Allora, per n intero e positivo

$$\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}a^{n-4}+\dots}{\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\binom{n}{5}a^{n-5}+\dots}=\lim_{n=\infty}\frac{(a+1)^n+(a-1)^n}{(a+1)^n-(a-1)^n}=\lim_{n=\infty}\frac{1+\varepsilon^n}{1-\varepsilon^n}=1.$$

Si ha poi

$$\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}a^{n-4}+\dots}{(a+1)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}a^{n-4}+\dots}{\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\binom{n}{5}a^{n-5}+\dots}\cdot\frac{\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\binom{n}{5}a^{n-5}+\dots}{(a+1)^{n-1}}$$

e tenendo conto del risultato precedente

$$\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}a^{n-4}+\dots}{(a+1)^{n+1}}=\lim_{n=\infty}\frac{\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{3}a^{n-3}+\binom{n}{5}a^{n-5}+\dots}{(a+1)^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{(a+1)^n-(a-1)^n}{(a+1)^{n-1}}=\frac{1}{2}(a+1)-\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\varepsilon^n=\frac{1}{2}(a+1).$$

c. v. d.

Altra risoluzione del sig. F. Sibirani.

499. *Sia* C *una curva piana riferita ad un sistema cartesiano* OX, OY *ed* M *un suo punto variabile. Si riporti sulla perpendicolare condotta da* M *all'asse* x, *a partire da* M *e nei due sensi, il segmento* OM *e sieno* MP *ed* MQ *tali segmenti; i punti* P *e* Q *descrivono una curva* C'; *si studi la trasformazione* (C, C') *e si dimostri in particolare che:*

1º *se* C *è una retta,* C' *è, in generale, un'*iperbole equilatera.

2º *se* C *è un circolo di centro* O, C' *si compone di due circoli.*

3º *se* C *è un circolo tangente all'asse* x *in* O, C' *è un* trifolium retto.

4º *se* C *è un circolo tangente all'asse* y *in* O, C' *è un* folium doppio.

5º *se* C *è una* strofoide retta *col vertice in* O *e avente per asse l'asse* x, C' *si compone di un circolo e di una* Cissoide di Diocle;

6º *se* C *è una* Cissoide di Diocle *con la cuspide in* O *ed avente* OX *per asse,* C' *è una* quintica bicircolare. *(Si studi tale curva specialmente nell'intorno del suo punto quadruplo).*

7° *se* C *è un* Cappa *che ha il punto doppio in* O (*) *e tale che la tangente in* O *sia l'asse della* x, C' *si compone di due* strofoidi rette.

8° *se* C *è una* kreuzcurva equilatera *che ha per assi* x *e* y, C' *si compone di due inverse di* trifolium retto.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del Prof. Retali.

Se ξ, η sono le coordinate di M e x, y quelli di P abbiamo evidentemente $x = \xi$, $y = \eta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ e da queste $\xi = x$, $\eta = \frac{y^2 - x^2}{2y}$. La trasformazione (C, C') è dunque piana doppia quadratica specializzata e, come tale, sebbene sia stata già incontrata dal *Krafft*, (**) dai sigg. *de Longchamps, Brocard* e da altri, (***) può dirsi non ancora studiata completamente. Essa è caso particolare di una trasformazione doppia che io ho studiato altrove: (****) la *conica limite* e la *conica doppia* si riducono ora al punto-circolo O e il *polo*, col quale sono allineate le coppie di punti *congiunti*, è il punto all'infinito Y^∞ dell'asse OY. La trasformazione *congiunta* è una inversione d'Hirst *di seconda specie*, avente per conica dei punti uniti il punto-circolo O e per polo d'inversione Y^∞: la denoteremo con (H). Due punti P e Q che si corrispondono nella (H) sono sopra una stessa parallela ad OY e son visti da O sotto un angolo retto; il centro M del segmento $\overline{PQ}$ è, *nel piano doppio*, il corrispondente di P (e di Q) considerato come punto del *piano semplice*. Reciprocamente, al punto M del piano doppio corrispondono nel piano semplice i due P e Q. È chiaro che due curve *congiunte*, cioè tali che si corrispondono l'una all'altra nella inversione (H), hanno la medesima trasformata sul piano doppio. Una retta arbitraria h del piano doppio è rappresentata nel piano semplice da una conica H^2 tangente in O alla polare di Y^∞ rispetto al punto-circolo O^2; H^2 passa per i due punti imaginari coniugati segnati sopra h dal punto-circolo O^2 ed ha in questi punti le tangenti dirette a Y^∞. (*****) In altre parole H^2 *è la iperbole equilatera normale in* O *all'asse* OY *e avente per centro la proiezione ortogonale di* O *sopra* h. Questo risultato, che del resto è noto, poteva anche dedursi subito dalle formole della trasformazione date sopra. I punti fondamentali del piano semplice sono Y^∞ e i due infinitamente vicini riuniti in O sulla OX. Alle rette del piano semplice corrispondono coniche per Y^∞, bitangenti al punto-circolo O^2 sulle rette medesime, (******) ossia *iperboli con un fuoco in* O *e un assintoto parallelo a* OY. Se N è la proiezione ortogonale di O sulla retta s del piano semplice, la iperbole corrispondente S^2 ha O per fuoco, s per direttrice e $|Ny^\infty|$ n'è un assintoto. A parallele ad |OX| corrispondono parabole aventi quelle rette per direttrici ed O per fuoco comune.

Se una curva C, del piano doppio, è pensata come inviluppo di una retta h, la corrispondente C' è l'inviluppo delle iperboli H^2 corrispondenti ad h; i due punti ove H^2 tocca C' sono i due corrispondenti a quello ove C è toccata da h. Le intersezioni di C' con una retta arbitraria s, sono le proiezioni da Y^∞ sopra s delle intersezioni di C con S^2, corrispondente ad s nel piano doppio.

(*) Veramente il *cappa* ha il suo punto doppio all'infinito; O non è punto doppio ma bensì un tacnodo e conta per due punti doppî riuniti in O. V. R.

(**) *Commentarii Ac. Petrop.* T. III, an. 1732, pag. 101-109. *(Consideratio curvarum quarundam altioris generis, quae facile describi possunt.)*

(***) *Le Trifolium* par M. Brocard (*J. M. S.*, an. 1891). In questo lavoro si trovano numerose indicazioni bibliografiche (1874-1889).

(****) "Sopra due particolari trasformazioni ecc. „ (nelle *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna*, Serie IV, T. X, pag. 653-671, an. 1890).

(*****) Retali, *Mem. cit.*, § 9.

(******) *Ibid.* § 11.

Le tangenti a C' nei punti P e Q (corrispondenti al punto M di C) sono le direttrici corrispondenti al fuoco O delle due iperboli che hanno O per fuoco passano per y^{∞} e toccano la curva C in M. Se h è la tangente C in M, indicando con R il punto comune ad h e alla perpendicolare in O a |MO|, la tangente a C' nei punti P e Q sono respettivamente |RP| e |RQ|. Anche la costruzione della tangente nei punti P, Q era stata data dai signori *G. de Longchamps, d'Ocagne* e *Brocard* (*) i quali però, non avendo riconosciuto che si tratta di una trasformazione doppia, la ottengono con considerazioni infinitesimali più o meno semplici. Sarebbe ora facile indicare anche costruzioni per le tangenti che arrivano a C' da un punto dato, per le bitangenti di C' coi loro punti di contatto, per le tangenti stazionarie coi relativi flessi ecc. ma non vogliamo allungar troppo questa nota. Nel caso particolare in cui C è un cerchio passante per O si trova per C' il *trifolium* studiato dal sig. *Brocard* nella Memoria citata sopra, ove sono pure dati i teoremi 1°, 3° e 4° della quistione della quale ora ci occupiamo. (**) Quanto a 2° è evidente anche con la geometria elementare e del resto si ha subito, dalla formola sopra data, per trasformata di $x^2+y^2=r^2$, il pajo di cerchi eguali al dato $x^2+y^2\pm 2ry=0$.

Veniamo dunque agli ultimi quattro enunciati della quistione:

5°. La strofoide ha per equazione $y^2(2a-x)=(x-a)^2 . x$ e la corrispondente C', cioè la

$$(2a-x)\frac{(y^2-x^2)^2}{4x^2}-x(x-a)^2=0,$$

si può scrivere nella forma

$$[2ay^2-x(x^2+y^2)] . (x^2+y^2-2ax)=0;$$

C' si spezza dunque nella cissoide retta avente la cuspide in O e per assintoto di inflessione $x=2a$, e nel cerchio di raggio a tangente Oy in O.

6°. Alla cissoide retta $y^2(2a-x)=x^3$ corrisponde

$$2a(x^2-y^2)^2=x(x^2+y^2)^2$$

cioè una quintica bicircolare avente nell'origine un punto quadruplo con due coincidenze, come il rosone a quattro rami.

7°. Al *cappa* $x^2(x^2+y^2)=a^2y^2$ corrisponde la sestica

$$x^2(x^2+y^2)=a^2(y^2-x^2)^2$$

che si spezza nelle due strofoidi rette simmetriche una dell'altra rispetto a |Oy|, $x(x^2+y^2)^2=\pm a(y^2-x^2)$, col punto doppio in O e |OX| per asse.

8°. Alla *Kreuzcurve* equilatera $a^2(x^2+y^2)=x^2y^2$ corrisponde

$$a^2(x^2+y^2)^2=x^2(x^2-y^2)^2$$

che si spezza nelle due cubiche $x(x^2-y^2)=\pm a(x^2+y^2)$, inverse rispetto ad O dei *trifolii* retti $x(x^2-y^2)=\pm a(x^2+y^2)^2$.

Le ragioni di queste riduzioni e spezzamenti delle trasformate che ora si presentano come risultati di calcoli semplicissimi, non possono darsi che approfondendo un poco lo studio sintetico della trasformazione doppia, ma non è qui il luogo di farlo.

Altra risoluzione del Prof. Barozzini.

(*) BROCARD, *loc. cit.*, pp. 37-39.
(**) *Ibid*, pag. 38; pag. 28 (2°) e pag. 31 (3°).

QUISTIONI PROPOSTE

507. Sieno G e g polo e polare rispetto ad una conica immaginaria ω. Dato un punto P del piano di ω, sia P' il punto della retta GP che è reciproco di P rispetto ad ω. Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva ρ del piano di ω sia il luogo di P' quando P descrive una retta r.

G. MARLETTA.

508. Calcolare i seguenti integrali

$$\int e^{\alpha x} \tan^m \beta x \, . \, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \cot^m \beta x \, . \, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \tan h^m \beta x \, . \, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \cot h^m \beta x \, . \, dx.$$

G. L.

509. Dimostrare che

$$\int_0^a \frac{x \, . \sqrt[4]{x} \, dx}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{x}}} = \frac{35 \, \pi a^2}{64}.$$

510. Sia A un punto d' incontro di una parabola colla sua sviluppata. Il rapporto del raggio della curvatura della parabola e della sua sviluppata in questo punto è $\sqrt{6}$.

511. Essendo data la cubica $y^2 = \frac{x^3}{k}$, si consideri il punto A della curva tale che l'ordinata AA' sia eguale all'ascissa OA'. Siano B il centro di curvatura relativo ad A e B' la proiezione di B sull'asse x.

1°. Se U designa l'area della cubica compresa fra l'arco OA, l'asse x e l'ordinata AA', e se U' rappresenta l'area della sua sviluppata compresa fra l'arco OB, l'asse x e l'ordinata BB', si ha

$$\frac{U'}{U} = \frac{2768}{63}.$$

2°. Se S' ed S indicano gli archi OB ed OA, si ha

$$\frac{S'}{S} = \frac{2\,(13\sqrt{13} - 8)}{117\sqrt{13}}.$$

512. Dimostrare che la retta avente per equazione

$$x(1 + t^2)^2 - 2ty = at^2\,(t^2 - 1)$$

inviluppa una cubica, allorchè t varia.

513. Da un punto P della curva d'*Agnesi* $\left(\text{la cui equazione è } y^2 = \frac{a^2 x}{a - x}\right)$ si possono condurre sette normali alla curva. Dimostrare che:

1° la somma delle distanze dei piedi di queste sette normali dall'asse di simmetria della curva è in un rapporto costante col loro prodotto;

2° il luogo del punto P tale che la somma delle inverse dalle distante dei piedi dalla normale dell'asse suddetto sia costante, è una retta.

514. Essendo S, la proiezione del centro di un' iperbole equilatera $xy = k^2$ sulla tangente in un punto M e S' il simmetrico di S rispetto ad M, si dimostri:

1° che l'equazione del luogo di S' riferita agli asintoti è

$$x^{1/6}\, y^{1/6}\, (x^{2/3} + y^{2/3})\, 2k\,;$$

2° che l'area racchiusa fra gli asintoti e la curva è $U = 6k^2$.

E.-N. Barisien.

515. Sia dato un pentagono piano 12345, si conducano le diagonali 13 e 14 e 25, le due prime sieno tagliate dalla terza rispettivamente in 4′ e 3′, si trovino i due punti che dividono armonicamente i segmenti 24′ e 23′ e si congiungano con 1, si ripeta la stessa costruzione partendo da ciascuno degli altri quattro vertici del pentagono. I dieci punti così ottenuti appartengono ad una stessa conica toccata dalle dieci rette.

516. Sia dato il triangolo ABC, e sieno A_1, B_1, C_1 ed H i piedi ed il punto d'incontro delle altezze. Sui lati AB ed AC si trovino le due coppie di punti (reali se l'angolo A è acuto, immaginari se ottuso) che sono equidistanti da A e che dividono armonicamente i segmenti BC_1 e CB_1; sulle altezze BB_1 e CC_1 si trovino le due coppie di punti equidistanti rispettivamente da B_1, C'_1 e che dividono armonicamente i segmenti BH e CH. Gli otto punti così ottenuti sono in un cerchio di centro A rispettivamente al quale i poli delle altezze BB_1 e CC_1 sono rispettivamente C e B.

517. Costruite ancora le due prime coppie di punti come nell'esercizio precedente e determinate inoltre sulle altezze BB_1 e CC_1 le coppie di punti equidistanti rispettivamente da B e da C e che dividono armonicamente i segmenti B_1H e C_1H si hanno otto punti che sono un' iperbole equilatera di centro A rispetto alle quali i poli delle altezze BB_1 e CC_1 sono rispettivamente C_1 e B_1.

Valeri.

BIBLIOGRAFIA

Dott.essa Lia Predella (prof.essa nella R. Scuola Normale " G. Milli " di Roma). — *Elementi di Algebra* ad uso della prima classe normale. Ditta Paravia e Comp., 1899.

Fra i libri scolastici che tengono un posto considerevole nella copiosa produzione di questi ultimi anni, vanno certo annoverati gli *Elementi d'Algebra* della signora Lia Predella-Longhi.

È un volumetto scritto per le Scuole Normali e mi sembra riuscito per lo scopo cui tende. Il lavoro è diviso in sette capitoli; i primi sei trattano esclusivamente di nozioni di calcolo letterale fino alle equazioni di 1° grado ad un'incognita — con relativi esercizi; — l'ultimo è riserbato all'estrazione di radice quadrata e cubica.

Lodo, in generale, la sobrietà nella definizione, il loro rigore scientifico, il copioso corredo di esercizi pratici che servono a rendere dilettevole l'insegnamento togliendogli quella rigidezza che giunge facilmente a stancare alunni non avvezzi alle sottili indagini matematiche.

È chiara l'esposizione del concetto di numero negativo.

Non sarebbe stato forse opportuno svilupparlo maggiormente, specie di fronte all'obbiezione che non tutte le grandezze si trovano nei due stati opposti, che richiedono l'introduzione dei numeri negativi?

Le definizioni di somma e sottrazione dei numeri algebrici, nel capitolo 2°, sono poste in modo da eliminare ogni dubbio riguardo ai risultati offerti da queste operazioni e che pur sembrano tanto strani e contradditori ai principianti.

La moltiplicazione dei numeri algebrici è argomento di studio diligente all'A.; e qui si diversifica dai soliti testi, sia nel considerare, in generale, i numeri algebrici frazionari, comprendendo quindi gli interi come caso particolare, sia nell'ovviare alla grande difficoltà che gli inesperti trovano nel moltiplicatore negativo, col riferirsi alla funzione di questo nella moltiplicazione; e vi riesce ottimamente colla scorta di esempi da cui scende luminosamente la nota regola dei segni. Questo metodo è certamente da preferirsi (almeno per scuole come le Normali) a quello che deduce i segni, dalla definizione più lata che, anche in aritmetica, occorre dare di moltiplicazione quando si considera il moltiplicatore frazionario.

Troppo succinta è la parte riguardante il raccoglimento a fattor comune che, per la frequenza del suo uso e per la difficoltà che in esso riscontrano gli alunni, doveva essere più sviluppata e con maggior corredo di esercizii.

La risoluzione algebrica delle equazioni è esposta con chiarezza e brevità; mentre è ampiamente sviluppata l'applicazione alla risoluzione dei problemi.

Il capitolo VII è certamente il più importante e il migliore; la risoluzione algebrica ed aritmetica di problemi presi come tipi fondamentali servono mirabilmente a sviluppare nelle menti dei nostri alunni la superiorità del metodo algebrico di fronte all'aritmetico e a cogliere, nelle questioni, facilmente quel nesso di relazioni che permettono di porre in equazione le condizioni del problema.

Il capitolo VII chiude il lavoro. Ivi sono esposti rigorosamente i principali teoremi sull'estrazione di radice — come preliminari all'estrazione di radice quadrata e cubica. L'A. si astiene (e gliene dò lode) dall'esposizione delle lunghissime regole di estrazione di radice che, se vengono faticosamente imparate dagli alunni, non recano certo un'efficacia reale.

Sono convinto che il presente lavoro potrà essere adottato con grande vantaggio dagli insegnanti delle Scuole Normali; tanto più che l'A. in una nuova ristampa potrà correggere qualche piccola menda — secondo gli avvertimenti degli amici e i suggerimenti della sua esperienza nella scuola.

ALFREDO BASSI.

IDEM. — *Aritmetica* ad uso della prima e seconda classe normale. Ditta Paravia e Comp., 1899.

Il libro dell'autrice è diviso in cinque capitoli. Dirò partitamente di ciascuno. Nel I capitolo sono dati molto rigorosamente i concetti di numero e di unità intere, le definizioni relative alle " grandezze „ forse troppo sottili per le alunne cui vengono esposte. Secondo me, ad esempio le definizioni 20 e 21 dello stesso capitolo che sono conseguenze del Postulato. " Se di due grandezze A e B, $A > B$ esiste sempre un intero m per cui $Bm > A$ „ (estensione di quello noto d'Archimede sui segmenti) non mi sembrano adatte per alunne non abituate, certo, a sottili indagini matematiche.

Il capitolo II tratta delle quattro operazioni sui numeri interi e frazionari; dimostrazioni fatte con ordine logico, rigorose e chiare — sono ben distinte le operazioni sui numeri interi da quelle sui numeri frazionari.

Riguardo alla definizione del n. 64 " Il prodotto di un numero qualunque per una frazione $\frac{m}{n}$ è il numero che si ottiene formando del numero dato gli $\frac{m}{n}$ „, avrei creduto più opportuno mostrare che questa è una deduzione di un'altra definizione più generale. " Moltiplicare per una frazione significa eseguire sul moltiplicando le stesse operazioni che dall'unità servono a ricavare la frazione moltiplicatore „ definizione che alla mente degli alunni appare subito quale naturale estensione di quella nota sui numeri interi, data la funzione del moltiplicatore.

Il capitolo III tratta della numerazione; il nostro sistema decimale discende chiaramente come caso particolare da un sistema generale di numerazione; il IV sui rapporti e sulle proporzioni fra numeri è forse il migliore per la chiarezza dell'esposizione. Vi è anche un accenno alle equidifferenze. L'A. avrebbe anche fatto bene nell'aggiungere ai rapporti geometrico e aritmetico un breve cenno di quello armonico.

Segue lo studio sui rapporti di grandezze, da cui vengono dedotte con molto rigore scientifico la teoria delle grandezze variabili proporzionali, necessario substrato alla risoluzione delle cosidette regole del tre semplice e composta, diretta e inversa.

Il volumetto è molto ben redatto; copiosi e ben scelti esercizi, chiara risoluzione di alcuni come tipi fondamentali.

Sono convinto che il libro troverà fra gli insegnanti delle Scuole Normali quella fortuna che si merita.

Alfredo Bassi.

Bibliotheca mathematica. — Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften.

Già da qualche mese era stato annunziato che coll'anno 1900 la *Bibliotheca mathematica*, il piccolo ma interessante giornale di storia delle matematiche pubblicato dal prof. Gustavo Eneström di Stockolma si sarebbe trasformato in un grande giornale edito dal Teubner di Lipsia. È uscito ora il primo fascicolo doppio del 1° volume della terza serie; e se è vero che il buon dì si conosce dal mattino, si può esser sicuri che la *Bibliotheca* prenderà presto un posto importantissimo fra le pubblicazioni scientifiche, e renderà segnalati servigi alla storia della matematica.

Il prof. Eneström nel presentare ai lettori la *Bibliotheca* nella sua nuova e splendida veste, espone lo scopo e il programma di questa pubblicazione, che è in primo luogo quello di dare un forte e vigoroso impulso allo studio della storia delle matematiche, di accogliere tutto ciò che di più interessante in questo campo si fa in tutto il mondo civile. In secondo luogo il giornale tratterà quistioni di metodo e pedagogiche e quistioni di attualità, fra le più importanti delle quali il prof. Eneström cita le seguenti:

una bibliografia matematica generale con continuazione annuale;
un vocabolario matematico;
vari libri da consultare, per es., un manuale biografico-letterario dei matematici viventi coi loro ritratti;
una gazzetta di letteratura matematica internazionale contemporanea;
congressi ed esposizioni matematiche;
classificazione delle scienze matematiche;
terminologia matematica;
insegnamento matematico superiore.

Il giornale è di carattere internazionale, e sino dal primo fascicolo contiene articoli in lingua tedesca, francese, italiana e inglese di Zeuthen, Duhem, Loria, Vivanti, Engel, Lampe, Tannery, Korteweg ed altri. Consterà di 35 o 36 fogli di stampa annuali del formato dei *Mathematische Annalen*, mentre fino ad ora si componeva di circa 8 fogli all'anno di piccolo formato.

Al confratello così trasformato il *Periodico* invia sinceri auguri di prosperità e di gloria.

*Sopra l'articolo del prof. Ingrami, intitolato " Dubbi „(*)

Ai " Dubbi „ sugli *Elementi di Geometria* del prof. VERONESE (vol. I, 2ª ediz.) sollevati dal prof. G. Ingrami nel fasc. IV del *Periodico* sembrerebbe a me non difficile rispondere con opportuni motivi e schiarimenti: ma penso: è prudente il tentarlo, considerando quei dubbi solo come dubbi, dato che chi li muove non è già di quelli che insegnerebbero la Geometria secondo quegli *Elementi*, ma l'autore di altri *Elementi* informati agli stessi metodi, e sopratutto dato l'aere infido e non ancora sgombro da recente bufera? E d'altra parte, posso tacere io che, avendo avuto l'onore di essere chiamato a collaborare, per quanto modestissimamente in quegli *Elementi* avrei forse tutta quanta la colpa di non aver reso fedelmente ed appieno il pensiero dell'autore, e potrei esser stato cagione involontaria delle oscurità e delle incertezze, a cui i " Dubbi „ stessi si riferiscono? Solo quest'ultimo riflesso principalmente mi indusse a rispondere; e ciò farò più brevemente che potrò, al prof. Ingrami; tanto più che egli dice " *non intendo mancare di rispetto all'autore, nè di screditare il suo libro* „. Però chi leggerà queste poche righe badi che qui non si tratta di polemica alcuna, e sopratutto voglia aver la bontà di tener presenti, per gli opportuni confronti, e gli *Elementi* del prof. VERONESE e l'articolo del prof. Ingrami.

***

I dubbi del prof. Ingrami sono raccolti in 17 osservazioni, delle quali solo due o tre includono propriamente un dubbio.

Le osservazioni 1ª, 2ª, 3ª e 4ª si riferiscono al post. della retta, che nella 2ª ediz. degli *Elementi* è il 2°. E precisamente nella 1ª si domanda " *se non si doveva in qualche modo preporre la esistenza del segmento rettilineo* „; nella 2ª si impugna la definizione I di segmenti rettilinei eguali; nella 3ª viene espresso il desiderio che sia soppressa la eguaglianza $a \equiv a$ e si assuma come postulato la legge transitiva della eguaglianza; e nella 4ª poi si muove un dubbio sulla terza parte del postulato della retta, su quella cioè concernente la invertibilità del segmento rettilineo.

È noto che nella 1ª ediz. degli *Elementi*, la quale è proposta per i Licei e per gli Istituti tecnici, l'esistenza di segmenti aventi la proprietà compresa ed indicata dal vocabolo *eguale* era postulata: e questo è il metodo che scientificamente è da preferirsi. Nella 2ª ediz. la quale è destinata ad uso dei Ginnasi (notabene) per la parte I, e ad uso dei Licei per la II, per ragioni didattiche si è creduto opportuno di far precedere al postulato della retta un periodo che sarebbe stato meglio intitolare *dichiarazione*, anzichè definizione, il quale dice: *L'espressione: il segmento rettilineo* a *è eguale al segmento rettilineo* b, *significa che si può stabilire fra i punti di* a *e* b *una corrispondenza univoca e del medesimo ordine, e che ogni proposizione che si può enunciare di* a *o di una sua parte, considerati l'uno e l'altra separata-*

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal Comitato di redazione dell'Associazione MATHESIS.

(*) Il presente scritto venne consegnato alla Presidenza quando si iniziava la stampa del precedente fascicolo; ma per ritardi sopraggiunti nella revisione del Comitato di redazione non potè più trovar posto nel fascicolo stesso.

mente, si può enunciare ecc.; e affinchè il postulato stesso della retta non riuscisse troppo lungo, si è anche posto prima di esso la definizione I ora citata. Di guisa che ciò, che nella 1ª ediz. postulavasi sul conto de' segmenti della retta, nella 2ª si riduce ad ammettere che si sappia cosa significa: *proposizione che si può enunciare di un segmento o di una sua parte;* della qual cosa è pur fatto amplio cenno nell'osservazione emp. precedente, ricorrendo all'oggetto rettilineo della figura. Chi insegna queste cose nella scuola dirà, come lo posso affermare io, che questo modo, mentre in sostanza non differisce da quello seguito nella 1ª ediz. (perchè il postulato sul vocabolo eguale è ricacciato, per così dire, in quello di giudizio che si può fare di un oggetto, ecc.) presenta nella pratica minori difficoltà di quelle che si presenterebbero, e io dico che si presentarono, nel primitivo modo. Aggiungasi che, dovendosi dare, secondo il metodo del prof. Veronese, fra le proprietà della retta anche quelle dell'invertibilità del segmento, qualora si fosse assunto come postulativo anche il significato del vocabolo *eguale,* come vorrebbe il prof. Ingrami, si avrebbe complicata la cosa, intercalando nella subsumzione $AB \equiv BA$ un postulato entro un altro postulato. D'altronde il prof. Ingrami che nel suo libro postula il concetto di segmenti eguali, seguendo il prof. Veronese (v. 1ª ediz., pag. 9-10) ha creduto opportuno, ed ha fatto bene, di far precedere le seguenti parole " *noi diciamo comunemente che due cose sono eguali quando l'una può esser scambiata con l'altra per ogni operazione o giudizio che si voglia fare sopra una di esse, considerata in se; nè troviamo altre parole per chiarire meglio questo concetto derivato per noi dalla pratica* ". Ebbene nella 1ª ediz. che, ripeto, è destinata anche per i ginnasiali, si è posta la definizione I che in sostanza ma in termini meno vaghi, è la dichiarazione che non solo l'Ingrami ma altri autori hanno potuto incolumemente riportare. Mi piace anzi qui trascrivere qualche brano di un articolo recente. (*) " *La relazione* x = y *che si legge:* x *è eguale ad* y *esprime che ogni proprietà di* x *è altresì una proprietà di* y ". E più sotto, traducendo in simboli la proposizione precedente, cioè ponendo:

$$x = y . = : a \varepsilon \mathrm{cls} . x \varepsilon a . \supset_a . y \varepsilon a \qquad (1)$$

" *Dalla* (1) *si deduce che:*

$$x = x \quad (2), \qquad x = y . \supset . y = x \quad (3) \qquad x = y . y = z . \supset . x = z \text{ "} \quad (4).$$

E più sotto ancora: " *La* (1) *esprime la comune idea di eguaglianza intendendosi di regola, nel linguaggio usuale, che gli oggetti* x *ed* y *siano eguali quando ogni proprietà dell'uno è proprietà dell'altro. Però talvolta il termine: ogni: non ha il senso di totalità,* così ad esempio.... ecc. ". Questo, in quanto alla definizione prima. Riguardo poi all'aver collocato questa definizione prima del postulato della retta, e non tra la prima parte e la seconda di detto postulato dissi già che ciò fu fatto per non render troppo lungo il postulato stesso; ed ora aggiungo che ciò consuona con quanto il prof. Veronese scrisse nella prefazione alla 1ª ediz. e cioè che " *come i postulati sono dati quando se ne presenta la necessità, così le definizioni sono date immediatamente prima o più spesso dopo che si è dimostrata l'esistenza delle figure a cui si riferiscono....* ", cosa che si verifica di frequente nei migliori trattati, per maggior semplicità di esposizione. Aggiungasi che ove l'insegnante si trovasse dinnanzi a scolari di Liceo e non credesse opportuno accettare la definizione I può

(*) C. Burali-Forti, " Sui simboli di logica matematica ". *Il Pitagora*, n. 1-2, anno VI.

benissimo incominciare il postulato della retta così: Esiste un sistema lineare di punti che chiamasi retta, tale che: 1ª vi sono in esso segmenti aventi la proprietà espressa dal vocabolo eguale, e aventi l'uno per primo, l'altro per secondo estremo,... ecc.; 2ª come prima; 3ª idem. Forse che soltanto gli insegnanti della Geometria del prof. Veronese siano incapaci di fare, ove lo credano giusto, qualche spostamento nel loro testo, senza per questo venir meno al metodo nè al concetto del libro? Io credo di no. Veggasi in proposito la prefazione della 2ª ediz., pag. XI.

Quanto alla inutilità della eguaglianza $a \equiv a$ la quale secondo l'Ingrami " *ha sempre fatto ridere gli scolari* „ via, lasciamo andare. Ciò non è vero; e se essa mancasse del tutto, chiunque avrebbe ragione di rilevarlo. E una volta poi accettata la definizione I di eguaglianza, e dato che $a \equiv b$ e $b \equiv c$ l'Ingrami sa meglio di me che non si deve postulare, ma si deve considerare come teorema la proposizione $a \equiv c$ non solo, ma che la dimostrazione tanto per i segmenti $a\, b\, c$ quanto per le parti $a'\, b'\, c'$ corrispondentisi univocamente e nello stesso ordine, secondo la definizione I è tanto facile che si può tralasciare. Egli è appunto per ciò che nel testo e sotto il modesto titolo di: Osservazione 1ª questa e le altre proprietà evidenti della eguaglianza si sono soltanto enunciate dicendo: dalla definizione I deducesi tosto ecc. (*)

Sulla osservazione 4ª poi riferentesi al post. AB≡BA mi sia concesso di intrattenermi un poco. Il prof. Veronese dopo aver definito il sistema lin. come gruppo di punti dotato di due ordini l'uno inverso dell'altro, come soli ordini possibili, e il segm. AB come una parte del sistema stesso compresa fra due punti A e B aggiunge: il segm. considerato nel verso da A a B si indica con AB, e il segm. inverso con BA. In questo caso dunque, e qui non v'ha dubbio, il segmento è una serie. Orbene, un postulato come quello di AB≡BA non può contenere alcun che di contradditorio, per la ragione che non sono contradditori i concetti di serie eguali e di serie inverse l'una rispetto all'altra. Ad es. il gruppo di lettere ABCDCBA e l'inverso di esso sono due gruppi eguali e anche inversi, conforme la nozione di pag. 3; e la propos. AB≡BA dice in sostanza che i punti del segm. AB e quelli di BA costituiscono due serie eguali ed inverse: nè più nè meno. Si badi che le serie AB e BA per la definizione 1ª sono considerate separatamente cioè indipendentemente dal fatto che una è inversa dell'altra; soltanto all'ordine da A a B della 1ª corrisponde l'ordine da B ad A della 2ª di guisa che ai punti A e B della 1ª corrispondono B ed A della 2ª e ad un punto C della 1ª un punto C′ della 2ª tale che AC≡BC′ e BC≡AC′. Quello che bisogna aver in mente qui si è che il criterio dell'ordine è bensì in un primordiale concetto di eguaglianza fra due figure elemento precipuo, indispensabile; ma il successivo svolgersi della teoria si emancipa grado a grado da esso, cosicchè in fine sono bastevoli per la eguaglianza delle figure la corrispondenza univoca dei punti e l'eguaglianza di taluni elementi corrispondenti soltanto.

*
* *

Le osservazioni 5ª, 6ª e 7ª, sono le meno opportune. Nella 5ª, " *sembra che la definizione di somma sia data solo per segmenti della stessa retta* „ e nella 7ª si dice solo che " *come la definizione di somma dà un modo per costruirla così mi sembra dovrebbe esser per la definizione di resto* „. Via, questo mi sembra un torto massiccio che il collega Ingrami scaglia, senza volerlo, alla capacità degli insegnanti degli *Elementi* del prof. VERONESE! Nella 5ª si osserva ancora che il postulato IV

(*) V. Prefazione, pag. XIV-XV.

"sembra che non sia sufficiente perchè non dice se, e come si debba tener conto del verso"; questo dubbio però è sciolto dopo l'osservazione precedentemente fatta sul sistema lineare e suoi ordini; e perchè la somma dei lati di un poligono (non il perimetro che è l'insieme o gruppo dei lati stessi) si ottiene segnando su una retta i segmenti consecutivi e dello stesso verso, eguali ciascuno a ciascuno ai lati del poligono. Ma quello che poi è assolutamente ingiusto si è il dire con la 6ª che la dimostrazione nella quale da:

$$a \equiv \mathrm{LM} \qquad b \equiv \mathrm{MN} \qquad c \equiv \mathrm{NP}$$

si trae successivamente:

$$a + b \equiv \mathrm{LM} + \mathrm{MN} \equiv \mathrm{LN} \qquad b + c \equiv \mathrm{MN} + \mathrm{NP} \equiv \mathrm{MP}$$
$$a + (b + c) \equiv \mathrm{LM} + \mathrm{MP} \equiv \mathrm{LP} \qquad (a+b) + c \equiv \mathrm{LN} + \mathrm{NP} \equiv \mathrm{LP}$$

"non è convincente, perchè basata sulla visione della figura". Le pare, egregio collega?! Ma tiriamo innanzi.

***

La vicinanza della definizione di figura rettilinea di tre punti e di quella di triangolo ha motivato senza dubbio l'osservazione 8ª *"il triangolo come è definito al n. 13 non sembra una figura rettilinea secondo la definizione precedente"* non che la 16ª. Il poligono di pag. 64 del libro del prof. Veronese come il triangolo di pag. 21 non sono la figura rettilinea dei vertici, e nemmeno il perimetro, ma la figura determinata da più punti e dai segmenti che uniscono questi punti in un determinato ordine ecc. Tutti poi sappiamo che spesso col vocabolo poligono o triangolo si intende anche la figura rettilinea determinata dai vertici, nella stessa guisa che col vocabolo cerchio designamo anche la circonferenza, quando, ben inteso, non vi sia pericolo di equivoco. Queste e simili avvertenze le saprà fare nella sua scuola il sagace insegnante; speriamo.

***

L'osservazione 9ª vorrebbe che la definizione di figure eguali fosse *più chiarita*, e aggiungerebbe per la dimostrazione del teorema 1° susseguente, quanto segue: *"La retta è figura rettilinea, così deve essere ogni figura F' ad essa eguale (perchè la corrispondenza di eguaglianza è definita fra due figure rettilinee e non rettilinee) quindi A'C' appartiene ad F' ed al punto B di AC (e di F) deve corrispondere un punto B' di A'C' (e di F') quindi non un altro B' per la corrispondenza univoca, ecc."* il che non mi sembra più chiaro del testo.

***

Quanto all'osservazione 10ª sulla coppia di rette, rispetto alla quale *"la fig. del n. 16 ed una frase del post. V farebbero credere che a determinare la coppia di rette ci entri anche il loro verso"* rispondo negativamente, perchè secondo il prof. Veronese la coppia di rette è una figura in cui l'elemento è la retta, come la coppia di spazi a tre dimensioni ha per elemento lo spazio a tre dimensioni. Nel testo si ha la coppia di rette, come figura determinata da due rette, senz'altro; poi si ha quella di due raggi cioè di due rette limitate ad un punto comune; e quando si dice che la coppia di rette (ab) è inversa della coppia (ba) si vuol tener conto dell'ordine in cui si seguono le due rette nella costruzione della figura rettilinea

determinata dalle due rette stesse. In ciò non vi è dunque nulla di oscuro. Nel postulato V invece è detto esplicitamente che le rette della coppia sono considerate ciascuna in un determinato verso; ed anche in ciò non vi è nulla di contraddittorio con quanto sta prima.

***

Per quanto poi io abbia diligentemente cercato, non sono mai riuscito a persuadermi che, come dice la osservazione 11ª " *nel corollario del n. 16, nel teorema 17 ed altrove si applica il principio: in due coppie eguali di rette sono corrispondenti le rette che le determinano* „. Al n. 16 certamente no, perchè ivi si dice solo che le coppie di raggi (ab) e (ba) sono due figure corrispondenti, nelle coppie (rs) ed (sr) del postulato V; lo che è esattissimo. E quanto al n. 17 ivi si dice solo che essendo $(rs) \equiv (sr)$, ed essendo $aa'bb'$ raggi di (rs) ed inoltre $b'b\,a'a$ raggi corrispondenti di (sr), alla figura determinata dalla coppia di raggi a e b in (rs) corrisponde in (sr) quella determinata dai raggi $b'a'$; donde ecc.

***

Circa l'osservazione 13ª la conclusione del teorema I, 23 è esattissima, perchè i due angoli ad es. γ ed α' della fig. 60 sono figure corrispondenti in figure opposte rispetto al punto O, dal momento che ad ogni raggio di γ corrisponde un raggio opposto dell'angolo α' rispetto ad O; da cui appunto $\gamma \equiv \alpha'$ per il teorema III, 18. E quanto al teorema del n. 24 l'Ingrami non ha forse osservato che *nella corrispondenza di eguaglianza dei due semipiani di vertice* M, *e aventi per lati i raggi della retta* MP *gli angoli* AMP *e* BMP *sono figure corrispondenti;* forse sarà opportuno aggiungere alla terz'ultima riga di pag. 49 e dopo la parola *quindi*, le parole qui sottolineate: questo, a schiarimento della osservazione 14ª.

***

Sulla osservazione 12ª circa la dimostrazione del Lemma: Se due coppie di raggi con vertice sono eguali, gli angoli determinati dai loro lati sono eguali, la quale il prof. Ingrami dice " *che vale solo per gli angoli convessi* „ non ostante le ultime righe che si leggono dopo la definizione II a pag. 35, e che la eguaglianza di due angoli concavi sia ovvia ed elementar conseguenza di quella degli angoli convessi che da quelli sono determinati, non mi fermerò anche per non dilungarmi troppo. Come pure non mi fermerò sulla osservazione 17ª la quale l'Ingrami stesso dice essere di minor conto. Solo non lascio passare inosservato che a riguardo del post. I il quale secondo l'Ingrami non dice nulla quanto al numero dei punti da ammettere, si può stare in proposito tranquillissimi non essendo ciò affatto necessario; anzi la subsumzione aggiunta dal prof. Ingrami nei suoi *Elementi* al post. del prof. Veronese di *infiniti* punti è affatto superflua, oltre che oscura.

***

Per la parte didattica che mi concerne, circa gli *Elementi*, io non ho qui altro da dire. Solo aggiungerò a mo' di chiusa una esclamazione — che non è mia, ma del collega Ingrami — ed una interrogazione. La esclamazione dice: " *chi scrive un libro elementare ha da invocare per il giudizio le circostanze attenuanti... perchè il libro dovrebbe soddisfare lo scienziato, l'insegnante, lo scolaro, i programmi... e gli altri colleghi per il coordinamento....; e non sembra cosa molto facile* „. Proprio così!

E la interrogazione, fatta in aria, s'intende, è questa: *Quando avverrà che sopra lo stesso argomento (poniamo ad es. sulla retta, il piano e le figure piane eguali, sulle figure simili, ecc.) o meglio su tutto l'organismo della Geometria elementare razionale verrà alla luce uno studio critico comparativo degli Elementi di Geometria, fatto, si intende, da persone competenti, senza partito preso, e possibilmente non autori di libro analogo?* (*)

Padova, febbraio 1900.

P. Gazzaniga.

---

*DA GIORNALI E RIVISTE

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Tomo LIX, serie VIII, tomo II, disp. 1-3 (1898-1900). — *A. Dall'Acqua*, Ricerche sulle congruenze di curve in una varietà qualunque di tre dimensioni.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, vol. XXXII, fasc. 19-20, vol. XXXIII, fasc. 1°. — *E. Veneroni*, Aggiunta alla Nota " Sopra i complessi del 3° grado costituiti da fasci di rette ". — *C. Severini*, Sull'integrazione approssimata di un'equazione a derivate parziali lineare.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino.

Serie II, tomo XLIX. — *T. Levi-Civita*, Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate. — *M. Pieri*, Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo; monografia del punto e del moto.

Il Pitagora, diretto da *G. Fazzari*.

Anno VI (1900), fasc. 3-4. — Problemi dei ponti di Koenigsberg. — *C. Burali-Forti*, Quistioni a concorso. — Sulla divisione aritmetica. — *D. Gambioli*, Nota su alcune quistioni di massimo e minimo (continua). — Dimostrazione del teorema relativo alla perpendicolare ad un piano. — Un passo des Lalitavistara.— Di un esagono particolare. — Platone. — *G. Riboni*, Su un triangolo notevole. — Costruzione della media proporzionale fra due segmenti.

Fasc. 5-6. — *C. Burali-Forti*, Sui simboli di Logica matematica. — *R. Bettazzi*, I numeri limiti. — Il giuoco Pitagora. — *D. Gambioli*, Note su alcune questioni di massimo e minimo (continua). — *G. Riboni*, Relazione sui lavori presentati nel concorso bandito dal Pitagora per l'anno 1899. — *G. Pelliccetti*, Risoluzione di questioni. — Eugenio Beltrami.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, diretto da *A. Conti*.

Fasc. 7°. — *Minio*, Sull'insegnamento delle " nozioni varie " nelle scuole elementari. — *Bisson-Minio*, Osservazioni sulle regole pratiche per le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica. — *Scoto*, Rivista storica (continuaz.) — Rivista bibliografica.

(*) A questo indirizzo si avvicina lo scritto, uscito di recente, del prof. dott. H. Thieme dal titolo: *Die Umgestaltung der Elem. Geometrie* (Beilage zum Jahresbericht der K. Berger-Gymnasiums und der Berger-Oberrealschule zu Posen) dove l'A. dopo un esame del libro *Elementi* del Veronese (1a ediz.) e di altri autori, conchiude " *Als Ganzes wie im einzelnen stellt jedenfalls die Arbeit Veronese's seinen Vorgängen gegenüber einen wesentlichen Fortschritt dar* "; e raccomanda come necessario lo studio degli *Elementi* del Veronese agli insegnanti tedeschi.

Fasc. 8°. — *Enriques*, **Sul preteso raddrizzamento dalle immagini nella visione.** — *Buzzi*, La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione (continuaz.) — *Ciamberlini*, Un'osservazione sull'insegnamento dell'aritmetica nella II classe elementare. — *Scoto*, Approfittando dell'esercizio di calcolo mentale in V classe elementare. — *Conti*, Fine di una polemica. — Rubrica Intermediario. — Ricreazione scientifica. — (Sulla copertina): Spigolature (da un articolo del prof. Bettazzi).

Fasc. 9°. — *Manaira*, Due parole intorno ai problemi di aritmetica (continua). — *Pitoni*, Isocronismo delle piccole oscillazioni. — *Ciamberlini*, Sull'insegnamento delle frazioni ordinarie nelle scuole elementari. — *Genovesi*, Nomenclatura dei termini della sottrazione. — Rivista bibliografica. — Rubrica didattica. — Corrispondenza.

Fasc. 10°. — *Conti*, Forme da evitarsi nell'insegnamento dell'aritmetica e della geometria (continuaz.) — *Del Chicca*, Sull'insegnamento delle " nozioni varie " nelle scuole elementari. — *Manaira*, Due parole intorno ai problemi di aritmetica (continuaz. e fine). — Rivista bibliografica. — (Sulla copertina): Spigolature.

The Mathematical Gazette.

Vol. I, fasc. 19° (febbraio 1900.) — *C. A. Scott*, Sulla " Géométrie der Lage " di Staudt, breve esposizione del sistema di Staudt. — Rivista. — Piccola nota.

Fasc. 20° (marzo 1900.) — *C. A. Scott*, Sulla " Géométrie der Lage " di Staudt. — *T. J. I'a Bromwich*, Esempi di porismi trigonometrici. — Rivista. — Piccola nota.

(R. B.)

Mathèsis, recueil mathématique etc., par MM. *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Gand, A. Hoste, éditeur.

Fasc. 8° (agosto-settembre). — Necrologia (Félix Dange). — *G. Fontené*, Costruzione del poligono di 17 lati. — *L. Ripert*, Sulle trasformazioni quadratiche involutorie. — *Deguéldre*, Sopra due fasci di coniche. — Bibliografia. — *Stuyvaert*, Note matematiche (sopra alcune identità; applicazione del binomio di Newton; inscrizione del pentagono regolare). Risoluzione di quistioni proposte; 910 (*) (*Meurice*), 932 (*Neuberg*); 1065, 1208 (*J. Déprez*); 1209 (*Barisien* e *Retali*); 1210 (*Gérard, Déprez, Emmerich, Rose*); 1211 (*Gérard* e *Retali*); 1212, 1213 (*Retali* e *Orlando*). — Quistioni d'esame 898-906 (la 900 è del prof. *Lazzeri*). — Quistioni proposte 1231-1238.

Fasc. 9° (ottobre). — *Ripert*, Sulle trasformazioni ecc. (seguito e fine). — *H. Mandart*, Sul prodotto degli *n* primi numeri. — *Barisien*, Sui triangoli inscritti in un'ellisse e circoscritti a un cerchio concentrico. — Concorso generale del 1899 (*Ploumen*). — Bibliografia — Risoluzione di quistioni proposte 1089, 1091, 1193 (*R. Buysens*); 1202 (**) (*Déprez, Soons, Emmerich, Van Dorsten, Deguéldre*); 1203 (*Emmerich*); 1222 (*E. Cesàro*). — Quistioni di esame 907-909. — Quistioni proposte 1239-1242.

Fasc. 10° (novembre). — *E. Barbette*, Metodo per la scomposizione dei grandi numeri in fattori primi. — *V. Retali*, Sulla trasformazione pseudo-newtoniana. — *E. Barisien*, Sui triangoli che sono inscritti ecc. (continuaz.) — *Déprez*, Sulla quistione di geometria analitica; concorso generale 1899. — Risoluzione di quistioni proposte: 1013 e 1226 (*Buysens*); 1084 (*Droz-Farny*); 1086 (*Cristesco* e *Droz-Farny*); 1087 (*Déprez*); 1178, 1223. — Quistioni d'esame 910-915. — Quistioni proposte 1243-1246.

Fasc. 11° (decembre). — *De Tilly*, Sopra la somma degli angoli in un triangolo (ammesso che la somma degli angoli d'un triangolo tenda verso due retti

(*) Una costruzione assai più semplice di quelle indicate dall'A. è la seguente: condotta la mediana BD e la parallela BE ad AC, *le tangenti alle due curve nei punti corrispondenti* M *ed* M' *si segano sulla polare di* A *rispetto all'angolo* DBE. (V. R.)

(**) Gli A. delle soluzioni non sembra abbiano rimarcato che il problema dipende da una trasformazione piana doppia speciale per la quale la conica doppia e la conica limite degenerano in un medesimo cerchio infinitesimo: si trova allora subito geometricamente che il luogo si compone di due coniche aventi un fuoco comune in F', *le quali toccano in* F *la perpendicolare a* |F'F| *e si segano sulla direttrice dell'ellisse data relativa al fuoco* F. (V. R.)

quando l'area del triangolo tende comunque verso zero, l'A. dimostra i due teoremi seguenti: 1°. Se due triangoli sono equivalenti essi hanno la stessa somma degli angoli; 2° lo eccesso angolare di un triangolo (eccesso positivo nullo o negativo della somma dei suoi angoli sopra due retti) è proporzionale alla sua area). — *Moreau*, Frazioni decimali periodiche ottenute senza divisione. — *Barisien*, Sui triangoli che sono inscritti ecc. (continuaz.) — Bibliografia. — Risoluzione di quistioni proposte: 1109, 1182 (*Merlin*); 1218 (*Gérard*). — Quistioni d'esame 916-921. — Quistioni proposte 1246-1250. — Tavola delle materie.

El Progreso matematico, Revista de matematicas puras y aplicadas; Director *D. Z. G. De Galdeano*; Zaragoza.

T. I$_2$, 1899, fasc. 2° (giugno). — *J. Durán-Loriga*, Sui circoli notev. del triang. (Mem. presentata al congresso di Nantes dell'A. F. in continuazione alle " Notes de Géometrie „ Congr. di Saint-Etienne, 1897). — *J. Rius y Casas*, Relazione formale fra due oggetti, la loro sintesi e i tre oggetti reciproci. — *Z. G. de G.*, La Matematica e il suo insegnamento. — *De Galdeano*, La moderna organizzazione della matematica (estratto della 2ª conferenza tenuta dall'A. nell'università di Madrid). — Bibliografia. — Cronaca (programma di premi pel concorso del 1900 bandito dalla R. Acc. delle scienze di Madrid). — Quistioni risolute: 256 (*V. Retali*); 162 (*V. Retali*); 240$^{\text{bis}}$ (*D. Juan V. Alonso*); 231 (*B. Sollertinsky*); 176 (*D. Ricardo Caro*). — Quistioni proposte 257-269.

Fasc. 3° (luglio). — *G. Loria*, Un probl. di aritmetica che si presenta nello studio delle rodonee (la rodonea rappresentata dalla equazione $\rho = \mathrm{R} \operatorname{sen} \left(\frac{p}{q}\,\omega\right)$ è dell'ordine $p + q$ se p e q sono entrambi impari, e dell'ordine $2(p + q)$ se uno di questi due numeri è pari e l'altro dispari). — *D. J. Durán-Loriga*, Sopra i circoli notevoli del triangolo (continuaz). — *Z. G. De G.*, La Matematica e il suo insegnamento (continuaz.) — *De Galdeano*, La moderna organizzazione della matematica (seguito, v. Fasc. 2°). — Bibliografia. — Quistioni risolute: 113 (*Brocard*); 226 (*D. Alonso*). — Quistioni proposte: 270-274.

Fasc. 4° (agosto). — *A. Aubry*, Osservazioni sulla serie logaritmica. — *J. Durán-Loriga*, sopra i circoli notevoli del triangolo (continuaz.) — *De Galdeano*, La Moderna organizzazione della matematica (continuaz.) — Bibliografia — Quistioni risolute: 259 (*V. Retali*); 266 (*D. Luis de Alba*); 273 (*Lemoine*); 274 (*Lemoine*); 260 (*Rius y Casas* e *V. Retali*). — Quistioni proposte 275-279.

Fasc. 5° (settembre). — *A. Aubry*, Storia del problema delle tangenti. — *G. Pirondini*, Sulle linee cilindriche. — *D. E. Octavio de Toledo*, Teoria formale delle progressioni. — *De Galdeano*, La moderna organizzazione della matematica (cont. e fine della 2ª conferenza). — Quistioni risolute: 226 (*D. Alfonso*); 268 (*V. Retali*). — Quistioni proposte 280-285.

Fasc. 6° (ottobre). — *Gomes Teixeira (F)*, Sopra una curva notevole (area della curva detta, da Bellavitis, tetracuspide). — *Aubry*, Storia del problema delle tangenti (continuaz.) — *Pirondini*, Sulle linee cilindriche (cont. e fine). — *De Galdeano*, La moderna organizzazione della matematica (continuaz.) — Cronaca — Bibliografia. — Quistioni risolute: 275 (*Lemoine*); 268 (*Schiappa-Monteiro*). — Quistioni proposte 286-291.

Fasc. 7° Serie 2ª, Tomo II (gennaio 1900). — *G. Fontené*, Metrica aninvolutiva (riassunto della Mem. del A. Iperspazio, proprietà metriche d'una correlazione generale, 1892). — *Hatzidakis*, Osservazione sopra una formola del signor *Pirondini* (l'A osserva che la formola data dal signor Pirondini, nel 11 di settembre pag. 138, vale non solo per linee cilindriche ma anche per una linea tracciata sopra una sviluppabile qualunque, aggiungendo che tale formola è conseguenza immediata di formole da lui date nel T. CXXVIII, p. 923 dei C. R. de l'Ac. des Sc., 1899). — *G. Vivanti*, Osservazione sopra un determinante speciale (l'A. dim. che un certo determinante d'ordine $m + n$ è identicamente eguale a $(-1)^{n}(a_0x^{m} + \ldots. + a_m)^{n}$ e osserva che due casi particolari di tale determinante furono considerati per incidenza dal signor *Goursat* nelle *Leçons sur l'integration* etc. T. I, p. 25 e T. II, p. 299). — *R. Guimaraes*, Equazione del circolo di Joachimsthal. — *Aubry*, Sulla formola di Wallis (esposizione in stile moderno della dimostrazione del Wallis, la quale occupa oltre 40 pagine in folio). — *De Galdeano*, La matematica e il suo insegnamento (continuaz.) — *De Galdeano*, La moderna organizzazione ecc. (continuaz.) — Bibliografia. — Quistioni risolute: 39 (*Brocard*). — Quistioni proposte 292-301.

Fasc. 8° (febbraio). — *A. Aubry*, Studio elementare sulla teoria dei massimi e minimi. — *De Galdeano*, La matematica e il suo insegnamento (continuaz.) — *G. Pirondini*, sopra una formola relativa alle linee (l'A. in risposta all'osservazione del signor *Hatzidakis*, fa notare ch'egli aveva riconosciuta la validità della formola in quistione, per linee tracciate sopra una superficie sviluppabile qualunque, fino dal 1893; *Ann. di Mat.*, T. XXI). — *De Galdeano*, La moderna organizzazione ecc. (continua). — Bibliografia — Quistioni risolute: 39 (*Brocard*); 262 (*Rius y Casas* e *Retali*); 290 (*Hatzidakis*); 288 (*Lemoine*); 283 (*Fontené*); 265 (*Krahe*); 257 (*Krake*); 261 (*Droz-Farny* e *Retali*); Programma di premio pel concorso del 1901 bandito dalla R. Acc. della Sc. di Madrid. — Quistioni proposte 302-309.

V. R.

GIUSEPPE BERTRAND

il 3 aprile scorso dopo lunga e penosa malattia si è spento a Parigi, dove era nato l'11 marzo 1822. Universalmente noto per i trattati elementari che sono stati per molti anni adoperati come testi in quasi tutte le scuole francesi e italiane, egli ha occupato uno dei posti più importanti fra gli scienziati del suo paese e del mondo per le moltissime memorie di meccanica e geometria, e per molte opere importantissime. Fra queste sono da notarsi il *Trattato di calcolo differenziale e integrale* (del quale il terzo libro non fu pubblicato perchè il manoscritto andò perduto negli incendi della Comune), la *Meccanica analitica di Lagrange* con note e commenti importantissimi, le lezioni sul calcolo delle probabilità, sulla elettricità, sulla termodinamica tenute al Collegio di Francia. — Lascia inoltre importanti studi critici su Alembert, Lavoisier, Comte, Pascal.

Appena uscito dalla Scuola Politecnica, entrò nell'amministrazione delle Miniere, e successivamente fu nominato professore al Liceo S. Luigi, alla Scuola Politecnica, alla Scuola normale e infine al Collegio di Francia. — Nel 1856 succedè a Sturm nell'Accademia delle Scienze di Parigi, e nel 1874 ne divenne Segretario perpetuo. Infine nel 1884 entrava all'Accademia francese in sostituzione di Giambatista Dumas.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 10 Maggio 1900.